La propriété (T) pour les groupes polonais Roelcke précompacts

d'après I. Ibarlucía, s'appuyant sur des travaux de Ben Yaacov & Tsankov

I) Groupes polonais

Déf : Un groupe polonais est un gpe topo séparable et admet une distance compatible complète.

Un gpe lc est polonais ssi il est à base dénombrable d'ouverts.

Ex : ⤳ $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $Gl_n(\mathbb{R})$ sont polonais

⤳ tout espace de Banach séparable : $\ell^2(\mathbb{R})$, $L^1([0,1], \mathbb{R})$

⤳ $L^0([0,1], \mathbb{R}) := \{\text{applis boréliennes } [0,1] \to \mathbb{R}\}/\sim_\mu$

⤳ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un gpe polonais

⤳ groupes d'automorphismes de structures dénombrables :

- $\mathfrak{S}_\infty = \{\text{bijecto de } \mathbb{N}\}$ est un gpe polo pour la topo de la cv simple

  $\sigma_n \to \sigma$ si $\forall k \in \mathbb{N}$,

  $\sigma_n(k) = \sigma(k)$ pour n suff. grand

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ est polonais

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_\infty)$ est polonais

⤳ groupes d'isométries d'espace métriques cplets séparables (X, d)

(topo de la cv simple) $g_n \to g$ si $\forall x \in X$

$d(g_n(x), g(x)) \to 0$

⤳ gpes d'auto d'une structure métrique séparable :

un espace métrique complet (X, d) borné muni d'une famille $(f_i)_{i \in I}$

d'applis $f_i : X^{n_i} \to X$ unif continues

et de relation $(R_j)_{j \in J}$

$R_j : X^{m_j} \to [0, 1]$

son groupe d'auto est $\{g \in \mathrm{Iso}(X, d) : g \text{ commute aux fonct}^o \text{ et aux relations}\}$

Déf : $\mathrm{Aut}([0,1], \underset{\uparrow \text{Lebesgue}}{\lambda}) = \{T : \text{bijecto } [0,1] \to [0,1] \text{ bimesurables tq } T \text{ préserve la mesure} : \forall A \subseteq [0,1] \text{ borélien } \mu(A) = \mu(T(A))\}/\sim_\mu$

Structure métrique : $\mathrm{MAlg}([0,1], \lambda) : \{B \text{ boréliens}\}/\sim_\mu$

$A \sim_\mu B$ si $\mu(A \Delta B) = 0$

$d_\mu(A, B) = \mu(A \Delta B)$

les opérat° $\cup$, $\cap$, Δ passe au quotient, on a 2 elts privilégiés $\emptyset$ et $[0,1]$

⤳ $\left(\mathrm{MAlg}([0,1], \lambda), d_\mu, \underbrace{\underbrace{\emptyset, [0,1]}_{0}, \underbrace{\cap, \cup, \Delta}_{2}}_{\text{fct}^o}, \underbrace{\mu}_{\underbrace{1}_{\text{relat}^o}}\right)$

II) Roelcke-précompacité

Tout groupe topo G est muni de 4 str uniformes :

– str à gauche $\mathcal{L}$: étant donné U vois ouvert de 1, $g, h \in G$ sont U-proches si $g \in hU = \{hu : u \in U\}$

Tout gpe polonais admet une distance compatible invariante à gauche $d_{\mathcal{L}}$ qui induit cette str unif

– str à droite $\mathcal{R}$: ——— si $g \in Uh$

– str de Raikov $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$: ——— si $g \in Uh$ et $g \in hU$

– str de Roelcke $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$: ——— si $g \in UhU$

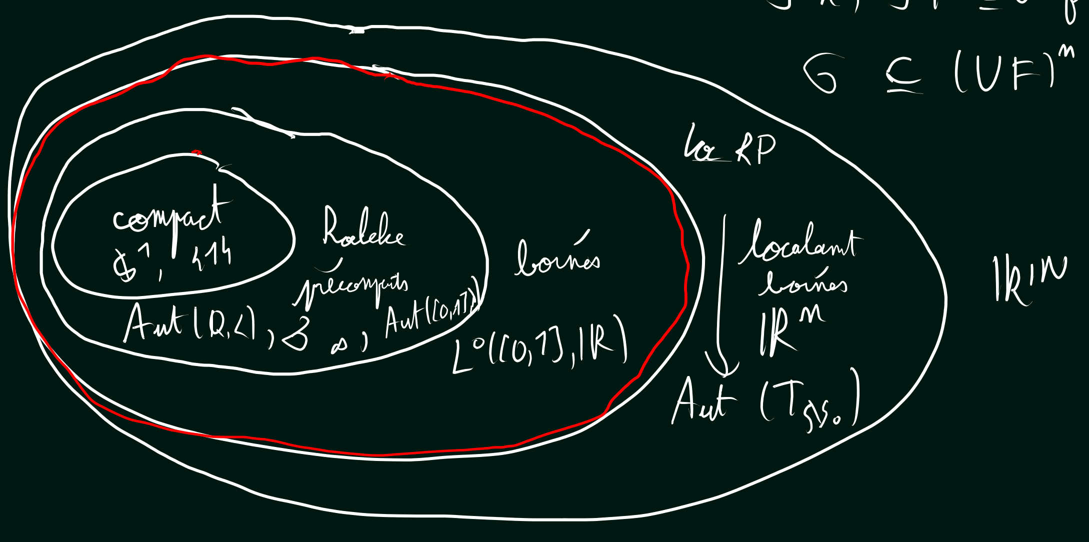
Faits :
- Polonais $\Rightarrow$ Raikov-complet
- G lc $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$-complet

Déf : G est Roelcke-précompact (RP) s'il est précompact pour la str unif de Roelcke : $\forall U$ vois de 1, $\exists F \subseteq G$ fini / $G = UFU$

Faits : Si G polonais est $\mathcal{L}$-complet alors G est RP ssi G est compact
en particulier si G est lc, G est RP ssi G est compact

Déf (Rosendal) : G est borné si $\forall G \curvearrowright (X,d)$ continue par isométries $\forall x \in X$, $G \cdot x$ est borné $[\exists M / \forall y,z \in G\cdot x \; d(y,z) \leq M]$

Th (Rosendal) G polonais est borné $\Leftrightarrow$ $\forall U$ voisinage de 1 $\exists n, \exists F \subseteq G$ fini / $G \subseteq (UF)^n$



Déf (Ben Yaacov–Tsankov) : Soit $G \curvearrowright (X,d)$ par isométries
$G \backslash\backslash X := \{\overline{G\cdot x} : x \in X\}$ est un espace métrique
$$d_G(\overline{G\cdot x}, \overline{G\cdot y}) := \inf_{g \in G} d(g\cdot x, y)$$
$G \curvearrowright (X,d)$ est approximativement cocompacte si $(G\backslash\backslash X, d_G)$ est précompact
approx oligomorphe si $\forall n$, $G \curvearrowright (X^n, d^n)$ est approx coc
$$d^n((x_i),(y_i)) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$$
$$g\cdot(x_i) = (g\cdot x_i)$$

$G \curvearrowright X$ discret, l'action est approx cocompacte ssi G a un nb fini d'orbites

$\mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \curvearrowright \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ est approx oligo

Thm (Ben Yaacov, Tsankov)
G polonais, s'équivalent :

(1) G est RP
(2) $\forall G \curvearrowright X, Y$ approx cocompacts, $G \curvearrowright X \times Y$ est approx coc
(3) Si $G \curvearrowright X$ est approx coc, elle est approx oligo
(4) G est isomorphe au groupe d'auto d'une str métrique sur laquelle il agit de manière approx oligo.

$\rightarrow$ Point clé : $G \backslash\backslash \widehat{G}_{\mathcal{L}} \times \widehat{G}_{\mathcal{L}} \cong$ complété de Roelcke de G.

III / Propriété (T)

Déf : Une rep orth $\pi : G \to \mathcal{G}(\mathcal{H})$ a un vecteur (Q, ε) invariant ($\varepsilon > 0$, $Q \subseteq G$)

si $\exists \xi \in \mathcal{H} \mid \|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\| \quad \forall g \in Q$

Une paire de Kazhdan pour G est un couple (Q, ε) tq tte rep orthogonale continue de G ayant un vecteur (Q, ε)-invariant a un vecteur non nul invariant.

Fait : $(G, \sqrt{2})$ est une paire de Kazhdan

Déf : G a (T) forte si il admet une paire de Kazhdan (Q, ε) avec Q finie

(T) ———— (Q, ε) avec Q compact

$\rightsquigarrow$ Tout groupe compact a (T).

Thm (3.9) (Ibarlucía) Tout groupe polonais RP a la propriété (T).

cas où $G = \mathrm{Aut}$(str dénb) : Evans–Tsankov

$L^0([0,1], \mathbb{S}^1)$ (Solecki)

Thm bis (0.1) : $\mathrm{Aut}([0,1], \lambda)$ a (T) forte.

On va prendre $X = \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \underset{\text{groupe libre à 2 gen}}{\mathbb{F}_2}}$ $\qquad \mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)^{\otimes \mathbb{N} \times \mathbb{F}_2}$

$\mathbb{F}_2 \curvearrowright (X, \mu)$ préserve la mesure :

$$(\gamma \cdot x)_{(g,n)} = x_{\gamma^{-1} g, n}$$

$\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$

soit T_1 et T_2 les 2 auto de $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ donnés par l'act° de a et de b resp.

Thm ter (3.10) : $(\{T_1, T_2\}, \sqrt{2 - \sqrt{3}})$ est une paire de Kazhdan pour $\mathrm{Aut}(X, \mu)$

$\Uparrow$ Thm de Kesten

Thm quater | Soit $\pi : \mathrm{Aut}(X, \mu) \to \mathcal{G}(\mathcal{H})$ continue sans vect invariants
Alors $\pi_{\restriction \mathbb{F}_2}$ est un multiple de sa rep régulière $(\ell^2(\mathbb{F}_2))$

Outil clé : **Thm** (Ryll-Nardzewski)
(Ben Yaacov – Tsankov
Ben Yaacov, Berenstein, Henson, Usvyatsov)

Si $G = \mathrm{Aut}(M)$ agit de manière approx oligo alors $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$ et $\widehat{G}_{\mathcal{L}} \times \widehat{G}_{\mathcal{L}}$ s'identifient à des ss ensembles définissables de $M^{\mathbb{N}}$.

"On peut faire de la théo des modèles sur $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$"

Ici : $\pi : \mathrm{Aut}(X, \mu) \to \mathcal{G}(\mathcal{H})$ sans vect invts

s'étend en $\pi : \mathrm{Aut}(X,\mu)_{\mathcal{L}} \longrightarrow$ Isométries $(\mathcal{H})$ (non néc surj)

$\mathrm{Aut}(X,\mu)_{\mathcal{L}} = \{$plongements $\mathrm{MAlg}(X,\mu) \to \mathrm{MAlg}(X,\mu)\}$

$X = \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{F}_2}$ $\qquad M = \mathrm{MAlg}(X, \mu)$

si $F \subseteq \mathbb{F}_2$ finie, $\quad f_F : \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{F}_2} \to \{0,1\}^{\mathbb{N} \times F}$ préserve la mesure

$\rightsquigarrow f_F^*(M) =: M_F$.

$\mathrm{Hom}(M, M_F)$ est non vide

$$\overline{\bigcup_{F \Subset \mathbb{F}_2} \mathrm{Hom}(M, M_F)} = \widehat{G}_{\mathcal{L}}$$

OPS π est cyclique : $\exists \xi \in \mathcal{H}$: $\overline{\mathrm{Vect}\, \pi(G)\xi} = \mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_F = \overline{\mathrm{Vect}(\pi(\mathrm{Hom}(M, M_F))\xi)}$$

$\boxed{\text{Prop}}$ (Ibarlucía) $\mathcal{H}_{F_1} \underset{\mathcal{H}_{F_1 \cap F_2}}{\perp} \mathcal{H}_{F_2}$, et de plus $\pi(\gamma)\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_{\gamma F}$ $\forall \gamma \in \mathbb{F}_2$

$\rightsquigarrow$ π contient un multiple de la régulière.

cas général $G = \mathrm{Aut}(M)$

$(\widehat{G}_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{L}})$

+ "distance aux orbites" (Melleray)