

STABILITÉ DES TROUS NOIRS DE SCHWARZSCHILD ET DE KERR

par Cécile Huneau

1. Introduction

L'espace-temps en relativité générale est décrit par une variété \mathcal{M} ⁽¹⁾, équipée d'une métrique lorentzienne g , c'est à dire une forme quadratique de signature $(-1, 1, 1, 1)$, qui sépare les vecteurs de l'espace tangent en

- vecteur de genre espace, avec $g(X, X) > 0$,
- vecteur de genre temps, avec $g(X, X) < 0$,
- vecteur isotrope, avec $g(X, X) = 0$.

La métrique g encode les phénomènes de gravitation : les corps en chute libre y suivent les géodésiques. Les équations de la relativité générale, formulées par Einstein en 1915 s'écrivent

$$(1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

Dans cette équation $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci de la métrique g , R est sa courbure scalaire, et $T_{\mu\nu}$ le tenseur d'énergie-impulsion, dont la forme dépend du modèle de matière étudié. L'équation (1) est covariante. Écrite dans un système de coordonnées, elle correspond à un système d'équations sur les coefficients de la métrique. Dans le vide, c'est à dire pour $T_{\mu\nu} = 0$, on obtient en prenant la trace de (1) que la courbure scalaire s'annule, et que donc les équations d'Einstein dans le vide peuvent s'écrire simplement

$$(2) \quad R_{\mu\nu} = 0.$$

En 1916, le physicien Schwarzschild a calculé la forme des solutions statiques et à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide, afin de décrire la gravitation créée par une étoile isolée. Ces solutions, paramétrées par m la masse de l'étoile, sont appelées solutions de Schwarzschild et s'écrivent dans les coordonnées (t, r, θ, ϕ) adaptées aux symétries de la solution

$$(3) \quad g_S = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2).$$

1. Dans ce texte, \mathcal{M} sera toujours de dimension 4.

La métrique g_S permet de décrire la gravitation à l'extérieur d'une étoile de rayon $r_{\text{étoile}} > 2m$, la métrique à l'intérieur de l'étoile devant elle satisfaire les équations d'Einstein avec champ de matière. Dans le cas où $m = 0$, la solution obtenue est la métrique de Minkowski.

C'est dans les années 1960 avec les travaux de Kruzkal et Szekeres, qu'il a été compris que la dégénérescence de la métrique en $r = 2m$ correspond à une singularité de coordonnées : la métrique peut être prolongée au delà et la région ainsi greffée est un trou noir, qui est une région de l'espace-temps où la gravitation est tellement forte que tous les corps, y compris les rayons lumineux, y sont piégés. Ce prolongement est détaillé dans la sous-section 1.1. La région $r > 2m$ correspond quant à elle à l'extérieur du trou noir.

La famille de solutions de Schwarzschild, indexée par le paramètre de masse m est la seule famille de solutions à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide : par le théorème de Birkhoff, une solution à symétrie sphérique est forcément statique. Elles ne sont en revanche pas les seules solutions statiques : une famille à deux paramètres de solutions a été calculée par Kerr en 1962. Ces solutions statiques et à symétrie axiale décrivent les trous noirs en rotation.

1.1. La métrique de Schwarzschild

Pour comprendre le trou noir de Schwarzschild, nous allons faire quelques changements de coordonnées à partir de la formule (3) qui décrit la métrique pour $(t, r, \sigma) \in \mathbb{R} \times (2m, +\infty) \times \mathbb{S}^2$. On introduit la coordonnée r^* telle que

$$r^* = r + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right),$$

ce qui implique

$$dr = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dr^*.$$

La région asymptotique $r \rightarrow 2m$ est alors envoyée sur $r^* \rightarrow -\infty$. La métrique de Schwarzschild dans ces nouvelles coordonnées s'écrit maintenant

$$g_S = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) (dt^2 - (dr^*)^2) + r^2 d\sigma^2,$$

où r est une fonction de r^* . Les coordonnées $u = t - r^*$ et $v = t + r^*$ sont des coordonnées isotropes pour la métrique :

$$(4) \quad g_S = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dudv + r^2 d\sigma^2.$$

Dans (4), r doit être vue comme une fonction de u et v . Quand r tend vers $2m$ à v fixé, u tend vers $+\infty$. Il faut donc encore faire un changement de coordonnées pour prolonger la métrique : on pose

$$U = -e^{-\frac{u}{4m}}, \quad V = e^{\frac{v}{4m}}.$$

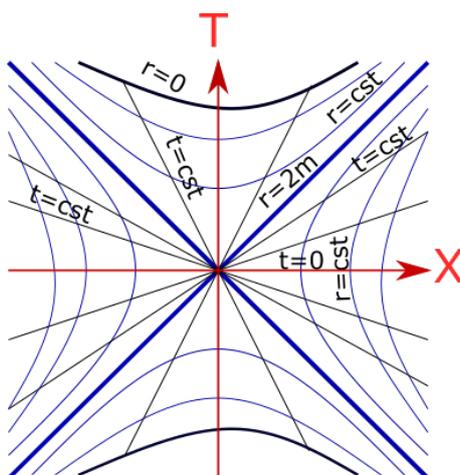


FIGURE 1. Extension de Kruzkal–Szekeres. Chaque point du dessin est une 2-sphère de rayon r dans l'espace-temps de Schwarzschild.

La région $(r, t) \in]2m, +\infty[\times \mathbb{R}$ est en bijection avec $(U, V) \in]-\infty, 0[\times]0, +\infty[$. La métrique de Schwarzschild s'écrit dans ces nouvelles coordonnées

$$(5) \quad g_S = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dUdV + r^2 d\sigma^2,$$

où r est une fonction de U et V définie en inversant l'expression

$$UV = - \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{\frac{r}{2m}}.$$

La métrique (5) est donc bien définie pour tous $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ tels que $r(U, V) > 0$. La région asymptotique $r \rightarrow 2m$ à V fixé correspond à $U \rightarrow 0$, et la métrique ne présente plus de singularité pour $r = 2m$. La formule (5) donne donc un prolongement de la métrique (3). La région $r = 0$ est par contre une vraie singularité, comme on peut le montrer avec l'explosion du scalaire de Kruzkal, qui est une contraction du tenseur de Riemann indépendante du choix de coordonnées

$$K = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48m^2}{r^6}.$$

Cette singularité est de genre espace et se trouve dans le futur de tout observateur entrant dans le trou noir, qui l'atteint en un temps propre fini. ⁽²⁾

Les coordonnées U et V étant des coordonnées isotropes, il est pratique pour représenter l'espace-temps de repasser dans des coordonnées de temps et d'espace en posant

$$T = \frac{U + V}{2}, \quad X = \frac{V - U}{2}.$$

Cela permet d'obtenir le diagramme de Kruzkal–Szekeres donné dans la figure (1). La région $r > 2m$ du départ est le quart droit du diagramme (ce qui correspond à la région 1 de la figure 2).

². Le temps propre est défini comme la longueur d'une courbe pour la métrique g_S .

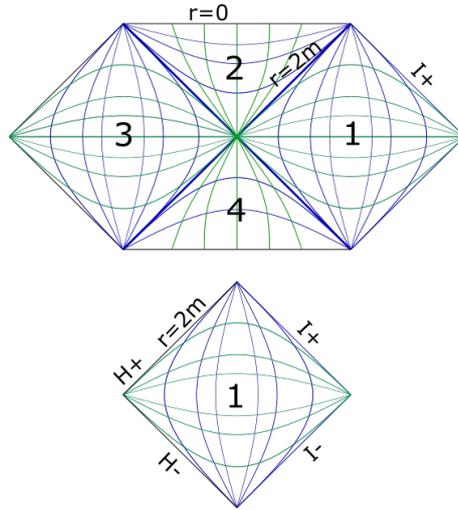


FIGURE 2. Diagramme de Penrose de l'espace-temps de Schwarzschild et domaine de communication extérieur. L'axe des ordonnées correspond à $T' = \frac{V'+U'}{2}$ et l'axe des abscisses à $X' = \frac{V'-U'}{2}$. Les traits verts correspondent aux courbes t constant, et les traits bleus aux courbes r constant.

La solution de Schwarzschild est souvent représentée par son diagramme de Penrose (voir Figure 2), qui est obtenu par une compactification de l'espace-temps préservant les directions isotropes :

$$U' = \arctan(U), \quad V' = \arctan(V).$$

La région $V' = \frac{\pi}{2}$ est appelée **infini isotrope**, et noté $\mathcal{I}+$ (physiquement, c'est le lieu des observateurs lointains). Le passé de $\mathcal{I}+$ est appelé **domaine de communication extérieur**, il correspond à la région 1 de la figure 2. La région $r = 2m$ est appelée **horizon des événements**, c'est la frontière du trou noir, celui-ci correspondant à la région 2 de la figure 2. La région 4 correspond à l'extension de la solution à travers $V = 0$, et la région 3 est une deuxième région asymptotique. Les régions 3 et 4 font partie du développement analytique de la solution de Schwarzschild, mais n'ont pas vraiment d'existence physique car elles ne sont plus présentes dès que l'on considère un trou noir qui se forme par effondrement gravitationnel, comme lorsqu'une étoile s'effondre sur elle-même.

1.2. La métrique de Kerr

La métrique de Kerr est une solution des équations d'Einstein, calculée par Kerr en 1962, pour laquelle ∂_t et ∂_ϕ sont des champs de Killing, c'est à dire les générateurs de symétries. La métrique de Kerr est caractérisée par deux paramètres : sa masse m et son moment angulaire a , avec $0 \leq |a| \leq m$. Elle s'écrit dans des coordonnées t, r, θ, ϕ adaptées aux symétries de la métrique

$$g_K = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{q^2} dt^2 - \frac{4amr}{q^2} \sin^2(\theta) dt d\phi + \frac{q^2}{\Delta} dr^2 + q^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2}{q^2} \sin^2(\theta) d\phi^2$$

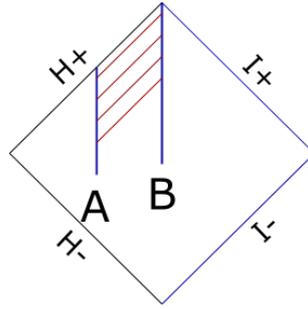


FIGURE 3. Phénomène de redshift, ou décalage vers le rouge : dans ce dessin, l’observateur A entre dans le trou noir avec un temps propre fini, alors que l’observateur B reste à l’extérieur du trou noir : il atteint le sommet du carré, appelé infini temporel, en un temps propre infini (il ne faut pas oublier que le dessin représente une compactification de l’espace-temps). Les signaux envoyés par A sont donc reçus par B à des intervalles de temps de plus en plus long, et B ne verra jamais A entrer dans le trou noir.

où

$$q^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2mr, \quad \Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2(\theta)\Delta.$$

La métrique de Schwarzschild correspond au cas particulier $a = 0$. Dans le cas sous-extrémal où $|a| < m$, deux singularités de coordonnées sont présentes $0 < r_- < r_+$. La région $r = r_+$ est l’horizon des événements, la frontière du trou noir. On peut déjà noter deux différences par rapport à la solution de Schwarzschild.

- À l’extérieur du trou noir, pour $r > r_+$, le vecteur ∂_t n’est pas de genre temps partout : il existe une région, appelée **ergorégion**, dans laquelle ∂_t devient de genre espace. Par le théorème de Noether, à la symétrie ∂_t est associée une quantité conservée. Celle-ci n’est plus définie positive, ce qui peut provoquer des phénomènes de création d’énergie locale : ce phénomène est appelé superradiance.
- À l’intérieur du trou noir ce trouve une autre singularité de coordonnée $r = r_-$. Elle correspond à l’horizon de Cauchy, qui est la frontière du *développement maximal globalement hyperbolique* donné par le Théorème 1.1. Au delà, la solution peut être prolongée de manière analytique, mais admet une infinité de prolongement C^∞ , et la théorie de la relativité générale perd donc sa prédictibilité. La singularité $r = 0$ ne fait pas partie du développement maximal globalement hyperbolique.

1.3. Le problème de stabilité

Pour qu’un objet soit observable dans l’univers, il a besoin d’une certaine forme de stabilité. Aussi, la question de la stabilité a été abordée d’un point de vue formel dans la littérature physique dès les années soixante. Ce n’est qu’à partir de 2015 que les trous noirs de Kerr ont été observés indirectement par la mesure des ondes gravitationnelles générées par la coalescence de deux trous noirs, ou à travers les images de l’Event Horizon Telescope.

Le cadre mathématique pour formuler la question de la stabilité est celui du problème de Cauchy, initié par Choquet-Bruhat (voir le théorème 1.1). Les données initiales pour les équations d'Einstein dans le vide sont un triplet (Σ, \bar{g}, K) , où

- Σ est une variété de dimension 3 (quand on s'intéresse aux équations d'Einstein en dimension $3 + 1$), qui est heuristiquement l'hypersurface $\{t = 0\}$,
- \bar{g} est une métrique riemannienne sur Σ ,
- K est un 2-tenseur symétrique sur Σ , qui sera la seconde forme fondamentale du plongement de Σ dans l'espace-temps solution.

Les données initiales ne peuvent pas être choisies arbitrairement, elles sont sujettes à des équations de continuité, aussi appelées équations de contraintes, qui correspondent à la trace des équations d'Einstein dans le vide sur l'hypersurface Σ et sont des équations elliptiques sous-déterminées (voir par exemple la revue de Carlotto, 2021). Le théorème suivant, dû à Choquet-Bruhat et Geroch (1969), donne le caractère bien posé de ce problème aux données initiales.

THÉORÈME 1.1. — *Étant donné un triplet (Σ, \bar{g}, K) de données initiales suffisamment régulières et solutions des équations de contraintes, il existe une unique solution maximale et globalement hyperbolique des équations d'Einstein.*

Dans la solution maximale (aussi appelée développement maximal) est telle que tout autre solution peut y être plongée isométriquement. Être globalement hyperbolique signifie que toute courbe inextensible de genre temps intersecte une et une seule fois l'hypersurface Σ .

Le théorème 1.1 doit être vu comme un résultat d'existence locale. Pour des données initiales quelconques, on ne s'attend pas à ce que le développement maximal globalement hyperbolique soit géodésiquement complet⁽³⁾ comme le montrent les exemples de Schwarzschild et de Kerr. On a par contre des résultats d'existence globale pour petites données initiales régulières : les travaux pionniers de Christodoulou et Klainerman (1993) montrent que la solution de Minkowski, $-dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ est stable. De nombreuses améliorations et simplifications de ce résultat ont suivi, comme par exemple la preuve en coordonnées d'onde de Lindblad et Rodnianski (2005), ou des résultats incluant des champs de matière, ou avec des hypothèses affaiblies sur les données initiales.

Le problème de stabilité non linéaire des trous noirs, quant à lui, se formule ainsi :

CONJECTURE 1.2. — *Pour des données initiales suffisamment proches de la solution de Kerr de paramètres a, m avec $|a| \leq m$, la solution maximale possède un infini isotrope complet, et un domaine de communication extérieur asymptotiquement proche de celui d'une solution de Kerr de paramètres a', m' proches de a, m .*

Cette conjecture a été prouvée dans les cas particuliers suivants :

3. Être géodésiquement complet veut dire que pour toute géodésique inextensible, le paramétrage géodésique est non borné.

- pour des perturbations axisymétriques de l’espace-temps de Schwarzschild par Klainerman et Szeftel (2020),
- pour des perturbations de codimension 3 de l’espace-temps de Schwarzschild par Dafermos, Holzegel, Rodnianski et Taylor (2021),
- pour $|a| \ll m$ dans une série de travaux par Klainerman et Szeftel (2023), Shen (2023), Giorgi, Klainerman et Szeftel (2022).

Remarque 1.3. — Notons aussi le résultat de stabilité non-linéaire de l’espace-temps de Schwarzschild de Sitter (avec une constante cosmologique négative) de Hintz et Vasy (2018) (voir aussi Fang, 2022)

Remarque 1.4. — Les résultats de stabilité de l’extérieur de Kerr permettent de connaître le comportement des solutions génériques le long de l’horizon des événements, et donc de considérer les solutions à l’intérieur du trou noir, afin notamment d’étudier la conjecture de censure cosmique forte, c’est à dire la persistance ou non d’un horizon de Cauchy, comme dans Luk et Oh (2017).

Le plan de ce texte est le suivant.

- La section 2 contient une revue rapide sur l’équation des ondes sur un trou noir, qui est une question préliminaire aux problèmes de stabilité, ainsi que quelques idées sur la méthode énergie-Morawetz, utilisée dans les résultats sur la stabilité non linéaire de Schwarzschild et de Kerr.
- La section 3 contient une revue des résultats de stabilité linéaire de Schwarzschild et de Kerr, ainsi que des idées sur la preuve de Dafermos, Holzegel et Rodnianski (2019).
- La section 3 décrit un peu plus en détail la stratégie de Klainerman et Szeftel (2020), et pointe les difficultés supplémentaires rencontrées dans la preuve de la stabilité non linéaire de Kerr pour $|a| \ll m$.

2. L’équation des ondes sur un trou noir

2.1. Revue des résultats

L’étude de l’équation des ondes sur un trou noir de Schwarzschild ou de Kerr a permis de développer les techniques utilisées ensuite dans les résultats de stabilité pour obtenir des estimations de décroissance. Deux équations de type onde apparaissent explicitement dans la linéarisation des équations d’Einstein autour de Schwarzschild ou Kerr : l’équation de Teukolsky, non lagrangienne, et l’équation de Regge–Wheeler, qui se ramène à une équation des ondes avec un potentiel. Les premières études sur ces équations concernent l’absence de mode exponentiellement croissant (voir par exemple Whiting, 1989).

Pour illustrer les phénomènes qui entrent en jeu, considérons l'équation $\square_{g_S}\phi = 0$, où g_S est la métrique de Schwarzschild. Par le théorème de Noether, au champ de Killing ∂_t , est associée une énergie conservée

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^2} \left((\partial_t \phi)^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 (\partial_r \phi)^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) |\nabla_\sigma \phi|^2 \right) r^2 d\sigma dr.$$

Cette énergie dégénère pour $r = 2m$, et sa conservation n'implique donc pas directement le caractère borné des solutions. Celui-ci a été montré pour la première fois par Kay et Wald (1987). Des estimations de décroissance plus précises, par des estimations de type Morawetz, ont ensuite été obtenues dans Blue et Soffer (2003), puis développées par Dafermos et Rodnianski (2013).

Dans l'espace-temps de Kerr, les premiers résultats de décroissance pour $|a| \ll m$ sont dus à Tataru et Tohaneanu (2011). Le cas $|a| < m$ a été traité dans Dafermos, Rodnianski et Shlapentokh-Rothman (2016). Une preuve utilisant seulement la méthode énergie-Morawetz, pour $|a| \ll m$, est donnée dans Andersson et Blue (2015).

Enfin, deux résultats récents de Millet (2023) et Shlapentokh-Rothman et Teixeira da Costa (2023) donnent des estimations de décroissance pour les solutions à l'équation de Teukolsky avec $|a| < m$, avec des méthodes microlocales ou de séparation de variables.

2.2. La méthode énergie-Morawetz

La méthode énergie-Morawetz, qui permet d'obtenir des estimations de décroissance robustes par rapport aux perturbations est basée sur les ingrédients suivants.

- Des estimations de flux, ou d'énergie intégrée, pour des choix de multiplicateur $X(\phi)$. Pour X un champ de vecteur, il s'agit alors de multiplier l'équation d'onde par $X(\phi)$ et d'intégrer sur un domaine, afin d'avoir un contrôle des termes de bord et/ou des termes intégrés sur tout le domaine. Si X est un champ de Killing, l'estimation ainsi obtenue est une loi de conservation, mais il peut suffire d'utiliser un champ correspondant seulement à une symétrie approchée, ou d'autres champs qui permettent d'obtenir des intégrales avec un signe sur l'espace-temps tout entier.
- Si Y est un champ de Killing pour une métrique g , il commute avec l'opérateur d'onde \square_g . Les estimations vérifiées par ϕ sont donc aussi vérifiées par $Y(\phi)$. Pour obtenir des estimations précises de décroissance, il faut souvent faire plusieurs choix de multiplicateurs et de commutateurs (sans se restreindre forcément aux champs de Killing).
- Un découpage de l'extérieur du trou noir en trois régions.

Dans la région **proche du trou noir**, $r \leq r_0$ pour un r_0 suffisamment proche de $2m$, l'énergie dégénère, mais cette dégénérescence est due à celle des coordonnées t et r . Dans les coordonnées U et V , introduites dans la Section 1.1, l'énergie sur des hypersurfaces asymptotiques à $V = cst$ au niveau du trou noir ne contient plus de termes qui dégénèrent. Au contraire, le voisinage du trou noir est une région favorable aux estimations de décroissance vu qu'une partie de l'énergie est absorbée par le trou

noir. Les estimations obtenues dans cette région sont appelées estimations de redshift, en référence au phénomène physique de décalage vers le rouge décrit dans la Figure 3.

Dans la région **proche de l’infini isotrope** $r \geq r_1$ avec r_1 suffisamment grand, la métrique est proche de la métrique de Minkowski, ce qui permet d’utiliser la méthode r^p de Dafermos et Rodnianski (2010) (voir aussi Moschidis (2016) pour une généralisation), qui consiste à obtenir des estimations d’énergie intégrée en choisissant $r^p \partial_v \phi$ comme multiplicateur. Dans la métrique de Minkowski, les estimations obtenues sont de la forme

$$(6) \quad \int_{C_{u_2}} r^p (\partial_v \phi)^2 + \int_{u^1}^{u^2} \int_{C_u} \left(p r^{p-1} (\partial_v \phi)^2 + (p-2) r^{p-3} |\nabla_\sigma \phi|^2 \right) \\ \lesssim \int_{C_{u_1}} r^p (\partial_v \phi)^2 + \int_{r=r_1} (\partial \phi)^2,$$

où les C_u sont des cônes isotropes qui relient la région $r = r_1$ à l’infini isotrope. Ces estimations, valables pour $p \in (0, 2)$, permettent d’obtenir de la décroissance sur ϕ avec un processus itératif : les estimations intégrées par rapport à u donnent de la décroissance en u sur l’intégrande $r^{p-1} (\partial_v \phi)$, puis cette décroissance en u se retrouve au membre de droite de (6) pour un paramètre $p' = p - 1$, donnant encore plus de décroissance sur la quantité intégrée $r^{p'-1} (\partial_v \phi)$.

La région intermédiaire $r_0 \leq r \leq r_1$ est le **voisinage du trapping**, et c’est finalement la plus délicate car c’est dans cette région qu’il existe des géodésiques isotropes piégées. Plus précisément, la sphère $r = 3m$ est appelée *sphère des photons* car des photons peuvent s’y retrouver en orbite. Par ailleurs, sans estimation de décroissance dans cette zone, les estimations proches du trou noir ou de l’infini nul ne sont plus vraies : pour contrôler le terme $\int_{r=r_1} (\partial \phi)^2$ dans (6), il faut avoir une estimation de décroissance de l’énergie locale, qui est obtenue en choisissant un multiplicateur $f(r) \partial_r$ bien adapté. L’estimation ainsi obtenue est de la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{r_0 \leq r \leq r_1} (\partial \phi)^2 \leq E(t_1),$$

où $E(t_1)$ est l’énergie au temps t_1 .

Remarque 2.1. — Dans Angelopoulos, Aretakis et Gajic (2018), cette méthode a été utilisée pour montrer la loi de Price, c’est à dire les estimations de décroissance optimales sur les solutions de l’équation des ondes sur un trou noir de Schwarzschild.

3. Stabilité linéaire de Schwarzschild

Pour étudier les équations d’Einstein, la première question que l’on peut se poser est de savoir quelles sont les équations à résoudre. En notant schématiquement Γ les

symboles de Christoffel et R les composantes du tenseur de Riemann, on a un système de la forme

$$(7) \quad \begin{aligned} \partial g &= \Gamma, \\ \partial \Gamma &= \Gamma^2 + R, \\ \partial R &= \Gamma R. \end{aligned}$$

Les équations sur Γ sont appelées **équations de structures**, et dérivent de la définition du tenseur de Riemann, et celles sur R dérivent des **identités de Bianchi**. Quand le tenseur de Ricci est nul, c'est à dire quand on résout les équations d'Einstein dans le vide, ce système couplé équations de structure et équations de Bianchi a une structure hyperbolique, comme le montrent les travaux de Christodoulou et Klainerman (1993) ou de Luk (2012).

La question naturelle suivante est d'étudier le système (7) linéarisé autour d'une solution particulière. Par exemple, quand on linéarise autour de la solution de Minkowski, qui est plate et dont les coefficients de Riemann sont zéro, on peut voir que les équations de Bianchi se découpent des autres équations. Ce n'est plus le cas quand on linéarise autour de la solution de Schwarzschild : en effet, celle-ci n'est pas plate et certains coefficients de courbure sont donc non nuls : il est alors obligatoire, même au niveau linéaire, de s'intéresser au système couplé.

L'étude des équations linéarisées rejoint l'approche menée dans la littérature physique à partir des années 1960 pour étudier la stabilité des trous noirs, à travers la question de la *stabilité modale*, c'est à dire l'existence ou non de modes exponentiellement croissants pour les équations linéarisées. Deux difficultés se présentent alors : il s'agit de

- trouver des quantités invariantes sous les difféomorphismes,
- trouver des équations qui se découpent des autres..

Dans le cas des perturbations de la métrique de Schwarzschild, Regge et Wheeler (1957) ont découvert un invariant scalaire au niveau de la métrique, solution d'une équation d'onde avec potentiel, l'équation de Regge–Wheeler

$$\square_{g_S} \phi = \frac{4}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \phi.$$

Dans le cas des perturbations de la métrique de Kerr, Bardeen et Press (2003) et Teukolsky (1973) ont trouvé des coefficients de courbure, invariants sous les difféomorphismes, satisfaisant l'équation de Teukolsky, qui est une équation des ondes tensorielle avec des termes d'ordre 1. Pour montrer la stabilité modale complète, il faut non seulement montrer l'absence de mode exponentiellement croissants pour l'équation de Teukolsky, mais aussi pour le système (7) complet. Ceci a été fait dans le cas $|a| < m$ par Andersson, Häfner et Whiting (2022).

L'absence de modes exponentiellement croissants ne donne pas a priori de décroissance des solutions⁽⁴⁾. L'obtention de telles estimations est l'objet de la stabilité linéaire.

4. Elle peut tout de fois être utilisée dans des problèmes non linéaires (voir stabilité de Kerr-de Sitter).

Dans cette direction, le premier résultat est Dafermos, Holzegel et Rodnianski (2019), qui concerne la stabilité linéaire de Schwarzschild. Celle-ci a aussi été montrée en coordonnées d'onde dans Johnson (2019). Pour la stabilité linéaire de Kerr avec petit moment angulaire, on peut mentionner Häfner, Hintz et Vasy (2021) et Andersson, Bäckdahl, Blue et Ma (2019).

Dans cette section, nous allons nous placer en double feuilletage isotrope, afin de présenter les travaux de Dafermos, Holzegel et Rodnianski (2019). Bien que n'étant pas exactement la jauge utilisée par Klainerman et Szeftel (2020), cela permet d'en comprendre les idées.

Étant données des coordonnées isotropes u et v , on suppose que la métrique s'écrit

$$(8) \quad g = -4\Omega^2 dudv + g_{CD}(d\theta^C - b^C dv)(d\theta^D - b^D dv).$$

Localement, il est toujours possible d'écrire une métrique Lorentzienne en double feuilletage isotrope. Comme pour les autres choix de coordonnées, le feuilletage choisi initialement peut ne pas rester globalement régulier. Une telle propriété vient a posteriori : si on est capable de montrer un résultat global dans des coordonnées données, alors ces coordonnées restent bien définies globalement et on n'a pas perdu de généralité en les choisissant.

THÉORÈME 3.1. — *Toute solution des équations d'Einstein dans le vide, en double feuilletage isotrope, linéarisées autour de la solution de Schwarzschild, et pour des données initiales suffisamment régulières*

- *reste bornée dans la région extérieure ;*
- *décroit de manière polynomiale vers une solution de Kerr linéarisée, après avoir ajouté une solution jauge pure (ou difféomorphisme linéarisé). De plus cette solution jauge pure peut être estimée en fonction de la taille des données initiales.*

Pour comprendre le deuxième point du théorème, il faut penser au fait que la métrique de Kerr étant aussi solution des équations d'Einstein, la métrique de Kerr avec petit moment angulaire εa linéarisée (c'est à dire en enlevant tous les termes $O(\varepsilon^2)$) :

$$g_K = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 - \frac{4m\varepsilon a}{r} \sin^2(\theta) d\phi dt,$$

est une solution particulière, non décroissante, des équations d'Einstein linéarisées. Une autre obstruction à la décroissance des solutions du problème linéarisé est la famille de solutions particulières obtenues à partir de la solution de Schwarzschild en appliquant des difféomorphismes infinitésimaux.

Éléments de preuve. — Au double feuilletage isotrope peut être associé le repère isotrope

$$e_3 = \Omega^{-1} \partial_u, \quad e_4 = \Omega^{-1} (\partial_v + b^A \partial_{\theta_A}).$$

Les symboles de Christoffel Γ (aussi appelés coefficients de Ricci dans la littérature) sont définis dans ce repère isotrope, par exemple

$$\chi_{AB} = g(\nabla_A e_4, e_B), \quad \underline{\chi}_{AB} = g(\nabla_A e_3, e_B),$$

ainsi que les coefficients de courbure comme par exemple

$$\alpha_{AB} = R(e_1, e_4, e_B, e_4), \quad \underline{\alpha}_{AB} = R(e_1, e_3, e_B, e_3), \quad \rho = \frac{1}{4}R(e_4, e_3, e_4, e_3).$$

Le coefficient ρ est le seul qui ne s'annule pas pour la métrique de Schwarzschild : en effet,

$$\rho_S = -\frac{2m}{r^3}.$$

Le choix d'un feuilletage isotrope donnant lieu à l'écriture de la métrique sous la forme (8) n'est pas unique. En effet il est possible d'appliquer les transformations suivantes

$$(9) \quad \begin{aligned} \tilde{u} &= u + \varepsilon f_1(u, \theta, \phi), \\ \tilde{v} &= v + \varepsilon f_2(v, \theta, \phi), \\ \tilde{\theta} &= \theta + \varepsilon \frac{2}{r} \partial_\theta f_2(v, \theta, \phi) + \varepsilon j_3(v, \theta, \phi), \\ \tilde{\phi} &= \phi + \varepsilon \frac{2}{r \sin^2(\theta)} \partial_\phi f_2(v, \theta, \phi) + \varepsilon j_4(v, \theta, \phi). \end{aligned}$$

La preuve du théorème 3.1 se fait en trois étapes.

Décroissance pour les quantités invariantes de jauge

La stabilité modale repose sur le fait que les objets α et $\underline{\alpha}$, qui sont des 2-tenseurs sur \mathbb{S}^2 invariants par les transformations ci-dessous, vérifient l'équation de Teukosky. Cette équation, qui ne dérive pas d'un lagrangien, n'est pas adaptée à l'étude de la décroissance par les méthodes énergie-Morawetz décrites dans la Section 2. À la place, Dafermos, Holzegel et Rodnianski (2019) ont adapté un argument de Chandrasekhar (1975), en introduisant des quantités P et \underline{P} , au niveau de deux dérivées de α et $\underline{\alpha}$ satisfaisant une équation de type Regge–Wheeler, à qui cette fois-ci les méthodes d'énergie peuvent s'appliquer. Ces méthodes permettent d'obtenir des estimations de décroissance sur P et \underline{P} qui donnent à leur tour des estimations de décroissance sur α et $\underline{\alpha}$.

Caractère borné des autres quantités géométriques, pour des données initiales normalisées

Les équations satisfaites par les coefficients de courbure restant et les symboles de Christoffel sont des équations de transports dans les directions e_3 et e_4 , ainsi que des équations elliptiques sur les sphères \mathbb{S}^2 . À titre d'exemple, les parties sans traces de χ et $\underline{\chi}$, notées $\hat{\chi}$ et $\hat{\underline{\chi}}$ satisfont les équations

$$\begin{aligned} \nabla_3(\Omega_S^{-1} \hat{\chi}') + \Omega_S^{-1} \text{tr} \underline{\chi}_S \hat{\chi}' &= -\Omega_S^{-1} \underline{\alpha}, \\ \nabla_4(\Omega_S^{-1} \hat{\underline{\chi}}') + \Omega_S^{-1} \text{tr} \chi_S \hat{\underline{\chi}}' &= -\Omega_S^{-1} \alpha, \end{aligned}$$

où on a noté avec un S les quantités géométriques de la métrique de Schwarzschild, et avec un $'$ la perturbation. Le caractère borné des solutions peut être obtenu en intégrant ces équations à partir de données initiales *caractéristiques* données sur l'union d'un cône $\underline{C}_0 = \{v = v_0\}$ et d'un cône $C_0 = \{u = u_0\}$. Les données initiales caractéristiques pour les diverses quantités géométriques peuvent être séparées en données libres et données obtenues en résolvant les équations de contraintes caractéristiques, qui sont des équations

de transport. Parmi les données libres, certaines correspondent à des libertés de jauge, et peuvent donc être *normalisées* par une application des difféomorphismes (9). À cette étape-là, il est possible de lire sur la sphère S_{∞, v_0} , située à l'intersection du cône de donnée initiale \underline{C}_0 et de l'horizon des événements, la valeur des paramètres de masse et de moment angulaire de la solution de Kerr linéarisée finale.

Décroissance de toutes les quantités géométriques après changement de jauge le long de l'horizon

À cause du faible taux de décroissance de $\underline{\alpha}$, l'estimation obtenue sur $\hat{\chi}'$ en intégrant depuis le cône initial est trop faible. Une normalisation le long de l'horizon, plus précisément un choix de f_2 dans (9), solution d'une équation de transport le long de l'horizon, permet d'avoir une bonne estimation sur $\hat{\chi}'$ sur l'horizon, puis d'intégrer l'équation en ∇_3 depuis l'horizon. Contrairement au choix de jauge précédent, qui se choisissait directement en fonction des données initiales, la normalisation sur l'horizon dépend de l'évolution toute entière du problème linéaire. \square

4. Stabilité non linéaire de Schwarzschild

Dans cette section nous détaillons le résultat de stabilité non linéaire de Klainerman et Szeftel (2020).

THÉORÈME 4.1. — *Pour des données initiales axisymétriques polarisées régulières, asymptotiquement plates et suffisamment proches des données initiales pour la solution de Schwarzschild de masse m_0 , la solution maximale globalement hyperbolique possède un infini isotrope complet, et converge vers une solution de Schwarzschild de masse m proche de m_0 .*

L'hypothèse d'axisymétrie polarisée permet deux simplifications : elle exclut la possibilité de converger vers une solution de Kerr (de moment angulaire non nul), et elle transforme les équations qui portaient sur des 2 tenseurs sur \mathbb{S}^2 en équation scalaire. Cette hypothèse a été retirée dans Dafermos, Holzegel, Rodnianski et Taylor (2021) et dans les résultats de stabilité de Kerr pour petit moment angulaire énoncés dans la sous-section 4.3.

4.1. Sphères GCM

Les variétés construites pour prouver le théorème 4.1 sont feuilletées par des 2-sphères $S(u, s)$. À ce feuilletage peut être associé un repère isotrope $e_3, e_4, e_\theta, e_\phi$, où les vecteurs e_3 et e_4 vérifient

$$g(e_3, e_3) = g(e_4, e_4) = 0, \quad g(e_3, e_4) = -2$$

et les vecteurs e_θ, e_ϕ forment une base orthogonale de l'espace tangent à $S(u, s)$ et sont orthogonaux à e_3 et e_4 .

La donnée d'un repère isotrope permet de définir les quantités géométriques, coefficients de Ricci et coefficients de courbure, de la même manière que dans le double feuilletage isotrope.

DÉFINITION 4.2. — *Étant donnée une sphère $S(u, s)$ on peut définir*

- *son rayon d'aire r tel que $\text{Aire}(S) = 4\pi r^2$,*
- *sa masse de Hawking m telle que*

$$\frac{2m}{r} = 1 + \frac{1}{16\pi} \int_S \text{tr}\chi \text{tr}\underline{\chi}.$$

Par exemple, les sphères $S(u, v)$ de l'espace-temps de Schwarzschild ont un rayon d'aire $r(u, v)$ et une masse de Hawking $m(u, v)$ qui sont les quantités apparaissant dans la formule (4).

Les transformation suivantes permettent de passer d'un repère isotrope à un autre

$$(10) \quad \begin{aligned} e'_4 &= \lambda \left(e_4 + f^B e_B + \frac{1}{4} |f|^2 e_3 \right), \\ e'_3 &= \lambda^{-1} \left(\left(1 + \frac{1}{2} f + \underline{f} + \frac{1}{16} |f|^2 |\underline{f}|^2 \right) e_3 + \left(\underline{f}^B + \frac{1}{4} |\underline{f}|^2 f^B \right) e_B + \frac{1}{4} |\underline{f}|^2 e_4 \right), \\ e'_A &= \left(\delta_{AB} + \frac{1}{2} \underline{f}_A f_B \right) e_B + \frac{1}{2} \underline{f}_A e_4 + \left(\frac{1}{2} f_A + \frac{1}{8} |f|^2 \underline{f}_A \right) e_3. \end{aligned}$$

Le résultat de stabilité est basé sur la propriété, valable dans des perturbations de Schwarzschild ou de Kerr, qui dit que les sphères $S(u, s)$ peuvent être déformées en des sphères les plus proches possibles des sphères rondes de l'espace-temps de Schwarzschild. Ces nouvelles sphères sont appelées GCM, pour *generally covariant modulated*. Le théorème suivant est le résultat principal de Klainerman et Szeftel (2022a).

THÉORÈME 4.3. — *Soit \mathcal{R} une région de l'espace-temps, feuilletée par des sphères $S(u, s)$, vérifiant certaines conditions asymptotiques, et en particulier, que les quantités GCM*

$$\text{tr}\chi - \frac{2}{r}, \quad \left(\text{tr}\underline{\chi} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \right)_{l \geq 2}, \quad \left(\mu - \frac{2M}{r^3} \right)_{l \geq 2},$$

sont suffisamment petites (μ est une autre quantité géométrique, la fonction d'aspect de masse). Soit $S' = S(u', s')$, de rayon d'aire r' assez grand. Alors, étant données deux fonctions scalaires Λ et $\underline{\Lambda}$ assez petites, il existe une unique sphère GCM \mathbf{S} , qui est une déformation de S' définie par $u = u' + \mathcal{U}(\theta, \phi)$, $s = s' + \mathcal{S}(\theta, \phi)$, ainsi qu'une transformation de repère, définie par $(f, \underline{f}, \lambda)$, tel que le nouveau repère est adapté à \mathbf{S} et que

$$(11) \quad \text{tr}\chi = \frac{2}{r}, \quad \left(\text{tr}\underline{\chi} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \right)_{l \geq 2} = 0, \quad \left(\mu - \frac{2M}{r^3} \right)_{l \geq 2} = 0,$$

et

$$(12) \quad (\text{div}f)_{l=1} = \Lambda, \quad (\text{div}\underline{f})_{l=1} = \underline{\Lambda}.$$

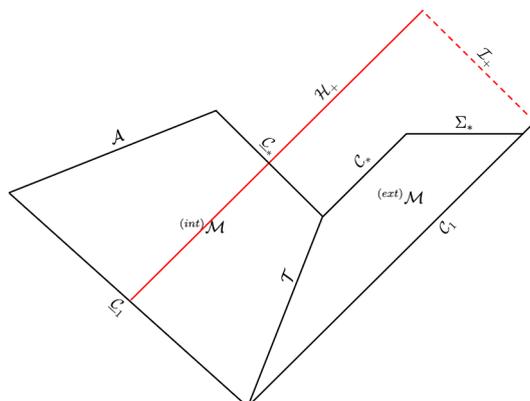


FIGURE 4. Espace-temps GCM (image tirée de Klainerman et Szeftel, 2020). La variété est constituée d’une région $^{(ext)}\mathcal{M}$ et d’une région $^{(int)}\mathcal{M}$, séparée par une hypersurface de genre temps \mathcal{T} . La région $^{(int)}\mathcal{M}$ déborde sur l’intérieur du trou noir car il est seulement possible de connaître la position de l’horizon des événements a posteriori. La région $^{(ext)}\mathcal{M}$ est bornée dans le futur par une hypersurface Σ_* , de genre espace, qui est construite de manière à satisfaire les conditions GCM, et à partir de laquelle les équations de transport sont intégrées.

Une idée de la preuve. — Les conditions qui garantissent que le nouveau repère, donné par la transformation $(f, \underline{f}, \lambda)$ est *adapté* à la nouvelle sphère \mathbf{S} , ainsi que les équations (11) et (12) donnent un système d’équations elliptiques nonlinéaires sur \mathcal{U}, \mathcal{S} et $f, \underline{f}, \lambda$. \square

Remarque 4.4. — La liberté sur Λ et $\underline{\Lambda}$ permet ensuite de construire des hypersurfaces GCM, feuilletées par des sphères GCM, vérifiant des conditions supplémentaires, appelées *condition de transversalité*.

4.2. Éléments de preuve du théorème 4.1

Les solutions du théorème 4.1 sont obtenues comme limite d’espace-temps GCM admissible. La définition, qui se trouve dans Klainerman et Szeftel (2020) est assez longue et nous ne donnerons ici que quelques unes des conditions.

DÉFINITION 4.5. — *Un espace-temps (\mathcal{M}, g) est GCM admissible si*

- *La métrique g est proche de g_S .*
- *\mathcal{M} peut être séparé en $^{(ext)}\mathcal{M}$ et $^{(int)}\mathcal{M}$ comme sur la Figure 4.*
- *$^{(ext)}\mathcal{M}$ est feuilleté par les surfaces de niveaux de u et s , où u est une solution de l’équation eikonale $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\partial_\beta u$, initialisée de manière ad hoc sur Σ_* , et s le paramètre géodésique tel que $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\partial_\beta s = 1$.*

- $(int)\mathcal{M}$ est feuilleté par les surfaces de niveaux de \underline{u} et s , où \underline{u} est une solution de l'équation eikonale $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\underline{u}\partial_\beta\underline{u}$ et s le paramètre géodésique tel que $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\underline{u}\partial_\beta s = 1$, avec s et \underline{u} initialisés de manière ad hoc sur \mathcal{T} .
- L'hypersurface Σ_* est une hypersurface GCM, ce qui veut dire qu'elle est feuilletée par des sphères GCM. Par ailleurs sur Σ_* , la condition $r \gg u$ est vérifiée

La preuve fonctionne par un argument de continuité (ou bootstrap). On suppose l'existence d'un espace-temps solution

- GCM admissible
- et tel que des estimations d'énergie à poids et de décroissance ponctuelle sont vérifiées par les coefficients de Ricci et de courbure.

On procède ensuite selon les étapes suivantes.

Amélioration des estimations sur les quantités presque invariantes

Les quantités α et $\underline{\alpha}$, presque invariantes sous les changements de repère, sont solution de l'équation de Teukolsky. Cette équation n'est pas découplée du reste comme dans le cas linéaire, mais les termes additionnels non linéaires possèdent une structure nulle. Comme dans le cas linéaire, il est possible d'introduire des quantités P et \underline{P} , au niveau de deux dérivées de α et $\underline{\alpha}$ qui satisfont des équations de Regge–Wheeler et à qui il est possible d'appliquer la méthode d'énergie Morawetz, avec des difficultés supplémentaires :

- des termes de commutateur entre les champs utilisés et la métrique, qu'il faut contrôler de manière précise, notamment dans la région du trapping,
- des termes semi-linéaires, à contrôler en utilisant leur structure nulle.

Amélioration des estimations sur les autres quantités géométriques

Les coefficients de Ricci et les autres coefficients de courbure sont solution d'équations de transport ou elliptiques sur les 2-sphères. Les estimations peuvent être améliorées :

- d'abord sur Σ_* : grâce aux conditions GCM, il est possible de se ramener à des équations elliptiques. Les quantités P , \underline{P} , α et $\underline{\alpha}$, qui satisfont maintenant des estimées améliorées, peuvent apparaître comme terme source dans ces équations.
- puis dans la région $(ext)\mathcal{M}$ en intégrant les équations de transport en ∇_4 depuis Σ_* ,
- et enfin dans $(int)\mathcal{M}$ en intégrant les équations de transport en ∇_3 depuis \mathcal{T} .

Extension de la solution

Une fois les estimations améliorées, l'espace-temps peut être prolongé par existence locale. Il faut ensuite construire une nouvelle hypersurface GCM finale : ceci peut être fait grâce au théorème 4.3.

Compatibilité avec les données initiales

Pour initialiser l'argument de continuité, il faut être capable de construire un espace-temps GCM qui induit les données initiales *caractéristiques* données. La procédure repose sur un résultat d'existence semi-globale pour le problème de Cauchy caractéristique, c'est à dire l'existence d'une solution dans une bande d'espace-temps \mathcal{L}_0 allant jusqu'à l'infini isotrope, comprise entre deux hypersurfaces $u_{\mathcal{L}_0}$ constant, où $(u_{\mathcal{L}_0}, s_{\mathcal{L}_0})$ sont des

coordonnées construites avec le résultat semi-global, mais qui ne sont pas forcément GCM. La construction d'un espace-temps GCM admissible correspond à effectuer un changement de coordonnées $u_{\mathcal{L}_0}, s_{\mathcal{L}_0} \rightarrow u, s$ qui vérifient

$$|u - u_{\mathcal{L}_0}| \lesssim \varepsilon, \quad |s - s_{\mathcal{L}_0}| \lesssim r\varepsilon.$$

La première condition permet d'avoir $C_1 = \{u = 1\}$ inclus dans la bande \mathcal{L}_0 . La deuxième condition vient de l'évolution du moment linéaire. Pour comparer le trou noir de Schwarzschild que l'on perturbe et celui vers lequel on converge, il faut appliquer une symétrie de Lorentz, qui est une symétrie dans l'espace-temps de Minkowski mais pas dans l'espace-temps de Schwarzschild.

Remarque 4.6. — Le résultat de stabilité non-linéaire de Schwarzschild pour des perturbations de codimension 3 par Dafermos, Holzegel, Rodnianski et Taylor (2021) se place en double feuilletage-nul. La région extérieure doit aussi se séparer en deux régions, une approchant l'horizon, dans laquelle est choisi un double feuilletage nul, normalisé le long de l'horizon, comme dans la stabilité linéaire et une deuxième région, approchant l'infini isotrope, dans laquelle le feuilletage est normalisé sur le cône final, comme dans Klainerman et Szeftel (2020).

Remarque 4.7. — Dans Graf (2021), une construction similaire à la procédure GCM est faite pour prouver la stabilité de l'espace-temps de Minkowski avec des données initiales caractéristiques, afin d'avoir un bon feuilletage autour de $r = 0$.

4.3. Stabilité non-linéaire de Kerr

THÉORÈME 4.8. — *La conjecture 1.2 est vraie pour $|a| \ll m$.*

La preuve de ce théorème se découpe en plusieurs articles :

- Klainerman et Szeftel (2022a) et Klainerman et Szeftel (2022b) donnent la construction des sphères GCM dans des perturbations de Kerr ;
- Shen (2023) construit les hypersurfaces GCM finales ;
- Giorgi, Klainerman et Szeftel (2022) adapte la méthode énergie-Morawetz aux perturbations de Kerr ;
- Klainerman et Szeftel (2023) conclue la preuve de la stabilité de Kerr.

Comme le théorème 4.1, la preuve du théorème 4.8 repose sur la construction d'espace-temps GCM admissibles. On peut pointer au moins deux difficultés notables par rapport à la stabilité de Schwarzschild.

- La solution de Kerr admet une paire canonique de vecteurs nuls e_3, e_4 , accompagnée d'une structure horizontale \mathcal{H} , perpendiculaire à e_3 et e_4 , tels que les coefficients du tenseur de Riemann calculés dans (e_3, e_4, \mathcal{H}) sont tous nuls, à l'exception de $R(e_a, e_3, e_b, e_4)$. Cette structure canonique n'est par contre pas intégrable : \mathcal{H} n'est pas le plan tangent à des 2-sphères. Cela n'empêche pas d'introduire des quantités géométriques comme

$$\chi_{AB} = g(\nabla_A e_4, e_B), \dots$$

mais ces quantités ne sont plus des tenseurs sur les 2-sphères. En particulier, ces quantités ne sont plus symétriques, ce qui conduit à introduire la notation complexe

$$X = \chi + i^* \chi.$$

Par ailleurs la non-intégrabilité est problématique pour estimer les termes qui étaient donnés par des équations elliptiques sur les 2-sphères : pour cela, il faut introduire un repère auxiliaire intégrable bien choisi.

- Les estimations énergie-Morawetz s’inspirent de Andersson et Blue (2015) et sont extrêmement techniques. C’est dans cette étape que l’hypothèse $|a| \ll m$ est cruciale.

Références

- Lars Andersson, Thomas Bäckdahl, Pieter Blue et Siyuan Ma (2019). *Stability for linearized gravity on the Kerr spacetime*. arXiv : [1903.03859 \[math.AP\]](#).
- Lars Andersson et Pieter Blue (2015). « Hidden symmetries and decay for the wave equation on the Kerr spacetime », *Ann. Math. (2)* **182** (3), p. 787-853.
- Lars Andersson, Dietrich Häfner et Bernard F. Whiting (2022). *Mode analysis for the linearized Einstein equations on the Kerr metric : the large a case*. arXiv : [2207.12952 \[math.AP\]](#).
- Yoannis Angelopoulos, Stefanos Aretakis et Dejan Gajic (2018). « A vector field approach to almost-sharp decay for the wave equation on spherically symmetric, stationary spacetimes », *Ann. PDE* **4** (2). Id/No 15.
- James M. Bardeen et William H. Press (nov. 2003). « Radiation fields in the Schwarzschild background », *Journal of Mathematical Physics* **14** (1), p. 7-19.
- Pieter Blue et Avy Soffer (2003). « Semilinear wave equations on the Schwarzschild manifold. I : Local decay estimates. » *Adv. Differ. Equ.* **8** (5), p. 595-614.
- Alessandro Carlotto (2021). « The general relativistic constraint equations », *Living Rev. Relativ.* **24**. Id/No 2.
- Subrahmanyan Chandrasekhar (1975). « On the equations governing the perturbations of the Schwarzschild black hole », *Proc. R. Soc. Lond.* **343** (1634).
- Yvonne Choquet-Bruhat et Robert Geroch (1969). « Global aspects of the Cauchy problem in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **14**, p. 329-335.
- Demetrios Christodoulou et Sergiu Klainerman (1993). *The global nonlinear stability of the Minkowski space*. T. 41. Princeton Math. Ser. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Mihalis Dafermos, Gustav Holzegel et Igor Rodnianski (2019). « The linear stability of the Schwarzschild solution to gravitational perturbations », *Acta Math.* **222** (1), p. 1-214.

- Mihalis Dafermos, Gustav Holzegel, Igor Rodnianski et Martin Taylor (2021). *The non-linear stability of the Schwarzschild family of black holes*. arXiv : [2104.08222 \[gr-qc\]](#).
- Mihalis Dafermos et Igor Rodnianski (2010). « A new physical-space approach to decay for the wave equation with applications to black hole spacetimes », in : *XVIIth international congress on mathematical physics, Prague, Czech Republic, August 3–8, 2009. With DVD*. Hackensack, NJ : World Scientific, p. 421-432.
- (2013). « Lectures on black holes and linear waves », in : *Evolution equations. Proceedings of the Clay Mathematics Institute summer school, ETH, Zürich, Switzerland, June 23–July 18, 2008*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS); Cambridge, MA : Clay Mathematics Institute, p. 97-205.
- Mihalis Dafermos, Igor Rodnianski et Yakov Shlapentokh-Rothman (2016). « Decay for solutions of the wave equation on Kerr exterior spacetimes. III : The full subextremal case $|a| < M$. » *Ann. Math. (2)* **183** (3), p. 787-913.
- Allen Juntao Fang (2022). *Nonlinear stability of the slowly-rotating Kerr-de Sitter family*. arXiv : [2112.07183 \[math.AP\]](#).
- Elena Giorgi, Sergiu Klainerman et Jérémie Szeftel (2022). *Wave equations estimates and the nonlinear stability of slowly rotating Kerr black holes*. arXiv : [2205.14808 \[math.AP\]](#).
- Olivier Graf (2021). *Global nonlinear stability of Minkowski space for spacelike-characteristic initial data*. arXiv : [2010.12434 \[math.AP\]](#).
- Dietrich Häfner, Peter Hintz et András Vasy (2021). « Linear stability of slowly rotating Kerr black holes », *Invent. Math.* **223** (3), p. 1227-1406.
- Peter Hintz et András Vasy (2018). « The global non-linear stability of the Kerr-de Sitter family of black holes », *Acta Math.* **220** (1), p. 1-206.
- Thomas William Johnson (2019). « The linear stability of the Schwarzschild solution to gravitational perturbations in the generalised wave gauge », *Ann. PDE* **5** (2). Id/No 13.
- Bernard S. Kay et Robert M. Wald (1987). « Linear stability of Schwarzschild under perturbations which are non- vanishing on the bifurcation 2-sphere », *Classical Quantum Gravity* **4**, p. 893-898.
- Sergiu Klainerman et Jérémie Szeftel (2020). *Global nonlinear stability of Schwarzschild spacetime under polarized perturbations*. T. 210. Ann. Math. Stud. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- (2022a). « Construction of GCM spheres in perturbations of Kerr », *Ann. PDE* **8** (2). Id/No 17.
- (2022b). « Effective results on uniformization and intrinsic GCM spheres in perturbations of Kerr », *Ann. PDE* **8** (2). Id/No 18.
- (2023). « Kerr stability for small angular momentum », *Pure Appl. Math. Q.* **19** (3), p. 791-1678.

- Hans Lindblad et Igor Rodnianski (2005). « Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates », *Commun. Math. Phys.* **256** (1), p. 43-110.
- Jonathan Luk (2012). « On the local existence for the characteristic initial value problem in general relativity », *Int. Math. Res. Not.* **2012** (20), p. 4625-4678.
- Jonathan Luk et Sung-Jin Oh (2017). « Proof of linear instability of the Reissner-Nordström Cauchy horizon under scalar perturbations », *Duke Math. J.* **166** (3), p. 437-493.
- Pascal Millet (2023). *Optimal decay for solutions of the Teukolsky equation on the Kerr metric for the full subextremal range $|a| < M$* . arXiv : [2302.06946](https://arxiv.org/abs/2302.06946) [math.AP].
- Georgios Moschidis (2016). « The r^p -weighted energy method of Dafermos and Rodnianski in general asymptotically flat spacetimes and applications », *Ann. PDE* **2** (1). Id/No 6.
- Tullio Regge et John A. Wheeler (nov. 1957). « Stability of a Schwarzschild Singularity », *Phys. Rev.* **108** (4), p. 1063-1069.
- Dawei Shen (2023). « Construction of GCM hypersurfaces in perturbations of Kerr », *Ann. PDE* **9** (1). Id/No 11.
- Yakov Shlapentokh-Rothman et Rita Teixeira da Costa (2023). *Boundedness and decay for the Teukolsky equation on Kerr in the full subextremal range $|a| < M$: physical space analysis*. arXiv : [2302.08916](https://arxiv.org/abs/2302.08916) [gr-qc].
- Daniel Tataru et Mihai Tohaneanu (2011). « A local energy estimate on Kerr black hole backgrounds », *Int. Math. Res. Not.* **2011** (2), p. 248-292.
- Saul A. Teukolsky (oct. 1973). « Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations », *Astrophysical Journal* **185**, p. 635-648.
- Bernard F. Whiting (1989). « Mode stability of the Kerr black hole », *J. Math. Phys.* **30** (6), p. 1301-1305.

Cécile Huneau

CNRS et Ecole Polytechnique,
 Centre de mathématiques Laurent Schwartz,
 Route de Saclay
 91128 Palaiseau
E-mail : cecile.huneau@polytechnique.edu