

**CATÉGORIES TENSORIELLES SYMÉTRIQUES EN
CARACTÉRISTIQUE POSITIVE**
[d'après Kevin Coulembier, Pavel Etingof, Victor Ostrik, ...]

par **Daniel Juteau**

[...] J'ai fini par comprendre comment la notion de motif fournissait la clef d'une compréhension de ce mystère — comment, par le seul fait de la présence d'une catégorie (ici celle des motifs « lisses » sur un schéma de base donné, par exemple les motifs sur un corps de base donné), ayant des structures internes similaires à celles qu'on trouve sur la catégorie des représentations linéaires d'un pro-groupe algébrique sur un corps \mathbb{k} (le charme de la notion de pro-groupe algébrique m'ayant été révélé précédemment par Serre également), on arrive à reconstituer bel et bien un tel progroupe (dès qu'on dispose d'un « foncteur fibre » convenable), et à interpréter la catégorie « abstraite » comme la catégorie de ses représentations linéaires.

Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles* (II.B.IV.1).

INTRODUCTION

Considérons \mathbf{G} un groupe algébrique (voire pro-algébrique) sur un corps \mathbb{k} (que nous supposerons algébriquement clos pour simplifier), ainsi que la catégorie $\mathcal{C} = \text{Rep}_{\mathbb{k}} \mathbf{G}$ des représentations linéaires de \mathbf{G} sur des \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie. Quelles sont donc ces structures internes de \mathcal{C} mentionnées par Grothendieck ?

- (1) \mathcal{C} est \mathbb{k} -linéaire, abélienne. ⁽¹⁾
- (2) Tous les objets de \mathcal{C} sont de longueur finie et tous les espaces de morphismes sont de dimension finie.
- (3) \mathcal{C} est **monoïdale** : elle est munie d'un bifoncteur (\mathbb{k} -bilinéaire) $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, d'un isomorphisme de foncteurs

$$\alpha: (- \otimes -) \otimes - \rightarrow - \otimes (- \otimes -),$$

1. Pour une référence générale sur les catégories, cf MacLane, 1971.

dit contrainte d’associativité, vérifiant une condition de cohérence (axiome du pentagone), et d’un objet unité $\mathbf{1}$ tel que $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \simeq \mathbf{1}$ et que les foncteurs $\mathbf{1} \otimes -$ et $- \otimes \mathbf{1}$ sont des équivalences.

- (4) \mathcal{C} est **tressée** : on a des isomorphismes fonctoriels $c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$, compatibles avec α (axiomes de l’hexagone).
- (5) \mathcal{C} est **symétrique** : le tressage c vérifie $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$.
- (6) \mathcal{C} est **rigide** : tout objet X est dualisable, i.e. il admet un dual⁽²⁾ X^* muni de morphismes $\text{ev}_X : X^* \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$ et $\text{coev}_X : \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$, tels que les composés

$$\begin{aligned} (\text{id}_X \otimes \text{ev}_X) \circ (\text{coev}_X \otimes \text{id}_X) : X &\longrightarrow X \otimes X^* \otimes X \rightarrow X, \\ (\text{ev}_X \otimes \text{id}_{X^*}) \circ (\text{id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X) : X^* &\longrightarrow X^* \otimes X \otimes X^* \rightarrow X^* \end{aligned}$$

sont l’identité de X et de X^* respectivement.

- (7) \mathcal{C} admet un **foncteur fibre** $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{k}}$, à savoir le foncteur d’oubli, à valeurs dans la catégorie des \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie (muni du produit tensoriel usuel, avec les contraintes d’associativité et de commutativité évidentes). Cela veut dire que c’est un foncteur exact, monoïdal (préservant l’unité et muni d’un isomorphisme fonctoriel $J : F(X) \otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$ compatible aux contraintes d’associativité et aux unités) et symétrique (on demande que J soit aussi compatible aux contraintes de commutativité). Il résulte de la rigidité qu’un tel foncteur est automatiquement fidèle.

Une **catégorie tensorielle symétrique** (sur \mathbb{k}) est une catégorie monoïdale symétrique rigide, abélienne et \mathbb{k} -linéaire (avec un produit tensoriel \mathbb{k} -bilinéaire).

Si de plus on a $\text{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{k}$ et que tous les objets sont de longueur finie, on dira que c’est une catégorie **prétannakienne**.

Une catégorie prétannakienne munie d’un foncteur fibre à valeurs dans $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ est dite **tannakienne**.⁽³⁾ Un résultat fondamental du formalisme est que toute catégorie tannakienne est en fait une catégorie de représentations pour un schéma en groupes affine.

THÉORÈME 0.1 (Saavedra Rivano, 1972 ; Deligne et Milne, 1982)

Soit \mathcal{C} une catégorie tannakienne sur \mathbb{k} , avec foncteur fibre $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{k}}$. Alors le foncteur qui à une \mathbb{k} -algèbre R associe le groupe des automorphismes tensoriels

2. Notons que la définition de dual ci-dessus est celle d’un dual à gauche (qui signifie que le foncteur $X^* \otimes -$ est adjoint à gauche du foncteur $X \otimes -$) ; en fait, la rigidité demande des duals à gauche et à droite, mais dans le cas tressé (voire symétrique), un dual à gauche est aussi naturellement un dual à droite en utilisant la contrainte de commutativité.

3. Il faudrait préciser : tannakienne neutre. La notion de catégorie tannakienne est plus générale (le foncteur fibre pouvant être à valeurs dans Mod_A , pour A une \mathbb{k} -algèbre), mais en fait, dans la suite, la plupart du temps nous supposerons \mathbb{k} algébriquement clos et on ne s’intéressera qu’au cas neutre ; par conséquent, nous dirons simplement catégorie tannakienne pour cette notion. Voir (Deligne et Milne, 1982, §2 et 3) pour une discussion détaillée des foncteurs fibres.

symétriques de $F_R: \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}_R$, $X \mapsto F(X) \otimes_{\mathbb{k}} R$ est représentable par un \mathbb{k} -schéma en groupes affine $\mathbf{G} := \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(F)$.

De plus, le foncteur fibre F se factorise par une équivalence (tensorielle symétrique) suivie du foncteur d'oubli :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\sim} & \text{Rep}_{\mathbb{k}} \mathbf{G} . \\ & \searrow F & \swarrow \omega \\ & & \text{Vec}_{\mathbb{k}} \end{array}$$

La terminologie « foncteur fibre » s'explique par le cas où \mathcal{C} est la catégorie des \mathbb{k} -systèmes locaux sur un espace topologique X raisonnable : pour chaque point $x \in X$, on a un « foncteur fibre au point x », sur lequel le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ agit. On a alors une équivalence de catégories monoïdales symétriques entre les systèmes locaux de rang fini et les représentations de $\pi_1(X, x)$. Attention, si on applique la reconstruction tannakienne dans le cadre linéaire comme ci-dessus, on ne retrouve pas $\pi_1(X, x)$, mais seulement sa complétion proalgébrique (un schéma en groupes affine est toujours limite projective de groupes algébriques). Un précurseur était la théorie de Galois–Grothendieck du groupe fondamental, où on regarde plutôt les revêtements finis et des actions de $\pi_1(X, x)$ sur des ensembles finis (ou plutôt des actions continues de son complété profini). On voit que dans ce cas le groupe fondamental est bien défini à un automorphisme intérieur près. L'objet plus canonique serait le groupoïde fondamental ; les isomorphismes entre deux foncteurs fibres $\pi(X, x)$ et $\pi(X, y)$ sont décrits par le torsEUR $\pi_1(X, x, y)$ des chemins à homotopie près de x à y .

Le « rêve des motifs » de Grothendieck avait plusieurs sources et motivations : notamment la géométrie énumérative, la recherche d'un invariant cohomologique universel, à coefficients dans \mathbb{Q} , factorisant toutes les cohomologies de Weil et la théorie de Galois (André, 2004). Grothendieck ne s'est pas laissé abattre par l'argument bien connu de Serre montrant qu'on ne peut pas avoir d'invariant cohomologique prenant ses valeurs dans $\text{Vec}_{\mathbb{Q}}$ (en considérant les endomorphismes de courbes elliptiques super-singulières en caractéristique $p > 0$) : il a imaginé qu'il puisse exister une catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire, avec les structures appropriées, qui fasse l'affaire ; notamment, il faut pouvoir exprimer la propriété de Künneth, donc il faut avoir un produit tensoriel. Les différents foncteurs de réalisation des motifs donnant les différentes cohomologies classiques sont des foncteurs fibres. Cette approche donne lieu à un groupe de Galois motivique, vaste généralisation de la théorie de Galois en dimension supérieure.

En plus de fournir le cadre conceptuel pour la théorie des motifs, les catégories tensorielles symétriques sont intéressantes à bien des égards. Chacune de ces catégories donne un cadre où on peut faire de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique : ainsi, on peut donner un sens à la notion de schéma en groupes affine dans une telle catégorie ; par exemple, si on remplace la catégorie $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ par celle des super-espaces vectoriels $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$, on obtient les notions de super-groupe algébrique, de super-algèbre de Lie, etc.

On peut aussi dire, comme Etingof, que dans un premier temps, on peut faire de la théorie des représentations sans groupes (groupes quantiques, etc), puis même sans espaces vectoriels. Vu le théorème de reconstruction tannakienne, on peut voir les catégories tensorielles symétriques comme des généralisations des groupes (pro)algébriques.

Un problème naturel est de tenter de classifier ces catégories tensorielles symétriques. On a vu que beaucoup d’entre elles peuvent être décrites comme les représentations d’un groupe. Comment caractériser ces catégories tannakiennes, parmi toutes les autres ? En caractéristique 0, une réponse élégante a été donnée par Deligne (1990), puis dans le cas super : Deligne (2002, 2011). Des exemples non (super-)tannakiens ont aussi été étudiés (Deligne, 2007 ; Knop, 2007 ; Harman et Snowden, 2022). Ces dernières années, le domaine a connu une activité très intense, notamment en caractéristique p .

En caractéristique $p > 0$, des exemples de catégories non super-tannakiennes, et pourtant à croissance modérée (cf §1.3), étaient connus (Gelfand et Kazhdan, 1992 ; Georgiev et Mathieu, 1994) : il s’agit des catégories Ver_p . Mais pendant longtemps, il n’était pas clair comment on pourrait obtenir un analogue du critère de Deligne en caractéristique p . Ces dernières années, d’énormes progrès ont été accomplis. Il est naturel de chercher à caractériser les catégories Ver_p -tannakiennes (admettant un « foncteur fibre » vers Ver_p). Sans surprise, un mot clé est Frobenius. On peut définir plusieurs foncteurs tâchant d’imiter le twist de Frobenius des représentations des groupes réductifs en caractéristique p . Il s’avère que la notion de catégorie Frobenius-exacte (pour laquelle un de ces foncteurs de Frobenius, peu importe lequel, est exact) est cruciale et apparaît dans les critères dégagés par Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b) pour caractériser les catégories Ver_p -tannakiennes. Mais l’histoire ne s’arrête pas là : Benson et Etingof (2019) et Benson, Etingof et Ostrik (2023) dévoilent une richesse foisonnante insoupçonnée parmi ces catégories tensorielles symétriques en caractéristique p , et il y a bien sûr encore beaucoup de questions ouvertes.

Dans la section 1, nous commencerons de manière très naïve, en approchant la notion de dimension de façon intrinsèque à partir de la structure monoïdale symétrique, car cela donne beaucoup de conditions pour pouvoir être une catégorie (super-)tannakienne. Au fur et à mesure, nous verrons des exemples et contre-exemples. Puis dans la section 2, nous rappellerons les résultats connus en caractéristique 0. Dans la section 3, nous expliquerons la procédure de semi-simplification, qui permet de définir la catégorie Ver_p . Dans la section 4, nous parlerons des différents foncteurs de Frobenius et d’un analogue (partiel) au théorème de Deligne en caractéristique p , dans le cas des catégories Frobenius-exactes. Dans la section 5, nous décrirons les nouvelles catégories tensorielles symétriques découvertes récemment, qui ne sont ni semi-simples ni Frobenius-exactes, et mentionnerons une conjecture qui nous dit que cette liste pourrait suffire pour décrire, via le formalisme tannakien, toutes les catégories tensorielles symétriques à croissance modérée en caractéristique p . Enfin, dans la section 6, nous verrons des applications aux représentations modulaires des groupes finis.

1. DIMENSIONS

Comment pouvons-nous décrire la dimension d'un espace vectoriel V dans $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$, uniquement en termes de la structure tensorielle symétrique de cette catégorie? En réalité, plusieurs moyens sont à notre disposition et cela donnera lieu à plusieurs notions de « dimension » dans une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{C} quelconque. Ces notions seront préservées par les foncteurs tensoriels symétriques; nous obtiendrons donc des conditions nécessaires sur \mathcal{C} pour qu'elle soit tannakienne.

1.1. La trace de l'identité

Première idée : la dimension, c'est la trace de l'identité! Dans $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$, la coévaluation $\text{coev}_V: \mathbb{k} \rightarrow V \otimes V^* \simeq \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ envoie 1 sur id_V et l'évaluation $\text{ev}_V: \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \simeq V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{k}$ s'interprète comme la trace. Cela nous suggère comment définir la trace d'un endomorphisme dans une catégorie tensorielle symétrique générale.

DÉFINITION 1.1. — *On définit la trace d'un endomorphisme $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ par*

$$\text{Tr } f = \text{ev}_X \circ c_{X, X^*} \circ (f \otimes \text{id}_{X^*}) \circ \text{coev}_X \in \text{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{k},$$

et en particulier la dimension de X par

$$\dim(X) := \text{Tr}(\text{id}_X) \in \mathbb{k}.$$

Voilà un bel invariant, conservé par tout foncteur tensoriel symétrique! Ah oui... Un bémol : il est à valeurs dans \mathbb{k} . Donc c'est très bien si \mathbb{k} est de caractéristique 0, mais s'il est de caractéristique p on n'a accès qu'à la dimension modulo p . En tout cas, si $\dim(X)$ n'est pas l'image d'un entier naturel dans \mathbb{k} , c'est très clairement une obstruction à l'existence d'un foncteur fibre.

Voici un exemple basique qui ne vérifie pas cette condition, si \mathbb{k} est un corps de caractéristique 0 : la catégorie $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ des \mathbb{k} -espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2$ -gradués $V = V_0 \oplus V_1$, avec composante paire V_0 et composante impaire V_1 de dimension finie, munie du produit tensoriel évident avec la contrainte d'associativité habituelle, mais avec la règle de Koszul comme contrainte de commutativité : pour des éléments homogènes x et y de degrés $|x|$ et $|y|$,

$$c_{X, Y}(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x.$$

On vérifie facilement que $\dim(V) = \dim_{\mathbb{k}} V_0 - \dim_{\mathbb{k}} V_1 \in \mathbb{Z}$ peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives. La catégorie $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ n'est donc pas tannakienne. Remarquons qu'on a un foncteur \mathbb{k} -linéaire, monoïdal, exact et fidèle $F: \text{sVec}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{k}}$, qu'on pourrait noter $V \mapsto |V|$, mais bien sûr il n'est pas symétrique. On notera $\dim_{\mathbb{k}} V = \dim_{\mathbb{k}} |V| = \dim_{\mathbb{k}} V_0 + \dim_{\mathbb{k}} V_1$. Si on note $\bar{\mathbf{1}}$ la droite impaire, tout objet de $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ est donc de la forme $\mathbf{1}^m \oplus \bar{\mathbf{1}}^n$; un tel objet est dit de dimension $m|n$.

Les objets de $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ sont appelés super-espaces vectoriels (de dimension finie). Remarquons qu'en prenant un objet de type algèbre de Lie, algèbre de Hopf, etc, dans $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ (ce sont des notions qui ont un sens dans n'importe quelle catégorie tensorielle

symétrique), on obtient en appliquant le foncteur $F: V \mapsto |V|$ les notions correspondantes en termes classiques : super-algèbre de Lie, super-algèbre de Hopf, etc. On peut aussi faire de la super-géométrie algébrique : la catégorie des super-schémas affines est la catégorie opposée de celle des algèbres commutatives dans $\text{Ind sVec}_{\mathbb{k}}$, cette dernière étant la catégorie des ind-super-espaces vectoriels (super-espaces vectoriels de dimension quelconque). Quant aux super-schémas en groupes affines, on peut les voir comme des objets en groupes dans les super-schémas affines, ou comme des algèbres de Hopf dans $\text{Ind sVec}_{\mathbb{k}}$.

1.2. La longueur

Cherchons maintenant des invariants à valeurs dans \mathbb{N} , voire dans \mathbb{R}^+ , ce qui nous permettra de mieux contrôler la taille de nos objets, y compris en caractéristique p . En fait, il faut aussi admettre la valeur ∞ (qui sera sans doute le signe d’une situation pas très tannakienne. . .).

La longueur $\ell(X)$ d’un objet X de \mathcal{C} est la plus grande longueur possible d’une chaîne d’inclusions strictes entre sous-objets, ou ∞ si cette longueur n’est pas bornée. Comme \mathcal{C} est abélienne, pour un objet de longueur finie, une chaîne de longueur maximale est une suite de composition, c’est-à-dire une filtration dont tous les sous-quotients sont simples ; et on a le théorème de Jordan–Hölder : toutes les suites de composition sont de même longueur et les objets simples (à isomorphisme près) apparaissant comme sous-quotients, ainsi que leurs multiplicités, ne dépendent pas du choix de la suite de composition.

Si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur exact et fidèle (par exemple un foncteur fibre), il ne peut que faire augmenter la longueur : si X se dévise en les objets simples S_i , par exactitude $F(X)$ a une filtration de quotients successifs les $F(S_i)$, qui par fidélité sont non nuls et donc de longueur au moins égale à 1. On a donc

$$(1) \quad \ell(X) \leq \ell(F(X)).$$

La rigidité de \mathcal{C} implique que $X \otimes Y \neq 0$ dès que $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. En effet, les morphismes de coévaluation $\text{coev}_X: \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$ et $\text{coev}_Y: \mathbf{1} \rightarrow Y \otimes Y^*$ sont alors non nuls, donc des monomorphismes car $\mathbf{1}$ est simple (Deligne et Milne, 1982, Prop. 1.17). D’autre part, le foncteur $X \otimes -$ est exact, puisqu’il a des adjoints à gauche et à droite. Donc $\mathbf{1} \hookrightarrow X \otimes X^* \hookrightarrow X \otimes X^* \otimes Y \otimes Y^* \simeq X \otimes Y \otimes Y^* \otimes X^*$, ce qui implique $X \otimes Y \neq 0$. On en déduit que

$$(2) \quad \ell(X \otimes Y) \geq \ell(X)\ell(Y).$$

En effet, si X et Y ont des filtrations avec n et m sous-quotients non nuls respectivement, alors la remarque précédente nous donne une filtration sur $X \otimes Y$ ayant nm sous-quotients non nuls. En particulier, si X est de longueur infinie et $Y \neq 0$, alors $X \otimes Y$ est aussi de longueur infinie.

Dans $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$, le seul objet simple est \mathbb{k} et la longueur est égale à la dimension. En vue de (1), si \mathcal{C} contient un objet de longueur infinie, c’est clairement une obstruction à

l'existence d'un foncteur fibre. Reprenons l'exemple de Deligne (1990, §2.19). Prenons \mathbb{k} de caractéristique 0 contenant t transcendant sur \mathbb{Q} . La catégorie (GL_t) est librement engendrée par un objet X_t de dimension t : les objets sont les $X_t^{\otimes a} \otimes (X_t^*)^{\otimes b}$ et on peut représenter les morphismes par des diagrammes, avec pour générateurs ev_X et coev_X (« caps and cups » orientés) et pour unique relation $\dim(X_t) = t$, c'est-à-dire qu'un cercle peut être remplacé par le scalaire t . L'objet X_t est « l'objet universel de dimension t » : si X est un autre objet de dimension t dans une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{T} sur \mathbb{k} , alors il existe un foncteur tensoriel symétrique exact de (GL_t) vers \mathcal{T} envoyant X_t sur X , unique à automorphisme tensoriel symétrique près (induit par un automorphisme de X). On a donc une suite de foncteurs tensoriels symétriques exacts

$$\begin{aligned} (\mathrm{GL}_t) &\longrightarrow (\mathrm{GL}_{t-1}) \longrightarrow (\mathrm{GL}_{t-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\mathrm{GL}_{t-n}) \longrightarrow \cdots \\ X_t &\longmapsto \mathbf{1} \oplus X_{t-1} \longmapsto \mathbf{1}^2 \oplus X_{t-2} \longmapsto \cdots \longmapsto \mathbf{1}^n \oplus X_{t-n} \longmapsto \cdots \end{aligned}$$

L'algèbre d'endomorphismes de $X_t = \mathbf{1}^n \oplus X_{t-n}$ dans (GL_{t-n}) est $M_n(k) \times k$.

Soit \mathcal{C} la limite inductive des catégories (GL_{t-n}) . C'est encore une catégorie tensorielle symétrique. On peut la voir comme librement engendrée par un objet X_t de dimension t muni de décompositions $X_t = \mathbf{1} \oplus X_{t-1}$, $X_{t-1} = \mathbf{1}^2 \oplus X_{t-2}$, etc. Dans cet exemple, X_t n'est pas de longueur finie, et $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_t) = M_{\infty}(\mathbb{k}) \times \mathbb{k}$ est de dimension infinie. La catégorie \mathcal{C} n'est donc clairement pas tannakienne.

1.3. La dimension de croissance

Jusqu'ici, nous avons considéré X de façon isolée. Mais bien sûr, il est intéressant de considérer ses puissances tensorielles $X^{\otimes n}$, par exemple on peut se demander comment cet objet « croît » avec n . Posons

$$d_n(X) := \ell(X^{\otimes n}).$$

On dit que X est à **croissance modérée** s'il existe une constante réelle C telle que $d_n(X) \leq C^n$ et que \mathcal{C} est à croissance modérée si c'est le cas pour tous ses objets. Remarquons que l'existence d'un foncteur fibre $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Vec}_{\mathbb{k}}$, voire d'un super-foncteur fibre $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{sVec}_{\mathbb{k}}$, implique que \mathcal{C} est à croissance modérée : d'après (1), on a $d_n(X) = \ell(X^{\otimes n}) \leq \ell(F(X^{\otimes n})) = (\dim_{\mathbb{k}} F(X))^n$.

On peut donc se dire qu'on obtiendra une bonne notion de dimension en étudiant plus précisément le taux de croissance de $d_n(X)$. D'après (2), on a

$$d_{n+m}(X) \geq d_n(X)d_m(X)$$

Si $d_n(X) = \infty$ pour un certain n , alors on a encore $d_m(X) = \infty$ pour tout $m \geq n$. Supposons au contraire que les $d_n(X)$ soient finis. Alors la suite $(1/d_n(X))$ est sous-multiplicative et le lemme de Fekete (Benson, 2020a, Lemme 1.6.3) implique que la

limite suivante existe :

$$(3) \quad \text{gd}(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(X)^{1/n} = \sup_n d_n(X)^{1/n} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

On l'appelle la dimension de croissance de X . On a $\text{gd}(X) \geq 1$ dès que $X \neq 0$. Un objet est à croissance modérée si et seulement si $\text{gd}(X) < \infty$. Pour V dans $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ ou $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$, on a $\text{gd}(V) = \dim_{\mathbb{k}} V$.

1.4. La dimension alternée

Une autre idée pour caractériser la dimension d'un espace vectoriel : c'est la dernière puissance alternée non nulle. Il serait quand même temps d'utiliser le fait que comme \mathcal{C} est une catégorie tensorielle symétrique, le groupe \mathfrak{S}_n agit sur $X^{\otimes n}$. Soit

$$(4) \quad a_n := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma \in \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$$

l'élément antisymétrisant. Si \mathbb{k} est de caractéristique 0 ou $> n$, on dispose de l'idempotent central $\frac{1}{n!}a_n$, qui agit sur $X^{\otimes n}$ comme la projection sur la composante sgn-isotypique, et son image donne la seule définition possible d'une puissance extérieure.

Mais pour \mathbb{k} de caractéristique $p > 0$, on peut envisager trois versions de la n -ième puissance extérieure : les anti-invariants \wedge^n (plus grand sous-objet sur lequel \mathfrak{S}_n agit par le caractère sgn), l'image A_n de a_n , ou les co-anti-invariants Λ^n (plus grand quotient sur lequel \mathfrak{S}_n agit par le caractère sgn). On a des morphismes canoniques

$$\wedge^n X \twoheadrightarrow A^n X \hookrightarrow \Lambda^n X.$$

Pour $\mathcal{C} = \text{Vec}_{\mathbb{k}}$, les trois foncteurs donnent toujours la même chose, quel que soit \mathbb{k} . Mais ce n'est pas vrai en général, par exemple pour $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$. Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b) préfèrent utiliser A^n . Ils posent :

$$\text{ad}(X) := \sup \{n \in \mathbb{N} \mid A^n X \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Notons qu'en caractéristique 0, la dimension alternée ad permet de faire une distinction entre $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ et $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$: pour un super-espace vectoriel purement impair V , on a $|\Lambda^n V| = |\text{Sym}^n V|$, donc $\text{ad}(V) = \infty$. Par contre, on peut annuler un tel V avec une puissance symétrique. Plus généralement, un super-espace vectoriel pourra être annulé par un foncteur de Schur.

1.5. La dimension de Schur

Supposons temporairement que \mathbb{k} soit de caractéristique 0. Dans ce cas, pour n dans \mathbb{N} , l'algèbre de groupe $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ est semi-simple. On rappelle que les représentations irréductibles de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ sont paramétrées par les partitions λ de n (James et Kerber, 1981). On les notera V_λ . En particulier, $V_{(n)} = \mathbb{k}$ est la représentation triviale et $V_{(1^n)} = \text{sgn}$ est la représentation signe. Pour chaque λ , on a un foncteur de Schur $\mathbb{S}_\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (voir Deligne, 2002, §1 pour plus de détails) :

$$\mathbb{S}_\lambda X := (V_\lambda^* \otimes X^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$$

permettant de décomposer $X^{\otimes n}$ en composantes V_λ -isotypiques :

$$(5) \quad \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \otimes \mathbb{S}_{\lambda}(X) \xrightarrow{\sim} X^{\otimes n}.$$

Parmi les facteurs directs, on retrouve

$$\mathbb{S}_{(n)} X = \text{Sym}^n X \quad \text{et} \quad \mathbb{S}_{(1^n)} X = \Lambda^n X.$$

Un espace vectoriel V dans $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$, de dimension d , est annulé par le foncteur de Schur \mathbb{S}_{λ} si et seulement si λ a plus de d lignes. Donc si $n \leq d$, tous les $\mathbb{S}_{\lambda} V$ sont non nuls ; pour $n > d$, au moins un \mathbb{S}_{λ} annule V . Par exemple, pour $n = d+1$, le foncteur $\mathbb{S}_{(1^{d+1})} = \Lambda^{d+1}$ annule V . Autrement dit, le morphisme canonique, $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n \simeq \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}^* \otimes V_{\lambda} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V^{\otimes n})$, est injectif pour $n \leq d$ et ne l'est plus pour $n > d$.

On a supposé \mathbb{k} de caractéristique 0 pour disposer des foncteurs de Schur, mais la dernière reformulation a un sens en toute généralité. On pose

$$\text{sd}(X) := \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{can} : \mathbb{k}\mathfrak{S}_n \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}) \text{ est injectif}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

où can désigne l'action canonique de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ sur $X^{\otimes n}$, déduite de la structure de catégorie tensorielle symétrique.

Si $\text{sd}(X) = \infty$, alors

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, (X^* \otimes X)^{\otimes n}) = \dim_{\mathbb{k}} \text{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}) \geq \dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}\mathfrak{S}_n = n!,$$

donc le socle de $(X^* \otimes X)^{\otimes n}$ (i.e. son plus grans sous-objet semi-simple) contient au moins $n!$ copies de $\mathbf{1}$, la longueur $\ell((X^* \otimes X)^{\otimes n}) \geq n!$ croît plus vite que toute exponentielle, et \mathcal{C} n'est pas à croissance modérée.

Pour \mathbb{k} de caractéristique zéro, en utilisant (5), on pourrait en déduire directement que X lui-même n'est pas à croissance modérée, car alors

$$\ell(X^{\otimes n}) \geq \sum_{\lambda} \dim(V_{\lambda}) \geq \left(\sum_{\lambda} \dim(V_{\lambda})^2 \right)^{1/2} = (n!)^{1/2}.$$

1.6. Relations entre les différentes notions de dimension

Les différentes notions de dimension que nous avons vues sont reliées de plusieurs manières.

PROPOSITION 1.2 (Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b, Prop. 4.7)

Pour X dans \mathcal{C} , on a

- (i) $\text{sd}(X) \leq \text{ad}(X)$;
- (ii) $\ell(X) \leq \text{sd}(X \otimes X^*)$;
- (iii) $\text{gd}(X \otimes X^*) < \infty \implies \text{sd}(X) < \infty$;
- (iv) $\ell(X) \leq \text{ad}(X)$;
- (v) $\text{gd}(X) \leq \text{ad}(X)$;
- (vi) Si de plus \mathbb{k} est de caractéristique $p > 0$, alors $\text{sd}(X) < \infty \implies \text{ad}(X) < \infty$.

Il se passe quelque chose de différent en caractéristique p : notamment, la dimension alternée ne permettra plus de distinguer les catégories tannakiennes des catégories super-tannakiennes !

COROLLAIRE 1.3. — *Pour une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{C} sur \mathbb{k} de caractéristique $p > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathrm{gd}(X) < \infty$ pour tout X dans \mathcal{C} ;
- (ii) $\mathrm{sd}(X) < \infty$ pour tout X dans \mathcal{C} ;
- (iii) $\mathrm{ad}(X) < \infty$ pour tout X dans \mathcal{C} .

2. CARACTÉRISATIONS INTERNES EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

Dans toute cette section, \mathbb{k} est supposé de caractéristique zéro.

2.1. Catégories tannakiennes

THÉORÈME 2.1 (Deligne, 1990). — *Soit \mathcal{C} une catégorie prétannakienne sur \mathbb{k} supposé de caractéristique nulle. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{C} est tannakienne ;
- (ii) Pour tout X objet de \mathcal{C} , on a $\dim(X) \in \mathbb{N}$;
- (iii) Pour tout X objet de \mathcal{C} , il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda^n X = 0$.

En caractéristique zéro, il n'y a pas lieu de distinguer entre différents types de puissances alternées. On note donc $\Lambda^n X$ l'image du projecteur antisymétrisant

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma$$

agissant sur $X^{\otimes n}$. On montre d'abord que la dimension de $\Lambda^n X$ est donnée par la même formule que pour les espaces vectoriels.

LEMME 2.2. — *Pour X objet de \mathcal{C} , on a*

$$\dim(\Lambda^n X) = \binom{\dim(X)}{n} = \frac{\dim(X)(\dim(X) - 1) \cdots (\dim(X) - n + 1)}{n!}.$$

Démonstration. — On commence par montrer que la trace sur $X^{\otimes n}$ d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k orbites⁽⁴⁾ est $(\dim(X))^k$ (on peut s'en convaincre facilement par la diagrammatique des catégories tensorielles symétriques : prendre la trace revient à fermer le diagramme de σ ; chaque cycle donne une boucle et donc un facteur $\dim(X)$). Il en résulte qu'il existe un polynôme universel $P_n \in \mathbb{Q}[T]$ (valable pour toute catégorie

4. On dit « orbites » plutôt que « cycles » pour qu'il soit bien clair qu'on compte les points fixes, qui ne sont pas des cycles dans la définition standard.

prétannakienne \mathcal{C}), tel que pour tout X dans \mathcal{C} , on ait $\dim(\Lambda^n X) = P_n(\dim(X))$, à savoir

$$P_n(T) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) T^{c(\sigma)},$$

où $c(\sigma)$ est le nombre d'orbites de σ . En considérant $\mathcal{C} = \operatorname{Vec}_{\mathbb{k}}$, on connaît une infinité de valeurs du polynôme P_n , ce qui suffit à le déterminer. \square

LEMME 2.3. — *On suppose toujours \mathbb{k} de caractéristique zéro. Si tout objet X de \mathcal{C} vérifie $\dim(X) \in \mathbb{N}$, alors tout objet de dimension nulle est nul.*

Démonstration. — Soit $X \neq 0$ dans \mathcal{C} . Alors $\operatorname{id}_X \neq 0$, donc par adjonction $0 \neq \operatorname{coev}_X: \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$ et c'est nécessairement un monomorphisme puisque $\mathbf{1}$ est simple. Par hypothèse,

$$\dim \operatorname{coker} \operatorname{coev}_X = \dim(X) \dim(X^*) - 1 \geq 0,$$

ce qui implique que $\dim(X) \geq 1$. \square

Début de la preuve du théorème. — Montrons d'abord que (ii) implique (iii). Soit X un objet de \mathcal{C} . Par hypothèse, sa dimension est un entier $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $\dim \Lambda^{n+1} X = 0$, d'où $\Lambda^{n+1} X = 0$ par le lemme précédent.

Réciproquement, si un objet X vérifie $\Lambda^n X = 0$, on en déduit que $\dim \Lambda^n X = \binom{\dim(X)}{n} = 0$, ce qui implique que $\dim(X)$ est un entier naturel compris entre 0 et $n - 1$. Donc (iii) implique (ii).

Il est clair qu'une catégorie tannakienne vérifie (ii) et (iii). La preuve de la réciproque est beaucoup plus longue! \square

2.2. Catégories super-tannakiennes

Soit \mathbf{G} un super-schéma en groupes affine sur \mathbb{k} . Cela revient à se donner une algèbre de Hopf commutative $\mathcal{O}(G)$ dans $\operatorname{sVec}_{\mathbb{k}}$. Étant donné un élément $z \in \mathbf{G}(\mathbb{k})$ d'ordre divisant 2 agissant par l'automorphisme de parité sur $\mathcal{O}(G)$ (c'est-à-dire par $+1$ sur la partie paire et par -1 sur la partie impaire), on considère la catégorie $\operatorname{Rep}_{\mathbb{k}}(\mathbf{G}, z)$ des super-représentations (i.e. comodules sur l'algèbre $\mathcal{O}(G)$, dans $\operatorname{sVec}_{\mathbb{k}}$) de dimension finie sur lesquelles z agit par l'automorphisme de parité.

THÉORÈME 2.4 (Deligne, 2002, 2011 ; Coulembier, 2020). — *On suppose \mathbb{k} de caractéristique 0. Soit \mathcal{C} une catégorie prétannakienne sur \mathbb{k} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{C} est super-tannakienne ;
- (ii) tout X objet de \mathcal{C} est à croissance modérée ;
- (iii) pour tout X objet de \mathcal{C} , il existe un $n \in \mathbb{N}$ et une partition λ de n tels que le foncteur de Schur \mathbb{S}_{λ} annule X .

3. UNE CATÉGORIE MODÉRÉE, MAIS PAS SUPER !

On peut maintenant se poser la question : en caractéristique p , existe-t-il des catégories tensorielles symétriques qui ne soient pas super-tannakiennes, bien qu’elles soient à croissance modérée ? La réponse est oui ! Pour les décrire, nous avons besoin d’introduire le concept de semi-simplification.

3.1. Semi-simplification d’une catégorie tensorielle symétrique

La notion de semi-simplification d’une catégorie tensorielle sphérique est introduite par Barrett et Westbury (1999) et développée dans Etingof et Ostrik (2022), où notamment de nombreux exemples importants sont calculés. En fait, en géométrie algébrique, on trouve déjà un exemple de cette notion dans la preuve de Jannsen (1992) de la semi-simplicité des motifs numériques effectifs pour les variétés projectives lisses.

Un idéal tensoriel dans une catégorie \mathbb{k} -linéaire monoïdale \mathcal{C} est une collection \mathcal{N} de sous-espaces $\mathcal{N}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (pour X et Y objets de \mathcal{C}), qui est stable par composition et produit tensoriel avec des morphismes arbitraires de \mathcal{C} . On peut alors définir une catégorie monoïdale quotient \mathcal{C}/\mathcal{N} qui a les mêmes objets que \mathcal{C} et pour espaces de morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{N}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\mathcal{N}(X, Y)$. Si \mathcal{C} est rigide, tressée ou symétrique, il en sera de même pour \mathcal{C}/\mathcal{N} .

DÉFINITION 3.1. — *Soit \mathcal{C} une catégorie tensorielle symétrique. Un morphisme $f: X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} est négligeable si pour tout $g: Y \rightarrow X$, on a $\text{Tr}(fg) = 0$ (ce qui est équivalent à $\text{Tr}(gf) = 0$).*

LEMME 3.2. — *Les morphismes négligeables forment un idéal tensoriel \mathcal{N} dans \mathcal{C} .*

DÉFINITION 3.3. — *On définit la semi-simplification d’une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{C} comme la catégorie quotient $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\mathcal{N}$, où \mathcal{N} est l’idéal tensoriel des morphismes négligeables.*

PROPOSITION 3.4. — *La catégorie $\bar{\mathcal{C}}$ est une catégorie tensorielle symétrique semi-simple, dont les objets simples sont les objets indécomposables de \mathcal{C} dont la dimension est $\neq 0$ dans \mathbb{k} .*

Si \mathcal{C} est déjà semi-simple, alors $\mathcal{N} = 0$ et $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$.

Le lemme suivant permet de comprendre la notion de négligeabilité en termes des objets indécomposables. Il est démontré dans (Etingof et Ostrik, 2022, Lemma 2.2), où (Benson, 1984, §2.18, Exercice 3(ii)) est cité. Je pense qu’on a besoin de supposer que la catégorie \mathcal{C} a des objets de longueur finie (et donc, par la rigidité, il s’ensuit que les Hom sont de dimension finie), pour que \mathcal{C} ait la propriété de Krull–Schmidt. En particulier, pour X indécomposable, l’algèbre d’endomorphismes $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est locale : on a $\text{End}(X) = \mathbb{k} \text{id} \oplus \mathfrak{m}$, où \mathfrak{m} , le radical, est un idéal nilpotent. Un endomorphisme f de X est donc soit inversible, soit nilpotent, auquel cas sa trace est nulle. En effet, la catégorie \mathcal{C} étant supposée abélienne, on peut utiliser la filtration par les noyaux des

puissances successives de f et le fait que la trace ne change pas quand on passe au gradué.

LEMME 3.5. — (i) Si X et Y sont indécomposables dans \mathcal{C} , alors un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est non-négligeable si et seulement si $\dim(X) \neq 0$ et f est un isomorphisme.

(ii) Si $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ et $Y = \bigoplus_{j=1}^m Y_j$ sont des décompositions en objets indécomposables, alors un morphisme $f = (f_{ij}): X \rightarrow Y$, avec $f_{ij}: X_i \rightarrow Y_j$, est négligeable si et seulement si tous les f_{ij} le sont.

Démonstration. — Soient X et Y indécomposables. Supposons d'abord que $f: X \rightarrow Y$ ne soit pas un isomorphisme. Alors pour tout $g: Y \rightarrow X$, le composé $gf \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ n'est pas un isomorphisme non plus : si c'en était un, alors f serait un monomorphisme (et donc pas un épimorphisme) et on aurait une décomposition non triviale $Y \simeq \text{im } f \oplus \ker g$, contredisant l'indécomposabilité de Y . Donc gf est nilpotent et par conséquent de trace nulle. Donc f est négligeable.

Supposons maintenant que f soit un isomorphisme. Si $\dim(X) \neq 0$, alors $\text{Tr}(f^{-1}f) = \text{Tr}(\text{id}_X) = \dim(X) \neq 0$, donc f n'est pas négligeable. Enfin, si $\dim(X) = 0$, pour $g: Y \rightarrow X$, on écrit $fg = \lambda \text{id}_Y + h$ avec $\lambda \in \mathbb{k}$ et $h \in \text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ nilpotent. Alors $\text{Tr}(fg) = \lambda \dim Y = \lambda \dim(X) = 0$. Donc f est négligeable. On a montré (i).

Pour (ii), supposons d'abord que les f_{ij} soient négligeables. Alors pour tout $g = (g_{ji})$, on a

$$\text{Tr}(fg) = \sum_{i,j} \text{Tr}(f_{ij}g_{ji}) = 0,$$

donc f est négligeable. Réciproquement, supposons f négligeable; fixons un couple (k, l) et montrons que f_{kl} est négligeable. Étant donné un morphisme $h: Y_l \rightarrow X_k$, soit $g = (g_{ji})$ avec $g_{ji} = h$ si $(i, j) = (k, l)$, et 0 sinon. Alors $\text{Tr}(fg) = \text{Tr}(f_{ij}h) = 0$ et ceci pour tout h . Donc f_{ij} est négligeable. \square

Démonstration de la proposition 3.4. — Si X est indécomposable dans \mathcal{C} , alors $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) = \mathbb{k} \text{id}_X \oplus \mathfrak{m}$ et le nilradical \mathfrak{m} est un idéal maximal. Comme $\mathfrak{m} \subset \mathcal{N}(X, X) \subset \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$, l'idéal $\mathcal{N}(X, X)$ est forcément égal soit à \mathfrak{m} , soit à $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$. D'après le lemme, la première possibilité a lieu quand $\dim(X) \neq 0$, la deuxième quand $\dim(X) = 0$. On a donc

$$\text{End}_{\overline{\mathcal{C}}}(X) = \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } \dim(X) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \dim(X) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, si X et Y sont indécomposables et non isomorphes, alors $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X, Y) = 0$ d'après le lemme.

On en conclut que $\overline{\mathcal{C}}$ est semi-simple et que ses objets simples sont les indécomposables de dimension non nulle de \mathcal{C} . \square

Remarque 3.6. — On n’a pas eu besoin du fait que \mathcal{C} est abélienne, sauf dans l’utilisation de la filtration pour montrer qu’un endomorphisme nilpotent a une trace nulle. Par conséquent, Etingof et Ostrik (2022) remarquent que les résultats précédents sont encore valables si \mathcal{C} est seulement \mathbb{k} -linéaire, karoubienne, monoïdale, rigide, dont tous les espaces de morphismes sont de dimension finie, et telle que tous les endomorphismes nilpotents ont une trace nulle.

3.2. Catégorie de Verlinde Ver_p

Dans ce qui suit, \mathbb{k} est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

DÉFINITION 3.7. — *La catégorie de Verlinde Ver_p est la semi-simplification de $\text{Rep}_{\mathbb{k}} C_p$, où $C_p = \langle g \rangle$ est un groupe cyclique d’ordre p , et \mathbb{k} est de caractéristique p .*

On peut aussi la voir comme la semi-simplification de la catégorie $\text{Tilt } \mathbf{SL}_2$ des modules basculants de \mathbf{SL}_2 , qui n’est pas abélienne mais vérifie les conditions de la remarque 3.6. La définition intrinsèque de module basculant pour un groupe réductif est d’admettre à la fois une filtration dont les sous-quotients sont standard (modules de Weyl) et une autre filtration dont tous les sous-quotients sont costandard (modules induits). Mais on peut aussi caractériser $\text{Tilt } \mathbf{SL}_2$ simplement comme la sous-catégorie monoïdale symétrique de $\text{Rep}_{\mathbb{k}} \mathbf{SL}_2$ engendrée par $V = \mathbb{k}^2$ (en prenant des produits tensoriels, des sommes directes, et des facteurs directs). Pour plus d’informations sur les modules basculants, on pourra consulter Jantzen (2003, II.E)

Commençons par remarquer que l’algèbre de groupe de C_p vérifie

$$\mathbb{k}C_p = \mathbb{k}[x]/(x^p - 1) = \mathbb{k}[x]/(x - 1)^p \simeq \mathbb{k}[T]/(T^p).$$

Il est facile de voir que ses représentations indécomposables sont de la forme $J_i = \mathbb{k}^i$, où le générateur g agit par un bloc de Jordan de taille i , pour $1 \leq i \leq p$. D’après Green, 1962, on a les relations suivantes :

$$J_2 \otimes J_s = \begin{cases} J_2 & \text{si } s = 1, \\ J_{s-1} \oplus J_{s+1} & \text{si } s = 2, \dots, p-1, \\ J_p \oplus J_p & \text{si } s = p \end{cases}$$

et

$$J_{p-1} \otimes J_s = J_{p-s} \oplus (s-1)J_p.$$

Dans la semi-simplification $\text{Ver}_p := \overline{\text{Rep}_{\mathbb{k}} C_p}$, on a donc $p-1$ objets simples,

$$L_i := \overline{J}_i, \quad 1 \leq i \leq p-1.$$

DÉFINITION 3.8. — *Une catégorie de fusion symétrique est une catégorie prétannakienne avec un nombre fini de modules simples.*

La catégorie Ver_p est donc un exemple de catégorie de fusion symétrique. La « règle de fusion » décrivant le produit tensoriel est donnée par une troncation de la règle de Clebsch–Gordan, qui donne les coefficients des produits tensoriels de représentations irréductibles de \mathbf{SL}_2 en caractéristique 0 : si on désigne temporairement par L_i , $i \in \mathbb{N}$, le module simple de dimension i pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, alors on a

$$L_m \otimes L_n = \bigoplus_{i=1}^{\min(m,n)} L_{|m-n|+2i-1}.$$

Dans Ver_p , on a « $L_p = 0$ », et la formule devient :

$$(6) \quad L_m \otimes L_n = \bigoplus_{i=1}^{\min(m,n,p-m,p-n)} L_{|m-n|+2i-1}.$$

Par exemple, pour $p = 5$, on a

$$L_3 \otimes L_3 \simeq L_1 \oplus L_3.$$

Cela montre déjà que Ver_5 ne peut pas avoir de foncteur fibre F à valeurs dans $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$, ou même dans $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$: en effet, dans ce cas la dimension $d := \dim_{\mathbb{k}} F(L_3)$ vérifierait

$$d^2 = d + 1,$$

mais cette équation n'a pas de solution entière !

On a des cas particuliers pour les petites valeurs de p .

Exemple 3.9. — Pour $p = 2$, le seul objet simple est $\mathbf{1} = L_1$ et $\text{Ver}_2 = \text{Vec}_{\mathbb{k}}$.

Exemple 3.10. — Pour $p = 3$, on a deux objets simples, $\mathbf{1} = L_1$ et $\bar{\mathbf{1}} = L_2$; en fait, $\dim L_2 = 2 = -1 \in \mathbb{k}$ et $\text{Ver}_3 = \text{sVec}_{\mathbb{k}}$.

En général, $\bar{\mathbf{1}} := L_{p-1}$ vérifie $\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$ et $\dim \bar{\mathbf{1}} = -1$; la sous-catégorie tensorielle $\langle \mathbf{1}, \bar{\mathbf{1}} \rangle$ est équivalente à $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$.

Pour la suite, nous aurons besoin du produit tensoriel \boxtimes de catégories. Pour des catégories \mathbb{k} -linéaires \mathcal{A} et \mathcal{B} , on note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, Y) avec $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{B}$, et dont les morphismes sont donnés par $\text{Hom}((X, Y), (Z, W)) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, W)$. Puis on note $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ l'enveloppe karoubienne de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont abéliennes et que \mathcal{B} est semi-simple et schurienne (i.e. l'algèbre d'endomorphismes de chaque simple est \mathbb{k}), le produit $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ est encore une catégorie abélienne ; si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des catégories tensorielles symétriques, avec \mathcal{B} semi-simple et schurienne, alors $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ est encore une catégorie tensorielle symétrique.

PROPOSITION 3.11. — *On suppose $p > 3$.*

- (i) *On a une sous-catégorie de fusion $\text{Ver}_p^+ = \langle L_3 \rangle \subset \text{Ver}_p$ dont les objets simples sont L_i avec i impair.*
- (ii) *La catégorie de fusion Ver_p admet exactement quatre sous-catégories de fusion : $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$, $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$, Ver_p^+ , Ver_p .*
- (iii) *On a une équivalence de catégories de fusion symétriques $\text{Ver}_p \simeq \text{Ver}_p^+ \boxtimes \text{sVec}_{\mathbb{k}}$.*

Démonstration. — D’après (6), il est clair que les sommes directes d’objets simples L_i avec i impair forment une sous-catégorie tensorielle symétrique et qu’elle est \otimes -engendrée par L_3 .

Si une sous-catégorie de fusion contient un objet simple L_r avec $r \neq 1, p-1$, alors $\min(r, p-r) \geq 2$, donc d’après (6), l’objet simple L_3 apparaît dans la décomposition de L_r^2 . Avec (i), cela implique (ii).

La factorisation (iii) résulte d’un lemme général sur les catégories de fusion symétriques, avec deux sous-catégories de fusion ayant seulement $\mathbf{1}$ pour objet simple en commun. \square

Du point de vue de \mathbf{SL}_2 , la sous-catégorie Ver_p^+ correspond aux représentations qui se factorisent par \mathbf{PGL}_2 .

La catégorie Ver_p^+ , bien qu’elle soit à croissance modérée, n’est pas super-tannakienne dès que $p \geq 5$. De même qu’en caractéristique 0, l’existence de la catégorie non tannakienne $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ conduit naturellement à la notion de catégorie super-tannakienne, il est naturel de considérer la notion suivante.

DÉFINITION 3.12. — *Une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{C} est Ver_p -tannakienne si elle admet un Ver_p -foncteur fibre, c’est-à-dire un foncteur tensoriel symétrique exact à valeurs dans Ver_p .*

Par les remarques précédentes, cette classe contient les catégories tannakiennes et super-tannakiennes sur \mathbb{k} .

Si \mathcal{C} admet un Ver_p -foncteur fibre $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ver}_p$, on définit $\mathbf{G} := \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(F)$, le schéma en groupes affines dans Ver_p des automorphismes de F . On a d’autre part le groupe fondamental $\pi(\text{Ver}_p) := \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\text{id}_{\text{Ver}_p})$. Son algèbre de Hopf (dans Ver_p) est $\mathcal{O}(\pi(\text{Ver}_p)) = \bigoplus_i L_i \otimes L_i^*$. On a un morphisme canonique $\epsilon: \pi(\text{Ver}_p) \rightarrow \mathbf{G}$. On considère la catégorie $\text{Rep}(\mathbf{G}, \epsilon)$ des représentations de \mathbf{G} dans Ver_p telles que $\pi(\text{Ver}_p)$ agisse via ϵ . Le foncteur F se factorise par le foncteur d’oubli $\omega: \text{Rep}(\mathbf{G}, \epsilon) \rightarrow \text{Ver}_p$, en une équivalence :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\sim} & \text{Rep}(\mathbf{G}, \epsilon) \\ & \searrow F & \swarrow \omega \\ & \text{Ver}_p & \end{array}$$

(Le groupe fondamental de $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ est C_2 , c’est pourquoi dans le cas super-tannakien on devait considérer un élément d’ordre divisant 2 dans \mathbf{G} .)

THÉORÈME 3.13 (Ostrik, 2020). — *Une catégorie de fusion symétrique sur \mathbb{k} (catégorie tensorielle symétrique semi-simple avec un nombre fini d’objets simples) admet un Ver_p -foncteur fibre (unique à isomorphisme près).*

Un ingrédient important pour la preuve est l’introduction d’un foncteur de Frobenius $\text{Fr}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{(1)} \boxtimes \text{Ver}_p$, où (1) indique un twist de Frobenius de la catégorie : pour avoir un foncteur \mathbb{k} -linéaire, il faut tordre l’action des scalaires par $\text{Frob}: \lambda \mapsto \lambda^p$. Ostrik en donne une définition dans le cas des catégories de fusion symétriques ; il indique qu’une

généralisation de cette notion devrait permettre de démontrer le théorème dans une plus grande généralité, ce qui sera fait dans (Coulembier, 2020 ; Etingof et Ostrik, 2021 ; Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b).

Expliquons succinctement l'idée de ce foncteur de Frobenius. On commence par considérer le foncteur $P_0: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $X \mapsto X^{\otimes p}$, qui n'est bien sûr absolument pas additif, mais qui a le mérite d'admettre une structure monoïdale symétrique évidente. De plus, il admet une action canonique par \mathfrak{S}_p et, en particulier, par son p -sous-groupe de Sylow C_p , qui suffira pour les besoins (pour le moment). Cela permet de relever le foncteur P_0 en un foncteur P_1 à valeurs dans « l'équivariantisation » $\text{Rep}(C_p, \mathcal{C})$, dont les objets sont les objets de \mathcal{C} munis d'une action de C_p . Ensuite on peut passer à la semi-simplification de $\text{Rep}(C_p, \mathcal{C})$, qui n'est autre que $\mathcal{C} \boxtimes \text{Ver}_p$. L'idée est que dans le développement de $(X \oplus Y)^{\otimes p}$, les termes $X^{\otimes p}$ et $Y^{\otimes p}$ sont des points fixes sous C_p , alors que les autres termes sont permutés librement ; dans l'équivariantisation, ils ont un terme J_p en facteur, qui est tué dans la semi-simplification. C'est ce qui permet d'obtenir un foncteur additif et le twist de Frobenius permet d'avoir un foncteur \mathbb{k} -linéaire, noté Fr . (Pas besoin de twist pour la catégorie Ver_p , qui est définie sur le sous-corps premier.)

Une autre idée qui resservira : on dit que \mathcal{C} est de type de Frobenius $\mathcal{A} \subset \text{Ver}_p$ si $\text{Fr}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{A}$ et que \mathcal{A} est minimale pour cette propriété. Pour $p > 3$, on a donc quatre possibilités pour \mathcal{A} a priori.

Exemple 3.14. — On a

$$(7) \quad \text{Fr}(L_s) = \begin{cases} \mathbf{1} \boxtimes L_s & \text{si } s \text{ est impair,} \\ \bar{\mathbf{1}} \boxtimes L_{p-s} & \text{si } s \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ainsi, Ver_p est de type de Frobenius Ver_p^+ et $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$ est de type de Frobenius $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$. D'autre part, le foncteur de Frobenius est compatible aux foncteurs tensoriels symétriques : si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un tel foncteur à valeurs dans une autre catégorie de fusion symétrique, on a

$$\text{Fr } F(X) = (F^{(1)} \boxtimes \text{id}) \text{Fr } X \in \mathcal{D}^{(1)} \boxtimes \text{Ver}_p.$$

Cela implique que si \mathcal{C} est tannakienne ou super-tannakienne, alors \mathcal{C} est de type de Frobenius $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$.

Un autre ingrédient important dans sa preuve est le fait qu'une catégorie de fusion symétrique non-dégénérée (de dimension globale non nulle) se relève en caractéristique 0, ce qui permet d'appliquer le théorème de Deligne (2002). La preuve de Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b) n'utilise pas ce genre d'argument et est plus proche de l'esprit des travaux de Deligne.

4. CATÉGORIES FROBENIUS-EXACTES

4.1. Foncteurs de Frobenius

On a vu que dans le cas d'une catégorie de fusion symétrique, le twist de Frobenius d'Ostrik (2020) est un outil crucial pour construire un foncteur fibre vers Ver_p . Cette construction a été généralisée dans Etingof et Ostrik (2021) et Coulembier (2020) à n'importe quelle catégorie prétannakienne en caractéristique p . Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b) construisent également une version enrichie, faisant intervenir tout le groupe symétrique \mathfrak{S}_p et pas seulement le groupe cyclique C_p . La construction est en fait similaire dans l'esprit à celle d'Ostrik (2020).

Dans §2.5, ils rappellent qu'on peut encoder l'information d'une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{C} et d'un foncteur \mathbb{k} -linéaire fidèle et exact $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{k}}$ à l'aide d'une structure algébrique sur la coalgèbre correspondante, à savoir une structure de co-pseudo algèbre de Hopf cotriangulaire H (peu importe la définition précise pour ce qui nous concerne). Étant donné un groupe Γ , on peut interpréter H comme une co-pseudo algèbre de Hopf triangulaire dans la catégorie tensorielle symétrique $\text{Ind Rep}_{\mathbb{k}} \Gamma$, via l'inclusion $\text{Vec}_{\mathbb{k}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{k}} \Gamma$. Alors on peut voir les représentations de Γ dans \mathcal{C} (objets munis d'une action) comme des H -comodules dans $\text{Rep}_{\mathbb{k}} \Gamma$.

On prend pour Γ un sous-groupe de \mathfrak{S}_p : ce sera soit C_p , soit \mathfrak{S}_p tout entier. On construit un foncteur monoïdal symétrique $\text{Fr}_{\Gamma}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \overline{\text{Rep}} \Gamma$ via

$$\mathcal{C} \longrightarrow \text{Rep}(\Gamma, \mathcal{C}) \simeq H\text{-Comod}(\text{Rep}_{\mathbb{k}} \Gamma) \longrightarrow H\text{-Comod}(\overline{\text{Rep}}_{\mathbb{k}} \Gamma) = \mathcal{C} \boxtimes \overline{\text{Rep}}_{\mathbb{k}} \Gamma,$$

où la première flèche est $X \mapsto X^{\otimes p}$ et la deuxième est induite par le foncteur de semi-simplification. On notera $\text{Fr} := \text{Fr}_{C_p}$ le foncteur de Frobenius (appelé twist de Frobenius externe dans Coulembier (2020)) et $\text{Fr}^{\text{en}} := \text{Fr}_{\mathfrak{S}_p}$ le foncteur de Frobenius « enrichi ». On est amené à considérer la catégorie

$$\text{Ver}_p^{\text{en}} = \overline{\text{Rep}} \mathfrak{S}_p = \text{Ver}_p^+ \boxtimes \text{Rep}(C_{2p-2}, z),$$

où z est l'élément d'ordre 2 dans C_{2p-2} (Etingof et Ostrik, 2022). Il résulte du fait que $|\mathfrak{S}_p : C_p|$ est inversible que le foncteur de restriction $\text{Rep}_{\mathbb{k}} \mathfrak{S}_p \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{k}} C_p$ envoie négligeable sur négligeable, donc induit un foncteur $R: \overline{\text{Rep}}_{\mathbb{k}} \mathfrak{S}_p \rightarrow \overline{\text{Rep}}_{\mathbb{k}} C_p$. Les deux versions du foncteur de Frobenius sont liées par :

$$(8) \quad \text{Fr} = (\text{id} \boxtimes R) \circ \text{Fr}^{\text{en}}.$$

On a aussi la définition plus naïve suivante d'un foncteur de Frobenius. On note DSym^n et Sym^n les foncteurs qui à X associent le plus grand sous-objet et le plus grand quotient \mathfrak{S}_n -invariant, respectivement (puissances divisées, puissances symétriques).

DÉFINITION 4.1. — *Pour X un objet d'une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{C} sur \mathbb{k} de caractéristique $p > 0$, on définit le foncteur Frob^j-linéaire (i.e. l'action des scalaires*

est tordue par la j -ième puissance de l'endomorphisme de Frobenius) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}_+^{(j)} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ X &\longmapsto \mathrm{Triv}_{\mathfrak{S}_{p^j}}(X^{\otimes p^j}) := \mathrm{im}(\mathrm{DSym}^{p^j} X \hookrightarrow X^{\otimes p^j} \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}^{p^j} X). \end{aligned}$$

On note $\mathrm{Fr}_+ := \mathrm{Fr}_+^{(1)}$.

Le foncteur Fr_+ est le facteur direct de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{en}}$ correspondant à l'action triviale de \mathfrak{S}_p :

$$\mathrm{Fr}_+ = (\mathrm{id} \boxtimes \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, -)) \circ \mathrm{Fr}^{\mathrm{en}}.$$

On en déduit que Fr_+ est canoniquement lax et oplax-monoïdal (même définition que foncteur monoïdal, sauf qu'on demande seulement d'avoir des morphismes, pas forcément des isomorphismes, entre $\mathrm{Fr}_+(X) \otimes \mathrm{Fr}_+(Y)$ et $\mathrm{Fr}_+(X \otimes Y)$, compatibles avec les contraintes).

Un résultat important de Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b) est que les différentes notions d'exactitude de Frobenius qu'on pourrait envisager sont en fait les mêmes.

PROPOSITION 4.2 (Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b, Prop. 3.4)

Pour une catégorie prétannakienne \mathcal{C} , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) *Le foncteur Fr est exact ;*
- (ii) *Le foncteur $\mathrm{Fr}^{\mathrm{en}}$ est exact ;*
- (iii) *Le foncteur Fr_+ est exact ;*
- (iv) *Pour tout morphisme non nul $u : \mathbf{1} \rightarrow X$, on a $\mathrm{Fr}_+(u) \neq 0$.*

Il existe un foncteur monoïdal symétrique exact $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ vers une catégorie monoïdale symétrique abélienne \mathbb{k} -linéaire (avec \otimes bilinéaire) qui envoie toute suite exacte courte dans \mathcal{C} sur une suite exacte courte scindée dans \mathcal{D} .

DÉFINITION 4.3. — *Une catégorie prétannakienne \mathcal{C} satisfaisant les conditions équivalentes de la proposition est dite **Frobenius-exacte**.*

Toute catégorie tensorielle symétrique admettant un foncteur tensoriel symétrique vers une catégorie tensorielle symétrique semi-simple (comme Ver_p et ses sous-catégories) est nécessairement Frobenius-exacte.

4.2. Caractérisation interne des catégories Ver_p -tannakiennes

THÉORÈME 4.4 (Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b, Theorem 1.2)

Pour une catégorie prétannakienne \mathcal{C} , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) *\mathcal{C} est tannakienne ;*
- (ii) *\mathcal{C} est Frobenius-exacte, à croissance modérée, et l'endofoncteur Fr_+ , a priori seulement lax-monoïdal, est en fait monoïdal.*

C'est une étape importante dans la preuve du résultat principal, qui caractérise les catégories Ver_p -tannakiennes.

THÉORÈME 4.5 (Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b, Theorem 1.1)

Pour une catégorie prétannakienne \mathcal{C} , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{C} est Ver_p -tannakienne ;
- (ii) \mathcal{C} est Frobenius-exacte et à croissance modérée ;
- (iii) \mathcal{C} est Frobenius-exacte et, pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n X = 0$.

De plus, un Ver_p -foncteur fibre, lorsqu'il existe, est unique à isomorphisme près.

4.3. Résumé des caractérisations internes

Pour \mathcal{C} une catégorie tensorielle symétrique sur $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$ de caractéristique 0, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \text{ tannakienne} &\iff (\forall X \in \mathcal{C}, \dim(X) \in \mathbb{N}) \iff (\forall X \in \mathcal{C}, \text{ad}(X) < \infty), \\ \mathcal{C} \text{ super-tannakienne} &\iff (\forall X \in \mathcal{C}, \text{gd}(X) < \infty) \iff (\forall X \in \mathcal{C}, \text{sd}(X) < \infty). \end{aligned}$$

Pour \mathcal{C} une catégorie tensorielle symétrique Frobenius-exacte sur $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$ de caractéristique $p > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \text{ Ver}_p\text{-tannakienne} &\iff (\forall X \in \mathcal{C}, \text{gd}(X) < \infty) \iff (\forall X \in \mathcal{C}, \text{ad}(X) < \infty), \\ \mathcal{C} \text{ tannakienne} &\iff \text{gd} = \text{ad} < \infty \iff \text{ad} < \infty \text{ multiplicative} \iff \text{Fr}_+ \text{ monoïdal} \\ &\iff \text{ad} < \infty \text{ et } (\forall X \in \mathcal{C}, \forall j, n \in \mathbb{N}, A^n \text{Fr}_+^{(j)} X = 0 \implies A^n X = 0). \end{aligned}$$

5. UNE NOUVELLE FAMILLE DE CATÉGORIES TENSORIELLES SYMÉTRIQUES

Maintenant, on peut se poser la question : y a-t-il des catégories tensorielles symétriques à croissance modérée qui ne sont pas Ver_p -tannakiennes ? Au vu du théorème 4.5, si oui, elles ne peuvent être Frobenius-exactes.

La catégorie Ver_p peut être obtenue comme la semi-simplification $\overline{\text{Tilt } \mathbf{SL}_2(\mathbb{k})} = \text{Tilt } \mathbf{SL}_2(\mathbb{k})/\mathcal{N}$, où \mathcal{N} est l'idéal des morphismes négligeables. S'il y avait d'autres idéaux dans cette catégorie, cela pourrait être une source de nouvelles catégories tensorielles symétriques.

Les modules basculants indécomposables sont classifiés par le plus haut poids : on les notera T_m , avec $m \in \mathbb{N}$. Parmi ceux-ci, les T_{p^n-1} sont très particuliers : ce sont les modules simples, de même plus haut poids, donc de dimension p^n . Il se trouve que \mathcal{N} est l'idéal engendré par T_{p-1} (au sens où c'est le plus petit idéal tensoriel de \mathcal{C} contenant $\text{id}_{T_{p-1}}$).

Soit \mathcal{I}_n l'idéal engendré par T_{p^n-1} . Il contient tous les T_j avec $j \geq p^n - 1$. On a $\mathcal{N} = \mathcal{I}_1 \supset \mathcal{I}_2 \supset \dots$.

THÉORÈME 5.1 (Coulembier, 2021). — *Les idéaux tensoriels de $\text{Tilt } \mathbf{SL}_2(\mathbb{k})$ sont exactement les \mathcal{I}_n .*

La catégorie $\widetilde{\text{Ver}}_{p^n} := \text{Tilt } \mathbf{SL}_2(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$ n'est pas abélienne pour $n \geq 2$ (sauf pour $p = n - 2$). Mais on peut en construire une enveloppe abélienne Ver_{p^n} (Benson, Etingof et Ostrik, 2023 ; Coulembier, 2021), de telle sorte que les projectifs indécomposables soient les T_j pour $p^{n-1} - 1 \leq j \leq p^n - 2$.

Pour définir $M \otimes N$ pour deux objets dans Ver_{p^n} , on peut prendre des résolutions projectives P_\bullet et Q_\bullet ; on montre que $P_\bullet \otimes Q_\bullet$ est exact en dehors du degré 0, et on pose $M \otimes N := H^0(P_\bullet \otimes Q_\bullet)$.

Comme pour Ver_p , on a une factorisation :

$$\text{Ver}_{p^n} = \text{sVec}_{\mathbb{k}} \boxtimes \text{Ver}_{p^n}^+.$$

On a des inclusions $\text{Ver}_{p^n} \subset \text{Ver}_{p^{n+1}}$. On pose $\text{Ver}_{p^\infty} := \bigcup_n \text{Ver}_{p^n}$.

Une autre propriété remarquable est qu'on a un relèvement en caractéristique 0 de ces catégories tensorielles, toutefois il est tressé et pas symétrique : il s'agit de la catégorie définie de façon analogue mais pour les groupes quantiques pour \mathbf{SL}_2 en une racine p^n -ième de l'unité. Lors de la réduction modulaire en caractéristique p , cette racine devient triviale, on obtient des représentations du groupe \mathbf{SL}_2 et le tressage devient symétrique.

CONJECTURE 5.2 (Benson, Etingof et Ostrik, 2023, Conjecture 1.4)

Toute catégorie tensorielle symétrique à croissance modérée sur \mathbb{k} algébriquement clos de caractéristique p admet un foncteur fibre vers Ver_{p^∞} .

Ce serait là un parfait analogue en caractéristique $p > 0$ du résultat de Deligne (2002) !

DÉFINITION 5.3. — *On dit qu'une catégorie tensorielle symétrique \mathcal{C} est incompressible si tout foncteur tensoriel symétrique $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est « injectif », i.e. pleinement fidèle.*

En caractéristique 0, les seules catégories tensorielles symétriques incompressibles connues sont $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ et $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$, on sait que ce sont les seules à croissance modérée et on conjecture qu'il n'y en a pas d'autre. (On sait que les catégories de Deligne (2007) n'admettent pas de foncteur tensoriel symétrique vers une catégorie incompressible.)

En caractéristique p , en plus de $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ et $\text{sVec}_{\mathbb{k}}$, toutes les catégories Ver_{p^n} et $\text{Ver}_{p^n}^+$ sont incompressibles ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ; Benson, Etingof et Ostrik (2023) conjecturent qu'il n'y en a pas d'autre. Ils conjecturent aussi que toute catégorie tensorielle symétrique à croissance modérée sur \mathbb{k} admet un foncteur fibre vers Ver_{p^∞} .

Pour $p > 2$, voici un diagramme montrant les inclusions entre les catégories tensorielles symétriques incompressibles que nous avons rencontrées :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{sVec}_{\mathbb{k}} & \subset & \text{Ver}_p & \subset & \text{Ver}_{p^2} & \subset & \text{Ver}_{p^3} & \subset & \cdots & \subset & \text{Ver}_{p^\infty} \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ \text{Vec}_{\mathbb{k}} & \subset & \text{Ver}_p^+ & \subset & \text{Ver}_{p^2}^+ & \subset & \text{Ver}_{p^3}^+ & \subset & \cdots & \subset & \text{Ver}_{p^\infty}^+ \end{array}$$

(Dans le cas particulier $p = 3$, on a $\text{sVec}_{\mathbb{k}} = \text{Ver}_3$.)

Pour $p = 2$, on a $\text{Vec}_{\mathbb{k}} = \text{sVec}_{\mathbb{k}} = \text{Ver}_2$, de plus le diagramme serait plutôt une chaîne.

6. APPLICATIONS

6.1. Extension de la notion de dimension de Frobenius–Perron

On rappelle que pour une catégorie de fusion \mathcal{C} , on a un unique caractère du groupe de Grothendieck de \mathcal{C} , appelé dimension de Frobenius–Perron et noté $\text{FPdim}: [\mathcal{C}] \rightarrow \mathbb{R}$, prenant des valeurs positives sur les classes des objets simples (Etingof, Gelaki, Nikshych et Ostrik, 2015, §4.5). Il associe à chaque classe d’objet simple $[S]$ le rayon spectral de l’endomorphisme « multiplication par $[S]$ » sur $[\mathcal{C}]$. C’est un outil fondamental pour l’étude des catégories de fusion. Une première application des résultats de Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b) est qu’il est possible d’étendre la notion de Frobenius–Perron de manière consistante à une classe bien plus large de catégories tensorielles symétriques, à savoir les catégories prétannakiennes à croissance modérée, Frobenius-exactes si on est en caractéristique $p > 0$. Ce sera en fait la dimension de croissance gd . De plus, les foncteurs tensoriels symétriques entre telles catégories préservent cette notion de dimension. Le fait que ces catégories ont un foncteur fibre sur Ver_p (où par convention $\text{Ver}_0 = \text{sVec}_{\mathbb{k}}$ si \mathbb{k} est de caractéristique 0) donne des informations très concrètes, car on peut utiliser tout ce qu’on sait sur $[\text{Ver}_p]$. Notamment, cela limite l’ensemble des valeurs que peut prendre cet invariant. Soit $q = \exp(i\pi/p)$, posons

$$\mathcal{O}_p := \begin{cases} \mathbb{Z}[q + q^{-1}] & \text{si } p > 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

(On a donc $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}$ si et seulement si $p \leq 3$.) Pour $p > 2$, une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_p est donnée par :

$$[m]_q := \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}, \text{ avec } 1 \leq m \leq \frac{p-1}{2}.$$

THÉORÈME 6.1 (Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b, Theorem 8.1)

Soit \mathcal{C} une catégorie prétannakienne à croissance modérée, Frobenius-exacte si \mathbb{k} est de caractéristique $p > 0$.

(1) *On a un morphisme d’anneaux*

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{C}] & \longrightarrow & \mathcal{O}_p \\ [X] & \longmapsto & \text{gd}(X) \end{array}$$

et $\text{gd}(X) \geq [\dim(X)]_q$ pour $\dim(X) \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. De plus, si $p > 2$, alors $\text{gd}(X)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{N} des $[m]_q$ avec $1 \leq m \leq \frac{p-1}{2}$.

- (2) *Si \mathcal{C} est une catégorie de fusion, alors la dimension de croissance n’est autre que la dimension de Frobenius–Perron, i.e. $\text{gd}(X) = \text{FPdim } X$.*
- (3) *Pour le foncteur fibre $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ver}_p$, qui existe et est unique, on a $\text{gd}(X) = \text{FPdim } F(X)$.*
- (4) *Si on a un foncteur tensoriel symétrique $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, où \mathcal{C}' vérifie les mêmes conditions que \mathcal{C} , alors $\text{gd}(X) = \text{gd}(H(X))$.*

- (5) \mathcal{C} est tannakienne si et seulement si $\text{gd}(X) = \text{ad}(X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$, si et seulement si ad est multiplicative, i.e. $\text{ad}(X \otimes Y) = \text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ pour tous X et Y dans \mathcal{C} .
- (6) \mathcal{C} est super-tannakienne si et seulement si $\text{gd}(X) \in \mathbb{N}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$.

Donnons juste la preuve du lemme suivant, dont l’hypothèse permet de l’appliquer non seulement immédiatement à Ver_p , mais aussi par exemple à Ver_{p^∞} .

LEMME 6.2 (Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b, Lemma 8.3)

Soit \mathcal{D} une catégorie prétannakienne qui soit réunion de catégories prétannakiennes ayant un nombre fini d’objets simples. Alors pour tout objet X dans \mathcal{D} , on a $\text{FPdim } X = \text{gd}(X)$.

Démonstration. — On peut travailler dans la sous-catégorie tensorielle symétrique $\mathcal{C} := \langle X \rangle$ engendrée par X , qui par hypothèse a un nombre fini d’objets simples. Soit d la dimension de Frobenius–Perron maximale parmi les objets simples de \mathcal{C} . Comme FPdim est un morphisme d’anneaux $[\mathcal{C}] \rightarrow \mathbb{R}$ et qu’un objet simple a une dimension de Frobenius–Perron au moins égale à 1, on a

$$\ell(X^{\otimes n}) \leq \text{FPdim}(X^{\otimes n}) = (\text{FPdim } X)^n \leq d\ell(X^{\otimes n}).$$

La longueur de $X^{\otimes n}$ est donc comprise entre $(\text{FPdim } X)^n/d$ et $(\text{FPdim } X)^n$; on conclut en prenant la racine n -ième et en faisant tendre n vers $+\infty$. \square

6.2. Taux de croissance pour les représentations modulaires des groupes finis

Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b, §8.3) obtiennent des corollaires sur les représentations modulaires de groupes finis au sens classique.

L’étude des représentations modulaires indécomposables des groupes finis est très ardue : par exemple, un p -groupe ne peut avoir un nombre fini de \mathbb{k} -représentations indécomposables que s’il est cyclique, et il n’est de type de représentation modéré que si $|G : G'| \leq 4$; tous les autres cas sont sauvages (Bondarenko et Drozd, 1977). (On renvoie à Benson (1991, §4.4) pour une discussion du type de représentation d’une algèbre, qui peut être fini, modéré ou sauvage.)

Soit \mathbf{G} un schéma en groupes affines sur \mathbb{k} supposé de caractéristique $p > 0$ (par exemple un groupe fini) et soit V dans $\text{Rep } \mathbf{G}$. On s’intéresse aux facteurs directs indécomposables apparaissant dans les puissances tensorielles $V^{\otimes n}$. On peut appliquer directement les résultats précédents pour obtenir des informations sur le nombre $\delta_n(V)$ de facteurs directs indécomposables de dimension première à p dans $V^{\otimes n}$, comptés avec multiplicités. En effet, on interprète ce nombre comme $d_n(X)$, où $X = \overline{V}$ est la semi-simplification de V dans $\overline{\text{Rep } \mathbf{G}}$. La limite $\delta(V) := \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(V)^{1/n}$ existe et est égale à $\text{gd}(X)$. D’après le théorème 6.1(1), δ induit un morphisme d’anneaux $[\text{Rep } \mathbf{G}] \rightarrow \mathbb{R}$ et

$$\delta(V) = \text{gd}(X) \geq [\dim(\overline{V})]_q = [\dim(V)]_q = [\dim_{\mathbb{k}}(V)]_q.$$

D’après le théorème 4.5, on a un Ver_p -foncteur fibre

$$F: \mathcal{C} = \langle X \rangle \rightarrow \text{Ver}_p.$$

On écrit

$$F(X) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} m_k L_k,$$

alors

$$\delta(V) = \text{gd}(X) = \text{FPdim}(F(X)) = \sum_{k=1}^{p-1} m_k [k]_q.$$

Supposons $p > 2$. Avec cette seule équation, $\delta(V)$ ne détermine pas les m_k , mais seulement les $m_k + m_{p-k}$. En effet, rappelons que \mathcal{O}_p est de rang $\frac{p-1}{2}$ et que $[k]_q = [p-k]_q$. Cependant en considérant la deuxième opération d’Adams ψ^2 , en lien avec la notion de super-dimension de Frobenius–Perron (Etingof, Ostrik et Venkatesh, 2017), on peut aussi déterminer les $m_k - m_{p-k}$ et donc au final tous les m_k . Ainsi, des propriétés asymptotiques (taux de croissance) permettent de récupérer l’image dans Ver_p par le foncteur fibre et vice versa.

On renvoie à (Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023b), ainsi qu’à (Benson, 2020b,a; Benson et Symonds, 2020; Coulembier, Etingof et Ostrik, 2023a) pour plus de résultats et de conjectures.

RÉFÉRENCES

- Yves André (2004). *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*. T. 17. Panoramas et Synthèses. Société Mathématique de France, Paris, p. xii+261.
- John W. Barrett et Bruce W. Westbury (1999). « Spherical categories », *Adv. Math.* **143** (2), p. 357-375.
- David Benson (1984). *Modular representation theory : new trends and methods*. T. 1081. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, p. xi+231.
- (1991). *Representations and cohomology. I*. T. 30. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Cambridge University Press, Cambridge, p. xii+224.
- (2020a). « Modular representation theory and commutative Banach algebras », *Mem. Amer. Math. Soc.* Sous presse.
- (2020b). « Some conjectures and their consequences for tensor products of modules over a finite p -group », *J. Algebra* **558**, p. 24-42.
- David Benson et Pavel Etingof (2019). « Symmetric tensor categories in characteristic 2 », *Adv. Math.* **351**, p. 967-999.
- David Benson, Pavel Etingof et Victor Ostrik (2023). « New incompressible symmetric tensor categories in positive characteristic », *Duke Math. J.* **172** (1), p. 105-200.
- David Benson et Peter Symonds (2020). « The non-projective part of the tensor powers of a module », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **101** (2), p. 828-856.

- Vitaliĭ M. Bondarenko et Yurii A. Drozd (1977). « The representation type of finite groups », *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **71**. Modules and representations, p. 24-41, 282.
- Kevin Coulembier (2020). « Tannakian categories in positive characteristic », *Duke Math. J.* **169** (16), p. 3167-3219.
- (2021). « Monoidal abelian envelopes », *Compos. Math.* **157** (7), p. 1584-1609.
- Kevin Coulembier, Pavel Etingof et Victor Ostrik (2023a). « Asymptotic properties of tensor powers in symmetric tensor categories ». URL : <https://arxiv.org/abs/2301.09804>.
- (2023b). « On Frobenius exact symmetric tensor categories », *Ann. of Math. (2)* **197** (3). Avec un appendice par Alexander Kleshchev, p. 1235-1279.
- Pierre Deligne (1990). « Catégories tannakiennes », in : *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*. T. 87. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, p. 111-195.
- (2002). « Catégories tensorielles », *Mosc. Math. J.* **2** (2). Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday, p. 227-248.
- (2007). « La catégorie des représentations du groupe symétrique S_t , lorsque t n'est pas un entier naturel », in : *Algebraic groups and homogeneous spaces*. T. 19. Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, p. 209-273.
- (2011). « Letter to A. Vasiu, Nov. 30, 2011 ». URL : <http://publications.ias.edu/deligne/paper/2653>.
- Pierre Deligne et James S. Milne (1982). « Tannakian categories », in : *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*. Sous la dir. de Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus et Kuang-yen Shih. T. 900. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, p. 101-128.
- Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych et Victor Ostrik (2015). *Tensor categories*. T. 205. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, p. xvi+343.
- Pavel Etingof et Victor Ostrik (2021). « On the Frobenius functor for symmetric tensor categories in positive characteristic », *J. Reine Angew. Math.* **773**, p. 165-198.
- (2022). « On semisimplification of tensor categories », in : *Representation theory and algebraic geometry—a conference celebrating the birthdays of Sasha Beilinson and Victor Ginzburg*. Trends Math. Birkhäuser/Springer, Cham, p. 3-35.
- Pavel Etingof, Victor Ostrik et Siddharth Venkatesh (2017). « Computations in symmetric fusion categories in characteristic p », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2), p. 468-489.
- Sergei Gelfand et David Kazhdan (1992). « Examples of tensor categories », *Invent. Math.* **109** (3), p. 595-617.
- Galim Georgiev et Olivier Mathieu (1994). « Fusion rings for modular representations of Chevalley groups », in : *Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992)*. T. 175. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 89-100.

- James Alexander Green (1962). « The modular representation algebra of a finite group », *Illinois J. Math.* **6**, p. 607-619.
- Alexander Grothendieck (2021). *Récoltes et semailles I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*. T. 437/438. Collect. Tel. Paris : Gallimard.
- Nate Harman et Andrew Snowden (2022). « Oligomorphic groups and tensor categories ». URL : <https://arxiv.org/abs/2204.04526>.
- Gordon James et Adalbert Kerber (1981). *The representation theory of the symmetric group*. T. 16. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., p. xxviii+510.
- Uwe Jannsen (1992). « Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity », *Invent. Math.* **107** (3), p. 447-452.
- Jens Carsten Jantzen (2003). *Representations of algebraic groups*. Second. T. 107. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, p. xiv+576.
- Friedrich Knop (2007). « Tensor envelopes of regular categories », *Adv. Math.* **214** (2), p. 571-617.
- Saunders MacLane (1971). *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, p. ix+262.
- Victor Ostrik (2020). « On symmetric fusion categories in positive characteristic », *Selecta Math. (N.S.)* **26** (3), Paper No. 36, 19.
- Neantro Saavedra Rivano (1972). *Catégories Tannakiennes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265. Springer-Verlag, Berlin-New York, p. ii+418.

Daniel Juteau
 LAMFA
 Université de Picardie Jules Verne
 CNRS
 33 rue Saint-Leu, 80000 Amiens, France
E-mail : daniel.juteau@u-picardie.fr