

MESURES CRISTALLINES ET APPLICATIONS
[d'après P. Kurasov, N. Lev, A. Olevskii, P. Sarnak, et M. Viazovska]

par Yves Meyer

INTRODUCTION

L'étude des mesures cristallines a une longue histoire qui remonte à la formule sommatoire de Poisson et à la preuve de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta, telle qu'elle fut donnée par Riemann lui-même. Ensuite interviennent Jean-Pierre Kahane, Szolem Mandelbrojt, et Andrew Guinand à la fin des années cinquante. Enfin apparaissent Maryna Viazovska et ses collaborateurs. Une mesure cristalline est une mesure atomique sur \mathbb{R}^n dont le support est localement fini et dont la transformée de Fourier au sens des distributions est également une mesure atomique portée par un ensemble localement fini. L'exemple le plus simple est le peigne de Dirac. Soit λ_j une suite strictement croissante de nombres réels positifs. Sous l'hypothèse $\lambda_{j+1} - \lambda_j \geq \beta > 0$, Kahane et Mandelbrojt (1958) ont caractérisé les séries de Dirichlet $\sum_0^\infty c_j \lambda_j^{-s}$ qui convergent dans un demi-plan $\Re s > s_0$ et dont la somme peut se prolonger en une fonction méromorphe dans le plan complexe, ayant un seul pôle en $s = 1$, et vérifiant le même type d'équation fonctionnelle que la fonction zêta de Riemann. Ces auteurs montrèrent qu'une mesure cristalline (en fait, un peigne de Dirac généralisé grâce au théorème de Nir Lev et d'Alexandre Olevskii) est toujours attachée à une telle série de Dirichlet. Cette même année Guinand construisait des mesures cristallines très différentes des peignes de Dirac. Puis le sujet fut abandonné pendant près de trente ans. La découverte des quasi-cristaux par Dan Shechtman en 1982 renouvela l'intérêt porté aux mesures cristallines. En premier lieu Lev et Olevskii observèrent que la preuve donnée par Guinand était incomplète et construisirent une mesure cristalline sur la droite réelle qui ne se réduise pas à un peigne de Dirac généralisé. Ensuite David Donoho et Philip Stark observèrent que l'étude des mesures cristallines peut être reliée au principe d'incertitude de Heisenberg en traitement du signal. Enfin Maryna Viazovska montra que les mesures cristallines sont présentes dans le problème suivant que nous désignerons sous le nom de *problème des restrictions*. Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Une fonction f de la classe de Schwartz peut-elle être reconstruite en utilisant seulement sa restriction à Λ et la restriction de sa transformée de Fourier à F ? En résolvant le *problème des restrictions* Viazovska a, du même coup, trouvé, en

dimension 8 et 24, la solution du problème de Kepler d’empilement optimal de boules d’un rayon donné. Une solution différente du *problème des restrictions* est fournie par un théorème remarquable dû à A. Bondarenko, D. Radchenko et K. Seip.

1. FREEMAN DYSON

Dans un essai intitulé *Birds and frogs*, DYSON (2009) conjecturait l’existence d’un lien entre les quasi-cristaux et l’hypothèse de Riemann :

Like every serious student of pure mathematics, when I was young I had dreams of proving the Riemann Hypothesis. I had some vague ideas that I thought might lead to a proof. In recent years, after the discovery of quasi-crystals, my ideas became a little less vague. I offer them here for the consideration of any young mathematician who has ambitions to win a Fields Medal. Quasi-crystals can exist in spaces of one, two, or three dimensions. From the point of view of physics, the three-dimensional quasi-crystals are the most interesting, since they inhabit our three-dimensional world and can be studied experimentally. From the point of view of a mathematician, one-dimensional quasi-crystals are much more interesting than two-dimensional or three-dimensional quasi-crystals because they exist in far greater variety. The mathematical definition of a quasi-crystal is as follows. a quasi-crystal is a distribution of discrete point masses whose Fourier transform is a distribution of discrete point frequencies. Or to say it more briefly, a quasi-crystal is a pure point distribution that has a pure point spectrum.

En fait, Dyson n’avait pas complètement tort et nous verrons comment et pourquoi les *mesures cristallines* (et non les quasi-cristaux) sont liées à la fonction zêta de Riemann et à ses généralisations (séries L de Dirichlet, fonction zêta d’Epstein).

2. DÉFINITION DES MESURES CRISTALLINES

Quelques notations sont nécessaires. La transformée de Fourier d’une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i y \cdot x) f(x) dx. \quad (1)$$

On désigne par \mathcal{F} l’opérateur ainsi défini. Alors $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un automorphisme et, par dualité, \mathcal{F} est également un automorphisme sur l’espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est **localement fini** si, pour tout $R > 0$, l’ensemble des $x \in E$ vérifiant $|x| \leq R$ est fini. Enfin δ_a ou $\delta_a(x)$ est la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$ définie par $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$ pour toute fonction continue f .

DÉFINITION 2.1. — Une mesure atomique μ sur \mathbb{R}^n est une mesure cristalline si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Le support de μ est un ensemble localement fini,
- (2) La mesure μ est une distribution tempérée,
- (3) La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ est aussi une mesure atomique dont le support est un ensemble localement fini.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$ on définit l'exponentielle imaginaire \mathbf{w}_y par $\mathbf{w}_y(x) = \exp(2\pi i x \cdot y)$. Alors $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ et $\hat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y) \delta_y$ impliquent

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda = \sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y \quad (2)$$

La série $\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ a un sens géométrique évident parce que Λ est localement fini tandis que la série $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$ converge au sens des distributions. On peut donc interpréter (2) en disant que $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est un objet géométrique bien défini dont le développement en série de Fourier est donné par $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$. La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ appartient-elle à une classe d'objets mathématiques ayant une série de Fourier? Ce serait le cas si la mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ était presque périodique. Or il n'est pas vrai que toute mesure cristalline soit une mesure presque périodique. C'est cependant le cas pour la mesure cristalline μ construite par KURASOV et SARNAK (2020), mais pas pour sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$. Enfin il est probable que toute mesure cristalline soit une distribution presque périodique (Y. MEYER, 2017a; SCHWARTZ, 1950).

À chaque mesure cristalline μ est associée une variante de la formule sommatoire de Poisson. En effet, soit μ une mesure cristalline. Alors on a $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ et $\hat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y) \delta_y$. Il en résulte que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \hat{f}(\lambda) = \sum_{y \in F} a(y) f(y) \quad (3)$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit d'une nouvelle formule sommatoire de Poisson.

L'exemple le plus simple de mesure cristalline est le peigne de Dirac $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ pour lequel on a $\hat{\mu} = \mu$ et donc $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$ pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit de la formule sommatoire de Poisson usuelle. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un réseau et soit

$$\Gamma^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exp(2\pi i y \cdot x) = 1, \forall x \in \Gamma\} \quad (4)$$

le réseau dual. On a alors

$$c_\Gamma \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{y \in \Gamma^*} \hat{f}(y) \quad (5)$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. La constante c_Γ est le volume d'un domaine fondamental pour le réseau Γ . Nous élargissons la définition des peignes de Dirac en y incluant, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout réseau Γ , les mesures atomiques de la forme $\sum_{\gamma \in \Gamma + x_0} \delta_\gamma$.

DÉFINITION 2.2. — Soit $N \geq 1$ un entier et soit σ_j , $j = 1, \dots, N$, un peigne de Dirac dont le support est un réseau translaté $x_j + \Gamma_j \subset \mathbb{R}^n$. Soit $F_j \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini et soit $g_j(x) = \sum_{y \in F_j} c_j(y) \exp(2\pi i y \cdot x)$ une somme trigonométrique finie. Posons $\mu_j = g_j \sigma_j$. Alors $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_N$ est un peigne de Dirac généralisé.

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac généralisé est un peigne de Dirac généralisé. Existe-t-il d'autres mesures cristallines? KAHANE et MANDELBROJT (1958) ont abordé cette question tandis que GUINAND (1959) proposait un exemple. Olevskii a attiré mon attention sur cet exemple en me signalant que Guinand n'en donnait pas une démonstration convaincante. La démonstration a pu être complétée grâce à l'aide de Philippe Michel (Y. MEYER, 2017b). Simultanément LEV et OLEVSKII (2016) construisaient une mesure cristalline qui n'est pas un peigne de Dirac généralisé.

En outre, Lev et Olevskii ont démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3 (LEV et OLEVSKII, 2015). — En dimension 1 si μ est une mesure cristalline, si le support Λ de μ et le support S de sa transformée de Fourier sont des ensembles uniformément discrets, alors μ est un peigne de Dirac généralisé.

Rappelons qu'un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est *uniformément discret* s'il existe un $r > 0$ tel que les boules de rayon r centrées en $\lambda \in \Lambda$ soient deux à deux disjointes. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est *relativement dense* s'il existe un $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $|x - \lambda| \leq R$. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est un *ensemble de Delone* s'il est uniformément discret et relativement dense. Les mesures cristallines étudiées dans KAHANE et MANDELBROJT (1958) sont donc des peignes de Dirac généralisés. Lev et Olevskii ont étendu ce résultat en dimension $n \geq 2$ sous l'hypothèse que μ est une mesure positive. Le problème est toujours ouvert si μ est une mesure complexe arbitraire.

3. MESURES CRISTALLINES ET FONCTIONS ZÊTA

L'utilisation de la formule sommatoire de Poisson dans la preuve de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta remonte à Riemann. En 1958 Titchmarsh, Kahane, Mandelbrojt et Guinand ont défini les mesures cristallines, ce qui leur permit d'étendre cette preuve à d'autres séries de Dirichlet. Plus précisément soit $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ une mesure cristalline sur \mathbb{R}^n . Supposons qu'il existe un exposant $s_0 > 0$ tel que

$$\sum_{\{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}} |c(\lambda)| |\lambda|^{-s_0} \quad (6)$$

soit fini. La même condition est imposée à $\hat{\mu}$. Ces deux conditions sont satisfaites dans tous les exemples connus de mesures cristallines. À une telle mesure cristalline μ on associe une fonction $\zeta(\mu, s)$ de la variable complexe s définie par $\zeta(\mu, s) = \sum_{\{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}} c(\lambda) |\lambda|^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$. Cette fonction $\zeta(\mu, s)$ est évidemment analytique dans le demi plan ouvert défini par $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > s_0$. Si $n = 1$ et si μ est un peigne de Dirac on a $\zeta(\mu, s) = 2\zeta(s)$. Si μ est un

peigne de Dirac sur un réseau, alors $\zeta(\mu, s)$ est la fonction zêta d'Epstein. Si χ est un caractère de Dirichlet, si $\chi(-1) = 1$, et si $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(k) \delta_k$, alors $\zeta(\mu, s) = 2L(s, \chi)$.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ une mesure cristalline sur \mathbb{R}^n et soit $\hat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y) \delta_y$ la transformée de Fourier de μ . Soit*

$$\xi(\mu, s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(\mu, s). \quad (7)$$

Alors

$$\xi(\mu, s) - \frac{2a(0)}{n-s} - \frac{2c(0)}{s} = E(\mu, s) \quad (8)$$

est une fonction entière. On a

$$\xi(\mu, s) = \xi(\hat{\mu}, n-s). \quad (9)$$

Ce théorème appartient au folklore du sujet. La preuve est une transcription de la démonstration par Riemann de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta. Il résulte de (8) que $\zeta(\mu, s)$ est une fonction méromorphe dans le plan complexe avec éventuellement un pôle en $s = n$. L'application aux séries $L(s, \chi)$ de Dirichlet est frappante. Soit χ un caractère de Dirichlet primitif de module N et $L(s, \chi) = \sum_1^\infty \chi(m) m^{-s}$. On suppose que $\chi(-1) = 1$ et l'on forme

$$\xi(s, \chi) = (N/\pi)^{s/2} \Gamma(s/2) L(s, \chi). \quad (10)$$

On pose $\tau(\chi) = \sum_1^N \chi(n) \exp(2\pi i n/N)$ et $\alpha(\chi) = \sqrt{N}/\tau(\chi)$. Alors on a

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \alpha(\chi) \xi(s, \chi). \quad (11)$$

Cette remarquable équation fonctionnelle découle du théorème 3.1. Pour le voir on pose $\sigma_\chi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(k) \delta_k$. Cette mesure est un peigne de Dirac généralisé. On a $\zeta(\sigma_\chi, s) = 2L(s, \chi)$. En outre $\hat{\sigma}_\chi = N^{-1} \tau(\chi) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\chi}(-m) \delta_{m/N}$ et l'on conclut en utilisant le théorème 3.1. Si χ n'est pas le caractère principal, $L(s, \chi)$ est une fonction entière dans le plan complexe. Si χ est le caractère principal, $L(s, \chi)$ est méromorphe avec un pôle en $s = 1$.

4. AUTRES FORMULES SOMMATOIRES

La formule sommatoire de Riemann–Weil s'écrit $\hat{\mu} = \sigma + \omega$ où μ est une série de mesures de Dirac étendue aux zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann et σ est une série de mesures de Dirac en $\log(p^m)$, p premier, $m = 1, 2, \dots$. Finalement $\omega(x) = -\log \pi + \Re \psi(1/4 + ix/2)$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Alors une décroissance exponentielle doit être imposée à la fonction de test ϕ pour donner un sens à $\langle \omega + \sigma, \phi \rangle$. La formule des traces de Selberg a une structure similaire avec également un terme intégral. Donc les mesures atomiques d'André Weil (1952) et d'Atle Selberg (1956) ne sont pas des mesures cristallines. Nous verrons que la construction de mesures cristallines intervient naturellement dans le *problème des restrictions*. Ce problème sera étudié dans la section 8. BONDARENKO, RADCHENKO et SEIP (2020) ont découvert une remarquable solution

au *problème des restrictions*. Leur solution s'apparente à la formule sommatoire de Riemann–Weil mais ne comporte pas de terme intégral (voir théorème 9.2).

5. PAVEL KURASOV ET PETER SARNAK

Pavel Kurasov et Peter Sarnak ont démontré le résultat spectaculaire suivant :

THÉORÈME 5.1. — *Il existe un ensemble uniformément discret Λ de nombres réels tel que :*

- (a) *L'espace vectoriel sur \mathbb{Q} engendré par Λ est de dimension infinie.*
- (b) *$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ est une mesure cristalline.*

La première démonstration de ce résultat par Kurasov utilisait ses travaux sur les *quantum graphs*. Cette preuve se situe dans le sillage de la formule des traces de Selberg. Une seconde démonstration repose sur l'analyse complexe. La propriété (a) découle d'un beau résultat de Pierre Liardet. Enfin, et toujours en une variable réelle, RADCHENKO et VIAZOVSKA (2019a) ont caractérisé les mesures cristallines de la forme $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$. Nous présenterons dans la section suivante les grandes lignes d'une preuve géométrique du théorème de Kurasov et Sarnak. Cette nouvelle démonstration ouvre la voie à la construction de mesures cristallines « non triviales » en toute dimension. Une mesure cristalline « triviale » en dimension 2 est le produit tensoriel de deux mesures cristallines en dimension 1.

6. MESURES CRISTALLINES ET QUASI-CRISTAUX

Selon LAGARIAS (2000), un quasi-cristal est un ensemble de Delone Λ tel que *la mesure de diffraction* de la mesure atomique $\mu_\Lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ soit aussi une mesure atomique. Plus généralement Lagarias considère les mesures de Radon μ sur \mathbb{R}^n vérifiant la condition

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\mu|(x + B) = C < \infty \quad (12)$$

où B désigne la boule unité. La mesure μ_Λ vérifie (12) si Λ est un ensemble de Delone. La mesure de diffraction d'une mesure μ vérifiant (12) serait formellement le carré du module de la transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ de μ . Mais $\widehat{\mu}$ est une distribution. La mesure de diffraction $|\widehat{\mu}|^2$ n'a pas de sens et doit être renormalisée. Cette renormalisation s'effectue en « divisant $|\widehat{\mu}|^2$ par des quantités infinies » ce que nous faisons maintenant. Soit χ_R la fonction indicatrice de la boule B_R de centre 0 et de rayon $R \geq 1$ et soit $|B_R|$ le volume de cette boule. On remplace μ par sa version tronquée $\chi_R \mu$ et l'on calcule le carré du module $|\widehat{\chi_R \mu}|^2$ de la transformée de Fourier de cette mesure tronquée. Enfin la mesure de diffraction de μ est la limite, quand R tend vers l'infini, de $g_R = |B_R|^{-1} |\widehat{\chi_R \mu}|^2$, en supposant que cette limite existe au sens de la convergence vague des mesures. Nous

rencontrons une difficulté si nous essayons d’appliquer cette définition à une mesure cristalline. En effet beaucoup de mesures cristallines ne vérifient pas la condition (12) (Y. MEYER, 2017a). On doit donc adopter une définition plus souple de la mesure de diffraction. Pour ce faire on désigne par ϕ une fonction \mathcal{C}^∞ positive ou nulle, à support compact et telle que $\|\phi\|_2 = 1$. On pose $\phi_j(x) = \phi(jx)$, $j \geq 1$. Finalement la mesure de diffraction de μ est la limite, au sens des distributions, quand j tend vers l’infini, de $j^n |\widehat{\mu} * \phi_j|^2$. Si μ est une mesure presque-périodique dont la série de Fourier est $\sum c_j \exp(2\pi i \omega_j \cdot x)$ sa mesure de diffraction est la mesure atomique $\sum |c_j|^2 \delta_{\omega_j}$. Malheureusement une mesure cristalline n’est pas nécessairement une mesure presque-périodique. Cependant si $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda = \sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$ est une mesure cristalline et si nous adoptons la définition souple, alors la mesure de diffraction de μ est $\sum_{y \in F} |a(y)|^2 \delta_y$.

En quoi les mesures cristallines diffèrent-elles des quasi-cristaux ? Si Λ est un quasi-cristal selon Lagarias et si F est un ensemble fini, alors $\Lambda \cup F$ est aussi un quasi-cristal. Ceci est faux pour les mesures cristallines. Si Λ est un ensemble de Delone et si $\mu_\Lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ est une mesure cristalline, Λ est un quasi-cristal, comme le montre la discussion précédente. La réciproque n’est pas vraie. Pour mieux comprendre les ressemblances et les différences entre les quasi-cristaux et les mesures cristallines nous limiterons la discussion à la dimension 1. Voici comment construire une mesure cristalline. On part d’un entier $n \geq 2$ et de n nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On désigne par $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore n dimensionnel et par $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}^n$ l’homomorphisme défini par $h(t) = (\alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)$. Ensuite on désigne par $V \subset \mathbb{T}^n$ une hypersurface sans bord. On suppose que $h(\mathbb{R})$ est partout transverse à V . Soit $d\sigma$ la mesure de surface sur V and soit $\mu = \omega d\sigma$ une mesure supportée par V dont la densité ω est continûment différentiable sur V . Nous sommes presque prêts pour construire une mesure cristalline. Il suffit de dérouler μ sur la droite réelle pour obtenir la mesure atomique $\kappa = \mu \circ h$ qui est notre candidate pour être une mesure cristalline. Cette mesure κ est une combinaison linéaire de mesures de Dirac portées par $\Lambda = \{t \in \mathbb{R}; h(t) \in V\}$. Si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot x) \quad (13)$$

est la série de Fourier de μ sur \mathbb{T}^n alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot \alpha t) \quad (14)$$

est la série de Fourier de la mesure atomique κ . On a posé $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Sous une simple hypothèse spectrale sur μ la mesure atomique κ sera une mesure cristalline. Soit $S \subset \mathbb{Z}^n$ l’ensemble défini par $a(k) \neq 0$. L’hypothèse spectrale est que $F = \{k \cdot \alpha, k \in S\}$ soit localement fini.

Pour démontrer le théorème de Kurasov et Sarnak, il suffit de choisir V et ω de sorte que la propriété spectrale soit satisfaite et que les coefficients de la mesure atomique κ soient égaux à 1. Nous renvoyons à Y. MEYER (2022) pour les détails.

Les quasi-cristaux sont modélisés par les *model sets*. La définition d'un *model set* utilise la recette précédente à ceci près que V est maintenant la projection sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ d'une partie compacte d'un hyperplan affine de \mathbb{R}^n . Alors si en outre V est une hypersurface sans bord, V est nécessairement un translaté d'un sous-groupe fermé de \mathbb{T}^n . Dans ce cas, Λ est un translaté de $a\mathbb{Z}$, $a > 0$, et la mesure cristalline est un peigne de Dirac généralisé.

7. LE TRAITEMENT DU SIGNAL

DONOHO et STARK (1989) ont étudié une classe de signaux f qui peuvent être modélisés par une somme $u + v$ entre une combinaison linéaire u d'un petit nombre de spikes (un spike représente une impulsion très brève et très énergétique) et une combinaison linéaire v d'un petit nombre de structures oscillantes. Le problème est alors d'extraire u du signal donné f . DONOHO et STARK (1989) relient ce problème au principe d'incertitude de Heisenberg. Ces modèles font partie du programme plus général des modèles « multi-couches » (F. G. MEYER, AVERBUCH et COIFMAN, 2002). Par exemple les images peuvent être modélisées par une somme $u + v$ entre une composante u représentant les objets contenus dans l'image et une composante v représentant les textures et le bruit. La composante u a une représentation concise dans une base d'ondelettes tandis que la texture v doit être analysée dans le domaine de Fourier (DONOHO et STARK, 1989; F. G. MEYER, AVERBUCH et COIFMAN, 2002; TROPP, 2008). Nous allons montrer que ces modèles ont un lien avec les mesures cristallines.

Dans la version discrétisée du traitement du signal, la droite réelle est remplacée par l'anneau $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ et les signaux étudiés sont des éléments de l'espace euclidien $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. La norme de $f \in \mathcal{H}$ est simplement $\|f\| = (\sum_{j \in \mathbb{Z}_N} |f(j)|^2)^{1/2}$. La Fast Fourier Transform ou FFT a été développée dans ce cadre discret. On désigne par $|E|$ le cardinal de l'ensemble E . Pour tout $j \in \mathbb{Z}_N$ le *spike* $\mathbf{e}_j \in \mathcal{H}$ est défini par $\mathbf{e}_j(k) = 0$ si $k \neq j$ et $\mathbf{e}_j(j) = 1$. De même pour $k \in \mathbb{Z}_N$ l'*onde* $\mathbf{w}_k \in \mathcal{H}$ est définie par

$$\mathbf{w}_k(m) = N^{-1/2} \exp(2\pi i k m / N), \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

La collection \mathbf{e}_j , $j \in \mathbb{Z}_N$, est la base canonique de \mathcal{H} tandis que \mathbf{w}_k , $k \in \mathbb{Z}_N$, est la base de Fourier. Les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{H}$ sont les produits scalaires $\langle f, \mathbf{w}_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}_N$. Dans ce contexte Donoho et Stark étudient les signaux f qui sont des combinaisons linéaires de quelques spikes et de quelques ondes :

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k \quad (15)$$

où α_λ et β_k sont des coefficients scalaires et $\Lambda \subset \mathbb{Z}_N$ et $F \subset \mathbb{Z}_N$ sont des ensembles finis de petite cardinalité. Si, Λ et F étant donnés, les vecteurs \mathbf{e}_λ , $\lambda \in \Lambda$, et \mathbf{w}_k , $k \in F$, sont linéairement indépendants, alors $\|f\|$ et $(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda|^2 + \sum_{k \in F} |\beta_k|^2)^{1/2}$ sont des normes équivalentes sans que l'on sache pour autant quantifier cette équivalence. Donoho et

Stark ont apporté une réponse à ce problème (théorème 7.2). Si, en raisonnant par l'absurde, les $M = |\Lambda| + |F|$ vecteurs \mathbf{e}_λ , $\lambda \in \Lambda$, et \mathbf{w}_k , $k \in F$ étaient linéairement dépendants, il existerait une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k = 0 \quad (16)$$

Il existerait donc un signal $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda$ qui est porté par Λ et dont la transformée de Fourier $\hat{f} = -\sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{e}_k$ est portée par F . Si $|\Lambda|$ et $|F|$ sont trop petits ceci est interdit par le principe d'incertitude de Heisenberg. Pour préciser ce point on définit un entier H_N par la propriété suivante :

DÉFINITION 7.1. — *L'entier H_N est le plus grand entier H tel que pour tout Λ et tout F la condition $|\Lambda| + |F| \leq H$ entraîne que les vecteurs \mathbf{e}_λ , $\lambda \in \Lambda$, et \mathbf{w}_k , $k \in F$, sont linéairement indépendants.*

DONOHO et STARK (1989) ont démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 7.2. — *Si le produit $|\Lambda||F|$ est strictement inférieur à N , les vecteurs \mathbf{e}_λ , $\lambda \in \Lambda$, \mathbf{w}_k , $k \in F$, sont linéairement indépendants. Plus précisément pour tout $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k$ on a, en posant $\gamma_N = (|\Lambda||F|/N)^{1/2} \in (0, 1)$,*

$$\|f\| \geq (1 - \gamma_N)^{1/2} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda|^2 + \sum_{k \in F} |\beta_k|^2 \right)^{1/2} \quad (17)$$

On a également

$$\|f\| \leq (1 + \gamma_N)^{1/2} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda|^2 + \sum_{k \in F} |\beta_k|^2 \right)^{1/2} \quad (18)$$

Si $|\Lambda||F| = N$ on ne peut pas conclure. Par exemple, si $|\Lambda| = N$ et $F = \{k_0\}$, les N vecteurs \mathbf{e}_λ et le vecteur \mathbf{w}_{k_0} , sont linéairement dépendants. Revenons à (16). Pour N donné nous chercherons les relations non triviales de dépendance linéaire les plus courtes possibles. Ce sont les plus intéressantes.

DÉFINITION 7.3. — *Définissons M_N comme la borne inférieure des longueurs $M = |\Lambda| + |F|$ des relations non triviales (16).*

On a évidemment $M_N = H_N + 1$. TAO (2005) a complété le théorème 7.2 en démontrant le résultat suivant :

THÉORÈME 7.4 (voir TROPP, 2008, Theorem 4). — *On a $2\sqrt{N} \leq M_N \leq N + 1$ et $M_N = N + 1$ si et seulement si N est un nombre premier.*

Disons un mot sur la borne inférieure. Nous supposons que N est un carré parfait ($N = m^2$) et que $|\Lambda| = |F| = m$. Dans ces conditions on choisit $F = \Lambda = \{0, m, 2m, \dots, (m-1)m\}$. Alors on a $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_m + \dots + \mathbf{e}_{(m-1)m} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_m + \dots + \mathbf{w}_{(m-1)m}$. On a bien $M = 2m = 2\sqrt{N}$. On retrouve ici la version discrète des peignes de Dirac. Mais si N est un nombre premier ces peignes de Dirac ne peuvent exister.

En partant de la discussion précédente, KOLOUNTZAKIS (2016) passa du discret au continu et construisit une mesure cristalline sur \mathbb{R} qui n'est pas un peigne de Dirac généralisé. Supposons que l'entier N soit divisible par 4 et soit un carré parfait. Soit $\Lambda_N = \{\frac{1}{4}N, \frac{1}{4}N + 1, \dots, \frac{3}{4}N\}$ et $F_N = \Lambda_N$. On a $|\Lambda_N| + |F_N| = N + 2 > N$. Il existe donc un vecteur non nul $f_N \in \mathcal{H}$ dont le support est inclus dans Λ_N et dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans F_N . Kolountzakis regarde f_N comme une suite N -périodique définie sur \mathbb{Z} . Soit $g_N(x) = \sum_0^{N-1} f_N(k) \exp(2\pi i k x / N)$. Par construction on a $g_N(\ell) = 0$ si $0 \leq |\ell| \leq (N/4) - 1$. Posons $N = m^2$. La mesure atomique $\sigma_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_N(k) \delta_{k/m}$ est m -périodique et l'on a $\hat{\sigma}_m = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_N(\ell) \delta_{\ell/m}$. Kolountzakis utilise alors la remarque suivante :

LEMME 7.5. — *Soit τ_m , $m = 1, 2, \dots$, une suite de mesures cristallines. Supposons que τ_m ainsi que sa transformée de Fourier soient portées par $E_m = \{x; |x| \geq R_m\}$ où R_m tend vers l'infini avec m . Supposons que $\sum_1^\infty \tau_m$ converge au sens des distributions. Alors $\sum_1^\infty \tau_m$ est une mesure cristalline.*

Si, par exemple, on impose $\|f_N\|_2 \leq 1$, ce qui est évidemment possible, la série $\sum_1^\infty \sigma_m$ converge au sens des distributions vers une mesure atomique σ . D'après le lemme 7.5, σ est une mesure cristalline. Cependant σ n'est pas un peigne de Dirac généralisé. En suivant cette approche on peut facilement construire une mesure cristalline σ , qui n'est pas un peigne de Dirac généralisé, et telle que $\hat{\sigma} = \beta\sigma$ où $\beta \in \{1, -1, i, -i\}$.

8. LE PROBLÈME DES RESTRICTIONS

La restriction d'une fonction f à un ensemble E est notée $f|_E$.

DÉFINITION 8.1. — *Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Alors nous dirons que Λ et F se complètent si la propriété suivante est satisfaite : pour toute fonction f appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ les propriétés $f|_\Lambda = 0$ et $\hat{f}|_F = 0$ entraînent $f = 0$.*

Une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ne peut être déterminée par sa restriction à un sous-ensemble fermé Λ de \mathbb{R}^n qui ne soit pas \mathbb{R}^n tout entier. Mais, sous certaines conditions portant sur Λ et F , l'information donnée par $f|_\Lambda$ peut être complétée par celle donnée par $\hat{f}|_F$. Ces deux restrictions $f|_\Lambda$ et $\hat{f}|_F$ déterminent alors f de façon unique. Cela explique la terminologie employée. Si, par exemple, Λ est un réseau, il n'existe pas d'ensemble localement fini F complétant Λ . En sens inverse, voici un exemple en dimension 1 où Λ et F se complètent. Considérons l'ensemble Λ_j des $x \in 2^{-j}\mathbb{Z}$ vérifiant $|x| > 2^{j-2}$. Soit $\Lambda = \bigcup_0^\infty \Lambda_j$. Enfin soit $F = \Lambda$. Alors Λ et F se complètent. On notera que la mesure cristalline de Kolountzakis est portée par Λ . Le lien entre le *problème des restrictions* et la construction des mesures cristallines sera expliqué ci-dessous. Mais quel est le rôle de la classe de Schwartz dans la définition 8.1? Si Λ et F se complètent, si f et \hat{f} appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$, et si $f|_\Lambda = 0$ et $\hat{f}|_F = 0$ a-t-on $f = 0$? Nous ne le savons

pas. Nous faisons maintenant deux hypothèses sur Λ et F . Ces hypothèses sont vérifiées dans l'énoncé du théorème 8.5, mais non dans celui du théorème 9.2. Rappelons que le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$. On suppose que (i) $|\Lambda \cap \{|x| \leq j\}| \leq C_0 j^{N_0}$ pour une certaine constante $C_0 > 0$, un certain exposant $N_0 \geq 0$ et pour tout $j \geq 1$. On suppose également que (ii) la distance entre deux points distincts appartenant à $\Lambda \cap \{|x| \leq j\}$ est supérieure ou égale à $C_1 j^{-N_1}$ pour une certaine constante $C_1 > 0$, un certain exposant $N_1 \geq 0$ et pour tout $j \geq 1$. Dans ces conditions l'ensemble des restrictions à Λ des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace $\mathcal{S}(\Lambda)$ des suites indexées par Λ et ayant une décroissance rapide à l'infini. Nous faisons les mêmes hypothèses (i) et (ii) sur F . Voici l'une des versions quantitatives de la définition 8.1. On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.

CONJECTURE 8.2. — *Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe une constante C et un exposant N tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait :*

$$\|f\|_\infty \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} (1 + |\lambda|)^N |f(\lambda)| + C \sum_{y \in F} (1 + |y|)^N |\widehat{f}(y)|. \quad (19)$$

Cette conjecture peut être précisée.

CONJECTURE 8.3. — *Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe un opérateur linéaire et continu $B: \mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait*

$$u = f|_\Lambda, v = \widehat{f}|_F \Rightarrow f = B(u, v). \quad (20)$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la forme linéaire $f \mapsto f(x_0)$ est évidemment continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. C'est donc aussi une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F)$. Il existe donc deux suites à croissance lente $c(\lambda, x_0)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a(y, x_0)$, $y \in F$, telles que $u = f|_\Lambda$ et $v = \widehat{f}|_F$ entraînent $f(x_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0)u(\lambda) + \sum_{y \in F} a(y, x_0)v(y)$. Finalement

$$\delta_{x_0} = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0)\delta_\lambda + \sum_{y \in F} a(y, x_0)\mathbf{w}_{-y}. \quad (21)$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier au sens des distributions de la mesure atomique $\mu = \delta_{x_0} - \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0)\delta_\lambda$ est la mesure atomique $\sum_{y \in F} a(y, x_0)\delta_{-y}$. Donc μ est une mesure cristalline. Toute solution du *problème des restrictions* donne naissance à une infinité de mesures cristallines, comme le remarque Maryna Viazovska. Mais la réciproque n'est pas vraie. Le peigne de Dirac, qui est une mesure cristalline, ne fournit pas une solution du *problème des restrictions*.

Voici une conjecture légèrement plus forte où l'on précise la dépendance en x_0 des coefficients $c(\lambda, x_0)$ et $a(y, x_0)$ dans (21) :

CONJECTURE 8.4. — *Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe deux familles $c_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a_y(x)$, $y \in F$, de fonctions de la classe de Schwartz telles que pour toute fonction f dans la classe de Schwartz on ait*

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda(x) f(\lambda) + \sum_{y \in F} a_y(x) \hat{f}(y). \quad (22)$$

Nous ne connaissons aucun exemple où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ soit canoniquement isomorphe à $\mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F)$. Dans le cas particulier où $\Lambda = F = \{\pm\sqrt{k}, k = 0, 1, \dots\}$, Danylo Radchenko et Maryna Viazovska ont démontré le beau résultat suivant :

THÉORÈME 8.5 (RADCHENKO et VIAZOVSKA, 2019b). — *En une dimension il existe une suite $a_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$, de fonctions de la classe de Schwartz qui sont paires, à valeurs réelles, et telles que pour toute fonction paire f de la classe de Schwartz on ait*

$$f(x) = \sum_0^\infty a_k(x) f(\sqrt{k}) + \sum_0^\infty \hat{a}_k(x) \hat{f}(\sqrt{k}) \quad (23)$$

où cette série converge uniformément sur tout compact et au sens des distributions vers f .

Ceci devient faux si f est une fonction impaire. En effet considérons $g(x) = \sin(\pi x^2)/\sinh(\pi x)$. On a $g(x) = 0$ si $x = \pm k^{1/2}$, $k = 0, 1, \dots$, et la transformée de Fourier de g est $-ig$.

COROLLAIRE 8.6. — *Soit $\Lambda = \{\pm\sqrt{k}, k = 0, 1, \dots\}$ et $F = \Lambda + \{-1, 0, 1\}$. Alors Λ et F se complètent.*

9. LE PROBLÈME DE KEPLER

Kepler posa le problème de ranger, dans l'espace usuel, une infinité de boules de rayon donné de façon que la densité de cette disposition soit la plus grande possible. Voici la définition de cette densité. On pose $B_R = \{x; |x| \leq R\}$ et l'on désigne par $|B_R|$ le volume de B_R . Ensuite on divise par $|B_R|$ le volume occupé par les boules de rayon donné à l'intérieur de B_R et enfin on calcule la limite supérieure de ce quotient quand R tend vers l'infini. On obtient ainsi la densité de l'empilement. Ce problème peut évidemment être formulé en dimension quelconque. Maryna Viazovska a découvert la disposition optimale en dimensions 8 et 24. Viazovska est partie de l'approche du problème par Henry Cohn et Noam Elkies. Cette approche est basée sur la programmation linéaire utilisée pour les codes correcteurs d'erreurs :

THÉORÈME 9.1 (VIAZOVSKA, 2017, 2018). — *Soit ϕ une fonction à valeurs réelles appartenant à la classe de Schwartz class $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\beta > 0$ un nombre réel tels que $\phi(0) = \hat{\phi}(0) = 1$, $\phi(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \beta$ et $\hat{\phi}(y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Alors la densité d'un empilement de boules dans \mathbb{R}^n ne peut dépasser $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}(\beta/2)^n$.*

Observons que l'on n'affaiblit pas le théorème 9.1 en supposant que ϕ est une fonction radiale. Nous nous concentrerons sur la dimension 8. Le réseau Λ_8 est défini par

$$\Lambda_8 = \{x \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^8; x_1 + \cdots + x_8 \in 2\mathbb{Z}\}. \quad (24)$$

Le réseau dual de Λ_8 est Λ_8 . On a donc pour toute fonction f de la classe de Schwartz

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_8} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_8} \hat{f}(\lambda). \quad (25)$$

VIAZOVSKA (2017, 2018) démontre que la disposition optimale s'obtient avec des boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda \in \Lambda_8$. Ces boules sont deux à deux disjointes (en ignorant les points de contact). Pour démontrer ce résultat Viazovska utilise le théorème 9.1 avec $\beta = \sqrt{2}$. Voici comment Viazovska cherche ϕ (voir aussi OESTERLÉ, 2019). Si ϕ vérifie les conditions du théorème 9.1, on a $\sum_{\lambda \in \Lambda_8} \phi(\lambda) = 1 - a$ où $a \geq 0$ et $\sum_{y \in \Lambda_8} \hat{\phi}(y) = 1 + b$ où $b \geq 0$. Il résulte de (25) que $1 - a = 1 + b$ et donc $a = b = 0$. Il en résulte que ϕ , ainsi que sa transformée de Fourier, sont nulles sur $\Lambda_8 \setminus \{0\}$. Puisque ϕ est une fonction radiale, elle est nulle, ainsi que sa transformée de Fourier, sur toutes les sphères S_m , $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, centrées en 0 et de rayon $\sqrt{2m}$. La recherche de ϕ se rattache donc aux problèmes d'interpolation de la section 8. En utilisant cette observation, Viazovska construit une fonction radiale de la classe de Schwartz $\phi \in \mathbb{R}^8$ telle que $\phi(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \sqrt{2}$, $\hat{\phi} \geq 0$ et $\phi(0) = \hat{\phi}(0) = 1$. On applique alors le théorème de Cohn et Elkies. La densité d'un empilement de boules de rayon r dans \mathbb{R}^8 ne peut donc dépasser $\frac{\pi^4}{384}$. Mais, comme on le vérifie par un calcul direct, $\frac{\pi^4}{384}$ est exactement la densité d'un empilement de boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées sur le réseau Λ_8 . Cela termine la preuve. Observons qu'il y a exactement 240 sphères S_j de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda_j \in \Lambda_8$, $1 \leq j \leq 240$, qui sont tangentes à la sphère de rayon $\sqrt{2}/2$ centrée en 0. Cette configuration est remarquable parce que 240 ne peut être dépassé. C'est, en effet, le *kissing number* en dimension 8. C'est le plus grand nombre de boules disjointes (d'un rayon donné r) qui sont tangentes à une sphère de rayon r .

Dans la solution du *problème des restrictions* donnée par BONDARENKO, RADCHENKO et SEIP (2020) (voir théorème 9.2) l'ensemble des fonctions de test qui est utilisé est un sous-espace \mathcal{E} de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ composé de fonctions entières. Ceci est, en partie, dû au problème posé par l'hypothèse de Riemann. Rien n'assure donc que les mesures atomiques qui interviennent implicitement dans le théorème 9.2 soient des distributions tempérées.

THÉORÈME 9.2. — *Soit \mathcal{R} l'ensemble des zéros non triviaux ρ de la fonction ζ de Riemann. Soit Λ l'ensemble des nombres réels ou complexes $\lambda = \frac{\rho-1/2}{i}$, $\rho \in \mathcal{R}$. Soit $F = \{\frac{\log n}{4\pi}, n \in \mathbb{N}\}$. Alors toute fonction de test paire f dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier a un support compact est déterminée de façon unique par ses valeurs prises sur Λ et par les valeurs prises par sa transformée de Fourier sur F . Si un zéro non trivial $\rho = 1/2 + i\lambda$ apparaît avec une multiplicité égale à $m(\rho)$ les valeurs des $m(\rho) - 1$ dérivées $f^{(m)}(\lambda)$, $0 \leq m \leq m(\rho) - 1$ de f entrent en compte.*

Parce que f est une fonction entière de type exponentiel, elle est déterminée par la connaissance des valeurs $f(\lambda)$. Ceci ne permet cependant pas de reconstruire f de façon stable. Cette reconstruction stable s'effectue grâce à l'information fournie par la restriction à F de la transformée de Fourier de f . On voit ici les différents aspects que peut prendre le *problème des restrictions*.

RÉFÉRENCES

- Andriy BONDARENKO, Danylo RADCHENKO et Kristian SEIP (2020). *Fourier interpolation with zeros of zeta and L-functions*. arXiv : 2005.02996 [math.NT].
- David L. DONOHO et Philip B. STARK (1989). « Uncertainty principles and signal recovery », English. *SIAM J. Appl. Math.* **49** (3), p. 906-931.
- Freeman DYSON (2009). « Birds and frogs », English. *Notices Am. Math. Soc.* **56** (2), p. 212-223.
- Andrew P. GUINAND (1959). « Concordance and the harmonic analysis of sequences », English. *Acta Math.* **101**, p. 235-271.
- Jean-Pierre KAHANE et Szolem MANDELBROJT (1958). « Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson », French. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (3) **75**, p. 57-80.
- Mihail N. KOLOUNTZAKIS (2016). « Fourier pairs of discrete support with little structure », English. *J. Fourier Anal. Appl.* **22** (1), p. 1-5.
- Pavel KURASOV et Peter SARNAK (2020). « Stable polynomials and crystalline measures », English. *J. Math. Phys.* **61** (8), p. 083501, 13.
- Jeffrey C. LAGARIAS (2000). « Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction. » English. In : *Directions in mathematical quasicrystals*. Providence, RI : AMS, American Mathematical Society, p. 61-93.
- Nir LEV et Alexander OLEVSKII (2015). « Quasicrystals and Poisson's summation formula », English. *Invent. Math.* **200** (2), p. 585-606.
- (2016). « Quasicrystals with discrete support and spectrum », English. *Rev. Mat. Iberoam.* **32** (4), p. 1341-1352.
- François G. MEYER, Amir Z. AVERBUCH et Ronald R. COIFMAN (2002). « Multilayered image representation : application to image compression », *IEEE Trans. Image Process.* **11** (9), p. 1072-1080.
- Yves MEYER (2017a). « Guinand's measures are almost periodic distributions », English. *Bull. Hell. Math. Soc.* **61**, p. 11-20.
- (2017b). « Measures with locally finite support and spectrum », English. *Rev. Mat. Iberoam.* **33** (3), p. 1025-1036.
- (2022). « Curved model sets and crystalline measures », in : *Theoretical Physics, Wavelets, analysis, Genomics. An Interdisciplinary Tribute to Alex Grossmann*. Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser/Springer, Cham.

- Joseph OESTERLÉ (2019). « Densité maximale des empilements de sphères en dimensions 8 et 24 [d'après Maryna S. Viazovska et al.] » In : 407. Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135, Exp. No. 1133, 455-478.
- Danylo RADCHENKO et Maryna VIAZOVSKA (2019a). « Fourier interpolation on the real line », English. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **129**, p. 51-81.
- (2019b). « Fourier interpolation on the real line », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **129**, p. 51-81.
- Laurent SCHWARTZ (1950). *Théorie des distributions. Tome I*. French. Actualités Scientifiques Industrielles No. 1091. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX. Paris : Hermann & Cie. 148 p. (1950).
- Terence TAO (2005). « An uncertainty principle for cyclic groups of prime order », English. *Math. Res. Lett.* **12** (1), p. 121-127.
- Joel A. TROPP (2008). « On the linear independence of spikes and sines », English. *J. Fourier Anal. Appl.* **14** (5-6), p. 838-858.
- Maryna VIAZOVSKA (2017). « The sphere packing problem in dimension 8 », *Ann. of Math. (2)* **185** (3), p. 991-1015.
- (2018). « Sharp sphere packings », English. In : *Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018. Volume II. Invited lectures*. Hackensack, NJ : World Scientific ; Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), p. 455-466.

Yves Meyer

13, rue des Potiers,

92260 Fontenay-aux-Roses

E-mail : Yves.Meyer305@orange.fr