

NON-DENSITÉ DES POINTS ENTIERS ET VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE

par Marco Maculan

A supposedly fun thing I'll never do again.

— D. F. Wallace

1. INTRODUCTION

Il est question ici d'une technique introduite par Lawrence et Venkatesh pour montrer la non-densité (pour la topologie de Zariski) des points entiers d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres. Les points rationnels d'une variété projective étant tous entiers et la non-densité dans une courbe étant équivalente à la finitude, la méthode conduit à une nouvelle preuve de la conjecture de Mordell :

THÉORÈME 1.1. — *Soit C une courbe projective lisse connexe de genre $g \geq 2$ sur un corps de nombres K . Alors, l'ensemble $C(K)$ des points K -rationnels de C est fini.*

Cet énoncé, ainsi que les suivants concernant les problèmes à la Shafarevich, ont déjà été discutés dans ce séminaire par SZPIRO (1985) ; j'invite le lecteur à s'y référer.

Le théorème 1.1 a été démontré en premier par FALTINGS (1983, 1984). Par la suite VOJTA (1991) en a donné une preuve combinant les méthodes classiques d'approximation diophantienne avec des arguments dans la veine de MUMFORD, 1965 (voir aussi BOMBIERI, 1990). KIM (2005, 2009) a proposé une approche généralisant les techniques de CHABAUTY (1941).

Quoique la preuve proposée par Lawrence et Venkatesh partage des aspects avec les méthodes de Chabauty et Kim, elle est plus proche à celle de Faltings. Pour en comprendre le fonctionnement, il n'est donc pas inutile de commencer par en retracer les grandes lignes.

1.1. La stratégie de Faltings

On fixe un corps de nombres K et un ensemble fini S de places de K . Grâce à une construction rusée due à KODAIRA (1967) et PARSHIN (1968), on ramène la preuve du théorème 1.1 à celle de la conjecture de Shafarevich pour les courbes :

THÉORÈME 1.2. — *Pour un entier $g \geq 2$, l'ensemble des classes de K -isomorphie de courbes projectives lisses sur K de genre g à bonne réduction en dehors de S est fini.*

En passant à la jacobienne de la courbe, le théorème de Torelli permet de se ramener au problème analogue pour les variétés abéliennes :

THÉORÈME 1.3. — *Pour $g \in \mathbb{N}$, l'ensemble des classes de K -isomorphie de variétés abéliennes sur K de dimension g à bonne réduction en dehors de S est fini.*

La finitude sur laquelle repose à terme la démonstration de l'énoncé précédent est la « conjecture de Shafarevich pour les points », conséquence immédiate de la minoration d'Hermite–Minkowski du discriminant d'un corps de nombres (SERRE, 1997, §4.1) :

THÉORÈME 1.4 (Hermite–Minkowski). — *Pour $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions de degré d de K non ramifiées en dehors de S est fini.*

Combiné avec le théorème de densité de Čeboratev et des arguments élémentaires, il entraîne le résultat de finitude suivant pour les représentations galoisiennes dû à Faltings (DELIGNE, 1985, Théorème 3.1) :

PROPOSITION 1.5. — *Soient \bar{K} une clôture algébrique de K et p un nombre premier. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations continues $\rho: \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$ semi-simples et pures de poids w (par rapport à S et à p) est fini.*

Je rappelle la notion de pureté :

DÉFINITION 1.6. — *Soient \bar{K} une clôture algébrique de K , p un nombre premier, V un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie et w un nombre entier.*

Une représentation continue $\rho: \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}(V)$ est pure de poids w (par rapport à S et à p) si elle est non ramifiée en dehors de S et, pour toute place v de K n'appartenant pas à S et ne divisant pas p , le polynôme caractéristique $P_{v,\rho}$ d'un élément de Frobenius (et donc de tous) en v est à coefficients entiers et toutes ses racines sont de valeur absolue complexe $|\mathbb{F}_v|^{w/2}$.

Pour démontrer le théorème 1.3, Faltings fixe un premier p , considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variétés abéliennes sur } K \\ \text{de dimension } g \text{ à bonne} \\ \text{réduction en dehors de } S \end{array} \right\} / \sim \xrightarrow{\text{T}_p} \left\{ \begin{array}{l} \text{représentations continues} \\ \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} / \sim$$

$$A \longmapsto \text{T}_p(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

associant à une variété abélienne son module de Tate p -adique

$$\text{T}_p(A) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A[p^n](\bar{K})$$

tensorisé par \mathbb{Q}_p et se ramène à montrer la finitude de l'image et des fibres de T_p .

L'hypothèse de Riemann pour les variétés abéliennes sur les corps finis (démontrée par Weil) dit que les représentations en question sont pures de poids -1 . La finitude

de l'image de T_p découle de la semi-simplicité de $T_p(A)$ grâce à la proposition 1.5. La semi-simplicité, ainsi que la finitude des fibres, se ramène par des arguments de TATE (1966) au résultat suivant :

THÉORÈME 1.7. — *Soit A une variété abélienne sur K . Il n'existe qu'un nombre fini de classes de K -isomorphie de variétés abéliennes définies sur K et K -isogènes à A .*

C'est le cœur technique de la preuve de Faltings : cela requiert de comprendre comment la hauteur des variétés abéliennes qu'il introduit change avec les isogénies. L'invariance cherchée est montrée par Faltings en utilisant la théorie des groupes p -divisibles et plus précisément un théorème de RAYNAUD (1974) sur les schémas en groupes finis annulés par p . L'irruption de la théorie de Hodge p -adique dans la démonstration proposée par Lawrence et Venkatesh est en résonance avec ce dernier argument.

Une « nouvelle » preuve de la conjecture de Mordell ne peut donc pas s'appuyer sur la semi-simplicité des modules de Tate démontrée par Faltings. On peut donner une démonstration alternative du théorème 1.7, comme le font MASSER et WÜSTHOLZ (1993) (voir aussi l'exposé de BOST, 1996 dans ce séminaire), ou contourner les questions de semi-simplicité : c'est la deuxième piste que Lawrence et Venkatesh suivent. Néanmoins, leur méthode ne semble pas à ce jour pouvoir fournir une approche aux théorèmes 1.2, 1.3 et à la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres. ⁽¹⁾

1.2. Idée de la preuve de Lawrence et Venkatesh

Soit C une courbe projective lisse sur K de genre $g \geq 2$.

1.2.1. — Lawrence et Venkatesh commencent par une construction auxiliaire.

On fixe un nombre premier ℓ et on considère le groupe $G := \text{Aff}(\ell)$ des transformations affines du corps à ℓ éléments \mathbb{F}_ℓ . On désigne par C' l'espace de modules des revêtements galoisiens $X \rightarrow C$ de groupe G et qui sont ramifiés exactement en un seul point de C . Des tels revêtements existent car le groupe fondamental de C est non abélien, ce qui équivaut à l'hypothèse $g \geq 2$. L'application $\nu: C' \rightarrow C$ associant à un revêtement son point de ramification est un revêtement non ramifié de la courbe C . L'« objet universel » $\mathcal{X} \rightarrow C \times C'$ pour ce problème de modules est un revêtement galoisien de groupe G . Une variante de la construction de Prym fournit une famille de variétés abéliennes $\alpha': A \rightarrow C'$.

On pose $\alpha := \nu \circ \alpha': A \rightarrow C$, on note d la dimension relative de ce morphisme et δ le degré du revêtement ν . Combinant les stratégies de Faltings et de Chabauty, Lawrence et Venkatesh fixent un nombre premier p , une place p -adique v de K et s'intéressent ensuite au diagramme commutatif suivant :

1. Par exemple, en ce qui concerne le théorème 1.3, un obstacle majeur à l'applicabilité de la méthode est la présence de sous-variétés de l'espace de modules des variétés abéliennes donnant lieu à une trop petite monodromie, *e.g.* des sous-variétés de Shimura.

$$\begin{array}{ccc}
C(K) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & C(K_v) \\
\downarrow \tau & & \downarrow \tau_v \\
\left\{ \begin{array}{l} \text{représentations continues} \\ \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}_{2d\delta}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} / \sim & \xrightarrow{\rho} & \left\{ \begin{array}{l} \text{représentations continues} \\ \text{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \rightarrow \text{GL}_{2d\delta}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} / \sim
\end{array}$$

où les flèches τ, τ_v associent à un point c le premier groupe de cohomologie étale p -adique $H_{\text{ét}}^1(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ de $\alpha^{-1}(c)$ et ρ est l'application de restriction à $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$. Si l'on démontre que l'image de τ est finie et les fibres de τ_v sont finies, on a gagné.

1.2.2. Finitude des fibres. — Tout d'abord, on peut choisir le nombre premier p de façon à ce qu'il ne ramifie pas dans K et à ce que les courbes C et C' , ainsi que la famille de variétés abéliennes $A \rightarrow C'$, aient bonne réduction en toute place p -adique de K . Étant fixé un K_v -point o de C , on considère le disque v -adique

$$\Omega := \{x \in C(K_v) : x \equiv o \pmod{p}\}$$

autour de o et on se ramène à montrer que la restriction de τ_v à Ω a fibres finies.

Si jusqu'à présent la stratégie de preuve suit de près celle de Faltings, elle va s'en affranchir nettement à partir de maintenant. L'idée est de « linéariser » le problème par le biais de la théorie de Hodge p -adique, en transformant les représentations galoisiennes en des données d'algèbre linéaire, les *isocristaux filtrés*, pendant p -adique des structures de Hodge. Appliquée à la représentation galoisienne $H_{\text{ét}}^1(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ pour $c \in \Omega$, la théorie de Hodge p -adique fournit le triplet

$$(H_{\text{dR}}^1(\alpha^{-1}(c)/K_v), H^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1), \varphi_c)$$

formé par le premier groupe de cohomologie de de Rham de $\alpha^{-1}(c)$, l'espace des 1-formes différentielles sur $\alpha^{-1}(c)$ et l'opérateur de Frobenius obtenu par comparaison avec le premier groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale de $\alpha^{-1}(c)$.

Par ailleurs le fibré vectoriel $\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C)$ est muni de la connexion de Gauss–Manin : ses sections horizontales convergent p -adiquement sur le disque Ω , donnant lieu à des isomorphismes de « transport parallèle »

$$\chi_c : H_{\text{dR}}^1(\alpha^{-1}(c)/K_v) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^1(\alpha^{-1}(o)/K_v)$$

pour c dans Ω . On obtient ainsi une application de périodes p -adique

$$\begin{array}{ccc}
\text{Per}_o : \Omega & \longrightarrow & \text{Gr}_{d \deg \nu}(H_{\text{dR}}^1(\alpha^{-1}(c)/K_v)) \\
c & \longmapsto & \chi_c(H^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1)).
\end{array}$$

Il découle directement des définitions que si $\tau_v(c) = \tau_v(c')$, alors leurs images $\text{Per}_o(c)$ et $\text{Per}_o(c')$ sont conjugués sous l'action du centralisateur Z dans $\text{GL}(H_{\text{dR}}^1(\alpha^{-1}(c)/K_v))$ de l'opérateur de Frobenius cristallin φ_o .

Soit X l'adhérence pour la topologie de Zariski de l'image de l'application Per_o . Si l'on sait que la dimension de X est strictement plus grande que la dimension de Z , on

peut conclure la preuve. En effet, les solutions à l'équation de Gauss–Manin convergent sur tout le disque

$$\Delta = \{c \in C(\mathbb{C}_p) : c \equiv o\} \cong \{z \in \mathbb{C}_p : |z| < 1\}.$$

L'image de Δ par Per_o ne pouvant pas être contenue dans une orbite Z , l'ensemble

$$F_c := \text{Per}_o^{-1}(Z \cdot \text{Per}_o(c))$$

est, pour c dans Ω , une suite de points « s'accumulant vers la frontière du disque ». D'autre part, les points de Δ à valeurs dans une extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p sont tous contenus dans le disque $\{|z| \leq p^{-1}\}$. Puisque l'ensemble $F_c \cap \{|z| \leq p^{-1}\}$ est fini, il en est *a fortiori* de même pour l'ensemble $F_c \cap \Omega$.

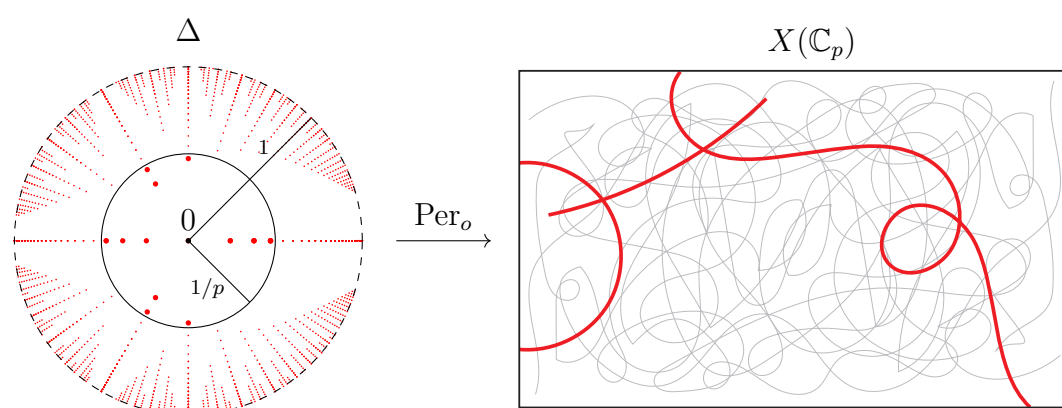


FIGURE 1. À droite, en rouge, l'orbite $Z \cdot \text{Per}_o(c)$ et, en gris, l'image de Per_o , le gribouillis étant censé représenter la densité pour la topologie de Zariski. À gauche, en rouge, la préimage de $Z \cdot \text{Per}_o(c)$ par Per_o : comme pour une fonction holomorphe d'une variable complexe sur un disque ouvert, les zéros peuvent s'accumuler à la frontière ; pourtant, dans un disque compact qu'y est contenu, une telle fonction n'admet qu'un nombre fini de zéros.

Pour avoir l'inégalité $\dim X > \dim Z$, Lawrence et Venkatesh démontrent que la famille de variétés abéliennes $A \rightarrow C'$ a grande monodromie et imposent des conditions arithmétiques sur les fibres du revêtement $\nu : C' \rightarrow C$ (qui sont satisfaites pour des premiers ℓ bien choisis).

1.2.3. Finitude de l'image. — Comme pour Faltings, on veut s'appuyer sur la finitude des représentations galoisiennes pures et semi-simples. La pureté ne pose pas de problème : pour $c \in C(K)$, la décomposition

$$H_{\text{ét}}^1(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p) = \bigoplus_{\nu(c')=c} H_{\text{ét}}^1(\alpha'^{-1}(c'), \mathbb{Q}_p)$$

et l'hypothèse de Riemann pour les variétés abéliennes impliquent que la représentation galoisienne $H_{\text{ét}}^1(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ est pure de poids 1. Donc, si l'on accepte que ces représentations sont semi-simples (comme on le sait d'après Faltings), la démonstration est terminée.

Lawrence et Venkatesh parviennent à s'en passer par des idées similaires à celles qui conduisent à la finitude des fibres. Ils imposent une deuxième contrainte arithmétique sur le revêtement $\nu: C' \rightarrow C$ entraînant la propriété suivante : si la représentation galoisienne $H_{\text{ét}}^1(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ est réductible, alors le sous-espace $H^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1)$ n'est pas en « position générique ».

Les arguments qui précèdent mènent au résultat suivant : il existe un ensemble fini F de Ω tel que, pour tout point c de $C(K) \cap (\Omega \setminus F)$, il existe $c' \in \nu^{-1}(c)$ tel que la représentation galoisienne $H_{\text{ét}}^1(\alpha'^{-1}(c'), \mathbb{Q}_p)$ est irréductible.

Cet énoncé, plus faible que la semi-simplicité de $H_{\text{ét}}^1(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$, demande de changer légèrement la méthode pour parvenir à la finitude de $C(K)$. Le lecteur pourra trouver les détails dans la section 4.

1.3. Problèmes à la Shafarevich pour d'autres variétés

1.3.1. — Les techniques de Lawrence et Venkatesh sont bien adaptées pour montrer la non-densité des points entiers d'une variété algébrique portant une variation de structures de Hodge assez compliquée.

En appliquant cette observation à la famille universelle au-dessus d'un espace de modules (prétendons qu'un tel objet existe...) on peut espérer obtenir des résultats dans le style des théorèmes 1.2 et 1.3 pour d'autres classes de variétés. Mis à part les cas des courbes et des variétés abéliennes, de telles finitudes avaient auparavant été obtenues dans les cas suivants :

- (1) surfaces K3 et certaines variétés hyper-kähler (ANDRÉ, 1996, SHE, 1997, TAKAMATSU, 2020);
- (2) surfaces de del Pezzo (SCHOLL, 1985);
- (3) variétés de drapeaux (JAVANPEYKAR et LOUGHRAN, 2015);
- (4) intersections complètes de niveau ≤ 1 (JAVANPEYKAR et LOUGHRAN, 2017);
- (5) surfaces fibrées en courbes lisses (JAVANPEYKAR, 2015);
- (6) certains solides de Fano (JAVANPEYKAR et LOUGHRAN, 2018);
- (7) certaines surfaces de type général (JAVANPEYKAR et LOUGHRAN, 2021);
- (8) surface de Enriques (TAKAMATSU, 2019).

Les preuves de (1), (4), (5) et (7) reposent sur le théorème 1.3, alors que (2), (3) et (6) découlent de résultats de finitude en cohomologie galoisienne. En s'appuyant sur la conjecture de Lang–Vojta, JAVANPEYKAR et LOUGHRAN (2017) ont dégagé une heuristique pour la finitude d'intersections complètes de degrés fixés (*loc.cit.* Conjecture 1.4).

1.3.2. *Hypersurfaces de l'espace projectif.* — Soient n, d des entiers ≥ 1 . Les hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ sont paramétrées par l'espace projectif $\mathbb{P}(E_{n,d})$ du \mathbb{Z} -module libre $E_{n,d} = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ des polynômes homogènes à coefficients entiers de degré d

en $n + 1$ variables. Les hypersurfaces singulières y forment à leur tour une hypersurface $\Delta_{n,d}$ de degré $(d - 1)^n(n + 1)$ définie par l'annulation du discriminant. On s'intéresse à l'ouvert complémentaire

$$H_{n,d} = \mathbb{P}(E_{n,d}) \setminus \Delta_{n,d},$$

qui paramètre les hypersurfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$; il est stable sous l'action naturelle du groupe PGL_{n+1} . JAVANPEYKAR et LOUGHRAN (2017) montrent qu'étant donné un corps de nombres K et un ensemble fini S de places de K contenant toutes les places archimédiennes, pour $d \geq n + 1$, la conjecture de Lang–Vojta implique la finitude

$$|H_{n,d}(\mathcal{O}_{K,S})/\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathcal{O}_{K,S})| < \infty,$$

où $\mathcal{O}_{K,S}$ est l'anneau des S -entiers de \mathcal{O}_K . Lawrence et Venkatesh obtiennent un premier résultat dans cette direction :

THÉORÈME 1.8. — *Il existe un entier $n_0 \geq 1$ et une fonction $d_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tels que, pour tous $n \geq n_0$, $d \geq d_0(n)$ et tout entier $N \geq 1$, l'ensemble $H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N])$ n'est pas Zariski-dense dans $H_{n,d}$.*

Autrement dit, il existe un polynôme homogène non nul $F \in \mathrm{Sym} E_{n,d}^{\vee}$ s'annulant sur chaque point de $H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N])$. Des expériences numériques suggèrent que $n_0 \sim 60$ suffit, alors qu'une majoration de $d_0(n)$ semble plus difficile à obtenir.

Pour démontrer ce théorème, Lawrence et Venkatesh exploitent la variation de structures de Hodge donnée par la partie primitive du $(n - 1)$ -ème groupe de cohomologie singulière de la famille universelle au-dessus de $H_{n,d}$. Dans ces problèmes diophantiens, c'est la première fois qu'on utilise des groupes de cohomologie que l'on ne peut pas obtenir à partir de variétés abéliennes.

On pourrait envisager de travailler par récurrence sur la dimension pour passer de la non-densité à la finitude dans le théorème 1.8. Cependant, la machinerie de Lawrence et Venkatesh nécessite une « grande » monodromie pour fonctionner : pour obtenir la finitude, il faudrait savoir que la monodromie de la variation de structures de Hodge mentionnée plus haut restreinte à une sous-variété arbitraire de $H_{n,d}/\mathrm{PGL}_{n+1}$ reste grande, or ce n'est pas le cas pour les sous-variétés qui s'envoient dans des sous-variétés spéciales du domaine de périodes correspondant.

1.3.3. Hypersurfaces d'une variété abélienne. — Soient A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K à bonne réduction en dehors d'un ensemble fini S de places (contenant toutes les places archimédiennes) et \mathcal{A} le schéma abélien sur $\mathcal{O}_{K,S}$ en lequel elle s'étend.

Soit L un fibré en droites ample sur A . Les hypersurfaces (*i.e.* les diviseurs de Cartier effectifs) H de A telles que le fibré en droites $\mathcal{O}(H)$ est isomorphe à L sont paramétrées par l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(A, L))$ et celles singulières y forment un diviseur $\Delta_{A,L}$. On considère l'ouvert complémentaire

$$H_{A,L} = \mathbb{P}(H^0(A, L)) \setminus \Delta_{A,L}.$$

Le fibré en droites L s'étend de manière unique en un fibré en droites \mathcal{L} sur \mathcal{A} . On désigne par $\Delta_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$ l'adhérence de Zariski de $\Delta_{A,L}$ dans $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{A},\mathcal{L}))$ et par $H_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$ le complémentaire $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{A},\mathcal{L})) \setminus \Delta_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$. À la différence des hypersurfaces de l'espace projectif, LAWRENCE et SAWIN (2020) parviennent à montrer la finitude suivante :

THÉORÈME 1.9. — *L'ensemble $H_{\mathcal{A},\mathcal{L}}(\mathcal{O}_{K,S})$ est fini pour $g = 2$ et $g \geq 4$.*

Autrement dit, il n'existe qu'un nombre fini d'hypersurfaces lisses H dans A dont l'adhérence dans \mathcal{A} est à bonne réduction en dehors de S et telles que le fibré en droites $\mathcal{O}(H)$ soit isomorphe à L .

Lorsque A est une surface abélienne, le théorème 1.9 est une conséquence facile du théorème 1.2 (LAWRENCE et SAWIN, 2020, Theorem 11.6). En dimension ≥ 4 , le théorème 1.9 est d'autant plus intéressant que sa preuve est indépendante des résultats de finitude déjà cités.

Quand la variété abélienne A est de dimension 3, la finitude faisant l'objet du théorème 1.9 est démontrée sous une condition supplémentaire (vraisemblablement non nécessaire) portant sur le nombre d'auto-intersection L^3 du fibré en droites L . Pour l'énoncer, on considère les suites d'entiers $(a_i)_{i \geq 1}$ et $(d_i)_{i \geq 1}$ définies par $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ et, pour $i \geq 1$,

$$a_{i+2} = 4a_{i+1} - a_i + 1, \quad d_i = \frac{1}{6} \binom{a_{i+1} + a_i}{a_i}.$$

On a $d_1 = 1$, $d_2 = 8\,855$ et $d_3 = 36\,030\,431\,772\,522\,503\,316$.

THÉORÈME 1.10. — *Avec les notations ci-dessus, on suppose $g = 3$. Si le nombre entier $L^3/3!$ n'est divisible par aucun des nombres d_i ($i \geq 2$), alors l'ensemble $H_{\mathcal{A},\mathcal{L}}(\mathcal{O}_{K,S})$ est fini.*

En particulier, c'est vrai pour tout L satisfaisant à l'inégalité $L^3/3! < d_2$.

Par opposition à l'espace projectif, les variétés abéliennes disposent d'un degré de liberté supplémentaire : elles ne sont pas simplement connexes. Les revêtements topologiques non triviaux, donnés en l'occurrence par la multiplication par un entier, seront l'ingrédient clé pour accéder à la finitude (en contraste avec la simple non-densité du théorème 1.8).

L'innovation principale dans la preuve des théorèmes 1.9 et 1.10 réside dans l'argument de grande monodromie. En effet, les théorèmes 1.1 et 1.8 font intervenir des considérations topologiques à l'allure plus classique—respectivement, la production de twists de Dehn pour le premier (cf. théorème 2.14), l'application par BEAUVILLE (1986) de résultats de EBELING (1984) et JANSSEN (1983) dans le deuxième. Par contre, dans le cas des hypersurfaces de variétés abéliennes, l'argument repose sur des techniques tannakiennes, dans la veine des travaux de KRÄMER et WEISSAUER (2015a,b) et de KRÄMER (2016, 2021).

1.4. *Excusatio non petita, accusatio manifesta*

La suite de ce texte n'est consacrée qu'à la preuve proposée par Lawrence et Venkatesh du théorème 1.1, avec un accent particulier sur la partie arithmétique et en sacrifiant malheureusement des aspects topologiques tout aussi intéressants.

1.5. Remerciements

Au cours de la rédaction de ce texte j'ai eu plaisir de discuter avec un grand nombre de personnes : G. Ancona, O. Benoist, Y. Brunenbarbe, J. Fresán, A. Javanpeykar, T. Krämer, C. Lehn, J. Marché, J. Poineau, M. Romagny, A. Torzewski. Je les remercie de m'avoir écouté et fait part de leurs connaissances. Merci à J. Fresán pour sa relecture attentive d'une première version de ce texte ainsi que pour les dessins.

1.6. Conventions

Une *variété algébrique* X sur un corps k est un k -schéma séparé de type fini. Si k' est une extension du corps k , on désigne par $X_{k'}$ la variété algébrique sur k' déduite de X par extension des scalaires. Une *courbe* sur un schéma noethérien S est un S -schéma $C \rightarrow S$ séparé, de type fini, lisse, de dimension relative 1 et à fibres géométriques connexes.

2. FINITUDE DES POINTS ENTIERS SUR LES COURBES HYPERBOLIQUES

2.1. Énoncé

2.1.1. Schémas fini-abéliens. — Les familles de variétés abéliennes paramétrées par des revêtements non ramifiés d'une courbe joueront un rôle prominent (comme elles le font déjà dans la preuve de Faltings, la construction de Kodaira–Parshin pouvant s'interpréter ainsi). Par commodité on leur donne un nom :

DÉFINITION 2.1. — *Soit S un schéma noethérien. Un schéma fini-abélien (polarisé) sur S est la donnée (S', A, λ) d'un S -schéma fini étale $\nu: S' \rightarrow S$, d'un schéma abélien $\alpha': A \rightarrow S'$ et d'une polarisation $\lambda: A \rightarrow \check{A}$ du schéma abélien A .*

Le morphisme $\alpha := \nu \circ \alpha': A \rightarrow S$ détermine les morphismes α' et ν , car ν est la factorisation de Stein du morphisme α . Pour cette raison on l'omettra de la notation.

Lorsque S est une variété complexe lisse connexe et s est un \mathbb{C} -point de S , la fibre $\alpha^{-1}(s)$ est la réunion disjointe des variétés abéliennes $A_{s'} := \alpha'^{-1}(s')$, pour s' dans $\nu^{-1}(s)$, d'où la décomposition

$$(1) \quad H^1(\alpha^{-1}(s), \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\nu(s')=s} H^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}).$$

du premier groupe de cohomologie singulière à coefficients rationnels. L'action de monodromie du groupe fondamental $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ sur $H^1(\alpha^{-1}(s), \mathbb{Q})$ est soumise à deux contraintes :

- (1) Elle respecte la décomposition (1), mais pas terme à terme : pour tout lacet γ dans $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ et tout point $s' \in \nu^{-1}(s)$, l'automorphisme $\rho(\gamma)$ induit un isomorphisme \mathbb{Q} -linéaire $H^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(A_{\gamma s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$.
- (2) Pour tout point $s' \in \nu^{-1}(s)$, la forme alternée non dégénérée $\omega_{s'}$ induite par la polarisation de A est invariante par le sous-groupe $\pi_1(S'(\mathbb{C}), s')$. Il en découle que l'image par ρ du sous-groupe d'indice fini $\bigcap_{\pi(s')=s} \pi_1(S'(\mathbb{C}), s')$ de $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ est contenue dans $\prod_{\nu(s')=s} \mathrm{Sp}(H^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \omega_{s'})$.

DÉFINITION 2.2. — Soit S une variété complexe lisse et connexe. Avec les notations ci-dessus, un schéma fini-abélien A sur S a grande monodromie si pour un point $s \in S(\mathbb{C})$ (et donc pour tous) l'adhérence de Zariski de l'image de ρ contient le sous-groupe

$$\prod_{\pi(s')=s} \mathrm{Sp}(H^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \omega_{s'}) \subseteq \mathrm{GL}(H^1(\alpha^{-1}(s), \mathbb{Q})).$$

2.1.2. Stagnation galoisienne. — Soit K un corps de nombres. Soit v une place de K . Soient \bar{K} et \bar{K}_v des clôtures algébriques respectivement des corps K et K_v .

DÉFINITION 2.3. — Soient $r > 0$, E un ensemble fini non vide muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et $\iota: \bar{K} \rightarrow \bar{K}_v$ un plongement étendant l'injection canonique $K \rightarrow K_v$. La v -stagnation (de paramètre r) de E est le nombre rationnel

$$\mathrm{stag}_v(E, r) := \frac{|\{e \in E : |\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v).e| \leq r\}|}{|E|},$$

le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ agissant sur E via l'injection dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ induite par ι .

La v -stagnation ne dépend pas du plongement choisi. Étant donné un K -schéma fini E , sa v -stagnation est celle de l'ensemble $E(\bar{K})$ muni de son action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$; elle ne dépend pas de la clôture algébrique choisie.

Exemple 2.4. — L'algèbre A des fonctions régulières sur un K -schéma fini étale E est un produit (fini) d'extensions finies (séparables) de K . On écrit $A \otimes_K K_v = L_1 \times \cdots \times L_n$ pour des extensions finies L_i de K_v . Soit N_r^- (resp. N_r^+) le nombre d'homomorphismes de K_v -algèbres $A \otimes_K K_v \rightarrow \bar{K}_v$ dont l'image est une extension de degré $\leq r$ (resp. $> r$) de K_v . Alors, la v -stagnation de E est donnée par

$$\mathrm{stag}_v(E, r) = \frac{N_r^-}{N_r^- + N_r^+} = \sum \frac{[L_i : K_v]}{\dim_K A},$$

la somme à droite parcourant les indices $i \in \{1, \dots, n\}$ pour lesquels $[L_i : K_v] \leq r$.

On n'appliquera la notion de v -stagnation que lorsque l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ est non ramifiée en v . Soient \mathbb{F}_v et $\bar{\mathbb{F}}_v$ les corps résiduels de K_v et \bar{K}_v respectivement. Par définition, le groupe d'inertie, noyau de la flèche de réduction $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v)$, opère trivialement sur E . L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ se factorise alors à travers une action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v)$ et, pour $e \in E$,

$$|\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v).e| = |\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v).e| = |\langle \mathrm{Fr}_v \rangle . e|,$$

où $\langle \text{Fr}_v \rangle$ est le sous-groupe engendré par l'automorphisme de Frobenius $\text{Fr}_v : x \mapsto x^{|\mathbb{F}_v|}$.

LEMME 2.5. — Soient $r > 0$, v une place de K , E, E' des ensembles finis non vides munis d'actions continues de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ et $E \rightarrow E'$ une application $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -équivariante surjective dont les fibres ont toutes le même cardinal. Alors,

$$\text{stag}_v(E, r) \leq \text{stag}_v(E', r).$$

C'est une application immédiate de l'exercice de comptage suivant : soient X, Y des ensembles finis non vides munis d'une action d'un groupe fini G et $f : X \rightarrow Y$ une application G -équivariante, surjective dont les fibres ont toutes le même cardinal. Alors, pour tout $r > 0$,

$$\frac{|\{x \in X : |Gx| \leq r\}|}{|X|} \leq \frac{|\{y \in Y : |Gy| \leq r\}|}{|Y|}.$$

2.1.3. Places admissibles. — Un corps de nombres est à multiplication complexe (CM en bref) s'il n'admet pas de plongements réels et s'il est extension quadratique d'un sous-corps totalement réel. Soit K un corps de nombres. Si K contient un sous-corps CM, il existe un plus grand sous-corps totalement réel F^+ de K et une unique extension quadratique F de F^+ contenue dans K qui est CM.

DÉFINITION 2.6. — Si K ne contient pas de sous-corps CM, une place v de K est admissible si elle est non ramifiée. Si K contient un sous-corps CM F , une place v de K est admissible si elle est non ramifiée et elle est au-dessus d'une place de F^+ inerte dans F .

2.1.4. Énoncé. — Dans le cas des courbes, le cœur de la méthode de Lawrence–Venkatesh se résume par l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.7. — Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K contenant celles archimédiennes, C une courbe sur $\mathcal{O}_{K,S}$, $\alpha : A \rightarrow C$ un schéma fini-abélien de dimension relative d , p un premier impair qui ne ramifie pas dans K et tel que S ne contient pas de places p -adiques, et v une place p -adique admissible de K .

Si le schéma fini-abélien A a grande monodromie et $r \geq \lfloor 8d/(d+1) \rfloor$, alors l'ensemble

$$\{c \in C(\mathcal{O}_{K,S}) : \text{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < 1/(d+1)\}$$

est fini (rappelons que $\nu : C' = \text{Spec } \alpha_* \mathcal{O}_A \rightarrow C$ est la factorisation de Stein de α).

Des commentaires :

- (1) Dans LAWRENCE et VENKATESH (2020), ce résultat n'est énoncé que pour les courbes projectives de genre ≥ 2 , évidemment le cas le plus intéressant. Néanmoins, j'ai penché pour cette formulation afin de garder trace des hypothèses utilisées dans sa preuve.
- (2) Dans les applications, on choisira des schémas fini-abéliens tels que tout $\mathcal{O}_{K,S}$ -point de C satisfait à la condition $\text{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < 1/(d+1)$. Le théorème 2.7 implique alors la finitude de $C(\mathcal{O}_{K,S})$.

(3) La condition $r \geq [8d/(d+1)]$ est une reformulation de l'inégalité

$$(2) \quad \frac{1}{2}d(d+1)n > (2d)^2,$$

pour tout entier $n > r$, que l'on verra apparaître dans la preuve de la Proposition 4.8. Elle s'interprète de la façon suivante :

Soit c un K -point de C . Pour un point c' du K_v -schéma $\nu^{-1}(c) \times_K K_v$, on désigne par $A_{c'}$ la variété abélienne sur le corps résiduel $K_v(c')$ de c' , fibre en c' de l'unique morphisme $\alpha' : A \rightarrow C'$ tel que $\alpha = \nu \circ \alpha'$. Le terme $\frac{1}{2}d(d+1)$ est la dimension de la grassmannienne lagrangienne $\mathrm{LGr}_d(V_{c'})$ des sous-espaces vectoriels de dimension d du $K_v(c')$ -espace de vectoriel $V_{c'} := H_{\mathrm{dR}}^1(A_{c'}/K_v(c'))$ de dimension $2d$, qui sont totalement isotropes par rapport à la forme bilinéaire alternée induite par la polarisation de A . Le terme à gauche de (2) est la minoration de la dimension de la restriction à la Weil

$$\mathfrak{H}_{c'} := \mathrm{Res}_{K_v(c')/K_v} \mathrm{LGr}_d(V_{c'})$$

de $\mathrm{LGr}_d(V_{c'})$ pour c' tel que $[K_v(c') : K_v] > r$. La variété $\mathfrak{H}_{c'}$ est un facteur du but de l'application de périodes associée à la connexion de Gauss–Manin sur $H_{\mathrm{dR}}^1(A/C)$.

Le terme $(2d)^2$ est une majoration (triviale) de la dimension du centralisateur Z du Frobenius cristallin dans $\mathrm{Res}_{K_v(c')/K_v} \mathrm{GL}(V_{c'})$. L'inégalité (2) assure que les orbites de Z dans $\mathrm{Res}_{K_v(c')/K_v} \mathrm{LGr}_d(V_{c'})$ ne sont pas la grassmannienne tout entière.

(4) L'origine du terme $1/(d+1)$ est plus difficile à cerner. L'hypothèse

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < 1/(d+1)$$

va entraîner qu'il existe un point c' de $\nu^{-1}(c) \times_K K_v$ de degré $[K_v(c') : K_v] > r$ pour lequel la filtration de Hodge de $H_{\mathrm{dR}}^1(A_{c'}/K_v(c'))$ est en position « générale » (voir proposition 4.11).

(5) Il y a une tension entre l'hypothèse de grande monodromie et celle de petite stagnation : de manière heuristique, plus le degré du revêtement ν grandit (ce qui suit de l'hypothèse de petite stagnation), plus l'hypothèse de grande monodromie est forte.

Par exemple, on ne peut pas appliquer l'énoncé tout court à la famille de Legendre de courbes elliptiques : l'application ν étant l'identité dans ce cas, pour tout $r \geq 1$ la stagnation vaut toujours $1 > \frac{1}{2} = \frac{1}{d+1}$. Moins formellement, la famille de Legendre a certes grande monodromie, mais les stabilisateurs des Frobenius cristallins sont trop grands. On peut néanmoins appliquer la méthode à la composition de la famille de Legendre avec le revêtement de Kummer $\lambda \mapsto \lambda^{2^n}$ pour un n bien choisi. On obtient alors la finitude des solutions à l'équation des S -unités.

(6) Dans la preuve *rien* de propre aux variétés abéliennes n'est utilisé ! Elles y sont seulement pour incarner le *premier* groupe de cohomologie étale et de de Rham.

2.2. La droite projective privée de trois points : l'équation des S -unités

En guise de premier exemple, on va appliquer le théorème 2.7 à une variante de la famille de Legendre de courbes elliptiques. Ceci conduit au théorème des S -unités :

THÉORÈME 2.8. — *Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K contenant toutes les places archimédiennes. Alors, l'ensemble*

$$U := \{t \in \mathcal{O}_{K,S}^\times : 1 - t \in \mathcal{O}_{K,S}^\times\}$$

est fini.

On renvoie au livre de BOMBIERI et GUBLER (2006, Chapitre 5) pour une preuve classique de ce résultat. Le lien avec le théorème 2.7 est vite fait en remarquant que l'ensemble U n'est autre que l'ensemble des $\mathcal{O}_{K,S}$ -points du schéma $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Par le théorème d'Hermité–Minkowski (théorème 1.4), et quitte à faire grandir K et S , on se ramène sans trop de peine à montrer l'énoncé suivant (voir LAWRENCE et VENKATESH, 2020, début de §4) :

PROPOSITION 2.9. — *Soient K un corps de nombres contenant les racines 8-ièmes de l'unité, $n \geq 8$ la plus grande puissance de 2 divisant l'ordre du groupe des racines de l'unité de K , S un ensemble fini de places de K contenant toutes les places 2-adiques et toutes les places archimédiennes, et L une extension galoisienne cyclique de K de degré n non-ramifiée en dehors de S .*

Alors, l'ensemble U'_L des éléments $u \in U$ qui ne sont pas des carrés dans K et tels que la K -algèbre $K[x]/(x^n - u)$ est isomorphe à L est fini.

On désigne par K un corps de nombres, par n la plus grande puissance de 2 divisant l'ordre du groupe des racines de l'unité de K et par S un ensemble fini de places de K contenant toutes les places 2-adiques et toutes les places archimédiennes. On considère :

- $C = \mathbb{P}_{\mathcal{O}_{K,S}}^1 \setminus \{\infty, 0, 1\}$ la droite projective sur $\mathcal{O}_{K,S}$ privée des sections ∞ , 0 et 1 ;
- $C' = \mathbb{P}_{\mathcal{O}_{K,S}}^1 \setminus \{\infty, 0, \mu_n\}$ l'ouvert de C où l'on a retiré les sections correspondant aux racines n -ièmes de l'unité ;
- $\nu: C' \rightarrow C$ le morphisme fini étale $\lambda \mapsto \lambda^n$.

La famille de Legendre est la famille de courbes elliptiques sur C d'équation affine

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

En se restreignant à l'ouvert C' de C , on obtient un schéma abélien $\alpha': A \rightarrow C'$. On considère le schéma fini-abélien $\alpha := \nu \circ \alpha': A \rightarrow C$. Des considérations simples faisant intervenir la connaissance explicite de la monodromie de l'équation hypergéométrique montrent que le schéma fini-abélien a grande monodromie (LAWRENCE et VENKATESH, 2020, Lemma 4.3 ou NOORDMAN, 2021, Proposition 4.1).

Pour obtenir la proposition 2.9 on applique le théorème 2.7 au schéma fini-abélien $\alpha: A \rightarrow C$. Pour $d = 1$ on a $8d/(d+1) = 4$: c'est pour cela que l'on suppose $n > 4$. La preuve du théorème 2.7 dans ce cas spécifique est décidément plus

simple, parce que les représentations cristallines qu’y interviennent (des modules de Tate p -adiques de courbes elliptiques) sont explicites (voir LAWRENCE et VENKATESH, 2020, Lemma 4.4).

Démonstration de la proposition 2.9. — Soit L une extension cyclique de K de degré n non ramifiée en dehors de S . Par le théorème de Čebotarev, il existe un nombre premier impair p et une place v de K au-dessus de p tels que

- (1) p est non ramifié dans K ;
- (2) S ne contient pas de place p -adique de K ;
- (3) un élément de Frobenius en v engendre $\text{Gal}(L/K)$.

Dire que l’opérateur de Frobenius engendre $\text{Gal}(L/K)$ implique, pour tout nombre réel $0 < r < [L : K]$, l’annulation

$$\text{stag}_v(\text{Spec } L, r) = 0.$$

Pour un $\mathcal{O}_{K,S}$ -point λ de C , le $\mathcal{O}_{K,S}$ -schéma $\nu^{-1}(\lambda)$ s’identifie à $\text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}[x]/(x^n - \lambda)$. Si l’on suppose que λ appartient à U'_L , alors le $\mathcal{O}_{K,S}$ -schéma $\nu^{-1}(\lambda)$ est isomorphe à $\text{Spec } \mathcal{O}_{L,T}$. On obtient de cette façon, l’inclusion suivante :

$$U'_L \subseteq \{\lambda \in C(\mathcal{O}_{K,S}) : \text{stag}_v(\nu^{-1}(\lambda), 4) = 0\}.$$

On conclut par le théorème 2.7. □

Remarque 2.10. — Par un argument classique à la Chevalley–Weil de relèvement des points S -entiers le long des revêtements étales (SERRE, 1997, §4.2), le théorème de l’équation des S -unités se déduit de celui de Faltings. Il en est de même pour la finitude des points S -entiers d’une courbe elliptique épointée. On peut aussi démontrer cette dernière comme application du théorème 2.7 à un schéma fini-abélien bien choisi (LIU, 2021 ; NOORDMAN, 2021).

2.3. Constructions à la Kodaira–Parshin

La construction de Kodaira–Parshin dans la preuve originelle de Faltings fournit, pour tout point rationnel de la courbe, un revêtement galoisien abélien non ramifié en dehors du point choisi. Pour déduire la conjecture de Mordell du théorème 2.7, on l’appliquera à une variante non abélienne de cette construction.

2.3.1. Espaces de Hurwitz. — Soient X et Y des schémas noethériens. Un morphisme $f: Y \rightarrow X$ est un *revêtement* s’il est fini, plat, surjectif et son discriminant est un diviseur de Cartier effectif sur X (le mot « discriminant » étant à prendre au sens de [Stacks Project, Section 0BVH](#)). Un revêtement $f: Y \rightarrow X$ est *galoisien* si, pour tout point géométrique x de X , le groupe $\text{Aut}(f)$ agit transitivement sur la fibre de f en x . Pour un groupe fini G , un *G -revêtement* est la donnée d’un revêtement galoisien $f: Y \rightarrow X$ et d’un isomorphisme de groupes $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(f)$. La notion d’isomorphisme de G -revêtements est définie de manière évidente.

Soient C une courbe projective sur un corps de caractéristique nulle k et G un groupe fini. Pour un k -schéma noethérien S , on désigne par $\mathcal{H}_{C,G}(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de G -revêtements $X \rightarrow C \times_k S$ avec X une courbe sur S et tels que le discriminant est de la forme $r[c]$ pour une section $c: S \rightarrow C \times_k S$ et un entier $r \geq 1$. L'association $S \rightsquigarrow \mathcal{H}_{C,G}(S)$ donne lieu à un foncteur contravariant

$$\mathcal{H}_{C,G}: (\text{Sch}/k)^{\text{op}} \longrightarrow (\text{Ens}),$$

où (Sch/k) désigne la catégorie des k -schémas noethériens. On considère la restriction $\mathcal{H}_{C,G}^{\text{red}}$ de $\mathcal{H}_{C,G}$ à la sous-catégorie pleine des k -schémas réduits.

THÉORÈME 2.11. — *Soit C une courbe projective sur un corps de caractéristique nulle k . Soit G un groupe fini à centre trivial. Alors,*

- (1) le foncteur $\mathcal{H}_{C,G}^{\text{red}}$ est représentable par un k -schéma de type fini $H_{C,G}$;
- (2) le morphisme $\text{disc}: H_{C,G} \rightarrow C$ associant à un revêtement le support de son discriminant est fini étale.

Esquisse de démonstration. — La représentabilité du foncteur $\mathcal{H}_{C,G}$ est un cas particulier de construction des espaces de Hurwitz. Pour un entier $r \geq 1$, d'après BERTIN et ROMAGNY (2011, Théorème 6.3.1), ⁽²⁾ le foncteur $\mathcal{H}'_{C,G,r}$, associant à tout k -schéma S l'ensemble des classes d'isomorphie de G -revêtements $X \rightarrow C \times_k S$ dont le discriminant est de degré r , est représentable par un k -schéma $H'_{C,G,r}$. Soit $\text{Div}^r(C)$ le schéma dont les points à valeurs dans un k -schéma S sont les diviseurs effectifs de Cartier de $C \times_k S$ plats sur S et de degré relatif r (BOSCH, LÜTKEBOHMERT et RAYNAUD, 1990, §9.3, Proposition 3). Le morphisme $\text{disc}: H'_{C,G,r} \rightarrow \text{Div}^r(C)$ qui, à un revêtement fait correspondre son discriminant, est fini (*loc.cit.*, Proposition 6.5.2).

On considère le sous-foncteur $\mathcal{H}_{C,G,r}$ de $\mathcal{H}_{C,G}$ formé par les revêtements dont le discriminant est de degré r . Le foncteur $\mathcal{H}_{C,G,r}$ est alors représenté par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} & \longrightarrow & H'_{C,G,r} \\ \downarrow & & \downarrow \text{disc} \\ C & \xrightarrow{\Delta} & \text{Div}^r(C), \end{array}$$

où Δ est le morphisme envoyant un S -point x de C vers le diviseur $r[x]$. À priori, le schéma \tilde{H} n'est pas réduit : sa réduction $H_{C,G,r} := \tilde{H}_{\text{red}}$ représente la restriction $\mathcal{H}_{C,G,r}^{\text{red}}$ du foncteur $\mathcal{H}_{C,G,r}$ à la sous-catégorie pleine formée par les k -schémas réduits. Le foncteur $\mathcal{H}_{C,G}^{\text{red}}$ est représenté par la réunion disjointe $H_{C,G}$ des k -schémas de type fini $\mathcal{H}_{C,G,r}$ pour $1 \leq r \leq |G| - 1$.

Pour vérifier que le morphisme disc est étale, on se ramène au cas $k = \mathbb{C}$. On peut alors raisonner de manière topologique comme dans FULTON (1969, §1.3) en disant que,

2. Dans *loc.cit.* il est plutôt question du *champ* de Hurwitz : la trivialité du centre de G assure que l'espace de modules grossier attaché au champ est un espace de modules fin.

pour deux points voisins dans $C(\mathbb{C})$, un revêtement ramifié en l'un peut être déformé en un revêtement ramifié en l'autre. \square

Soient \bar{k} une clôture algébrique de k , c un k -point C et \bar{c} le \bar{k} -point associé. La fibre $\text{disc}^{-1}(\bar{c})$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de G -revêtements $X \rightarrow \bar{C} := C_{\bar{k}}$ non ramifiés en dehors de \bar{c} , où X est une courbe projective sur \bar{k} . Par la correspondance « de Galois » des revêtements, le choix d'un \bar{k} -point x dans $\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}$ donne lieu à une bijection

$$(3) \quad \text{disc}^{-1}(\bar{c}) \longleftrightarrow F_{\bar{c}} := \left\{ \begin{array}{l} \text{homomorphismes surjectifs } \rho: \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}, x) \rightarrow G \\ \text{non triviaux sur les lacets autour de } x \end{array} \right\} / G$$

la locution « non triviaux sur les lacets autour de x » signifiant que la surjection ρ ne se factorise pas à travers l'homomorphisme naturel $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}, x) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}, x)$ induit par l'inclusion de $\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}$ dans \bar{C} . (Le groupe G agit sur l'ensemble des homomorphismes $\rho: \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}, x) \rightarrow G$ par conjugaison.) Le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ opère naturellement sur la fibre $\text{disc}^{-1}(\bar{c})$. D'autre part, via la suite courte exacte géométrique/arithmétique du groupe fondamental étale,

$$1 \longrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}, x) \longrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(C \setminus \{c\}, x) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1,$$

le groupe $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ opère par automorphismes extérieures sur $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}, x)$. Les automorphismes intérieurs de $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}, x)$ agissant trivialement sur $F_{\bar{c}}$, on obtient une action naturelle de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $F_{\bar{c}}$ de sorte que la bijection avec $\text{disc}^{-1}(\bar{c})$ est Galois équivariante.

2.3.2. G -monodromie. — Soient G un groupe fini, n un entier positif et $\iota: G \rightarrow \mathfrak{S}_n$ une injection de G dans le groupe symétrique sur n éléments. Pour un schéma connexe X , on dit qu'un revêtement étale $f: Y \rightarrow X$ de degré n a G -monodromie s'il existe un point géométrique x de X et une bijection $\{1, \dots, n\} \rightarrow f^{-1}(x)$ tels que l'application composée $\pi_1^{\text{ét}}(X, x) \rightarrow \text{Aut}(f^{-1}(x)) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ a pour image $\iota(G)$. Si c'est le cas, une telle bijection existe alors pour tout point géométrique de X .

On fixe un point géométrique x de X . Pour $i = 1, 2$, soient $f_i: Y_i \rightarrow X$ un revêtement à G -monodromie et $\{1, \dots, n\} \rightarrow \text{Aut}(f_i^{-1}(x))$ comme ci-dessus. Alors, les revêtements f_1 et f_2 sont isomorphes si et seulement ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées sous le normalisateur de $\iota(G)$ dans \mathfrak{S}_n .

Soient ℓ un nombre premier impair et $\text{Aff}(\ell)$ le groupe des automorphismes affines de \mathbb{F}_ℓ . Le caractère

$$\begin{aligned} \chi: \text{Aff}(\ell) &\longrightarrow \mathbb{F}_\ell^\times \\ (z \mapsto az + b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

a pour noyau le sous-groupe engendré par $z \mapsto z + 1$.

En identifiant \mathbb{F}_ℓ avec $\{1, \dots, \ell\}$ de la manière usuelle, l'action naturelle du groupe $\text{Aff}(\ell)$ sur \mathbb{F}_ℓ est fidèle et induit une injection $\iota: \text{Aff}(\ell) \rightarrow \mathfrak{S}_\ell$. Le choix de ι n'a guère d'importance car tout monomorphisme $\text{Aff}(\ell) \rightarrow \mathfrak{S}_\ell$ lui est conjugué par \mathfrak{S}_ℓ .

LEMME 2.12. — Soient C, C' des courbes projectives sur un corps de caractéristique nulle k et $\pi: C' \rightarrow C$ un revêtement avec $\text{Aff}(\ell)$ -monodromie. Supposons que le diviseur de ramification de π soit supporté exactement sur un k -point c de C . Alors,

- (1) le diviseur de ramification est $(\ell - 1)[c]$;
- (2) la fibre $\pi^{-1}(c)$ est constituée d'un unique k -point de C' ;
- (3) si la courbe C a genre g , alors le genre de la courbe C' est

$$g\ell - \frac{\ell - 1}{2}.$$

Démonstration. — Quitte à étendre les scalaires, on peut supposer k algébriquement clos. Le groupe fondamental étale de $C \setminus \{c\}$ est la complétion profinie du groupe libre sur $2g$ éléments $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$.⁽³⁾ L'image dans $\text{Aff}(\ell)$ du produit des commutateurs $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ est un ℓ -cycle.

En effet, elle est non triviale car le revêtement π est ramifié et, par commutativité de \mathbb{F}_ℓ^\times , contenue dans le noyau du caractère $\chi: \text{Aff}(\ell) \rightarrow \mathbb{F}_\ell^\times$: elle est donc de la forme $x \mapsto x + u$ avec $u \in \mathbb{F}_\ell$. Il en découle qu'il n'y a qu'un point au-dessus de c . L'expression du genre de C' est une conséquence immédiate de la formule de Riemann–Hurwitz. \square

2.3.3. Construction de Prym. — Soit ℓ un premier impair. Soit C une courbe projective de genre $g \geq 2$ sur un corps k de caractéristique nulle. On suppose que C a un point k -rationnel. Le centre du groupe affine $G := \text{Aff}(\ell)$ étant trivial, on peut considérer le schéma $H := H_{C,G}$ paramétrant les $\text{Aff}(\ell)$ -revêtements de C . Soit $X \rightarrow H \times_k C$ la famille universelle des G -revêtements de C .

On désigne par $T = \mathbb{F}_\ell^\times$ le stabilisateur de $0 \in \mathbb{F}_\ell$ dans G , à savoir, le sous-groupe de G formé par les automorphismes linéaires de \mathbb{F}_ℓ . Le quotient Y de X par T est une courbe sur H . Le morphisme G -invariant $X \rightarrow H \times_k C$ induit un revêtement fini $\pi: Y \rightarrow H \times_k C$ à G -monodromie dont le diviseur de ramification est le graphe de disc: $H \rightarrow C$ compté avec multiplicité ℓ (cf. lemme 2.12).

On définit une section de la projection $\text{pr}_H \circ \pi: Y \rightarrow H$ de la manière suivante. La fibre $\pi_h: Y_h \rightarrow C_{\kappa(h)}$ du morphisme π en un point $h \in H$ est un revêtement avec G -monodromie de courbes sur le corps résiduel $\kappa(h)$ de h . D'après le lemme 2.12, la fibre de π_h en le $\kappa(h)$ -point disc(h) de $C_{\kappa(h)}$ consiste en un unique $\kappa(h)$ -point que l'on note $\sigma(h)$.

On considère la composante neutre du schéma de Picard relatif $\text{Pic}_{Y/H}^0$: c'est un schéma abélien principalement polarisé sur H . D'après le lemme 2.12 sa dimension relative est $g\ell - (\ell - 1)/2$. Le morphisme π induit un morphisme

$$\pi^*: H \times_k \text{Pic}_{C/k}^0 = \text{Pic}_{H \times C/H}^0 \longrightarrow \text{Pic}_{Y/H}^0$$

3. Pour voir cela, on se ramène d'abord au cas $k = \mathbb{C}$ grâce à l'invariance par extensions des scalaires du groupe fondamental étale géométrique. Sur le corps des complexes, le groupe fondamentale étale est la complétion profinie du groupe fondamental topologique. Or, le groupe fondamental topologique d'une surface de Riemann compacte de genre g privée d'un point est le groupe libre sur $2g$ éléments.

de schémas abéliens sur H . Le morphisme $N: \text{Pic}_{Y/H}^0 \rightarrow H \times_k \text{Pic}_{C/k}^0$ dual à π^* associe à un fibré en droites sur Y sa norme sur $C \times_k H$. Soit $\alpha': A \rightarrow H$ le schéma abélien obtenu comme composante neutre du noyau du morphisme N , muni de la polarisation induite par la polarisation principale du schéma abélien $\text{Pic}_{Y/H}^0$.

DÉFINITION 2.13. — *Le schéma fini-abélien $\alpha := \text{disc} \circ \alpha': A \rightarrow C$ est appelé la famille de Kodaira–Parshin pour le groupe $\text{Aff}(\ell)$.*

La dimension relative de la famille de Kodaira–Parshin est

$$(4) \quad g\ell - \frac{\ell - 1}{2} - g = (g - \frac{1}{2})(\ell - 1).$$

Le morphisme $\text{disc}: H \rightarrow C$ est la factorisation de Stein de α .

THÉORÈME 2.14. — *Soit $k = \mathbb{C}$. Alors, la famille de Kodaira–Parshin $\alpha: A \rightarrow C$ est un schéma fini-abélien avec grande monodromie.*

Esquisse de démonstration. — On désigne par ν le morphisme disc et on fixe un \mathbb{C} -point c de C . La fibre $\nu^{-1}(c)$ de ν en c s’interprète comme l’ensemble des classes d’isomorphie des revêtements à G -monodromie ramifiés exactement en c . Le *mapping class group* de la surface époincée $C \setminus \{c\}$ agit donc naturellement sur $\nu^{-1}(c)$. On considère l’intersection Γ de tous les stabilisateurs.

Pour un point h de $\nu^{-1}(c)$, le groupe Γ agit sur $H^1(Y_h, \mathbb{Q})$ en préservant la forme d’intersection. Si $H_{\text{pr}}^1(Y_h, \mathbb{Q})$ désigne l’orthogonal de l’image de $\pi_h^*: H^1(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(Y_h, \mathbb{Q})$, on a une application

$$\mu: \Gamma \longrightarrow \prod_{\nu(h)=c} \text{Sp}(H_{\text{pr}}^1(Y_h, \mathbb{Q})).$$

On se ramène sans trop de peine à démontrer que l’image de μ est Zariski-dense. Une variante du lemme de Goursat entraîne qu’il suffit de vérifier les deux faits suivants :

- (1) pour tout $h \in \nu^{-1}(c)$, l’image de $\Gamma \rightarrow \text{Sp}(H_{\text{pr}}^1(Y_h, \mathbb{Q}))$ est Zariski-dense ;
- (2) pour tous $h, h' \in \nu^{-1}(c)$ distincts, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que les éléments $\text{pr}_h(\mu(\gamma))$ et $\text{pr}_{h'}(\mu(\gamma))$ sont unipotents et les espaces qu’ils fixent ont dimensions différentes.

Les deux énoncés se démontrent en produisant des éléments unipotents des groupes $\text{Sp}(H_{\text{pr}}^1(Y_h, \mathbb{Q}))$. En l’occurrence, ils seront des transvections sur $H_{\text{pr}}^1(Y_h, \mathbb{Q})$ induites par des twists de Dehn associés à des courbes simples sur $C \setminus \{c\}$. Je dois me contenter de donner une idée très sommaire de comment leur choix judicieux est fait. On commence en donnant une forme normale d’un revêtement $\pi_h: Y_h \rightarrow C$; on exploitera le fait que le groupe G est extension des groupes cycliques \mathbb{F}_ℓ^\times et \mathbb{F}_ℓ .

La composée de la représentation de monodromie $\rho_h: \pi_1(C \setminus \{c\}) \rightarrow \text{Aff}(\ell)$ avec le caractère $\chi: \text{Aff}(\ell) \rightarrow \mathbb{F}_\ell^\times$ se factorise par l’homologie de la surface C . On fixe un isomorphisme $\mathbb{F}_\ell^\times \simeq \mathbb{Z}/(\ell - 1)$. L’homomorphisme $H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/(\ell - 1)$ qui en résulte envoie la classe d’un cycle vers le nombre d’intersection, pris modulo $\ell - 1$, avec une courbe simple non séparante α passant par c .

Le complémentaire d'un voisinage tubulaire V de α est une surface à bord C' telle que la composée

$$\pi_1(C') \longrightarrow \pi_1(C \setminus \{c\}) \xrightarrow{\pi_h} \text{Aff}(\ell) \xrightarrow{\chi} \mathbb{F}_\ell^\times$$

est triviale. À nouveau, l'homomorphisme $\pi_1(C') \rightarrow \text{Ker } \chi = \mathbb{F}_\ell$ qui s'en déduit envoie un lacet vers le nombre d'intersection, pris modulo ℓ , avec un arc β reliant les deux composantes de bord de C' .

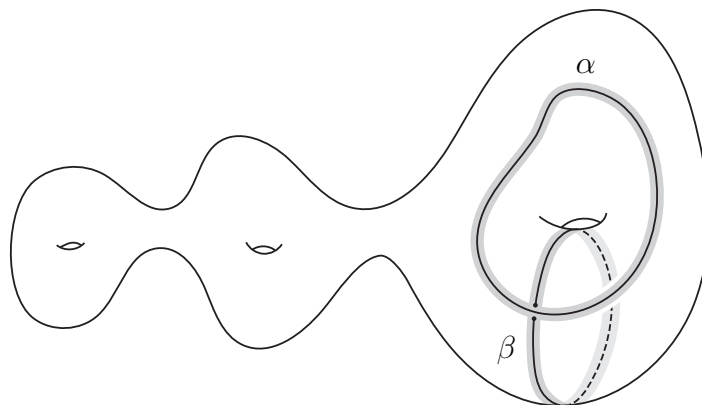


FIGURE 2. La courbe α , l'arc β et leurs voisinages tubulaires V et W . On voit sur la figure que la surface à bord $V \cup W$ est homéomorphe à un tore à bord.

Soit W un voisinage tubulaire de β . La surface $T := V \cup W$ est un tore à bord dont le complémentaire S est une surface à bord (de genre $g - 1$). Par construction, la représentation de monodromie est triviale sur S et sur le bord de T . Les twists de Dehn cherchés sont fabriqués à partir de courbes simples sur $T \setminus \{c\}$. \square

2.4. La conjecture de Mordell

2.4.1. Stagnation des familles de Kodaira–Parshin. — Soient C une courbe projective sur K de genre g , ℓ un nombre premier et $\alpha: A \rightarrow C$ la famille de Kodaira–Parshin pour le groupe $\text{Aff}(\ell)$.

Pour un ensemble fini S de places de K assez grand, la famille de Kodaira–Parshin s'étend en une famille finie-abélienne polarisée sur un $\mathcal{O}_{K,S}$ -schéma projectif lisse à fibres géométriquement connexes de dimension relative 1. Avec un abus de notation, on désigne encore par $\alpha: A \rightarrow C$ une telle extension. Soit $\nu: C' = \text{Spec } \alpha_* \mathcal{O}_A \rightarrow C$ la factorisation de Stein de α . Soit \bar{K} une clôture algébrique de K .

Soit p un premier impair qui ne ramifie pas dans K et tel que S ne contient pas de place p -adique, et soit v une place p -adique de K .

PROPOSITION 2.15. — Soit $c \in C(K)$. Avec les notations ci-dessus, on suppose

- (1) ℓ congru à 3 modulo 4;
- (2) les entiers $|\mathbb{F}_v|$ et $\ell - 1$ premiers entre eux;
- (3) pour tout premier impair q divisant $\ell - 1$, la classe de $|\mathbb{F}_v|$ dans \mathbb{F}_q^\times d'ordre ≥ 8 .

Alors,

$$\text{stag}_v(\nu^{-1}(\bar{c}), 7) \leq 7 \frac{2^{g+1}}{(\ell-1)^g}.$$

Le reste de ce numéro est consacré à la preuve de cet énoncé. On commence par un lemme simple dont la preuve est laissée au lecteur (voir LAWRENCE et VENKATESH, 2020, Lemma 2.11) :

LEMME 2.16. — *On considère l'homomorphisme de groupes $t: \text{Aff}(\ell)^{2g} \rightarrow (\mathbb{F}_\ell^\times)^{2g}$ et l'application $u: \text{Aff}(\ell)^{2g} \rightarrow \text{Aff}(\ell)$, définis par*

$$\begin{aligned} t(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) &:= (\chi(a_1), \chi(b_1), \dots, \chi(a_g), \chi(b_g)). \\ u(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) &:= [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]. \end{aligned}$$

Soit N le sous-ensemble de $\text{Aff}(\ell)^{2g}$ formé des $2g$ -uplets $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ engendrant $\text{Aff}(\ell)$ et vérifiant $u(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) \neq \text{id}_{\mathbb{F}_\ell}$. Alors,

(1) *l'image de t par N est l'ensemble des $2g$ -uplets engendrant \mathbb{F}_ℓ^\times :*

$$t(N) = \{(\tau_1, \dots, \tau_{2g}) : \langle \tau_1, \dots, \tau_{2g} \rangle = \mathbb{F}_\ell^\times\};$$

(2) *pour tout $x \in N$,*

$$|t^{-1}(t(x)) \cap N| = \ell^{2g}(\ell-1).$$

Par construction, la fibre $\nu^{-1}(\bar{c})$ s'identifie de manière Galois équivariante aux classes de conjugaisons des épimorphismes $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}) \rightarrow \text{Aff}(\ell)$ ne se factorisant pas à travers l'application canonique $\rho: \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C})$. La composition d'une telle surjection avec la projection $\sigma: \text{Aff}(\ell) \rightarrow \mathbb{F}_\ell^\times$ donne lieu à une application Galois équivariante

$$\Phi_c: \nu^{-1}(\bar{c}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}), \mathbb{F}_\ell^\times).$$

Un homomorphisme continu surjectif de groupes $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}) \rightarrow \text{Aff}(\ell)$ est déterminé par la donnée de $2g$ éléments $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ de $\text{Aff}(\ell)$. De plus, un tel homomorphisme se factorise à travers $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C})$ si et seulement si le produit des commutateurs $[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g]$ est l'élément neutre.

En reprenant les notations du Lemme 2.16, le choix des générateurs de l'image de $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\})$ qui précède permet d'identifier la fibre $\nu^{-1}(\bar{c})$ avec le quotient $N/\text{Aff}(\ell)$ de N par l'action de conjugaison de $\text{Aff}(\ell)$, le groupe abélien $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_\ell^\times)$ avec $(\mathbb{F}_\ell^\times)^{2g}$ et l'application Φ_c avec t . D'après la description explicite de Φ_c et le lemme 2.16 (2), les fibres de Φ_c ont toutes le même cardinal et donc

$$\text{stag}_v(\nu^{-1}(\bar{c}), 7) \leq \text{stag}_v(\text{Im } \Phi_c, 7).$$

Pour conclure la preuve de la proposition 2.15, il suffit de borner la v -stagnation de l'image de Φ_c , c'est-à-dire de majorer le nombre d'éléments d'orbite de taille ≤ 7 et de minorer le cardinal de $\text{Im } \Phi_c$.

LEMME 2.17. — Avec les notations introduites ci-dessus,

- (1) $|\operatorname{Im} \Phi_c| \geq \frac{1}{2}(\ell - 1)^{2g},$
 (2) $|\{x \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_{\ell}^{\times}) : |\langle \operatorname{Fr}_v \cdot x \rangle| \leq 7\}| \leq 7 \cdot 2^g(\ell - 1)^g.$

Démonstration. — (1) Via le lemme 2.16 (1) on identifie l'image de Φ_c à l'ensemble des épimorphismes $(\mathbb{F}_{\ell}^{\times})^{2g} \rightarrow \mathbb{F}_{\ell}^{\times}$. Prendre le produit tensoriel d'un tel épimorphisme avec le $\mathbb{Z}/(\ell - 1)$ -module $\operatorname{Hom}(\mathbb{F}_{\ell}^{\times}, \mathbb{Z}/(\ell - 1))$ libre de rang 1 met en bijection l'ensemble précédent avec l'ensemble des épimorphismes $(\mathbb{Z}/(\ell - 1))^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}/(\ell - 1)$, ou encore (par dualité) avec les éléments de $(\mathbb{Z}/(\ell - 1))^{2g}$ engendrant un sous-module libre. Si q est un nombre premier, il y a $q^{2gr}(1 - q^{-2g})$ éléments de $(\mathbb{Z}/q^r\mathbb{Z})^{2g}$ engendrant un sous- $\mathbb{Z}/q^r\mathbb{Z}$ -module libre. En prenant le produit sur les premiers divisant $\ell - 1$,

$$|\operatorname{Im} \Phi_c| = (\ell - 1)^{2g} \prod_{\substack{q|\ell-1 \\ \text{premier}}} (1 - q^{-2g}) \geq \frac{1}{2}(\ell - 1)^{2g},$$

où l'on a utilisé l'inégalité

$$\prod_{\substack{q|\ell-1 \\ \text{premier}}} (1 - q^{-2g})^{-1} < \prod_{\substack{q|\ell-1 \\ \text{premier}}} (1 - q^{-2})^{-1} < \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2.$$

- (2) Par commutativité de $\mathbb{F}_{\ell}^{\times}$, la précomposition avec ρ induit un isomorphisme

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_{\ell}^{\times}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \setminus \{\bar{c}\}), \mathbb{F}_{\ell}^{\times}).$$

L'abélianisé du groupe fondamental étale de \bar{C} s'identifie de manière Galois équivariante au module de Tate de la jacobienne J de C . Le groupe $\mathbb{F}_{\ell}^{\times}$ étant de $(\ell - 1)$ -torsion,

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_{\ell}^{\times}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell - 1], \mathbb{F}_{\ell}^{\times}).$$

L'accouplement de Weil $J[\ell - 1] \times J[\ell - 1] \rightarrow \mu_{\ell-1}$ induit par dualité un accouplement parfait et compatible à l'action de Galois

$$\langle -, - \rangle : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell - 1], \mathbb{F}_{\ell}^{\times}) \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell - 1], \mathbb{F}_{\ell}^{\times}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mu_{\ell-1}, (\mathbb{F}_{\ell}^{\times})^{\otimes 2}),$$

où $(\mathbb{F}_{\ell}^{\times})^{\otimes 2}$ désigne la deuxième puissance tensorielle du $\mathbb{Z}/(\ell - 1)$ -module inversible $\mathbb{F}_{\ell}^{\times}$. Comme la courbe C a bonne réduction en v , l'action de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $J[\ell - 1]$ est non ramifiée. L'endomorphisme de Frobenius $\operatorname{Fr}_v \in \operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v)$ opère linéairement sur $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell - 1], \mathbb{F}_{\ell}^{\times})$ et, pour tous $x, x' \in H_{\text{ét}}^1(\bar{C}, \mathbb{F}_{\ell}^{\times})$,

$$\langle \operatorname{Fr}_v \cdot x, \operatorname{Fr}_v \cdot x' \rangle = |\mathbb{F}_v|^{-1} \langle x, x' \rangle.$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tous $x, x' \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Fr}_v^i - \operatorname{id})$,

$$(|\mathbb{F}_v|^{-i} - 1) \langle x, x' \rangle = 0.$$

Les éléments x de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell - 1], \mathbb{F}_{\ell}^{\times})$ ayant orbite de taille ≤ 7 vérifient $\operatorname{Fr}_v^i \cdot x = x$ pour un certain $i = 1, \dots, 7$, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au noyau de $\operatorname{Fr}_v^i - \operatorname{id}$.

Soit q un premier impair divisant $\ell - 1$. Comme la classe de $|\mathbb{F}_v|$ modulo q est inversible et d'ordre ≥ 8 dans \mathbb{F}_q^{\times} , les entiers $|\mathbb{F}_v|^i - 1$ et q sont premiers entre eux.

L'accouplement $\langle x, x' \rangle$ de x et x' est un élément d'un $\mathbb{Z}/(\ell - 1)\mathbb{Z}$ -module libre de rang 1, donc l'identité précédente implique $2\langle x, x' \rangle = 0$ car 4 ne divise pas $\ell - 1$.

LEMME 2.18. — *Soit M un groupe abélien fini muni d'un accouplement parfait à valeurs dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Soit N un sous-groupe totalement isotrope. Alors,*

$$|N| \leq \sqrt{|M|}.$$

Le $\mathbb{Z}/(\ell - 1)$ -module $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell - 1], \mathbb{F}_{\ell}^{\times})$ est libre de rang $2g$. En appliquant le lemme précédent avec $M = 2 \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell - 1], \mathbb{F}_{\ell}^{\times})$ et $N = 2 \text{Ker}(\text{Fr}_v^i - \text{id})$ on trouve

$$|\text{Ker}(\text{Fr}_v^i - \text{id})| \leq 2^g(\ell - 1)^g.$$

On termine la preuve en prenant la somme pour $i = 1, \dots, 7$. □

2.4.2. *Fin de la preuve du théorème de Faltings.* — Il ne reste qu'à bien choisir les données auxiliaires, c'est-à-dire le premier ℓ et la place v . Soient K un corps de nombres et $g \geq 2$ un entier. Alors, il existe un nombre premier ℓ avec les propriétés suivantes :

- (1) ℓ est congru à 3 modulo 4 ;
- (2) $\ell - 1$ n'est divisible par aucun premier impair $\leq 8[K : \mathbb{Q}]$;
- (3) toute clôture galoisienne K' de K est linéairement disjointe de $\mathbb{Q}(\mu_{\ell-1})$;
- (4) l'inégalité suivante est satisfaite :

$$7 \frac{2^{g+1}}{(\ell - 1)^g} < \frac{1}{(g - \frac{1}{2})(\ell - 1) + 1}.$$

L'existence d'un tel ℓ découle du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet : il existe une infinité de premiers ℓ qui ne sont congrus à 1 ni modulo un premier impair divisant le discriminant de K , ni modulo un premier impair $\leq 8[K : \mathbb{Q}]$, ni modulo 4. La condition (3) s'ensuit pour des raisons de ramification et la condition (4) peut être toujours satisfaite quitte à prendre ℓ assez grand.

On considère la famille de Kodaira–Parshin pour le groupe $\text{Aff}(\ell)$. Pour un ensemble fini S de places de K assez grand, la courbe C s'étend en une courbe projective sur $\mathcal{O}_{K,S}$ (que l'on note abusivement encore par C) et la famille de Kodaira–Parshin en un schéma fini-abélien $\alpha : A \rightarrow C$. On remarquera que le membre de droite de la condition (4) se réécrit comme $1/(d + 1)$ où $d = (g - \frac{1}{2})(\ell - 1)$ est la dimension relative de $\alpha : A \rightarrow S$.

Une application facile du théorème de densité de Čeboratev montre qu'il existe une place v de K avec les propriétés suivantes :

- (1) la place v est admissible et n'appartient pas à S ;
- (2) $\ell - 1$ et $|\mathbb{F}_v|$ sont premiers entre eux ;
- (3) pour tout premier impair q divisant $\ell - 1$, la classe de $|\mathbb{F}_v|$ modulo q est inversible et a ordre ≥ 8 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$.

Soit c un K -point de C . Grâce au choix de ℓ et de v , on peut appliquer la Proposition 2.15 et obtenir la borne suivante pour la v -stagnation de $\nu^{-1}(c)$:

$$\text{stag}_v(\nu^{-1}(c), 7) \leq 7 \frac{2^{g+1}}{(\ell - 1)^g} < \frac{1}{d + 1}.$$

Le Théorème 2.7 permet alors de conclure. □

3. APPLICATIONS DE PÉRIODES

3.1. Cas complexe

3.1.1. — Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme propre et lisse entre variétés algébriques complexes non singulières. L’application holomorphe $\pi^{\text{an}}: X^{\text{an}} \rightarrow S^{\text{an}}$ associée est une submersion holomorphe et propre entre variétés complexes. Le théorème d’Ehresmann affirme qu’il s’agit d’une fibration topologique localement triviale : étant donné un ouvert simplement connexe Ω de S^{an} et un point s de Ω , l’ouvert $\pi^{-1}(\Omega)$ de X^{an} est homéomorphe à $X_s^{\text{an}} \times \Omega$ où X_s^{an} est la fibre de π^{an} en s .

Il en découle que, pour tout naturel $q \in \mathbb{N}$, le faisceau $R^q \pi_*^{\text{an}} \mathbb{C}_{X^{\text{an}}}$ est un système local sur S^{an} , où $\mathbb{C}_{X^{\text{an}}}$ est le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs complexes sur X^{an} . Le fibré vectoriel holomorphe $V := R^q \pi_*^{\text{an}} \mathbb{C}_{X^{\text{an}}} \otimes_{\mathbb{C}_{S^{\text{an}}}} \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ est muni de la connexion $\text{id} \otimes d$ dont les sections horizontales s’identifient de façon tautologique à $R^q \pi_*^{\text{an}} \mathbb{C}_{X^{\text{an}}}$.

D’autre part, le théorème de de Rham fournit un isomorphisme du fibré vectoriel V avec le q -ème faisceau de cohomologie de de Rham relative $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X^{\text{an}}/S^{\text{an}})$. Par transport de structure, le fibré vectoriel $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X^{\text{an}}/S^{\text{an}})$ est muni d’une connexion canonique ∇_{GM} appelée de *Gauss–Manin* (ou de *Picard–Fuchs* suivant les auteurs).

Par le théorème GAGA de Serre, l’application naturelle de fibrés vectoriels holomorphes $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X^{\text{an}}/S^{\text{an}})$ est un isomorphisme. Comme la variété S n’est pas supposée propre, les connexions holomorphes sur $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)^{\text{an}}$ ne sont pas algébriques en général et il est tout à fait remarquable que ce soit le cas pour la connexion ∇_{GM} construite par les moyens fort transcendants décrits ci-dessus.

3.1.2. — Par construction, la connexion de Gauss–Manin est intégrable et elle permet donc d’identifier les fibres voisines de $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$. Plus précisément, étant donné un ouvert simplement connexe Ω de S^{an} , le système local $R^q \pi_*^{\text{an}} \mathbb{C}_{X^{\text{an}}}$ est constant, d’où un isomorphisme, pour $s, t \in \Omega$,

$$\begin{array}{ccc} H^q(X_s^{\text{an}}, \mathbb{C}) & \xleftarrow{\sim} \xrightarrow{\text{ev}_s} & \Gamma(\Omega, R^q \pi_*^{\text{an}} \mathbb{C}_{X^{\text{an}}}) & \xrightarrow{\text{ev}_t} & H^q(X_t^{\text{an}}, \mathbb{C}) \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{\chi}_{s,t}} & & \end{array}$$

de \mathbb{C} -espaces vectoriels donné par l’évaluation en s et en t . Par composition avec l’isomorphisme de de Rham, on déduit de $\tilde{\chi}_{s,t}$ un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$\chi_{s,t}: H_{\text{dR}}^q(X_s/\mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{dR}}^q(X_t/\mathbb{C}).$$

Lorsque Ω est une boule assez petite on peut écrire une formule explicite pour l'isomorphisme $\chi_{s,t}$ purement en termes de la connexion ∇_{GM} . Soient z_1, \dots, z_d des coordonnées sur Ω ($d = \dim S$). Pour $i = 1, \dots, d$, on considère la dérivation

$$D_i = \nabla_{\text{GM}}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right): \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S) \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$$

donnée par l'évaluation de la connexion ∇_{GM} le long du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_i}$. Alors, l'homomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes sur Ω ,

$$\begin{aligned} \chi_s: \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)|_{\Omega}^{\text{an}} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\Omega} \otimes \mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/S) \\ v &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{z^n}{n!} \otimes D^n(v).s \end{aligned}$$

est un isomorphisme satisfaisant $\chi_s(D_i(v)) = \frac{\partial D(v)}{\partial z_i}$, où pour un d -uplet de nombres entiers $n = (n_1, \dots, n_d)$, on a utilisé la notation $n! = n_1! \cdots n_d!$, $z^n = z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}$ et $D^n = D_1^{n_1} \circ \cdots \circ D_d^{n_d}$.⁽⁴⁾ L'isomorphisme $\chi_{t,s}$ plus haut n'est rien d'autre que la fibre en t de χ_s .

Le fibré vectoriel $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$ est muni de sa filtration (décroissante) de Hodge

$$\text{Fil}^{\bullet} \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S): \mathcal{F}^0 = \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S) \supseteq \mathcal{F}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}^n \supseteq \mathcal{F}^{n+1} = 0,$$

par les sous-fibrés vectoriels $\mathcal{F}^i = \text{Im}(\mathbb{R}^i \pi_* \Omega_{X/S}^{\bullet} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S))$.

Pour un entier $i \geq 1$, soit r_i le rang du fibré vectoriel $\mathcal{F}^i / \mathcal{F}^{i+1}$ et soit $r = (r_0, \dots, r_n)$. On considère la variété $\mathfrak{H} := \text{Flag}_r(\mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/\mathbb{C}))$ des drapeaux de type r de l'espace vectoriel $\mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/\mathbb{C})$. L'application holomorphe

$$\text{Per}_s: \Omega \longrightarrow \mathfrak{H}^{\text{an}} = \text{Flag}_r(\mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/\mathbb{C}))^{\text{an}}$$

qui, à tout point $t \in \Omega$, associe le point représentant le drapeau $\chi_{t,s}(\text{Fil}^{\bullet} \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)_t)$ est appelée l'*application (holomorphe) de périodes*.

Exemple 3.1. — La pierre angulaire des applications de périodes est sans doute celle provenant de la famille de Legendre de courbes elliptiques $\pi: X \rightarrow S$, où S est la droite projective complexe privée de 3 points $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ et pour $\lambda \in S(\mathbb{C})$, la fibre en λ de π est la courbe elliptique d'équation affine

$$E_{\lambda}: y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Soient λ un nombre complexe $\neq 0, 1$ et $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ un voisinage ouvert simplement connexe de λ . Le premier groupe de cohomologie de de Rham $\mathbb{H}_{\text{dR}}^1(E_{\lambda}/\mathbb{C})$ de E_{λ} est de dimension 2 et l'application de périodes décrit comment varie $\mathbb{H}^0(E_{\lambda'}, \Omega_{E_{\lambda'}}^1)$ pour $\lambda' \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \text{Per}_{\lambda}: \Omega &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^1(E_{\lambda}/\mathbb{C})) \\ \lambda' &\longmapsto \left[\chi_{\lambda', \lambda}(\mathbb{H}^0(E_{\lambda'}, \Omega_{E_{\lambda'}}^1)) \right], \end{aligned}$$

4. L'ordre de la composition dans la dernière expression n'a pas d'importance car les opérateurs D_i commutent entre eux à cause de la l'intégrabilité de ∇_{GM} et de la commutativité des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_i}$.

les crochets désignant le point associée à la droite vectorielle.

Du point de vue topologique, par le biais d'un homéomorphisme $\pi^{-1}(\Omega) \simeq \Omega \times E_\lambda$ on peut voir des lacets α sur E_λ comme des lacets $\alpha(\lambda')$ sur $E_{\lambda'}$ pour tout $\lambda' \in \Omega$. On fixe une base α_1, α_2 du premier groupe d'homologie de la courbe elliptique E_λ . Via l'isomorphisme de de Rham

$$H_{\text{dR}}^1(E_\lambda/\mathbb{C}) \simeq H^1(E_\lambda, \mathbb{C}),$$

les lacets α_1 et α_2 (vus comme des formes linéaires sur $H_{\text{dR}}^1(E_\lambda/\mathbb{C})$) prennent les valeurs

$$\omega_i(\lambda') = \int_{\alpha_i(\lambda')} \frac{dx}{y} \quad (i = 1, 2)$$

sur la base dx/y de la droite vectorielle $H^0(E_{\lambda'}, \Omega_{E_{\lambda'}})$. Autrement dit, dans les coordonnées dans le repère α_1, α_2 , l'application de périodes est la fonction holomorphe

$$\begin{aligned} \tau: \Omega &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \lambda' &\longmapsto \tau(\lambda') = \frac{\omega_1(\lambda')}{\omega_2(\lambda')}, \end{aligned}$$

et la courbe elliptique complexe $E_{\lambda'}$ est biholomorphe à $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau(\lambda')\mathbb{Z})$.

Du point de vue différentiel, les sections horizontales pour la connexion de Gauss–Manin sont les solutions de l'équation *hypergéométrique* de Gauss de paramètres $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$, à savoir :

$$\lambda(1 - \lambda)f'' + (1 - 2\lambda)f' - \frac{1}{4}f = 0.$$

La fonction holomorphe τ plus haut s'interprète comme le ratio de deux solutions linéairement indépendantes.

3.1.3. — Soit $\nu: \tilde{S} \rightarrow S^{\text{an}}$ un revêtement universel de S^{an} . Un point \tilde{s} dans la fibre $\nu^{-1}(s)$ étant fixé, il existe une unique composante connexe $\tilde{\Omega}$ de $\nu^{-1}(\Omega)$ contenant \tilde{s} et le revêtement ν se restreint en un homéomorphisme $\nu|_{\tilde{\Omega}}: \tilde{\Omega} \xrightarrow{\sim} \Omega$. L'application $\text{Per}_s \circ \nu|_{\tilde{\Omega}}$ s'étend en une application holomorphe $\text{Per}_{\tilde{s}}: \tilde{S} \rightarrow \mathfrak{H}$ équivariante sous l'action du groupe fondamental $\pi_1(S^{\text{an}}, s)$ opérant sur le revêtement universel \tilde{S} de manière naturelle et sur \mathfrak{H} via la représentation de monodromie

$$\rho_s: \pi_1(S^{\text{an}}, s) \longrightarrow \text{GL}(H_{\text{dR}}^1(X_s/\mathbb{C})).$$

En particulier, on obtient :

LEMME 3.2. — *Avec les notations ci-dessus, soit Γ (resp. Z) l'adhérence de Zariski de l'image de l'application ρ_s (resp. Per_s). Alors,*

$$\Gamma.\text{Per}_s(s) \subseteq Z.$$

Dans l'énoncé il n'y a pas de confusion possible à propos de l'adhérence de Zariski à prendre, si algébrique ou analytique : comme \mathfrak{H} est une variété projective, elles coïncident d'après le théorème de Chow.

3.2. Cas formel

3.2.1. — Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme propre et lisse entre variétés algébriques lisses sur un corps k de caractéristique nulle. Il y a manière de donner une définition purement algébrique de la connexion de Gauss–Manin ∇_{GM} sur le q -ème faisceau de cohomologie de de Rham $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$ (voir KATZ, 1970, §3.4). On peut aussi donner un sens à l’isomorphisme χ_s plus haut en termes de géométrie formelle, à savoir, en remplaçant les fonctions holomorphes par des séries formelles à coefficients dans k .

De façon plus précise, soit s un point k -rationnel de S . On considère la complétion formelle $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ de l’anneau local $\mathcal{O}_{S,s}$ en s :

$$\hat{\mathcal{O}}_{S,s} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s^n,$$

où \mathfrak{m}_s est l’idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,s}$. On désigne par $\varepsilon: \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S,s} \rightarrow S$ le morphisme qui s’en déduit. L’analogie formelle de l’isomorphisme χ_s est un isomorphisme

$$\hat{\chi}_s: \varepsilon^* \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{S,s} \otimes_k \mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/k)$$

de $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ -modules décrit en coordonnées locales de la manière suivante.

Soient $z_1, \dots, z_d \in \mathcal{O}_{S,s}$ des paramètres locaux en s , *i.e.* des générateurs de l’idéal maximal \mathfrak{m}_s , où $d = \dim S$. Après passage aux complétions, l’inclusion de $k[z_1, \dots, z_d]$ dans $\mathcal{O}_{S,s}$ s’étend en un isomorphisme

$$k[[z_1, \dots, z_d]] \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{S,s}$$

de k -algèbres locales complètes. Comme avant, on pose $D_i = \nabla_{\text{GM}}(\frac{\partial}{\partial z_i})$. Via l’isomorphisme qui précède, la formule pour v dans $\varepsilon^* \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$,

$$(5) \quad \hat{\chi}_s(v) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{z^n}{n!} \otimes D^n(v).s,$$

a un sens comme élément de $\hat{\mathcal{O}}_{S,s} \otimes_k \mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/k)$ (où l’on a employé les mêmes conventions qu’au numéro précédent).

3.2.2. — L’isomorphisme $\hat{\chi}_s$ permet de définir un analogue formel de l’application de périodes. On désigne encore par

$$\text{Fil}^\bullet \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S) : \mathcal{F}^0 = \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S) \supseteq \mathcal{F}^1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}^n \supseteq \mathcal{F}^{n+1} = 0$$

la filtration de Hodge, par r_i le rang de $\mathcal{F}^i/\mathcal{F}^{i+1}$ et on pose $r = (r_0, \dots, r_n)$. La filtration du $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ -module $\hat{\mathcal{O}}_{S,s} \otimes_k \mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/k)$ induite par $\varepsilon^* \text{Fil}^\bullet \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$ via $\hat{\chi}_s$ donne lieu à un morphisme de k -schémas

$$\widehat{\text{Per}}_s: \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S,s} \longrightarrow \mathfrak{H} := \text{Flag}_r(\mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/k)),$$

qu’on appellera l’*application de périodes formelle*.

LEMME 3.3. — Avec les notations ci-dessus, on suppose que k est un sous-corps de \mathbb{C} . Soient Ω un voisinage contractile de s dans $S(\mathbb{C})$ et $\text{Per}_s: \Omega \rightarrow (\mathfrak{H} \times_k \mathbb{C})^{\text{an}}$ l'application holomorphe des périodes en s . Soient \hat{Z} et $Z_{\mathbb{C}}$ respectivement les adhérences de Zariski de l'image de $\widehat{\text{Per}}_s$ et de Per_s . Alors,

$$Z_{\mathbb{C}} = \hat{Z} \times_k \mathbb{C}.$$

Cette observation élémentaire relève de l'insensibilité des adhérences de Zariski aux extensions de scalaires et du fait que $\widehat{\text{Per}}_s$ et Per_s sont données « par les mêmes formules ».

3.3. Cas p -adique

Soit p un nombre premier. Soit K une extension finie non ramifiée de \mathbb{Q}_p , d'anneau des entiers \mathcal{O}_K et de corps résiduel k .

3.3.1. — Pour une variété algébrique X sur K on désigne par X^{an} le K -espace analytique associé au sens de Berkovich.⁽⁵⁾ L'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $|X^{\text{an}}|$ des couples $(x, |\cdot|)$ formés d'un point $x \in X$ (pas nécessairement fermé) et d'une valeur absolue $|\cdot|$ sur le corps résiduel $\kappa(x)$ en x étendant celle de K ; l'ensemble $|X^{\text{an}}|$ est muni de la topologie la moins fine pour laquelle

- l'application oubliant la valeur absolue $\pi_X: |X^{\text{an}}| \rightarrow X$, $(x, |\cdot|) \mapsto x$ est continue;
- pour tout ouvert U de X et toute fonction régulière $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, l'application $|f|: |X^{\text{an}}| \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, |\cdot|) \mapsto |f(x)|$ est continue.

L'espace topologique $|X^{\text{an}}|$ est localement compact. Si X est intègre, une fonction analytique sur un ouvert U de $|X^{\text{an}}|$ est une fonction qui est localement limite uniforme de fonctions rationnelles sans pôles.

Si \mathcal{X} est un modèle de X , c'est-à-dire un \mathcal{O}_K -schéma plat séparé de type fini de fibre générique X , on considère le sous-ensemble compact \mathcal{X}_η de X^{an} , appelé la *fibre générique à la Raynaud*, formé par les couples $(x, |\cdot|)$ tels que le morphisme naturel $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$ s'étend en un morphisme $\text{Spec } \kappa(x)^\circ \rightarrow \mathcal{X}$, où $\kappa(x)^\circ$ est l'anneau des entiers de $\kappa(x)$ par rapport à $|\cdot|$:

$$\kappa(x)^\circ = \{\lambda \in \kappa(x) : |\lambda| \leq 1\}.$$

Une telle extension étant unique par séparation de \mathcal{X} , on définit l'application de réduction $\text{red}: \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_0$ à valeurs dans la fibre spéciale \mathcal{X}_0 de \mathcal{X} associant à un couple $(x, |\cdot|)$ l'image par $\text{Spec } \kappa(x)^\circ \rightarrow \mathcal{X}$ du point fermé de $\text{Spec } \kappa(x)^\circ$.

Il s'agit d'une application anti-continue, c'est-à-dire que la preimage d'un fermé est ouverte. Par exemple, si x est un \mathcal{O}_K -point de \mathcal{X} , l'ensemble $\Omega_x := \text{red}^{-1}(\text{red}(x))$ est un ouvert de \mathcal{X}_η contenant x et qu'on appelle le *disque autour de x* .⁽⁶⁾ Les K -points de Ω_x

5. Le choix de ce langage pour l'analyse rigide n'a guère d'importance et le lecteur préférant d'autres points de vue pourra s'en servir sans changements majeurs.

6. Si le \mathcal{O}_K -schéma \mathcal{X} est lisse de dimension relative d , le critère de lissité formelle montre que Ω_x est isomorphe en tant que K -espace analytique au disque ouvert de rayon 1 de dimension d .

s'identifient aux \mathcal{O}_K -points x' de \mathcal{X} tels que

$$x \equiv x' \pmod{p}.$$

Exemple 3.4. — Soient $\mathcal{X} = \mathbb{A}_{\mathcal{O}_K}^1$ la droite affine sur \mathcal{O}_K et $X = \mathbb{A}_K^1$ la droite affine sur K . Alors, le compact \mathcal{X}_η n'est autre que le disque fermé de rayon 1 dans X^{an} :

$$\mathcal{X}_\eta = \{(x, |\cdot|) \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}} : |t(x)| \leq 1\},$$

où t désigne la fonction coordonnée sur \mathbb{A}^1 . La fibre spéciale de \mathcal{X} est la droite affine \mathbb{A}_k^1 sur le corps résiduel k et le disque ouvert autour de 0 est le disque ouvert de rayon 1 centré à l'origine :

$$\Omega_0 := \text{red}^{-1}(\text{red}(0)) = \{(x, |\cdot|) \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}} : |t(x)| < 1\}.$$

3.3.2. — La connexion de Gauss–Manin peut être définie en général pour un schéma T , un T -schéma lisse S et un morphisme propre et lisse $\pi: X \rightarrow S$. Ici, on prend pour T le spectre de \mathcal{O}_K . On suppose de plus S connexe et que les \mathcal{O}_S -modules cohérents $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$ et $R^i\pi_*\Omega_{X/S}^j$ sont localement libres pour tout $i, j, q \in \mathbb{N}$.

Soit s un K -point de la fibre générique à la Raynaud S_η de S et soit Ω_s le disque autour de s . Comme S est lisse, on peut identifier Ω_s avec le produit de n copies du disque ouvert centré à l'origine et de rayon 1 :

$$D(0, 1^-)^n = \{x \in \mathbb{A}_K^{n,\text{an}} : |t_i(x)| < 1\},$$

où n est la dimension (relative) de S sur \mathcal{O}_K et t_1, \dots, t_n sont les fonctions coordonnées sur l'espace affine $\mathbb{A}_K^{n,\text{an}}$. Quoique cela ne soit pas de grande importance (tout point d'un disque p -adique en est un centre), on peut supposer que s soit envoyé sur 0. La série formelle (5) converge ⁽⁷⁾ sur Ω_s (voir l'exposé de KATZ, 1973, dans ce séminaire) et donne lieu à un isomorphisme de fibrés vectoriels sur Ω_s ,

$$\chi_s: \mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)|_{\Omega_s}^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\Omega_s} \otimes_K H_{\text{dR}}^q(X_s/K).$$

En particulier, pour tout K -point t de Ω_s , la fibre en t de l'isomorphisme χ_s est un isomorphisme de K -espaces vectoriels

$$\chi_{t,s}: H_{\text{dR}}^q(X_t/K) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^q(X_s/K).$$

Avec la situation complexe en tête, l'ouvert Ω_s joue le rôle d'un voisinage simplement connexe de s . L'image par χ_s de la filtration de Hodge de $\mathcal{H}_{\text{dR}}^q(X/S)$ définit une application analytique

$$\text{Per}_s: \Omega_s \longrightarrow \text{Flag}_r(H_{\text{dR}}^q(X_s/K))^{\text{an}},$$

que l'on appellera l'*application de périodes p -adique*.

7. Ce n'est pas vrai en général que les sections horizontales d'une connexion intégrable convergent sur tout le disque autour de s : par exemple, la série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ ne converge que sur le disque ouvert de rayon $p^{-1/(p-1)}$ autour de l'origine. La différence est imputable au caractère régulier des singularités de la connexion de Gauss–Manin, par opposition à la singularité irrégulière de $d - dt$.

Exemple 3.5. — On suppose $p \neq 2$ et considère la famille de courbes elliptiques de Legendre $\pi: X \rightarrow S$ où S est la droite projective sur \mathbb{Z}_p privé de 3 points $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\lambda \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$, le disque Ω_λ autour de λ est le disque ouvert de rayon 1 centré en λ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{1,\text{an}}$. La courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p d'équation affine

$$E_\lambda: y = x(x-1)(x-\lambda)$$

est à bonne réduction et l'application de périodes a deux comportements radicalement différents suivant que le groupe $E_\lambda(\overline{\mathbb{F}}_p)$ ait des points de p -torsion non triviaux ou pas. La courbe elliptique E_λ est dite à réduction *ordinaire* dans le premier cas et à réduction *supersingulière* dans le deuxième.

Dans le cas ordinaire, l'application de périodes $\text{Per}_\lambda: \Omega_\lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{1,\text{an}}$ est la composition d'un revêtement étale $q: \Omega_\lambda \rightarrow D(1, 1^-)$, le *paramètre de Serre–Tate*, et du logarithme $\log: D(1, 1^-) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^1$, où $D(1, 1^-)$ désigne le disque ouvert de rayon 1 centré en 1. Tout comme le logarithme, Per_λ est un revêtement étale surjectif de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{1,\text{an}}$ par le disque Ω_λ .

Si la réduction est supersingulière, la situation est encore plus perturbante (en la comparant à son homologue complexe) : l'application de périodes Per_λ est un revêtement étale surjectif de la droite projective analytique $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{1,\text{an}}$ sur \mathbb{Q}_p !

J'invite le lecteur intéressé à consulter l'ouvrage de ANDRÉ (2003) pour davantage de détails.

3.3.3. — Si l'on ne s'intéresse qu'à des propriétés grossières, comme la dimension de l'adhérence de Zariski de l'image, on peut tirer des informations sur l'application de périodes p -adique à partir de renseignements sur celle complexe. Ceci se fait par le choix à première vue étrange d'un plongement $\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}$. Cela va sans dire, un tel plongement n'est pas du tout continu.

On désigne par $\pi_\sigma: X_\sigma \rightarrow S_\sigma$ le morphisme de variétés algébriques complexes déduit de π par extension des scalaires et par $\sigma(s)$ le \mathbb{C} -point de S_σ induit par s . On fixe un voisinage ouvert simplement connexe Ω de $\sigma(s)$ dans $S_\sigma(\mathbb{C})$. La formation de la filtration de Hodge étant compatible aux extensions de scalaires, on a une application de périodes holomorphe

$$\text{Per}_{\sigma(s)}: \Omega \longrightarrow \text{Flag}_r(\mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_{\sigma(s)}/\mathbb{C})),$$

ainsi qu'une représentation de monodromie

$$\rho_{\sigma(s)}: \pi_1(S_\sigma(\mathbb{C}), \sigma(s)) \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_{\sigma(s)}/\mathbb{C})).$$

PROPOSITION 3.6. — *Avec les notations ci-dessus, soit Z l'adhérence de Zariski de l'image de l'application de périodes p -adique $\text{Per}_s: \Omega_s \rightarrow \text{Flag}_r(\mathbb{H}_{\text{dR}}^q(X_s/K))^{\text{an}}$. Si Γ désigne l'adhérence de Zariski de la représentation de monodromie $\rho_{\sigma(s)}$, on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma.\text{Per}_{\sigma(s)}(\sigma(s)) \leq \dim_K Z.$$

Cet énoncé s'obtient par conjonction du lemme 3.3 et de son analogue p -adique, ainsi que du lemme 3.2.

4. PREUVE DU THÉORÈME 2.7

4.1. Démarrage

4.1.1. — On reprend les notations de l'énoncé du théorème 2.7. Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K contenant toutes celles archimédiennes et celles qui ramifient. Soit p un nombre premier tel qu'aucune place de K au-dessus de p n'est dans S et tel qu'il existe une place admissible v de K au-dessus de p .

Soient C une courbe sur $\mathcal{O}_{K,S}$, $\alpha: A \rightarrow C$ un schéma fini-abélien de dimension relative d , $\nu: C' = \text{Spec } \alpha_* \mathcal{O}_A \rightarrow C$ la factorisation de Stein de α et $\alpha': A \rightarrow C'$ l'unique morphisme tel que $\alpha = \nu \circ \alpha'$.

On fixe une clôture algébrique \bar{K} de K . Soit r un nombre réel $\geq [8d/(d+1)]$. On dit qu'un $\mathcal{O}_{K,S}$ -point c de C est *non stagnant* si

$$\text{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < \frac{1}{d+1}.$$

De cette manière, il s'agit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de $\mathcal{O}_{K,S}$ -points non stagnants de C .

Soit o un $\mathcal{O}_{K,S}$ -point non stagnant de C (s'il n'y en a pas, on a gagné). On désigne par Ω le disque v -adique autour de o . Les K -points de Ω s'identifient aux $\mathcal{O}_{K,v}$ -points c de C tels que $c \equiv o \pmod{p}$. On désigne par Ω^{ns} l'ensemble des $\mathcal{O}_{K,S}$ -points non stagnants de C tels que $c \equiv o \pmod{p}$. L'ensemble $C(\mathbb{F}_v)$ étant fini, pour démontrer le théorème 2.7 il suffit (et il faut) de montrer que l'ensemble Ω^{ns} est fini.

Pour voir qu'un tel ensemble est fini on s'appuie, comme dans la preuve originelle de Faltings, sur la finitude des représentations galoisiennes paramétrées par ces points. On fixe des notations pour être plus précis.

4.1.2. Notations « globales ». — Pour un \bar{K} -point \bar{c}' de C' soit :

- c' l'image du morphisme $\text{Spec } \bar{K} \rightarrow C'$ défini par \bar{c}' ;
- $K(c')$ le corps résiduel du point c' ;
- $A_{\bar{c}'}$ la fibre de $\alpha': A \rightarrow C'$ en \bar{c}' ;
- $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$ le premier groupe de cohomologie étale p -adique de $A_{\bar{c}'}$;
- $\rho_{\bar{c}'}: \text{Gal}(\bar{K}/K(c')) \rightarrow \text{GL}(H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p))$ l'homomorphisme continu de groupes définissant l'action galoisienne naturelle sur $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$.

Pour justifier la dernière définition, on remarquera que la variété $A_{\bar{c}'}$ est obtenue par extension des scalaires de la fibre en c' de α' , qui est définie sur $K(c')$.⁽⁸⁾ La fibre $A_{\bar{c}'}$ est une variété abélienne de dimension d sur \bar{K} , donc son premier groupe de cohomologie étale p -adique est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension $2d$, dual du module de Tate p -adique (tensorisé avec \mathbb{Q}_p).

8. La donnée de \bar{c}' induit un plongement de $K(c')$ dans \bar{K} .

4.1.3. Notations « locales ». — Soient K_v la complétion de K en v et \bar{K}_v une clôture algébrique de K_v . On fixe un plongement $\iota: \bar{K} \rightarrow \bar{K}_v$ étendant l'injection canonique $K \rightarrow K_v$. Pour un \bar{K} -point \bar{c}' de C' soit :

- \bar{c}'_v le \bar{K}_v -point de C' induit par \bar{c}' via ι ;
- c'_v l'image du morphisme $\text{Spec } \bar{K}_v \rightarrow C'_{K_v}$ défini par \bar{c}'_v ;
- $K_v(c')$ le corps résiduel du point c'_v ;
- $\rho_{\bar{c}',v}$ la restriction de $\rho_{\bar{c}'}$ à $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v(c'))$ via le plongement dans $\text{Gal}(\bar{K}/K(c'))$ induit par ι .

4.1.4. — On revient à la preuve du théorème.

DÉFINITION 4.1. — Soient L un corps et \bar{L} une clôture algébrique de L . Pour $i = 1, 2$, soient $L_i \subseteq \bar{L}$ une extension finie de L , V_i un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie et

$$\rho_i: \text{Gal}(\bar{L}/L_i) \longrightarrow \text{GL}(V_i)$$

un homomorphisme continu de groupes. Un isomorphisme $(L_1, \rho_1) \rightarrow (L_2, \rho_2)$ est la donnée d'un élément $\gamma \in \text{Gal}(\bar{L}/L)$ induisant un isomorphisme $\gamma|_{L_1}: L_1 \rightarrow L_2$ et d'un isomorphisme de \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(\bar{L}/L_1) & \xrightarrow{\rho_1} & \text{GL}(V_1) \\ \downarrow \gamma \circ - \circ \gamma^{-1} & & \downarrow \psi \circ - \circ \psi^{-1} \\ \text{Gal}(\bar{L}/L_2) & \xrightarrow{\rho_2} & \text{GL}(V_2). \end{array}$$

Si un tel isomorphisme existe, on dit que les couples sont isomorphes.

Soit \mathcal{T} l'ensemble des classes d'isomorphie des couples (L, ρ) où $L \subseteq \bar{K}$ est une extension finie de K et $\rho: \text{Gal}(\bar{K}/L) \rightarrow \text{GL}(V)$ un homomorphisme continu de groupes, avec V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension $2d$. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \tau: C'(\bar{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ c' & \longmapsto & [(K(c'), \rho_{\bar{c}'})], \end{array}$$

les crochets désignant la classe d'isomorphie du couple $(K(c'), \rho_{\bar{c}'})$.

De manière analogue, on désigne par \mathcal{T}_v l'ensemble des classes d'isomorphie des couples (L, ρ) où $L \subseteq \bar{K}_v$ est une extension finie de K_v et $\rho: \text{Gal}(\bar{K}_v/L) \rightarrow \text{GL}(V)$ un homomorphisme continu de groupes, avec V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension $2d$. On considère

$$\begin{array}{ccc} \tau_v: C'(\bar{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_v \\ c' & \longmapsto & [(K_v(c'), \rho_{\bar{c}',v})]. \end{array}$$

On désigne par $\Omega'_{>r}$ l'ensemble des \bar{K} -points \bar{c}' de C' tels que le \bar{K}_v -point $\nu(\bar{c}'_v)$ de C est K_v -rationnel et que l'extension $K_v(c')$ de K_v est de degré $> r$. La finitude de Ω^{ns} découle des deux assertions suivantes :

PROPOSITION 4.2. — Avec les notation introduites ci-dessus,

- (1) les fibres de l'application $\tau_v: \Omega'_{>r} \rightarrow \mathcal{T}_v$ sont finies ;

(2) il existe un sous-ensemble fini F de Ω^{ns} tel que, pour tout $c \in \Omega^{\text{ns}} \setminus F$, il y a un \bar{K} -point c' de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(c') : K_v] > r$ et que la représentation $\rho_{\sigma(c')}$ est irréductible.

Démonstration de 2.7 admettant 4.2. — Soit F comme dans (2). Pour $c \in \Omega^{\text{ns}} \setminus F$, on choisit un \bar{K} -point $\sigma(c)$ de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(\sigma(c)) : K_v] > r$ et que la représentation $\rho_{\sigma(c)}$ est irréductible. On considère l'application

$$\begin{aligned} \tau \circ \sigma : \Omega^{\text{ns}} \setminus F &\longrightarrow \mathcal{T} \\ c &\longmapsto \left[(K(\sigma(c)), \rho_{\sigma(c)}) \right]. \end{aligned}$$

La finitude de Ω^{ns} est équivalente à celle de l'image et des fibres de $\tau \circ \sigma$.

Pour la finitude des fibres, il suffit d'appliquer (1) après avoir remarqué que, pour tout point $c \in \Omega^{\text{ns}}$ et $t = \tau(\sigma(c))$, l'ensemble $(\tau \circ \sigma)^{-1}(t)$ est la réunion finie de fibres de $\tau_v \circ \sigma$. En effet, pour tout $c' \in \Omega^{\text{ns}}$, l'extension $K_v(\sigma(c'))$ de K_v est non ramifiée de degré borné par celui du revêtement ν : comme il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de telles extensions (elles sont toutes le corps des fractions de l'anneau de Witt de leur corps résiduels, l'extension K_v étant non ramifiée sur \mathbb{Q}_p), *a fortiori* $\tau_v \circ \sigma$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur $(\tau \circ \sigma)^{-1}(t)$.

Pour montrer que l'image est finie, on remarque d'abord que pour tout K -point c de C et tout \bar{K} -point c' de $\nu^{-1}(c)$ l'extension $K(c')$ est non ramifiée en dehors de S et de degré majoré par celui du morphisme ν . Le théorème d'Hermite–Minkowski (théorème 1.4) entraîne que, à isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de telles extensions.

Soit c un point de $\Omega^{\text{ns}} \setminus F$. Soit S' l'ensemble des places de $K(\sigma(c))$ au-dessus de S ou de p . En dehors de S' la représentation $\rho_{\sigma(c)}$ est non ramifiée et pure de poids 1. En supposant (2), elle est de plus irréductible : d'après la proposition 1.5, les classes d'isomorphie de telles représentations sont en nombre fini. L'image de $\tau \circ \sigma$ est donc finie, et il en est de même pour l'ensemble Ω^{ns} . \square

4.2. Application de périodes

4.2.1. — Le morphisme ν étant fini étale par hypothèse, l'application naturelle entre faisceaux de cohomologie de de Rham relative

$$\theta : \nu_* \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C') \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C)$$

est un isomorphisme. Le \mathcal{O}_C -module $\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C)$ est muni via θ d'une structure de faisceau en $\nu_* \mathcal{O}_{C'}$ -modules localement libre de rang d . La grassmannienne $\text{Gr}_d(\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C'))$ des sous-espaces de dimension d du $\mathcal{O}_{C'}$ -module $\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C')$ est un schéma projectif sur C' . On considère sa restriction à la Weil \mathfrak{G} le long du morphisme fini et plat ν :

$$\mathfrak{G} = \text{Res}_{C'/C} \text{Gr}_d(\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C')).$$

Puisque ν est étale, c'est un schéma projectif sur C : via θ il s'interprète aussi comme la grassmannienne des sous- $\nu_* \mathcal{O}_{C'}$ -modules des $\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/C)$ de rang d .

La polarisation du schéma fini-abélien A induit un accouplement $\mathcal{O}_{C'}$ -bilinéaire et alterné

$$\omega: \mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C') \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C') \longrightarrow \mathcal{O}_{C'}.$$

On considère le sous-schéma fermé $\mathrm{LGr}_d(\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C'))$ de $\mathrm{Gr}_d(\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C'))$ formé par les sous-espaces *lagrangiens*, c'est-à-dire de rang d et totalement isotropes pour la forme ω , du $\mathcal{O}_{C'}$ -module $\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C')$. On désigne par \mathfrak{H} la restriction à la Weil le long de ν :

$$\mathfrak{H} = \mathrm{Res}_{C'/C} \mathrm{LGr}_d(\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C')).$$

4.2.2. — On considère l'application de périodes p -adique Per_o en o associée au premier groupe de cohomologie de de Rham $\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C)$ et à sa filtration de Hodge

$$0 \longrightarrow \alpha_* \Omega_{A/C}^1 \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(A/C) \longrightarrow \mathrm{R}^1 \alpha_* \mathcal{O}_A \longrightarrow 0.$$

Comme tous les \mathcal{O}_C -modules en question sont des $\nu_* \mathcal{O}_{C'}$ -modules, l'application de périodes Per_o prend naturellement des valeurs dans \mathfrak{G} . De plus, le sous-module $\alpha_* \Omega_{A/C}^1$ étant lagrangien, l'image de Per_o est contenue dans \mathfrak{H} . Plus précisément, en voyant o comme un K_v -point de C , soit $\nu_v^{-1}(o)$ la fibre en o de l'application ν . Alors, l'application de périodes p -adique Per_o s'écrit

$$\mathrm{Per}_o: \Omega \longrightarrow (\mathfrak{H}_{o, K_v})^{\mathrm{an}},$$

où $\mathfrak{H}_o = \mathrm{Res}_{\nu^{-1}(o)/K} \mathrm{LGr}_d \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(\alpha^{-1}(o)/K)$.

4.2.3. — L'hypothèse de grande monodromie garantit l'existence d'un plongement $\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}$ tel que l'adhérence de Zariski Γ de l'image de la représentation de monodromie

$$\rho_{\sigma(o)}: \pi_1(S_\sigma(\mathbb{C}), \sigma(o)) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(\nu^{-1}(\sigma(o))/\mathbb{C}))$$

contient le produit, pris sur les points o' de $\nu^{-1}(\sigma(o))$, de $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'}/\mathbb{C}))$. D'autre part, la variété complexe $\mathfrak{H}_{o, \mathbb{C}}$ est le produit $\prod_{o'} \mathrm{LGr}_d(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'}/\mathbb{C}))$ où o' parcourt $\nu^{-1}(\sigma(o))$. Puisque le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'}/\mathbb{C}))$ agit transitivement sur $\mathrm{LGr}_d(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'}/\mathbb{C}))$, la proposition 3.6 entraîne que l'image de l'application de périodes p -adique Per_o est Zariski-dense.

4.3. Finitude des fibres

4.3.1. Isocristaux. — Je discute ici la donnée d'algèbre linéaire avec laquelle on se retrouvera à travailler. L'extension finie K_v de \mathbb{Q}_p est non ramifiée, donc l'anneau des entiers de K_v coïncide avec l'anneau de Witt du corps résiduel \mathbb{F}_v de K_v . On désigne par σ l'unique relèvement à K_v de l'opérateur de Frobenius $x \mapsto x^p$.

Un *isocristal* sur K_v est la donnée (V, φ) d'un K_v -espace vectoriel V de dimension finie et d'un endomorphisme $\varphi: V \rightarrow V$ σ -linéaire⁽⁹⁾ bijectif. Un *isocristal filtré* sur K_v est la donnée d'un isocristal (V, φ) et d'une filtration décroissante $\mathrm{Fil}^\bullet V = (\mathrm{Fil}^i V)_{i \in \mathbb{N}}$ de V par des sous- K_v -espaces vectoriels avec $\mathrm{Fil}^0 V = V$ et $\mathrm{Fil}^i V = 0$ pour i assez grand. Il est important de remarquer que l'endomorphisme φ ne respecte pas en

9. Pour $x, y \in V$ et $\lambda \in K_v$, on a $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ et $\varphi(\lambda x) = \sigma(\lambda)\varphi(x)$.

général la filtration $\text{Fil}^\bullet V$. La notion d'isomorphisme d'isocristaux filtrés est définie de la manière évidente. Lorsque la filtration $\text{Fil}^\bullet V$ n'a qu'un seul cran W , on écrira simplement (V, φ, W) .

Exemple 4.3. — L'exemple qui nous intéresse davantage est celui de la cohomologie de de Rham d'une variété abélienne à bonne réduction sur K_v . Soit temporairement \mathcal{A} un schéma abélien sur \mathcal{O}_{K_v} de dimension relative d . Si \mathcal{A}_0 désigne sa fibre spéciale, le théorème de comparaison de Rham/cristallin fournit un isomorphisme de \mathcal{O}_{K_v} -modules

$$H_{\text{dR}}^1(\mathcal{A}/\mathcal{O}_{K_v}) \simeq H_{\text{cris}}^1(\mathcal{A}_0/\mathbb{F}_v).$$

Le membre de gauche vient avec sa filtration de Hodge, en l'occurrence donnée par le sous-module $H^0(\mathcal{A}, \Omega_{\mathcal{A}}^1)$ de rang d . Par functorialité de la cohomologie cristalline, le morphisme de Frobenius absolu $\text{Fr}_{\mathcal{A}_0} : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0$ induit un endomorphisme σ -linéaire φ du \mathcal{O}_{K_v} -module $H_{\text{cris}}^1(\mathcal{A}_0/\mathbb{F}_v)$. Le triplet

$$(H_{\text{dR}}^1(\mathcal{A}/\mathcal{O}_{K_v})[\frac{1}{p}], \varphi, H^0(\mathcal{A}, \Omega_{\mathcal{A}}^1)[\frac{1}{p}])$$

est un isocristal filtré. L'opérateur φ respecte la filtration de Hodge, *i.e.* se restreint en un endomorphisme de $H^0(\mathcal{A}, \Omega_{\mathcal{A}}^1)$, si et seulement si l'endomorphisme de Frobenius de \mathcal{A}_0 se relève. Cela n'a lieu que dans des cas très particuliers et c'est loin d'être le comportement « générique ».

DÉFINITION 4.4. — Pour $i = 1, 2$, soient $L_i \subseteq \bar{K}_v$ une extension finie de K_v et (V_i, φ_i, W_i) un isocristal filtré sur L_i .

Un isomorphisme $(L_1, (V_1, \varphi_1, W_1)) \rightarrow (L_2, (V_2, \varphi_2, W_2))$ est la donnée d'un élément $\gamma \in \text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ induisant un isomorphisme de corps $\gamma : L_1 \rightarrow L_2$ et d'un isomorphisme de L_2 -espaces vectoriels $f : V_1 \otimes_{L_1} L_2 \rightarrow V_2$ tel que $f(W_1 \otimes_{L_1} L_2) = W_2$ et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes_{L_1} L_2 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \downarrow \varphi_1 \otimes \text{id} & & \downarrow \varphi_2 \\ V_1 \otimes_{L_1} L_2 & \xrightarrow{f} & V_2. \end{array}$$

(Les produits tensoriels sont tous pris via γ .) Les couples sont dites isomorphes si un tel isomorphisme existe.

4.3.2. — On désigne par \mathcal{D} l'ensemble des classes d'isomorphie des couples $(L, (V, \varphi, W))$ où $L \subseteq \bar{K}_v$ est une extension finie de K_v et (V, φ, W) est un isocristal filtré sur L avec V et W respectivement de dimension $2d$ et d . Pour un \bar{K} -point \bar{c}' de C' la variété abélienne $A_{c'_v}$ sur $K_v(c')$ est à bonne réduction. La construction de l'exemple 4.3 donne lieu à un isocristal filtré sur $K_v(c')$,

$$D(\bar{c}') = (H_{\text{dR}}^1(A_{c'_v}/K_v(c')), \varphi_{c'_v}, H^0(A_{c'_v}, \Omega_{A_{c'_v}})),$$

où $\varphi_{c'_v}$ est l'endomorphisme semi-linéaire induit par le Frobenius absolu de la réduction de $A_{c'_v}$ modulo p . On considère l'application

$$(6) \quad \begin{aligned} \delta: C'(\bar{K}) &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \bar{c}' &\longmapsto [(K_v(c'), D(\bar{c}'))]. \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.5. — *Avec les notations ci-dessus, la restriction $\delta: \Omega'_{>r} \rightarrow \mathcal{D}$ est à fibres finies.*

Avant de nous attaquer à la preuve de la proposition 4.5, voyons comment elle entraîne la proposition 4.2 (1) grâce à des considérations simples de théorie de Hodge p -adique.

4.3.3. Des représentations galoisiennes aux isocristaux. — Pour combler au manque dans \mathbb{C}_p de « nombres comme $2\pi i$ », FONTAINE (1982) a introduit une foule d'anneaux dits *de périodes* jouant le rôle de coefficients dans les isomorphismes de comparaison entre différentes théories cohomologiques p -adiques.

Soit $L \subseteq \bar{K}_v$ une extension finie non ramifiée de K_v . Ici on ne s'intéresse qu'à B_{cris} , un corps contenant \bar{K}_v muni d'une action continue de $\Gamma := \text{Gal}(\bar{K}_v/L)$, d'une filtration $(B_{\text{cris}}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ exhaustive stable sous l'action de Galois et d'un opérateur de Frobenius $\varphi: B_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{cris}}$. L'ensemble des éléments de B_{cris} fixes sous Galois est L .

La définition de B_{cris} n'est pas particulièrement compliquée mais elle fait intervenir plusieurs étapes. Pour ne pas m'attarder trop je ne donne pas de détails ici sur sa construction : le lecteur intéressé pourra consulter les excellentes notes de BRINON et CONRAD (2009).

Soit $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation continue, où V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie. On pose

$$D_{\text{cris}}(\rho) := (B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^\Gamma,$$

où le groupe Γ agit diagonalement.

Il s'agit d'un K_v -espace vectoriel de dimension $\dim_L D_{\text{cris}}(\rho) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ muni d'une filtration et d'un opérateur de Frobenius déduits des structures analogues sur B_{cris} .

DÉFINITION 4.6. — *La représentation ρ est cristalline si $\dim_{K_v} D_{\text{cris}}(\rho) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.*

Soient $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma)$ la catégorie des représentations continues de Γ à valeurs dans les \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie et MF_L^φ la catégorie des isocristaux filtrés sur K_v . La construction ci-dessus donne lieu à un foncteur $D_{\text{cris}}: \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma) \rightarrow \text{MF}_L^\varphi$. La restriction du foncteur D_{cris} à la sous-catégorie pleine des représentations cristallines est pleinement fidèle. Ce fait dont la preuve est difficile ne sera pas utile ici : on n'emploiera que la functorialité.

Exemple 4.7. — L'exemple de base est celui de la cohomologie étale p -adique des variétés abéliennes à bonne réduction. Soit \mathcal{A} temporairement un schéma abélien sur \mathcal{O}_L . On considère la représentation galoisienne $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}(H_{\text{ét}}^1(\mathcal{A}, \mathbb{Q}_p))$ associée au premier groupe de cohomologie étale p -adique $H_{\text{ét}}^1(\mathcal{A}, \mathbb{Q}_p)$ de la variété abélienne $\mathcal{A}_{\bar{K}_v}$ sur \bar{K}_v . D'après FONTAINE et MESSING (1987) la représentation ρ est cristalline et on sait grâce

à FALTINGS (1989, Theorem 5.6) que l’isocrystal filtré $D_{\text{cris}}(\rho)$ est isomorphe à celui considéré dans l’exemple 4.3, à savoir :

$$(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(\mathcal{A}/\mathcal{O}_L)_{[\frac{1}{p}]}, \varphi, \mathrm{H}^0(\mathcal{A}, \Omega_{\mathcal{A}}^1)_{[\frac{1}{p}]}) .$$

En particulier, l’anneau B_{cris} contient toutes les périodes des variétés abéliennes à bonne réduction.

Démonstration de 4.2 (1) admettant 4.5. — D’après l’exemple précédent, l’application

$$\begin{aligned} D_{\text{cris}} \circ \tau_v : \Omega'_{>r} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \bar{c}' &\longmapsto [(K_v(c'), D(\rho_{\bar{c}'}))] \end{aligned}$$

coïncide avec l’application δ introduite à l’équation (6). En admettant la proposition 4.5, les fibres de l’application δ sont finies et dont celles de τ_v le sont aussi. \square

4.3.4. Notations « locales » (reprise). — La preuve de la proposition 4.5 demande d’identifier les fibres v -adiquement voisines de o et de décomposer l’application de périodes de façon correspondante : il n’y a pas de difficultés ici, à part celle de digérer les notations.⁽¹⁰⁾ On désigne par $\nu_v : C'_{K_v} \rightarrow C_{K_v}$ l’application induite par ν .

Pour un point o' de $\nu_v^{-1}(o)$, soit $\mathfrak{H}'_{o'}$ la restriction à la Weil à K_v de la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'}/K_v(o'))$. La restriction à la fibre en o' définit un morphisme

$$\mathrm{LGr}_d \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(\alpha^{-1}(o)/K) \longrightarrow \mathrm{LGr}_d \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'}/K_v(o'))$$

induisant un morphisme de K -schémas $\mathrm{pr}_{o'} : \mathfrak{H}_{o, K_v} \rightarrow \mathfrak{H}'_{o'}$ sur les restrictions à la Weil respectives. L’application induite

$$\mathfrak{H}_{o, K_v} \longrightarrow \prod_{\nu_v(o')=o} \mathfrak{H}'_{o'}$$

est un isomorphisme de K_v -schémas.

Soit c un K_v -point de Ω , *i.e.* un \mathcal{O}_{K_v} -point de C tel que $c \equiv o \pmod{p}$. Pour tout entier $i \geq 0$, la connexion de Gauss–Manin fournit un isomorphisme de K_v -espaces vectoriels

$$\chi_{c,o}^i : \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^i(\nu_v^{-1}(c)/K_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^i(\nu_v^{-1}(o)/K_v).$$

Pour $i = 0$, le 0-ème groupe de cohomologie de de Rham n’étant rien d’autre que l’espace des fonctions régulières, l’isomorphisme induit par $\chi_{c,o}^0$ est un isomorphisme de K_v -algèbres, le produit de fonctions s’interprétant comme le cup produit en cohomologie de de Rham. En passant aux spectres, l’isomorphisme $\chi_{c,o}^0$ induit un isomorphisme de K_v -schémas

$$\Phi_{o,c} : \nu_v^{-1}(o) \xrightarrow{\sim} \nu_v^{-1}(c).$$

10. Ces considérations élémentaires (mais un peu pénibles) sont le prix à payer pour ne pas démontrer que la représentation galoisienne $\mathrm{H}_{\text{ét}}^1(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ est semi-simple, mais seulement qu’un certain facteur direct $\mathrm{H}_{\text{ét}}^1(A_{c'}, \mathbb{Q}_p)$ est irréductible.

D'autre part, la décomposition

$$H_{\mathrm{dR}}^i(\nu_v^{-1}(c)/K_v) = \bigoplus_{\nu_v(c')=c} H_{\mathrm{dR}}^i(A_{c'}/K_v(c'))$$

est respectée par le transport parallèle, c'est-à-dire que, pour tout point o' de $\nu^{-1}(o)$, l'isomorphisme $\chi_{c,o}^i$ se restreint en un isomorphisme

$$\chi_{c',o'}^i: H_{\mathrm{dR}}^i(A_{c'}/K_v(c')) \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{dR}}^i(A_{o'}/K_v(o'))$$

de $K_v(o')$ -espaces vectoriels, où $c' = \Phi_{o,c}(o')$. En particulier,

$$\mathrm{pr}_{o'}(\mathrm{Per}_o(c)) = [\chi_{c',o'}^1(H^0(A_{c'}, \Omega_{A_{c'}}^1))],$$

le crochets désignant le point de la grassmannienne défini par le sous-espace vectoriel.

4.3.5. Preuve de la proposition 4.5. — Par la discussion précédente et par définition de l'application de périodes, le couple $(K_v(c'), D(c'))$ est isomorphe au couple $(K_v(o'), D)$ où D est l'isocrystal filtré

$$(H_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'}/K_v(o')), \varphi_{o'}, \chi_{c',o'}^1(H^0(A_{c'}, \Omega_{A_{c'}}^1))),$$

et $\Phi_{o,c}(o') = c'$.⁽¹¹⁾ On se ramène donc à démontrer l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4.8. — Soient o'_1, o'_2 des points de $\nu_v^{-1}(o)$, $\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ induisant un isomorphisme $\gamma: K_v(o'_1) \rightarrow K_v(o'_2)$ et W un sous-espace vectoriel de $H_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'_2}/K_v(o'_2))$ de dimension d . Si $[K_v(o'_i) : K_v] > 8d/(d+1)$, alors l'ensemble $\mathcal{D}(\gamma, W)$ des K_v -points c de Ω pour lesquels il y a un isomorphisme

$$D(\Phi_{o,c}(o'_1)) \otimes_{K_v(o'_1)} K_v(o'_2) \simeq (H_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'_2}/K_v(o'_2)), \varphi_{o'_2}, W)$$

d'isocristaux filtrés sur L_2 , est fini (le produit tensoriel dans l'énoncé est pris via γ).

On remarque que l'inégalité $[K_v(o'_i) : K_v] > 8d/(d+1)$ est satisfaite car par hypothèse

$$[K_v(o'_i) : K_v] > r \geq [8d/(d+1)].$$

Démonstration. — Pour simplifier la notation on pose, pour $i = 1, 2$,

$$L_i := K_v(o'_i), \quad V_i := H_{\mathrm{dR}}^1(A_{o'_i}/K_v(o'_i)), \quad \varphi_i := \varphi_{o'_i}.$$

Étant isomorphes, les extensions L_1 et L_2 de K_v ont même degré δ . Il en découle que l'opérateur φ_i^δ est L_i -linéaire.

Soit $I := \mathrm{Iso}_{L_2}(V_1 \otimes_{L_1} L_2, V_2)$ le L_2 -schéma représentant le foncteur associant à une L_2 -algèbre R les isomorphismes de R -modules $f: V_1 \otimes_{L_1} L_2 \otimes_{L_2} R \rightarrow V_2 \otimes_{L_2} R$. La précomposition avec un automorphisme de V_1 en fait un fibré principal sous l'action

11. Cette assertion cache un aspect profond, à savoir, que le Frobenius cristallin $\varphi_{c'}$ s'identifie via l'application de périodes à $\varphi_{o'}$. La raison pour cela est que l'isomorphisme $\chi_{c,o}$ donné par intégration de Gauss–Manin s'interprète (via le théorème de comparaison de Rham/cristallin) comme l'identification de la cohomologie cristalline des fibres spéciales en c et o (qui sont la même variété algébrique sur \mathbb{F}_v). Cette compatibilité ne doit pas surprendre : l'isomorphisme donné par Gauss–Manin était une des motivations de Grothendieck pour la quête de la cohomologie cristalline, dont tout candidat raisonnable aurait dû satisfaire cette compatibilité.

du groupe algébrique $G := \mathrm{GL}(V_1)$. On considère le sous-schéma fermé I' de I dont les R -points sont les isomorphismes f faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes_{L_1} L_2 \otimes_{L_2} R & \xrightarrow{f} & V_2 \otimes_{L_2} R \\ \downarrow \varphi_1^\delta \otimes \mathrm{id} & & \downarrow \varphi_2^\delta \\ V_1 \otimes_{L_1} L_2 \otimes_{L_2} R & \xrightarrow{f} & V_2 \otimes_{L_2} R. \end{array}$$

S'il est non vide, alors le schéma I' est un fibré principal sous l'action du centralisateur Z de φ_1^δ dans $\mathrm{GL}(V_1)$.

Soient $c \in \Omega(K_v)$ et $c' := \Phi_{o,c}(o'_1)$. Par définition de l'application de périodes, l'isocristal filtré $D(c')$ est isomorphe au L_1 -espace vectoriel V_1 muni de l'opérateur de Frobenius φ_1 et du sous-espace vectoriel $\chi_{c',o'}^1(\mathrm{H}^0(A_{c'}, \Omega_{A_{c'}}^1))$. L'isocristal filtré $D(c') \otimes_{L_1} L_2$ est isomorphe à (V_2, φ_2, W) si et seulement s'il existe un isomorphisme de L_2 -espaces vectoriels $f: V_1 \otimes_{L_1} L_2 \rightarrow V_2$ tel que $f \circ (\varphi_1 \otimes \mathrm{id}) = \varphi_2 \circ f$ et

$$f \circ \chi_{c',o'}^1(\mathrm{H}^0(A_{c'}, \Omega_{A_{c'}}^1)) = W.$$

Un tel f vérifie évidemment $f \circ (\varphi_1^\delta \otimes \mathrm{id}) = \varphi_2^\delta \circ f$ et il définit donc un L_2 -point de I' .

On peut ainsi supposer que I' contient un K_v -point f . Soit $W_1 = f^{-1}(W) \otimes_{L_2} L_1$, le produit tensoriel étant pris via l'inverse de γ . Puisque I' est un fibré principal sous l'action du centralisateur Z de φ_1^δ ,

$$\mathcal{D}(\gamma, W) \subseteq (\mathrm{pr}_{o'} \circ \mathrm{Per}_o)^{-1}(Z.[W_1] \cap \mathfrak{H}'_{o'_1}).$$

Par le lemme 4.9 qui suit,

$$\dim(Z.[W_0] \cap \mathfrak{H}'_{o'_1}) \leq \dim(Z.[W_0]) \leq \dim Z \leq (\dim_{K_0} V_0)^2 = (2d)^2.$$

D'autre part,

$$\dim \mathfrak{H}'_{o'_1} = \dim \mathrm{Res}_{L_1/K_v} \mathrm{LGr}_d(V_0) = \frac{1}{2} \delta d(d+1).$$

Par hypothèse $\delta > 8d/(d+1)$, donc

$$\dim(Z.[W_0] \cap \mathfrak{H}'_{o'_1}) < \dim \mathfrak{H}'_{o'_1}.$$

Puisque l'extension $K_v(c')$ est non ramifiée, l'ensemble $\mathcal{D}(\gamma, W)$ est contenu dans les sous-ensembles des points de $(\mathrm{pr}_{o'} \circ \mathrm{Per}_o)^{-1}(Z.[W_0] \cap \mathfrak{H}'_{o'_1}{}^{\mathrm{an}})$ à valeurs dans une extension finie non ramifiée de K_v . L'image de l'application de périodes étant supposée Zariski-dense, on conclut grâce au lemme 4.10 plus bas. \square

LEMME 4.9. — *Soit k un corps. Soit γ un automorphisme du corps k d'ordre fini r de corps fixe k_0 . Soient E un k -espace vectoriel de dimension finie et $\psi: E \rightarrow E$ un automorphisme γ -linéaire. On considère*

$$\begin{aligned} Z(\psi) &:= \{f \in \mathrm{End}_k(E) : f \circ \psi = \psi \circ f\}, \\ Z(\psi^r) &:= \{f \in \mathrm{End}_k(E) : f \circ \psi^r = \psi^r \circ f\}. \end{aligned}$$

Alors, $Z(\psi^r)$ est un sous- k -espace vectoriel de $\text{End}_k(E)$, $Z(\psi)$ est un sous- k_0 -espace vectoriel de $Z(\psi^r)$ et

$$\dim_{k_0} Z(\psi) = \dim_k Z(\psi^r) \leq (\dim_k E)^2.$$

Démonstration. — Voir LAWRENCE et VENKATESH, 2020, Lemma 2.1. □

Soit $D(0, 1^-) = \{x \in \mathbb{A}_{K_v}^{1,\text{an}} : |t(x)| < 1\}$ le disque ouvert de rayon 1 centré à l'origine de la droite affine analytique sur K_v .

LEMME 4.10. — Soient X un K_v -schéma propre et $f: D(0, 1^-) \rightarrow X^{\text{an}}$ un morphisme de K_v -espaces analytiques. Soit Z un fermé strict de X . Si l'image de f est Zariski-dense, alors

- (1) le fermé analytique $f^{-1}(Z^{\text{an}})$ de $D(0, 1^-)$ est une suite de points;
- (2) il n'y a qu'un nombre fini de points z de $f^{-1}(Z^{\text{an}})$ dont le corps résiduel est une extension non ramifiée de K_v .

Il s'agit essentiellement d'une trivialité provenant de la finitude des zéros d'une fonction analytique non nulle sur un disque fermé et du fait que les points de $D(0, 1^-)$ à corps résiduel non ramifié sur K_v sont contenus dans le disque fermé $\{|z| \leq p^{-1}\}$.

4.4. Irréductibilité générique

4.4.1. — L'idée menant à la preuve de la proposition 4.2 (2) est que les sous-représentations non triviales vont donner lieu (via la théorie de Hodge p -adique) à des sous-espaces en position non générique.

PROPOSITION 4.11. — Soit c un $\mathcal{O}_{K,S}$ -point de C . Avec les notations introduites plus haut, on suppose que pour tout \bar{K} -point \bar{c}' de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(\bar{c}') : K_v] > r$ les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) la représentation $\rho_{\bar{c}'}$ n'est pas irréductible;
- (2) pour tout sous-espace vectoriel non nul W de $H_{\text{dR}}^1(A_{\bar{c}'}/K_v(\bar{c}'))$ stable sous l'opérateur de Frobenius $\varphi_{\bar{c}'}$, on a

$$\dim_{K_v(\bar{c}')} \text{Fil}^1 W < \frac{1}{2} \dim_{K_v(\bar{c}')} W,$$

$$\text{où } \text{Fil}^1 W = W \cap H^0(A_{\bar{c}'}, \Omega_{A_{\bar{c}'}}^1).$$

Alors,

$$\text{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) \geq 1/(d+1).$$

Démonstration. — Pour tout \bar{K} -point \bar{c}' de $\nu^{-1}(c)$ soit $V_{\bar{c}'}$ une sous-représentation de $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$ de dimension > 0 minimale (elle peut être l'espace tout entier).

Un automorphisme $\gamma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$ induit un isomorphisme de représentations galoisiennes $\rho_{\bar{c}'} \cong \rho_{\gamma\bar{c}'}$: on choisit les sous-espaces $V_{\bar{c}'}$ et $V_{\gamma\bar{c}'}$ de manière à ce qu'ils se correspondent via cet isomorphisme.

Par restriction, on obtient une représentation continue de $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ sur $V_{\bar{c}'}$. En lui appliquant le foncteur D_{cris} on produit un sous-espace vectoriel non nul $W_{\bar{c}'}$ de $H_{\text{dR}}^1(A_{c'}/K_v(c'))$ stable sous l'opérateur de Frobenius $\varphi_{c'}$.

LEMME 4.12. — *Pour un \bar{K} -point \bar{c}' de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(c') : K_v] > r$,*

$$\dim_{K_v(c')} W_{\bar{c}'} \leq d.$$

Démonstration du lemme. — Comme $[K_v(c') : K_v] > r$, par hypothèse la représentation $\rho_{\bar{c}'}$ n'est pas irréductible. Puisque l'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ respecte (à un facteur scalaire près) l'accouplement de Weil sur $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$, l'orthogonal $V_{\bar{c}'}^\perp$ de $V_{\bar{c}'}$ par rapport à cette forme est stable sous l'action de Galois. Puisque

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\bar{c}'}^\perp = \dim_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p) - \dim V_{\bar{c}'} = 2d - \dim V_{\bar{c}'},$$

on a $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\bar{c}'} \leq d$ par minimalité. On conclut car $\dim_{K_v(c')} W_{\bar{c}'} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\bar{c}'}$. \square

Pour simplifier la notation, on désigne par \dim la dimension en tant que $K_v(c')$ -espace vectoriel. On considère la somme $\sum_{\bar{c}'} \dim \text{Fil}^1 W_{\bar{c}'} / \dim W_{\bar{c}'}$ prise sur les \bar{K} -points de $\nu^{-1}(c)$. Pour tout \bar{K} -point \bar{c}' de $\nu^{-1}(c)$,

$$\frac{\dim \text{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} \leq \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2d} & \text{si } [K_v(c') : K_v] > r, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on a utilisé $\dim W_{\bar{c}'} \leq d$ et l'hypothèse $\dim \text{F}^1 W_{\bar{c}'} \leq \frac{1}{2}(\dim W_{\bar{c}'} - 1)$. En particulier,

$$\sum_{\bar{c}'} \frac{\dim \text{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} \leq N_r^- + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2d}\right) N_r^+,$$

où N_r^- (resp. N_r^+) est le nombre de \bar{K} -points \bar{c}' de $\nu^{-1}(c)$ tels que $K_v(c')$ est une extension de degré $\leq r$ (resp. $> r$) de K_v .

LEMME 4.13. — *Avec les notations ci-dessus,*

$$\sum_{\bar{c}'} \frac{\dim \text{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} = \frac{1}{2} |\nu^{-1}(c)(\bar{K})|,$$

la somme étant prise sur les \bar{K} -points de $\nu^{-1}(c)$.

Démonstration du lemme. — Pour un \bar{K} -point \bar{c}' de $\nu^{-1}(c)$, le nombre rationnel

$$(7) \quad \frac{\dim \text{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}}$$

ne dépend que de l'orbite de \bar{c}' sous l'action de $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$, car on a choisi les sous-espaces $V_{\bar{c}'}$ de manière compatible à l'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ (le passage du groupe de Galois global au local est dû à l'application de la théorie de Hodge p -adique).

Le quotient de l'ensemble $\nu^{-1}(c)(\bar{K})$ par le groupe $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ est l'ensemble sous-jacent au K_v -schéma $\nu_v^{-1}(c)$. Pour un point c'_v de $\nu_v^{-1}(c)$ on désigne par $w(c'_v)$ le nombre

rationnel (7). La longueur de l'orbite de \bar{c}' sous $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ est le degré du corps résiduel $K_v(c')$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{c}' \in \nu^{-1}(c)(\bar{K})} \frac{\dim \text{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} &= \sum_{c'_v \in \nu_v^{-1}(c)} [K_v(c'_v) : K_v] w(c'_v) \\ &= \sum_{c' \in \nu^{-1}(c)} \sum_{\text{pr}(c'_v)=c'} [K_v(c'_v) : K_v] w(c'_v), \end{aligned}$$

où $\text{pr}: \nu_v^{-1}(c) \rightarrow \nu^{-1}(c)$ est le morphisme d'extension des scalaires. Le lemme découle de l'égalité, pour tout point c' de $\nu^{-1}(c)$,

$$(8) \quad \sum_{\text{pr}(c'_v)=c'} [K_v(c'_v) : K_v] w(c'_v) = \frac{1}{2} [K(c') : K].$$

Pour démontrer cette dernière, on considère un \bar{K} -point \bar{c}' au-dessus de c' et la représentation $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ déduite de $\rho_{\bar{c}'|V_{\bar{c}'}}$ par induction. La représentation $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ est une représentation pure de poids 1 et cristalline, propriétés qu'elle hérite de $\rho_{\bar{c}'}$.

Le membre de gauche de (8) divisé par $[K(c') : K]$ est le poids⁽¹²⁾ de la filtration de l'isocristal $D_{\text{cris}}(\tilde{\rho}_{\bar{c}'})$ obtenu en appliquant la théorie de Hodge p -adique à la représentation $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ restreinte à $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$; comme une représentation cristalline est de Hodge–Tate, c'est aussi le poids de Hodge–Tate en v du déterminant de $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ divisé par $[K_v(c') : K_v] \dim V_{\bar{c}'}$.

On conclut grâce au fait suivant : pour un caractère continu $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ pur de poids n et localement algébrique en tout premier au-dessus de p , l'entier n est pair et le poids de Hodge–Tate en v est $n/2$ (LAWRENCE et VENKATESH, 2020, Lemma 2.8).⁽¹³⁾ \square

D'après le lemme et l'inégalité qui le précède,

$$\frac{1}{2}(N_r^- + N_r^+) = \frac{1}{2} |\nu^{-1}(c)(\bar{K})| \leq N_r^- + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2d}\right) N_r^+,$$

d'où l'inégalité $N_r^+ \leq dN_r^-$. Par définition de la v -stagnation (voir l'exemple 2.4),

$$\text{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) = \frac{N_r^-}{N_r^- + N_r^+} \geq \frac{N_r^-}{N_r^- + dN_r^-} = \frac{1}{d+1},$$

ce qui termine la preuve. \square

12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k . Soit $\text{Fil}^\bullet E = (\text{Fil}^i E)_{i \in \mathbb{N}}$ une filtration décroissante sur E avec $\text{Fil}^0 E = E$. Le poids de la filtration $\text{Fil}^\bullet E$ est le nombre rationnel

$$\text{wt}(E, \text{Fil}^\bullet E) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{i \dim_k \text{Fil}^i E / \text{Fil}^{i+1} E}{\dim_k E}.$$

13. Lorsque K contient un sous-corps CM F , c'est ici (et seulement ici) qu'on utilise que la place v est au-dessus d'une place de F^+ qui est inerte dans F .

4.4.2. Démonstration de 4.2 (2). — On reprend les notations introduites au 4.3.4. Pour un point o' de $\nu^{-1}(o)$, on désigne par $\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{H}'_{o'}$ formé par les sous-espaces vectoriels lagrangiens $H \subseteq H^0(A_{o'}/K_v(o'))$ pour lesquels il existe un sous-espace vectoriel W stable sous $\varphi_{o'}$ tel que

$$\dim_{K_v(o')} H \cap W \geq \frac{1}{2} \dim_{K_v(o')} W.$$

Pour commencer, on remarque que pour tout point $c \in \Omega^{\text{ns}}$ il existe un \bar{K} -point c' de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(c') : K_v] > r$ (cf. exemple 2.4). On considère l'ensemble F des points non stagnants c pour lesquels, pour tout \bar{K} -point c' de la fibre $\nu^{-1}(c)$ de degré $[K_v(c') : K_v] > r$, la représentation $\rho_{c'}$ n'est pas irréductible. Alors, d'après la proposition 4.11, l'ensemble F est contenu dans

$$\bigcup_{o'} (\text{pr}_{o'} \circ \text{Per}_o)^{-1}(\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'}),$$

la réunion parcourant les points o' de $\nu^{-1}(o)$ tels que $[K_v(o') : K_v] > r$.

Le lemme 4.14 qui suit entraîne que le sous-ensemble $\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'}$ est contenu dans un fermé strict de $\mathfrak{H}'_{o'}$. Puisque l'image de $\text{pr}_{o'} \circ \text{Per}_o$ est Zariski-dense, le lemme 4.10 implique la finitude de $(\text{pr}_{o'} \circ \text{Per}_o)^{-1}(\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'})$ et par conséquent celle de F .

LEMME 4.14. — *Soient k un corps, γ un automorphisme de k et k_0 le corps fixe. Soit V un k -espace vectoriel de dimension 2δ muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée θ . Soit $\psi : V \rightarrow V$ un endomorphisme γ -linéaire bijectif. On considère la grassmannienne $\text{LGr}_d(V)$ des sous-espaces de dimension d totalement isotropes par rapport à θ et sa restriction à la Weil $\text{Res}_{k/k_0} \text{LGr}_d(V)$ à k_0 .*

Si $[k : k_0] \geq 5$, alors l'ensemble des sous-espaces vectoriels H de V pour lesquels il existe un sous-espace vectoriel W stable sous ψ tel que

$$\dim_k H \cap W \geq \frac{1}{2} \dim_k W,$$

n'est pas Zariski-dense dans $\text{Res}_{k/k_0} \text{LGr}_d(V)$.

Démonstration. — Voir LAWRENCE et VENKATESH, 2020, Lemma 6.3. □

Ceci termine la preuve de la proposition 4.2 (2) et donc du théorème 2.7.

RÉFÉRENCES

- Yves ANDRÉ (1996). « On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties », *Math. Ann.* **305** (2), p. 205-248.
- (2003). *Period mappings and differential equations. From \mathbb{C} to \mathbb{C}_p* . MSJ Memoirs, vol. **12**. Tôhoku-Hokkaidô lectures in arithmetic geometry, With appendices by F. Kato and N. Tsuzuki. Mathematical Society of Japan, Tokyo, p. viii+246.
- Arnaud BEAUVILLE (1986). « Le groupe de monodromie des familles universelles d'hyper-surfaces et d'intersections complètes », in : *Complex analysis and algebraic geometry (Göttingen, 1985)*. T. 1194. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 8-18.

- José BERTIN et Matthieu ROMAGNY (2011). « Champs de Hurwitz », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (125-126), p. 219.
- Enrico BOMBIERI (1990). « The Mordell conjecture revisited », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **17** (4), p. 615-640.
- Enrico BOMBIERI et Walter GUBLER (2006). *Heights in Diophantine geometry*. T. 4. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, p. xvi+652.
- Siegfried BOSCH, Werner LÜTKEBOHMERT et Michel RAYNAUD (1990). *Néron models*. T. 21. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3). Springer-Verlag, Berlin, p. x+325.
- Jean-Benoît BOST (1996). « Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d’après D. Masser et G. Wüstholz) », *Astérisque* (237). Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95, Exp. No. 795, 4, 115-161.
- Olivier BRINON et Brian CONRAD (2009). *CMI Summer school notes on p -adic Hodge theory*. available at <https://math.stanford.edu/~conrad/papers/notes.pdf>.
- Claude CHABAUTY (1941). « Sur les points rationnels des variétés algébriques dont l’irrégularité est supérieure à la dimension », *C. R. Acad. Sci. Paris* **212**, p. 1022-1024.
- Pierre DELIGNE (1985). « Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevitch (d’après G. Faltings) », *Astérisque* (121-122). Seminar Bourbaki, Vol. 1983/84, p. 25-41.
- Wolfgang EBELING (1984). « An arithmetic characterisation of the symmetric monodromy groups of singularities », *Invent. Math.* **77** (1), p. 85-99.
- Gerd FALTINGS (1983). « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern », *Invent. Math.* **73** (3), p. 349-366.
- (1984). « Erratum : “Finiteness theorems for abelian varieties over number fields” », *Invent. Math.* **75** (2), p. 381.
- (1989). « Crystalline cohomology and p -adic Galois-representations », in : *Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988)*. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, p. 25-80.
- Jean-Marc FONTAINE (1982). « Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d’un corps local ; construction d’un anneau de Barsotti-Tate », *Ann. of Math. (2)* **115** (3), p. 529-577.
- Jean-Marc FONTAINE et William MESSING (1987). « p -adic periods and p -adic étale cohomology », in : *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*. T. 67. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 179-207.
- William FULTON (1969). « Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves », *Ann. of Math. (2)* **90**, p. 542-575.
- W. A. M. JANSSEN (1983). « Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups », *Math. Ann.* **266** (1), p. 115-133.
- Ariyan JAVANPEYKAR (2015). « Néron models and the arithmetic Shafarevich conjecture for certain canonically polarized surfaces », *Bull. Lond. Math. Soc.* **47** (1), p. 55-64.
- Ariyan JAVANPEYKAR et Daniel LOUGHRAN (2015). « Good reduction of algebraic groups and flag varieties », *Arch. Math.* **104** (2), p. 133-143.

- Ariyan JAVANPEYKAR et Daniel LOUGHRAN (2017). « Complete intersections : moduli, Torelli, and good reduction », *Math. Ann.* **368** (3-4), p. 1191-1225.
- (2018). « Good reduction of Fano threefolds and sextic surfaces », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5)* **18** (2), p. 509-535.
- (2021). « Arithmetic hyperbolicity and a stacky Chevalley–Weil theorem », *Journal of the London Mathematical Society* **103** (3), p. 846-869.
- Johan de JONG et al. (2008-). *The Stacks Project*. Available at <http://stacks.math.columbia.edu> (ci-après : Stacks Project).
- Nicholas KATZ (1970). « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (39), p. 175-232.
- (1973). « Travaux de Dwork », 167-200. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 317.
- Minhyong KIM (2005). « The motivic fundamental group of $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and the theorem of Siegel », *Invent. Math.* **161** (3), p. 629-656.
- (2009). « The unipotent Albanese map and Selmer varieties for curves », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (1), p. 89-133.
- Kunihiko KODAIRA (1967). « A certain type of irregular algebraic surfaces », *J. Anal. Math.* **19**, p. 207-215.
- Thomas KRÄMER (2016). *Characteristic cycles and the microlocal geometry of the Gauss map, II*. <https://arxiv.org/abs/1604.02389>.
- (2021). « Characteristic cycles and the microlocal geometry of the Gauss map, II », *J. Reine Angew. Math.*
- Thomas KRÄMER et Rainer WEISSAUER (2015a). « On the Tannaka group attached to the theta divisor of a generic principally polarized abelian variety », *Math. Z.* **281** (3-4), p. 723-745.
- (2015b). « Vanishing theorems for constructible sheaves on abelian varieties », *J. Algebraic Geom.* **24** (3), p. 531-568.
- Brian LAWRENCE et Will SAWIN (2020). *The Shafarevich conjecture for hypersurfaces in abelian varieties*. <https://arxiv.org/abs/2004.09046>.
- Brian LAWRENCE et Akshay VENKATESH (2020). « Diophantine problems and p -adic period mappings », *Invent. Math.* **221** (3), p. 893-999.
- Haohao LIU (2021). *Lawrence-Venkatesh’s p -adic approach to Mordell’s conjecture*. Disponible à l’adresse <http://home.ustc.edu.cn/~kyung/Lawrence-Venkatesh.pdf>.
- David MASSER et Gisbert WÜSTHOLZ (1993). « Isogeny estimates for abelian varieties, and finiteness theorems », *Ann. of Math. (2)* **137** (3), p. 459-472.
- David MUMFORD (1965). « A remark on Mordell’s conjecture », *Amer. J. Math.* **87**, p. 1007-1016.
- Marc Paul NOORDMAN (2021). *Siegel’s theorem via the Lawrence-Venkatesh method*. <https://arxiv.org/abs/2101.07111>.
- Alexei N. PARSHIN (1968). « Algebraic curves over function fields. I », *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **32**, p. 1191-1219.

- Michel RAYNAUD (1974). « Schémas en groupes de type (p, \dots, p) », *Bull. Soc. Math. France* **102**, p. 241-280.
- Anthony J. SCHOLL (1985). « A finiteness theorem for del Pezzo surfaces over algebraic number fields », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **32**, p. 31-40.
- Jean-Pierre SERRE (1997). *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Aspects of Mathematics. Translated from the French and edited by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, With a foreword by Brown and Serre. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, p. x+218.
- Yiwei SHE (1997). *The unpolarized Shafarevich Conjecture for K3 Surfaces*. <https://arxiv.org/abs/1705.09038>.
- Lucien SZPIRO (1985). « La conjecture de Mordell. [D'après G. Faltings] »,
- Tepei TAKAMATSU (2019). *On the Shafarevich conjecture for Enriques surfaces*. <https://arxiv.org/abs/1911.03419>.
- (2020). « On a cohomological generalization of the Shafarevich conjecture for K3 surfaces », *Algebra Number Theory* **14** (9), p. 2505-2531.
- John TATE (1966). « Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields », *Invent. Math.* **2**, p. 134-144.
- Paul VOJTA (1991). « Siegel's theorem in the compact case », *Ann. of Math. (2)* **133** (3), p. 509-548.

Marco Maculan

Institut de Mathématiques de Jussieu
 Sorbonne Université
 4 place Jussieu
 75005 Paris
E-mail : marco.maculan@imj-prg.fr