

GROUPES DE SURFACES DANS LES RÉSEAUX DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

[d’après J. Kahn, V. Marković, U. Hamenstädt, F. Labourie et S. Mozes]

par Fanny KASSEL

Table des matières

1. Motivations.....	2
2. Énoncés plus précis et quantitatifs.....	10
3. Stratégie de démonstration.....	18
4. Étape géométrique selon Hamenstädt.....	25
5. Étape géométrique selon Kahn, Labourie et Mozes.....	37
6. Étape dynamique : utilisation du mélange.....	50
7. Conclusion : étape combinatoire.....	66
Références.....	73

Un *réseau* d’un groupe de Lie G est un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ est de volume fini pour la mesure de Haar ; on dit que Γ est cocompact si G/Γ est compact.

Tout réseau cocompact sans torsion Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est un groupe *de surface*, c’est-à-dire isomorphe au groupe fondamental d’une surface compacte S de genre au moins deux. En effet, on peut prendre pour S le quotient du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 par Γ .

Le but de cet exposé est de présenter le résultat suivant.

THÉORÈME PRINCIPAL (Kahn–Marković, Hamenstädt, Kahn–Labourie–Mozes)

Soit G un groupe de Lie simple complexe ⁽¹⁾, $\mathrm{SO}(2p-1, 1)$, $\mathrm{SU}(p, q)$ ou $\mathrm{Sp}(p, q)$ pour $p > q \geq 1$. Tout réseau cocompact de G contient un sous-groupe de surface.

Le cas $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est dû à KAHN et MARKOVIĆ (2012), les cas $G = \mathrm{SO}(2p-1, 1)$, $\mathrm{SU}(p, 1)$ et $\mathrm{Sp}(p, 1)$ à HAMENSTÄDT (2015), et le cas général à KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018). Récemment, HAMENSTÄDT (2021) a annoncé une démonstration différente du cas général.

Dans la partie 1 nous présentons diverses motivations du théorème principal. Dans la partie 2 nous énonçons des versions plus précises de ce dernier, pour une classe plus

1. Par exemple $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$; cf. HELGASON (2001, Ch. X, § 2) pour une description explicite de tous les groupes de Lie simples classiques.

générale de groupes de Lie semi-simples G . La stratégie de la preuve est expliquée dans la partie 3. Elle comporte trois étapes : géométrique (parties 4 et 5), dynamique (partie 6) et combinatoire (partie 7).

Remerciements

Je remercie chaleureusement Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Jean-Philippe Buelle, León Carvajales, Balthazar Fléchelles, Olivier Glorieux, Jeremy Kahn, François Labourie, Daniel Monclair, Alan Reid, Ilia Smilga, Katie Vokes, ainsi que Nicolas Bourbaki, pour leur aide dans la préparation de cet exposé. Je suis particulièrement reconnaissante à Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Olivier Glorieux et François Labourie pour de nombreuses discussions autour des articles présentés ici.

1. MOTIVATIONS

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact, par exemple $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1.1. Comprendre les sous-groupes des réseaux

Un point de vue fécond en théorie des groupes est de chercher à comprendre certains groupes en étudiant quels types de sous-groupes ils admettent. Il résulte des travaux de TITS (1972) que tout réseau de G contient un groupe libre non abélien à deux générateurs. On peut voir les groupes de surface comme les groupes de type fini (non résolubles à indice fini près) les plus « simples » après les groupes libres⁽²⁾. La question suivante est alors naturelle dans le cadre de l'étude des réseaux des groupes de Lie semi-simples.

Question 1.1. — Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surfaces ?

Le théorème principal répond affirmativement à cette question pour les réseaux cocompacts des groupes de Lie simples complexes et des groupes $\mathrm{SO}(2p - 1, 1)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ pour $p > q \geq 1$.

Lorsque G est de rang réel un (c'est-à-dire $\mathrm{SO}(n, 1)$, $\mathrm{SU}(n, 1)$, $\mathrm{Sp}(n, 1)$ ou la forme réelle de rang un du groupe exceptionnel F_4), les réseaux cocompacts de G sont des groupes hyperboliques au sens de Gromov. La question 1.1 pour ces réseaux est alors un cas particulier d'une question de Gromov (cf. BESTVINA, 2000, Q. 1.6) : tout groupe hyperbolique à un bout admet-il un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte ? Voir par exemple GORDON, LONG et REID (2004) pour une réponse affirmative dans le cadre des groupes de Coxeter, et CALEGARI (2008) pour des

2. Par exemple en considérant la dimension cohomologique : les groupes sans torsion de dimension cohomologique 1 sont les groupes libres (STALLINGS, 1968) ; les groupes de surface sont de dimension cohomologique 2.

conditions homologiques suffisantes. Notons qu’un groupe hyperbolique ne peut contenir qu’un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes de surfaces de genre donné, comme suggéré par GROMOV (1987) et démontré par DELZANT (1995) ; voir THURSTON (1997) pour les groupes de 3-variétés hyperboliques.

En rang réel supérieur, il est facile de construire, de manière arithmétique, des exemples de réseaux contenant des groupes de surface.

Exemple 1.2. — L’automorphisme σ d’ordre deux de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ définit un plongement $\iota: g \mapsto (g, g^\sigma)$ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ dans $G := \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, et $\Gamma := \iota(\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$ est un réseau non cocompact de G . Il contient $\Lambda := \iota(H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$, où $H \simeq \mathrm{SO}(2, 1)_0 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est la composante neutre du groupe orthogonal associé à la forme quadratique $x^2 + y^2 - \sqrt{2}z^2$ sur \mathbb{R}^3 . On vérifie que $H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ est un réseau cocompact de H (cf. par exemple BENOIST, 2009, § 2.1). Ainsi, Λ est un groupe de surface.

Afin d’établir que *tout* réseau contient des groupes de surface, nous verrons que la démonstration du théorème principal ne repose pas sur des considérations arithmétiques, mais sur des arguments géométriques et dynamiques.

1.2. Sous-groupes quasi-fuchsien

Une manière d’obtenir des sous-groupes discrets isomorphes à des groupes de surface dans des groupes de Lie semi-simples G est de considérer des réseaux cocompacts Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et de les voir comme sous-groupes discrets de G via un plongement τ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dans G . On peut montrer (par exemple via la théorie des représentations anosoviennes, cf. paragraphe 1.5) que toute déformation continue suffisamment petite de $\tau(\Gamma_0)$ dans G est encore un sous-groupe discret de G isomorphe à Γ_0 : autrement dit, il existe un voisinage de $\tau|_{\Gamma_0}$ dans l’espace $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ des représentations de Γ_0 dans G (muni de la topologie de la convergence sur une partie génératrice finie de Γ_0) qui est entièrement formé de représentations fidèles d’image discrète.

Mais existe-t-il de petites déformations de $\tau|_{\Gamma_0}$ permettant d’obtenir des sous-groupes de surface de G plus « génériques » que $\tau(\Gamma_0)$, c’est-à-dire non contenus dans un conjugué de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$? C’est le cas lorsque $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est l’inclusion naturelle : dans ce cas $\tau|_{\Gamma_0}$ est contenu dans un ouvert dense de l’espace des représentations fidèles d’image discrète de Γ_0 dans G , l’ouvert des représentations *quasi-fuchsien*, qui joue un rôle important dans la théorie des groupes kleinien. Bers a montré que, modulo conjugaison, cet ouvert est naturellement paramétré par le produit de deux copies de l’espace des représentations fidèles d’image discrète de Γ_0 dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ modulo conjugaison (*espace de Teichmüller*).

Par analogie avec le cas de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, nous adopterons la terminologie suivante.

Définition 1.3. — Soient G un groupe de Lie semi-simple et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Un sous-groupe de G est

- τ -fuchsien si c’est un conjugué dans G de $\tau(\Gamma_0)$ pour un certain réseau cocompact Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$;

- τ -quasi-fuchsien si c'est l'image d'une représentation $\rho: \Gamma_0 \rightarrow G$ où Γ_0 est un réseau cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et ρ appartient à un ouvert connexe de $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ contenant $\tau|_{\Gamma_0}$ et formé entièrement de représentations fidèles et discrètes.

Comme nous l'avons observé plus haut, tout sous-groupe τ -fuchsien est τ -quasi-fuchsien.

Pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ l'inclusion naturelle, les sous-groupes τ -quasi-fuchsien de G coïncident avec les sous-groupes quasi-fuchsien au sens classique, définis comme les sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ isomorphes à des groupes de surface et dont tous les éléments non triviaux sont hyperboliques (c'est-à-dire diagonalisables sur \mathbb{C} et dont les valeurs propres sont de modules différents de 1). En effet, cela résulte du fait (mentionné plus haut) que l'espace des sous-groupes quasi-fuchsien est connexe et, pour la réciproque, des travaux de MAÑÉ, SAD et SULLIVAN (1983).

Alors que pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ l'espace des représentations quasi-fuchsien est un ouvert strict de l'espace connexe $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$, il existe d'autres situations où les représentations τ -quasi-fuchsien forment toute une composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$. Considérons par exemple le couple (G, τ) suivant.

Exemple 1.4. — Soit $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $\tau = \tau_n: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible. Ce plongement, unique à conjugaison par $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{K})$ près, est donné concrètement de la manière suivante : identifions \mathbb{K}^n à l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} à deux variables X et Y qui sont homogènes de degré $n-1$. Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ agit sur $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(X, Y) = P(dX - cY, -bX + aY)$. Ceci définit un plongement de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}(\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}) \simeq \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, qui induit un plongement $\tau_n: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{K}) \hookrightarrow G$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on notera encore τ_n sa restriction à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Choi et Goldman (pour $n = 3$) et Labourie (n quelconque) ont montré que pour tout réseau cocompact Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, la composante connexe de $\tau_n|_{\Gamma_0}$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ est entièrement formée de représentations fidèles et discrètes ; leurs images sont donc des sous-groupes τ_n -quasi-fuchsien de G , dont la composante connexe paramètre les déformations continues. D'après Hitchin, cette composante connexe est, modulo l'action de G par conjugaison au but, homéomorphe à une boule de dimension $(n^2 - 1)(2g - 2)$, où $g \geq 2$ est le genre de la surface $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$. Désormais appelée *composante de Hitchin*, elle joue un rôle important en *théorie de Teichmüller–Thurston d'ordre supérieur* (cf. POZZETTI, 2019).

Il est remarquable qu'il existe ainsi des sous-groupes discrets de G ayant de gros espaces de déformations continues. Par contraste, les réseaux de G ont souvent de fortes propriétés de rigidité, qui ont donné lieu à des travaux célèbres. Par exemple, pour G non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (resp. non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ni à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$) et sans facteur compact, les réseaux cocompacts (resp. non cocompacts) irréductibles de G sont localement rigides, d'après Selberg, Calabi, Weil, Garland et Raghunathan. Pour G sans facteur localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, la rigidité de

Mostow implique que toute représentation injective et discrète d'un réseau irréductible de G à valeurs dans G est la restriction d'un automorphisme de G . Pour G de rang réel supérieur et sans facteur compact, Margulis a montré que les réseaux irréductibles de G ont de surcroît une propriété plus forte de super-rigidité, qui implique que ce sont des groupes arithmétiques. Voir PANSU (1995) pour plus de détails.

On peut préciser la question 1.1 de la manière suivante.

Question 1.5. — Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surfaces qui soient τ -quasi-fuchsien au sens de la définition 1.3 ?

Dans une série de papiers, LONG, REID et THISTLETHWAITE (2011), LONG et REID (2013, 2016) et LONG et THISTLETHWAITE (2018, 2020) montrent que c'est le cas de certains réseaux de $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, à savoir tous les réseaux non cocompacts pour $n = 3$, une famille infinie de réseaux cocompacts pour $n = 3$, et le réseau non cocompact $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ pour $n = 4$ et $n \geq 5$ impair. Pour cela, ils considèrent des groupes discrets Δ d'isométries de \mathbb{H}^2 engendrés par les réflexions orthogonales dans les côtés de certains triangles de \mathbb{H}^2 ; ces groupes admettent des sous-groupes d'indice fini sans torsion, qui sont alors des groupes de surface. L'analogue pour Δ de la composante de Hitchin ci-dessus (cf. ALESSANDRINI, G.-S. LEE et SCHAFFHAUSER, 2021) est une composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}))$ formée entièrement de représentations fidèles et discrètes, dont les auteurs montrent que certaines prennent leurs valeurs dans des sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$. Ceci fournit, pour certains réseaux donnés de G , une infinité de classes de conjugaison de sous-groupes de surfaces de genre donné, par contraste avec la situation de rang un mentionnée au paragraphe 1.1.

En allant encore plus loin, on peut poser la question suivante.

Question 1.6. — Dans le cadre de la question 1.5, tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface τ -quasi-fuchsien qui soient « arbitrairement proches » de groupes τ -fuchsien, dans un sens à spécifier ?

Les théorèmes 2.3 et 2.14 ci-dessous donnent une réponse affirmative à cette question pour certains couples (G, τ) qui couvrent tous les groupes G du théorème principal.

Les constructions de Long–Reid–Thistlethwaite, Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes permettent, pour nombre de réseaux arithmétiques de G , d'obtenir des sous-groupes τ -quasi-fuchsien qui sont Zariski-denses dans G : ce sont alors des sous-groupes *fins* (*thin* en anglais) de G , à savoir des sous-groupes d'indice infini de groupes arithmétiques qui sont encore Zariski-denses dans G . Voir KONTOROVICH, LONG, LUBOTZKY et REID (2019) pour plus de détails sur les groupes fins et leur importance.

1.3. Motivations géométriques en basse dimension : le cas cocompact

Soient $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Tout sous-groupe discret sans torsion Γ de G définit une variété hyperbolique de dimension trois en prenant le quotient de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 par Γ .

La question 1.1 pour les réseaux cocompacts de G appartient à une série de grandes conjectures de Thurston sur les variétés hyperboliques compactes (cf. BERGERON, 2013, 2014). Une réponse affirmative à cette question a été donnée par LACKENBY (2010) dans le cas des réseaux arithmétiques de G , puis par KAHN et MARKOVIĆ (2012) en général. Plus précisément, Kahn et Marković ont montré que pour tout réseau cocompact de G , la variété hyperbolique correspondante contient des surfaces immergées π_1 -injectives (c'est-à-dire telles que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux) ; les sous-groupes de surface correspondants peuvent être pris « arbitrairement proches » de groupes fuchsien, dans un sens quantitatif précis. AGOL (2013) a ensuite utilisé ce résultat et les travaux de Wise et ses collaborateurs (cf. WISE, 2021) pour démontrer la *conjecture de Haken virtuelle*, qui affirme que toute variété hyperbolique compacte orientable de dimension trois possède un revêtement fini qui est de Haken, c'est-à-dire qui contient une surface plongée π_1 -injective. Grâce aux travaux de Perelman, ceci résout une conjecture de WALDHAUSEN (1968) affirmant que toute variété compacte, connexe, orientable, irréductible de dimension trois possède un revêtement fini qui est de Haken.

KAHN et MARKOVIĆ (2015) ont ensuite considéré le cas où $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ est le plongement diagonal, pour des réseaux cocompacts de G de la forme $\Gamma_i \times \Gamma_0$ où Γ_i est un réseau cocompact quelconque de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et Γ_0 un réseau d'une forme particulière. Ils ont montré qu'un tel réseau $\Gamma_i \times \Gamma_0$ de G admet des sous-groupes de surfaces qui sont « arbitrairement proches » de groupes fuchsien, là encore dans un sens quantitatif précis. Ceci leur a permis de démontrer un résultat conjecturé par EHRENPREIS (1970) : pour tout réel $k > 1$ et toute paire de surfaces de Riemann compactes de genre au moins deux, on peut trouver des revêtements finis des deux surfaces qui sont k -quasi-conformes.

1.4. Motivations géométriques en basse dimension : le cas non cocompact

Pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard, les questions 1.1 et 1.5 pour les réseaux *non cocompacts* de G ont donné lieu à une riche littérature.

Les sous-groupes discrets de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ isomorphes à des groupes fondamentaux de surfaces compactes peuvent être de deux types : soit ils sont τ -quasi-fuchsien comme au paragraphe 1.2, auquel cas tous leurs éléments sont hyperboliques ; soit ils contiennent un élément parabolique (c'est-à-dire non diagonalisable sur \mathbb{C}), dit *accidentel*. COOPER, LONG et REID (1997) ont répondu affirmativement à la question 1.1 pour les réseaux non cocompacts de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ en construisant des sous-groupes de surface contenant des éléments paraboliques accidentels. Des sous-groupes de surface τ -quasi-fuchsien

ont ensuite été construits par MASTERS et ZHANG (2008, 2009) ainsi que BAKER et COOPER (2015).

1.4.1. Action sur $\partial\mathbb{H}^3$. — Soit Λ un sous-groupe discret de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ isomorphe à un groupe de surface $\pi_1(S)$. Il agit sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 et sur son bord à l'infini $\partial\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le plus petit fermé non vide de $\partial\mathbb{H}^3$ invariant par Λ est l'*ensemble limite* de Λ , c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation à l'infini d'une orbite de Λ dans \mathbb{H}^3 . Lorsque Λ est τ -fuchsien, son ensemble limite est un cercle, égal au bord à l'infini d'une copie de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{H}^3 . Lorsque Λ est τ -quasi-fuchsien, son ensemble limite est un *quasi-cercle* (c'est-à-dire l'image d'un cercle par une application quasi-conforme), dont la géométrie permet de mesurer à quel point Λ est proche d'être fuchsien. Dans ce cas l'enveloppe convexe dans \mathbb{H}^3 de l'ensemble limite de Λ est un convexe fermé de \mathbb{H}^3 sur lequel Λ agit avec quotient compact : on dit que Λ est *convexe cocompact* dans \mathbb{H}^3 .

Récemment, en utilisant KAHN et MARKOVIĆ (2012), COOPER et FUTER (2019) ont montré que tout réseau non cocompact Γ de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ contient des groupes de surface τ -quasi-fuchsien qui sont arbitrairement proches de groupes τ -fuchsien au sens suivant : pour toute paire de cercles disjoints de $\partial\mathbb{H}^3$, on peut trouver un sous-groupe Λ de Γ qui soit isomorphe à un groupe de surface et dont l'ensemble limite soit contenu dans la région bordée par les deux cercles. KAHN et WRIGHT (2021) ont obtenu une version plus forte de ce résultat : pour tout $k > 1$ on peut choisir les sous-groupes de surface Λ de telle sorte que leur action sur $\partial\mathbb{H}^3$ soit conjuguée de manière k -quasi-conforme à l'action d'un groupe fuchsien. Ces résultats répondent à une question d'Agol (DELP, HOFFOSS et MANNING, 2015, Q. 3.5). Ils ont récemment été utilisés par COOPER et FUTER (2019) et GROVES et MANNING (2021) pour donner de nouvelles démonstrations de résultats de WISE (2021) affirmant que Γ agit librement et cocompactement sur un complexe cubique $\mathrm{CAT}(0)$ et que le quotient de ce complexe par un certain sous-groupe d'indice fini de Γ est *spécial*.

1.4.2. Analogies avec le groupe modulaire. — Rappelons que le groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S)$ d'une surface compacte S de genre $g \geq 2$ est le groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de S ; il s'identifie naturellement au groupe des automorphismes extérieurs de $\pi_1(S)$ par un résultat classique de Dehn, Nielsen et Baer. Il agit proprement par isométries sur un complexe simplicial hyperbolique au sens de Gromov (bien que localement infini), le *complexe des courbes* $C(S)$ de S , et Ivanov a montré qu'en genre $g > 2$ il s'identifie au groupe tout entier des isométries simpliciales de $C(S)$. Un point de vue fécond en théorie géométrique des groupes est d'étudier $\mathrm{Mod}(S)$ via son action sur $C(S)$ par analogie avec l'action des réseaux non cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur \mathbb{H}^3 , ou plus généralement de groupes de Lie semi-simples G de rang réel un sur l'espace symétrique riemannien de G (cf. REID, 2006). En particulier, comme pour les réseaux des groupes de Lie semi-simples, on cherche à mieux comprendre $\mathrm{Mod}(S)$ en étudiant ses sous-groupes.

Il est facile de construire des sous-groupes de $\mathrm{Mod}(S)$ qui sont des groupes libres non abéliens, en faisant « jouer au ping pong » des éléments, dits *pseudo-Anosov*, qui

admettent une dynamique analogue à celle des éléments hyperboliques de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Se pose alors la question de trouver des sous-groupes de $\mathrm{Mod}(S)$ qui soient isomorphes à des groupes de surface. Cette question a été résolue par GONZÁLEZ-DIEZ et HARVEY (1999) et LEININGER et REID (2006). Comme pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, il existe une notion naturelle de sous-groupe *convexe cocompact* de $\mathrm{Mod}(S)$, dont tous les éléments d'ordre infini sont pseudo-Anosov : cf. FARB et MOSHER (2002), HAMENSTÄDT (2005) et KENT IV et LEININGER (2008). La question de trouver des sous-groupes *convexes cocompacts* de $\mathrm{Mod}(S)$ qui soient isomorphes à des groupes de surface reste ouverte à ce jour. Elle constitue l'une des motivations du travail récent de KAHN et WRIGHT (2021) sur les réseaux non cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

1.5. Motivations dynamiques en rang supérieur : représentations anosoviennes

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Les *sous-groupes anosoviens* de G , ou images des *représentations anosoviennes* à valeurs dans G , sont des sous-groupes discrets de G ayant de bonnes propriétés dynamiques, et qui ne sont pas des réseaux lorsque G est de rang réel supérieur (par exemple $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $n \geq 3$).

Leur définition dépend du choix, à conjugaison près, d'un sous-groupe parabolique de G , c'est-à-dire (disons si G est algébrique) d'un sous-groupe algébrique P de G tel que l'espace homogène G/P soit compact. On peut penser à G/P comme à un « bord » de G ou de son espace riemannien symétrique G/K , où K est un sous-groupe compact maximal de G . Pour simplifier, on supposera P symétrique (c'est-à-dire conjugué à ses opposés), une condition technique qui est satisfaite dans l'exemple important suivant.

Exemple 1.7. — Soit $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Le groupe des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe parabolique P de G . L'espace homogène compact G/P correspondant est l'espace des drapeaux complets $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1})$ de \mathbb{K}^n . Pour $n = 2$, l'espace G/P est la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$; il s'identifie au bord à l'infini de l'espace riemannien symétrique G/K de G , qui est soit le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit l'espace hyperbolique de dimension trois \mathbb{H}^3 si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit S une surface hyperbolique compacte. L'holonomie de S définit une action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ sur le bord à l'infini $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . On appellera *application de bord* d'une représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ toute application $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P$ qui est ρ -équivariante, au sens où $\xi(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot \xi(x)$ pour tous $\gamma \in \pi_1(S)$ et $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. D'après LABOURIE (2006), une représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ est dite *P-anosovienne* si elle admet une application de bord $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P$ continue (nécessairement unique) qui :

- est injective et même *transverse*, au sens où toute paire de points distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est envoyée sur une paire de points de G/P en position générique,
- préserve la dynamique, au sens où l'image par ξ du point fixe attractif dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'un élément $\gamma \in \pi_1(S)$ est un point fixe attractif de $\rho(\gamma)$ dans G/P ,
- satisfait une certaine condition de contraction uniforme.

Cette condition de contraction est liée à la condition définissant les *flots d'Anosov* en dynamique, d'où la terminologie. Elle implique que les représentations P -anosoviennes forment un ouvert de $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$. Nous n'énoncerons pas cette condition ici, mais renvoyons à KASSEL (2019, § 4) pour plus de détails, ainsi que pour diverses caractérisations des représentations anosoviennes.

Il est facile de voir qu'une représentation anosovienne $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ est toujours fidèle. En effet, si $\rho(\gamma) = 1$, alors $\rho(\gamma)$ agit trivialement sur $\xi(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$; comme l'application ρ -équivariante ξ est injective, γ agit trivialement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ce qui implique que γ est trivial dans $\pi_1(S)$. Un raffinement de ce raisonnement (basé sur le fait que l'action de $\pi_1(S)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est une action *de convergence*) montre que l'image d'une représentation anosovienne est un sous-groupe *discret* de G , dit *anosovien*.

La notion de représentation anosovienne se généralise à tous les groupes de type fini qui sont hyperboliques au sens de Gromov, cf. GUICHARD et WIENHARD (2012). Lorsque G est de rang réel un (par exemple $\text{PSL}(2, \mathbb{K})$), une représentation est anosovienne si et seulement si elle est convexe cocompacte au sens du paragraphe 1.4, c'est-à-dire qu'elle agit avec quotient compact sur un fermé convexe non vide de l'espace symétrique riemannien G/K . Lorsque G est de rang réel supérieur (par exemple $\text{PSL}(n, \mathbb{K})$ pour $n \geq 3$), les représentations anosoviennes possèdent encore de bonnes propriétés géométriques, topologiques et dynamiques, qui en font une bonne généralisation des représentations convexes cocompactes : cf. GUICHARD (2019). Ces représentations ont été beaucoup étudiées ces dernières années et jouent un rôle important en théorie de Teichmüller d'ordre supérieur (cf. POZZETTI, 2019) et dans des développements récents sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie (cf. GUICHARD, 2019).

La question 1.1 peut naturellement être affinée de la manière suivante.

Question 1.8. — Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surfaces qui soient anosoviens ?

À la partie 2 nous donnerons, pour les réseaux cocompacts de certains groupes de Lie G , une réponse affirmative à la question 1.6, et ceci implique une réponse affirmative à la question 1.8. En effet, tout plongement $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ définit un sous-groupe parabolique (symétrique) de G , à savoir le plus petit sous-groupe parabolique P_τ de G contenant l'image par τ du groupe des matrices triangulaires supérieures de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Exemple 1.9. — Soient $G = \text{PSL}(n, \mathbb{K})$ et $\tau = \tau_n: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{PSL}(n, \mathbb{K})$ le plongement irréductible, obtenu en identifiant \mathbb{K}^n avec $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ comme dans l'exemple 1.4. Alors P_τ est, comme dans l'exemple 1.7, le sous-groupe de $\text{PSL}(\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}) \simeq \text{PSL}(n, \mathbb{K})$ formé des matrices triangulaires supérieures dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$.

L'observation suivante est facile, cf. GUICHARD et WIENHARD (2012) et LABOURIE (2006).

Remarque 1.10. — Tout sous-groupe τ -fuchsien de G (définition 1.3) est P_τ -anosovien.

En particulier, l'inclusion naturelle dans G de tout sous-groupe τ -fuchsien Λ de G admet un voisinage dans $\text{Hom}(\Lambda, G)$ formé entièrement de représentations P_τ -anosoviennes, donc fidèles et discrètes. Il s'ensuit que tout sous-groupe τ -fuchsien est τ -quasi-fuchsien (définition 1.3), et que tout sous-groupe τ -quasi-fuchsien suffisamment proche d'un groupe τ -fuchsien est P_τ -anosovien.

2. ÉNONCÉS PLUS PRÉCIS ET QUANTITATIFS

Le but de cette partie est d'énoncer des versions plus fines du théorème principal, à savoir les théorèmes 2.3 et 2.14.

2.1. Réponses aux questions 1.5, 1.6, 1.8 dans le cadre du théorème principal

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et P_τ le plus petit sous-groupe parabolique de G contenant l'image par τ du groupe des matrices triangulaires supérieures de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, comme au paragraphe 1.5. On gardera surtout à l'esprit l'exemple de $G = \text{PSL}(n, \mathbb{C})$ et du plongement irréductible $\tau_n: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ (exemples 1.4 et 1.9), où P_{τ_n} est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de G . Voici d'autres exemples.

Exemple 2.1. — Soit $G = \text{SO}(n, 1)$ le sous-groupe de $\text{SL}(n+1, \mathbb{R})$ formé des matrices préservant la forme quadratique $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ sur \mathbb{R}^{n+1} . Il n'y a à conjugaison près qu'un seul plongement $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$, obtenu en identifiant $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ à $\text{SO}(2, 1)_0$ et en voyant $\text{SO}(2, 1)$ comme le sous-groupe de $\text{SO}(n, 1)$ agissant trivialement en-dehors des trois premières coordonnées. Le sous-groupe parabolique P_τ est le stabilisateur d'une droite Q -isotrope de \mathbb{R}^{n+1} . L'espace G/P_τ est le fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ correspondant aux droites Q -isotropes de \mathbb{R}^{n+1} ; il s'identifie au bord à l'infini de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n , qui est l'espace symétrique riemannien G/K de G .

Pour comprendre l'exemple suivant, faisons une observation qui résulte d'un calcul élémentaire : pour n impair, le plongement irréductible $\tau_n: \text{SL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$ de l'exemple 1.4 préserve une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X, Y]_{n-1} \simeq \mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1 \leq i \leq n}$ est antidiagonale à coefficient positifs. L'image de τ_n s'identifie donc à un sous-groupe de $\text{SU}(q+1, q)$ pour $2q+1 = n$.

Exemple 2.2. — Pour $p > q \geq 1$, soit $G = \text{SU}(p, q)$ (resp. $\text{Sp}(p, q)$), vu comme le groupe des transformations inversibles d'un espace vectoriel V de dimension $p+q$ au-dessus de \mathbb{C} (resp. des quaternions) qui préservent une forme hermitienne de signature (p, q) , et sont de déterminant un. Soit $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en composant τ_{2q+1} avec l'inclusion naturelle de $\text{SU}(q+1, q)$ dans $\text{SU}(p, q)$ (resp. $\text{Sp}(p, q)$). Le sous-groupe parabolique P_τ est le stabilisateur d'un drapeau partiel $(V_1 \subset \dots \subset V_q)$ de V formé de sous-espaces totalement isotropes V_i de dimension i . L'espace G/P_τ est l'ensemble de tous les drapeaux partiels de V de cette forme.

Voici une version plus précise du théorème principal, qui répond aux questions 1.5 et 1.8 pour certains couples (G, τ) . Le point (2) fait intervenir les notions de *sous-groupe anosovien* de G du paragraphe 1.5 et d'*application sullivanienne* définie ci-dessous.

THÉORÈME 2.3. — *Soit G l'un des groupes $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2p - 1, 1)$, $\mathrm{SU}(p, q)$ ou $\mathrm{Sp}(p, q)$ pour $n, p > q \geq 1$, et soit τ donné par l'un des exemples 1.4–1.9, 2.1 ou 2.19. Soit $\delta > 0$. Alors tout réseau cocompact de G admet des sous-groupes de surfaces qui*

1. *sont τ -quasi-fuchsien (définition 1.3),*
2. *admettent une application de bord (δ, τ) -sullivanienne $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ (définition 2.6), ce qui implique, pour $\delta > 0$ assez petit, qu'ils sont P_τ -anosoviens.*

Le cas $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ résulte des travaux de KAHN et MARKOVIĆ (2012). Dans le cas général, le point (1) résulte des travaux de HAMENSTÄDT (2015, 2021) et KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018), et le point (2) est démontré par KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018).

Le point (2) donne un sens quantitatif précis au fait que l'on peut trouver, à l'intérieur de tout réseau cocompact irréductible de G , des sous-groupes de surface arbitrairement proches de groupes τ -fuchsien.

Voir le paragraphe 2.3 pour un cadre général dans lequel ce théorème est démontré.

2.2. Cercles et applications sullivaniennes

On définit à présent la notion d'application sullivanienne.

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et P_τ le sous-groupe parabolique de G correspondant, comme aux paragraphes 1.5 et 2.1. On pourra garder en tête l'exemple de $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et du plongement irréductible $\tau = \tau_n$ des exemples 1.4 et 1.9, où P_τ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de G .

2.2.1. τ -cercles. — Introduisons d'abord la notion de τ -cercle. Le plongement τ envoie le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dans P_τ , et passe donc au quotient en une application injective τ -équivariante

$$(2.1) \quad \underline{\tau}: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/B \longrightarrow G/P_\tau.$$

Par définition, un τ -cercle est une application de la forme $g \circ \underline{\tau}: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ où $g \in G$. Par exemple, pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard, les images des τ -cercles de $G/P_\tau = \partial\mathbb{H}^3$ sont les bords des plans totalement géodésiques de \mathbb{H}^3 . Plus généralement, on a l'exemple suivant.

Exemple 2.4. — Soit $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $\tau = \tau_n: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible. Si l'on identifie \mathbb{K}^n à $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ comme dans l'exemple 1.4, alors $\underline{\tau}$ (« plongement de Veronese ») envoie tout point $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sur le drapeau $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1})$ où V_i est le sous-espace de $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ formé des polynômes divisibles par $(\beta X + \alpha Y)^{n-i}$. Voir la figure 1.

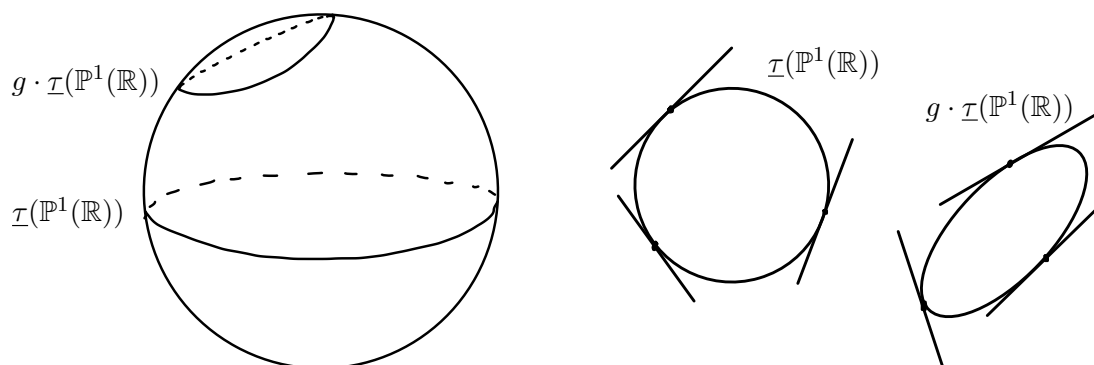


FIGURE 1. À gauche : τ -cercles dans $G/P_\tau = \partial\mathbb{H}^3$ pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. À droite : pour $G = \mathrm{PSL}(3, \mathbb{R})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible, G/P_τ est l'espace des drapeaux de \mathbb{R}^3 ; un τ -cercle de G/P_τ est l'ensemble des drapeaux $(V_1 \subset V_2)$ tels que $\mathbb{P}(V_1)$ décrit une certaine conique de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{P}(V_2) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ est la droite projective tangente à la conique en $\mathbb{P}(V_1)$.

Si $g \circ \tau$ est un τ -cercle, alors toute reparamétrisation $g \circ \tau \circ h: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$, où $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, est encore un τ -cercle, car $g \circ \tau \circ h = (g\tau(h)) \circ \tau$ par équivariance.

On suppose désormais que le centralisateur Z_G^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G est compact, ce qui est vérifié dans le cadre du théorème 2.3 (et plus généralement du théorème 2.14 ci-dessous, cf. remarque 2.11.(1)). Pour $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau = \tau_n$ le plongement irréductible, ce centralisateur Z_G^τ est même trivial. La remarque suivante affirme que les τ -cercles sont alors essentiellement les applications de bord des représentations τ -fuchsienues, c'est-à-dire de la forme $g(\tau \circ \varrho(\cdot))g^{-1}$ où S est une surface hyperbolique compacte, $\varrho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ une représentation fidèle et discrète, et $g \in G$.

Remarque 2.5. — Soit S une surface hyperbolique compacte. En supposant Z_G^τ compact, une représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ admet une application de bord qui est un τ -cercle si et seulement si ρ est le produit d'une représentation τ -fuchsienne $g(\tau \circ \varrho(\cdot))g^{-1}$ et d'une représentation de $\pi_1(S)$ à valeurs dans le groupe compact $gZ_G^\tau g^{-1}$.

2.2.2. Applications (δ, τ) -sullivanniennes. — Les applications (δ, τ) -sullivanniennes sont des applications de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans G/P_τ qui sont « proches à δ près » de τ -cercles, dans un sens précis. Pour les définir, munissons $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de sa distance riemannienne standard $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$, invariante par $\mathrm{PSO}(2)$, telle que $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(0, t) = \arctan(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit K un sous-groupe compact maximal de G contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$. Munissons G/P_τ d'une distance riemannienne d_τ , invariante par K , telle que le τ -cercle τ de (2.1) soit isométrique. Tout τ -cercle $g \circ \tau: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$, où $g \in G$, est alors isométrique pour la distance riemannienne $d_\tau^g := d_\tau(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot)$ sur G/P_τ .

Définition 2.6 (Kahn–Labourie–Mozes). — Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et P_τ le sous-groupe parabolique de G correspondant. Soit $\delta \geq 0$. Une application $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ est (δ, τ) -sullivannienne si c'est « une δ -approximation de τ -cercle vu depuis n'importe quel triplet de points »,

au sens où pour tout triplet T de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, il existe un élément $g \in G$ tel que

- le triplet $\xi(T)$ soit δ -proche de $g \circ \tau(\infty, 0, 1)$ pour la distance d_τ^g ;
- plus généralement, $d_\tau^g(\xi(x), g \circ \tau \circ h_T(x)) \leq \delta$ pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, où $h_T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ désigne l'unique reparamétrisation de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ envoyant T sur $(\infty, 0, 1)$.

Pour $\delta = 0$, une application (δ, τ) -sullivannienne est un τ -cercle. Plus $\delta > 0$ est petit, mieux l'application approche un τ -cercle.

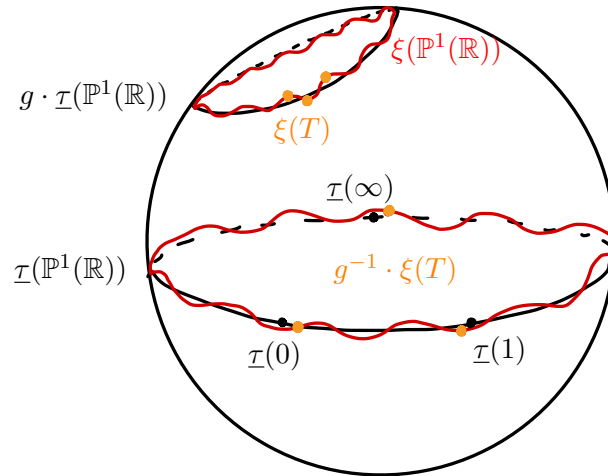


FIGURE 2. Notion d'application sullivannienne

Cette définition est étroitement liée aux birapports. Par exemple, l'observation suivante est élémentaire, où $[w : x : y : z]$ est le birapport (à valeurs dans $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$) de quatre points $w, x, y, z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Remarque 2.7. — Soient $G = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe $k_\delta > 1$ tel que toute application (δ, τ) -sullivannienne $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = G/P_\tau$ soit quasi-symétrique de paramètre k_δ : pour tous $w, x, y, z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ deux à deux distincts vérifiant $[w : x : y : z] = -1$, on a $k_\delta^{-1} \leq |[\xi(w) : \xi(x) : \xi(y) : \xi(z)]| \leq k_\delta$.

En effet, pour tous $w, x, y, z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ deux à deux distincts, il existe $h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ envoyant (w, x, y, z) sur $(\infty, 0, 1, B)$ où $B := [w : x : y : z]$. Comme ξ est (δ, τ) -sullivannienne, il existe $g \in G$ tel que, dans $G/P_\tau = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ muni de sa distance PSU(2)-invariante d_τ , le quadruplet $g^{-1} \circ \xi(w, x, y, z)$ soit point par point δ -proche du quadruplet $(\infty, 0, 1, B)$. Pour δ suffisamment petit et $B = -1$, ceci implique que $|[g^{-1} \circ \xi(w) : g^{-1} \circ \xi(x) : g^{-1} \circ \xi(y) : g^{-1} \circ \xi(z)]|$ appartient à $[k_\delta^{-1}, k_\delta]$ pour un certain $k_\delta > 1$ ne dépendant que de δ . On conclut par l'invariance du birapport par $G = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Il est probable que ce lien entre applications sullivanniennes et birapports se généralise à des groupes semi-simples G de rang supérieur, pour de bonnes notions de birapports (cf. par exemple BEYRER, 2021).

L’observation facile suivante montre que, lorsque le centralisateur Z_G^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G est compact, on peut quantifier le fait qu’une représentation soit proche d’être τ -fuchsienne par l’existence d’une application de bord (δ, τ) -sullivannienne pour δ petit.

Remarque 2.8. — Supposons Z_G^τ compact. Pour toute surface hyperbolique compacte S et toute suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de représentations de $\pi_1(S)$ dans G , si ρ_n admet une application de bord (δ_n, τ) -sullivannienne pour tout n et si $\delta_n \rightarrow 0$, alors, quitte à conjuguer les ρ_n , elles convergent vers une représentation P_τ -anosovienne dont l’application de bord est un τ -cercle (décrite à la remarque 2.5).

2.2.3. *Quelques propriétés des applications sullivanniennes.* — Les propriétés suivantes seront utiles au paragraphe 5.6.

PROPOSITION 2.9 (Kahn–Labourie–Mozes). — *Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et P_τ le sous-groupe parabolique de G correspondant. On suppose que le centralisateur Z_G^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G est compact. Alors il existe $\delta_0, C, \alpha > 0$ tels que*

1. *toute application (δ_0, τ) -sullivannienne $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ est α -höldérienne ; plus précisément, pour tout triplet T de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et tous $g \in G$ et $h_T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ comme à la définition 2.6, on a $d_T^g(\xi(x), \xi(y)) \leq C d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h_T(x), h_T(y))^\alpha$ pour tous $x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$;*
2. *pour toute surface hyperbolique compacte S et toute représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$, si ρ admet une application de bord (δ, τ) -sullivannienne pour $\delta < \delta_0$, alors*
 - (a) *ρ est P_τ -anosovienne (donc en particulier injective) ;*
 - (b) *ρ admet, pour tout $\varepsilon > 0$, un voisinage dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ formé entièrement de représentations P_τ -anosoviennes d’application de bord $(\delta + \varepsilon, \tau)$ -sullivannienne.*

Le point (1) repose sur une version précise, dans G/P_τ , du lemme de Morse de KAPOVICH, LEEB et PORTI (2014, 2018), qui requiert un contrôle fin de la convergence de parties imbriquées de G/P_τ (« lunules ») et fait l’objet des parties 4 à 7 de KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018). Le point (2a) repose sur cette même propriété d’imbrication (mais sans nécessiter un contrôle aussi fin), dans l’esprit de la caractérisation des représentations anosoviennes en termes de multicônes de BOCHI, POTRIE et SAMBARINO (2019). Le point (2b) résulte de (2a) et du fait que l’application de bord d’une représentation P_τ -anosovienne varie continûment avec la représentation (cf. GUICHARD et WIENHARD, 2012).

2.3. Un cadre général pour le théorème principal

Dans ce paragraphe, nous décrivons les couples (G, τ) , où G est un groupe de Lie réel semi-simple linéaire et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement, pour lesquels le théorème principal et le théorème 2.3 sont démontrés. Ces couples sont ceux qui satisfont deux conditions : l’une de *régularité* et l’autre, que nous noterons (R), de *retournement*.

Le lecteur peu familier avec la théorie de Lie pourra ignorer ce paragraphe et se concentrer sur l'exemple 1.4 de $(\mathrm{PSL}(n, \mathbb{C}), \tau_n)$, ou plus généralement sur les exemples du paragraphe 2.1, où les deux conditions sont satisfaites.

2.3.1. *La condition de régularité sur \mathfrak{h} .* — Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $d\tau: \mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}$ le morphisme d'algèbres de Lie correspondant. Posons

$$(2.2) \quad \mathfrak{h} := d\tau(\mathrm{diag}(1, -1)),$$

où $\mathrm{diag}(1, -1) \in \mathfrak{psl}(2, \mathbb{R})$ désigne la matrice diagonale de coefficients 1, -1 . On demande que \mathfrak{h} soit *régulier* au sens classique suivant.

Soit K un sous-groupe compact maximal de G contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$; c'est l'ensemble des points fixes d'une involution θ de G , dite de Cartan. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{k}^\perp$ où \mathfrak{k} est l'algèbre de Lie de K et \mathfrak{k}^\perp l'ensemble des points fixes de $-\mathrm{d}\theta$ (l'orthogonal de \mathfrak{k} pour la forme de Killing). L'élément \mathfrak{h} appartient à \mathfrak{k}^\perp . Soit \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal de \mathfrak{k}^\perp contenant \mathfrak{h} (*sous-espace de Cartan*). Le groupe de Weyl $W = N_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$ agit sur \mathfrak{a} ; l'ensemble des points qui sont fixés par au moins un élément non trivial de W est une union d'hyperplans appelés murs. On dit que \mathfrak{h} est *régulier* s'il n'appartient à aucun mur.

Exemple 2.10. — Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $\tau = \tau_n: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible. Alors $\mathfrak{h} = \mathrm{diag}(n-1, n-3, \dots, -(n-3), -(n-1))$. On peut choisir pour \mathfrak{a} le sous-espace de $\mathfrak{psl}(n, \mathbb{K})$ formé des matrices diagonales de trace nulle. Les murs sont les hyperplans donnés par l'égalité entre i -ième et j -ième coefficients pour $1 \leq i < j \leq n$. L'élément \mathfrak{h} est ici régulier : ses coefficients sont deux à deux distincts.

Remarques 2.11. — 1. La régularité de \mathfrak{h} implique que le centralisateur Z_G^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G est compact. La réciproque est fautive : cf. exemple 2.22.

2. L'élément \mathfrak{h} est toujours régulier lorsque G est de rang réel un.

3. Des plongements τ différents peuvent avoir le même élément \mathfrak{h} régulier : cf. exemple 2.19.

2.3.2. *La condition (R) sur (G, τ) .* — Soit $Z_G(\mathfrak{h})$ le centralisateur de \mathfrak{h} dans G , et soit $\underline{\tau}: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow G/P_\tau$ comme en (2.1). Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes considèrent la condition supplémentaire suivante, dite de *retournement* (*flip* en anglais) :

(R) il existe un élément $j \in G$ d'ordre deux, appartenant à l'intersection du centre de $Z_G(\mathfrak{h})$ et de la composante neutre de $Z_G(\mathfrak{h})$, tel que $j \cdot \underline{\tau}(\infty, 0, 1) = \underline{\tau}(\infty, 0, -1)$.

Cette condition exprime le fait que l'on peut utiliser une famille continue d'éléments de G pour retourner $\underline{\tau}(\infty, 0, 1)$ en $\underline{\tau}(\infty, 0, -1)$ en fixant $\underline{\tau}(\infty)$ et $\underline{\tau}(0)$ (cf. figure 17).

Exemple 2.12. — Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau = \tau_n$ le plongement irréductible. Le centralisateur $Z_G(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} dans G est le groupe des matrices diagonales de G , c'est un groupe connexe et abélien. La condition (R) est satisfaite en prenant $j = \tau(\mathrm{diag}(i, -i))$.

2.3.3. *Le résultat général.* — Dans toute la suite, on travaille dans le cadre suivant.

Cadre 2.13. — Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire sans facteur compact et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. On suppose $\mathfrak{h} := d\tau(\mathrm{diag}(1, -1)) \in \mathfrak{g}$ régulier comme au paragraphe 2.3.1, ce qui implique que le centralisateur Z^τ de $d\tau(\mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}))$ dans G est compact. On note P_τ le sous-groupe parabolique minimal de G contenant $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$, dont l’algèbre de Lie est la somme des sous-espaces propres de $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ associés à des valeurs propres positives ou nulles.

On dit qu’un réseau de G est *irréductible* si sa projection sur chaque facteur simple de G est dense. Voici une version générale du théorème 2.3.

THÉORÈME 2.14. — *Dans le cadre 2.13, supposons que la condition (R) du paragraphe 2.3.2 est vérifiée. Soit $\delta > 0$. Alors tout réseau cocompact irréductible de G admet des sous-groupes de surfaces qui*

1. *sont τ -quasi-fuchsien (définition 1.3),*
2. *admettent une application de bord (δ, τ) -sullivanienne $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ (définition 2.6), ce qui implique (proposition 2.9.(2b)), pour δ assez petit, qu’ils sont P_τ -anosoviens au sens du paragraphe 1.5.*

Comme nous l’avons mentionné au paragraphe 2.1, le cas $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ résulte de KAHN et MARKOVIĆ (2012). En général, (1) résulte de HAMENSTÄDT (2015, 2021) et KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018), et (2) est démontré dans KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018).

Récemment, HAMENSTÄDT (2021) a annoncé une démonstration d’un cas important où la condition (R) n’est pas nécessairement satisfaite, à savoir $G = \mathrm{SO}(p, q)$ où $p - q \geq 2$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ obtenu en composant la représentation irréductible $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SO}(q + 1, q)$ avec l’inclusion naturelle $\mathrm{SO}(q + 1, q) \hookrightarrow G$.

Notons que dans le cas de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et du plongement diagonal $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ considéré dans l’article KAHN et MARKOVIĆ (2015), la condition (R) n’est pas satisfaite.

Remarque 2.15. — KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018) n’ont en fait pas besoin de supposer que \mathfrak{h} est régulier : il suffit que le centralisateur Z_G^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G soit compact. Lorsque \mathfrak{h} n’est pas régulier, ils remplacent la condition (R) par une condition plus forte : au lieu de l’intersection du centre et de la composante neutre de $Z_G(\mathfrak{h})$, ils demandent que la composante neutre du centre de $Z_G(\mathfrak{h})$ contienne un élément j d’ordre deux tel que $j \cdot \tau(\infty, 0, 1) = \tau(\infty, 0, -1)$. Pour \mathfrak{h} non régulier, le sous-groupe parabolique P_τ de G est non minimal : cf. exemple 2.22. Par souci de simplicité, nous supposons ici \mathfrak{h} régulier.

2.3.4. Exemples relatifs à la condition (R). — On pourra utiliser les observations suivantes.

Remarques 2.16. — 1. Si τ est la restriction à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ d'un plongement $\tau_{\mathbb{C}}: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow G$ tel que le tore complexe $\exp \circ d\tau_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \mathrm{diag}(1, -1))$ soit contenu dans le centre de $Z_G(\mathfrak{h})$, alors la condition (R) est satisfaite pour $j = d\tau_{\mathbb{C}}(\mathrm{diag}(i, -i))$.

2. Soit $Z_K(\mathfrak{h})_0$ la composante neutre du centralisateur de \mathfrak{h} dans K . Si \mathfrak{h} est régulier et si le centre de $Z_K(\mathfrak{h})_0$ est trivial, ou plus généralement contenu dans le centralisateur Z_G^{τ} de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G , alors la condition (R) n'est pas satisfaite.

Le point (1) est immédiat. Pour (2), rappelons que si \mathfrak{h} est régulier, alors la composante neutre de $Z_G(\mathfrak{h})$ est le produit direct de $A := \exp(\mathfrak{a})$ et de $Z_K(\mathfrak{h})_0$. Les éléments de A fixent $\tau(\infty)$ et $\tau(0)$, et préservent $\tau(\mathbb{R}_+^*)$. Les éléments de Z_G^{τ} fixent $\tau(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ point par point.

Exemple 2.17. — Pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et τ l'identité, ainsi que pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement diagonal, la condition (R) n'est pas satisfaite car $Z_K(\mathfrak{h})_0$ est trivial (cf. remarque 2.16.(2)).

Exemple 2.18. — Pour $G = \mathrm{SO}(n, 1)$, de rang réel un, il n'y a à conjugaison près qu'un seul plongement $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$, obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ à la composante neutre de $\mathrm{SO}(2, 1)$. Le groupe $Z_K(\mathfrak{h})_0$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$. Pour n pair, la condition (R) n'est pas satisfaite car le centre de $\mathrm{SO}(n-1)$ est trivial (cf. remarque 2.16.(2)). Pour n impair, la condition (R) est satisfaite pour $j := -\mathrm{id} \in \mathrm{SO}(n-1) \simeq Z_K(\mathfrak{h})_0$.

Exemple 2.19. — Soit $G = \mathrm{PU}(n, 1)$ (c'est-à-dire $\mathrm{U}(n, 1)$ divisé par son centre), de rang réel un. Il existe à conjugaison près deux plongements $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$:

- le plongement dit *totalelement réel* obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ avec la composante neutre de $\mathrm{PO}(2, 1)$; il se prolonge en un plongement $\tau_{\mathbb{C}}: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow G$ tel que $\exp \circ d\tau_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \mathrm{diag}(1, -1))$ est contenu dans le centre de $Z_G(\mathfrak{h})$;
- le plongement dit *complexe* obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{PU}(1, 1)$; il vérifie que $Z_K(\mathfrak{h})_0$ est contenu dans le centralisateur Z_G^{τ} de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G .

La condition (R) est satisfaite pour le plongement totalement réel par la remarque 2.16.(1), et non satisfaite pour le plongement complexe par la remarque 2.16.(2).

Exemple 2.20. — Si $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'hypothèse de régularité de \mathfrak{h} impose que $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ soit, à conjugaison près, le plongement irréductible τ_n . La condition (R) est satisfaite pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par la remarque 2.16.(1) (cf. exemple 2.12), et non satisfaite pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par la remarque 2.16.(2), car pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le groupe $Z_K(\mathfrak{h})_0$ est trivial.

On montre de même que la condition (R) est satisfaite si G est un groupe de Lie simple complexe de centre trivial et $d\tau: \mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ le plongement principal, alors qu'elle n'est jamais satisfaite si G est un groupe de Lie simple réel déployé.

Exemple 2.21. — Soit $G = \mathrm{SU}(p, q)$ ou $\mathrm{Sp}(p, q)$, où $p > q$. Soit $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en composant τ_{2q+1} avec l'inclusion naturelle de $\mathrm{SU}(q+1, q)$ dans G , comme dans l'exemple 2.2. L'élément \mathfrak{h} est régulier. La condition (R) est satisfaite par la remarque 2.16.(1).

Exemple 2.22. — Soient $G = \mathrm{SO}(4, 2)$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(2, 1)_0 \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en plongeant $\mathrm{SO}(2, 1)$ diagonalement dans $\mathrm{SO}(2, 1) \times \mathrm{SO}(2, 1) \subset G$. L'élément \mathfrak{h} n'est pas régulier, mais le centralisateur Z_G^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G est compact. La composante neutre de $Z_G(\mathfrak{h})$ est le produit direct de $A = \exp(\mathfrak{a})$ et d'un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{SO}(2)$, dont l'élément $j = -\mathrm{id}$ échange $\tau(1)$ et $\tau(-1)$: la condition (R) est donc satisfaite (version forte de la remarque 2.15). Le sous-groupe parabolique P_τ est ici le stabilisateur d'un plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{4,2}$.

2.3.5. Classification des plongements τ . — Pour G fixé, il n'y a qu'un nombre fini de plongements τ possibles à conjugaison près. On peut les classier de la manière suivante. Posons

$$(2.3) \quad (\mathfrak{h}_0, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{f}_0) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathfrak{psl}(2, \mathbb{R})^3.$$

Les plongements τ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ dans G sont en bijection avec les morphismes d'algèbres de Lie $d\tau: \mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}$ d'image non nulle, ou encore, via l'évaluation en $(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{f}_0)$, avec les $\mathfrak{sl}(2)$ -triplets de \mathfrak{g} , c'est-à-dire les triplets $(\mathfrak{h}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \in \mathfrak{g}^3$ non nuls tels que

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{e}] = 2\mathfrak{e}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{f}] = -2\mathfrak{f} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{e}, \mathfrak{f}] = \mathfrak{h}.$$

Le théorème de Jacobson–Morozov affirme que tout élément nilpotent non nul \mathfrak{e} de \mathfrak{g} peut être complété en un $\mathfrak{sl}(2)$ -triplet, et un résultat classique de Kostant dit que ceci induit une bijection entre l'ensemble des éléments nilpotents non nuls de \mathfrak{g} modulo l'action adjointe de G et l'ensemble des $\mathfrak{sl}(2)$ -triplets de \mathfrak{g} modulo l'action adjointe de G .

Remarque 2.23. — KAHN, LABOURIE et MOZES ([arXiv 2018](#)) expriment la condition (R) du paragraphe 2.3.2 en termes du $\mathfrak{sl}(2)$ -triplet $(\mathfrak{h}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = d\tau(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{f}_0)$: il existe un élément $j \in G$ d'ordre deux, appartenant à l'intersection du centre de $Z_G(\mathfrak{h})$ et de la composante neutre de $Z_G(\mathfrak{h})$, qui envoie (via l'action adjointe) $\mathfrak{e} + \mathfrak{f}$ sur $-(\mathfrak{e} + \mathfrak{f})$.

3. STRATÉGIE DE DÉMONSTRATION

Dans le cadre du théorème 2.3, ou plus généralement dans le cadre 2.13, soit Γ un réseau cocompact irréductible de G . La stratégie générale de démonstration du théorème principal et des théorèmes 2.3 et 2.14 remonte à KAHN et MARKOVIĆ (2012), et comporte trois grandes étapes, décrites aux paragraphes 3.2 à 3.4. La preuve fait intervenir la notion de structure hyperbolique R -parfaite, que nous commençons par introduire.

3.1. Préliminaires : structures hyperboliques R -parfaites sur une surface

Soit S une surface compacte orientée de genre $g \geq 2$. On peut la décomposer en une union disjointe de $3g - 3$ courbes fermées simples et de $2g - 2$ *pantalons*, où un pantalon est par définition une sous-surface ouverte homéomorphe à une sphère à trois trous. On appellera *décomposition en pantalons* l'ensemble \mathcal{P} des $2g - 2$ pantalons ainsi obtenus, et l'on dira que deux pantalons sont *adjacents* si leurs adhérences dans S se rencontrent. Les $3g - 3$ courbes fermées simples seront appelées *courbes de bord*.

Dans la suite, nous fixons une décomposition en pantalons \mathcal{P} de S qui est *bipartie*, au sens où \mathcal{P} est l'union disjointe de deux sous-ensembles \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- tels que deux pantalons adjacents appartiennent toujours à des sous-ensembles différents. En particulier, aucun pantalon n'est adjacent à lui-même. Nous fixons également un graphe fini \mathcal{G} sur S avec :

- $2g - 2$ sommets : un à l'intérieur de chaque pantalon de \mathcal{P} ,
- $3g - 3$ arêtes : une pour chaque courbe de bord entre deux pantalons,

de sorte que S fibre en cercles au-dessus de \mathcal{G} (cf. figure 3, gauche). Le graphe \mathcal{G} permet d'associer, à toute courbe de bord orientée d'un pantalon $\Pi \in \mathcal{P}$, un élément privilégié de $\pi_1(\Pi)$. Si $\Pi^+ \in \mathcal{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathcal{P}^-$ sont adjacents le long d'une courbe a , on peut orienter a et les autres courbes de bord b^\pm, c^\pm comme à la figure 3, droite, de sorte que les éléments correspondants de $\pi_1(\Pi^\pm)$ (notés par les mêmes lettres) vérifient $c^\pm b^\pm a = 1$.

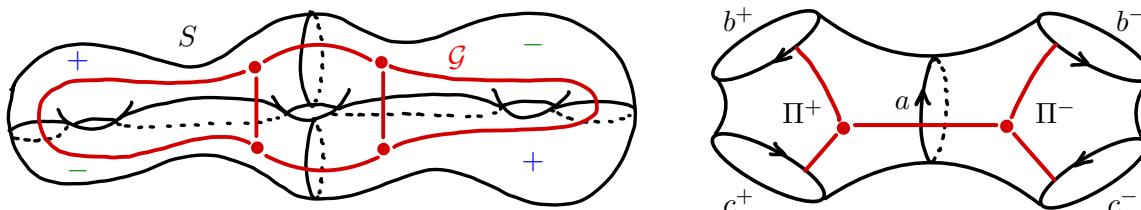


FIGURE 3. À gauche : décomposition en pantalons bipartie de S avec un graphe associé \mathcal{G} ; à droite : configuration de deux pantalons adjacents

Soit \tilde{S} le revêtement universel de S . À toute représentation fidèle et discrète ϱ de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on peut associer un homéomorphisme ϱ -équivariant $\mathrm{dev} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}^2$ (« application développante ») qui identifie, par passage au quotient, S avec la surface hyperbolique $\varrho(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$. Une *structure hyperbolique marquée* sur S est une telle paire (ϱ, dev) modulo la relation d'équivalence suivante : $(\varrho, \mathrm{dev}) \sim (\varrho', \mathrm{dev}')$ s'il existe $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $\varrho'(\cdot) = h\varrho(\cdot)h^{-1}$ et dev' soit isotope à $h \circ \mathrm{dev}$. L'ensemble des structures hyperboliques marquées sur S est l'*espace de Teichmüller* de S . Soient a_1, \dots, a_{3g-3} les courbes de bord des pantalons de la décomposition \mathcal{P} , correspondant à des classes de conjugaison d'éléments $a'_1, \dots, a'_{3g-3} \in \pi_1(S)$. Un résultat classique de Fenchel et Nielsen affirme que l'espace de Teichmüller, de dimension $6g - 6$, est paramétré par

- les longueurs de translation de $\varrho(a'_1), \dots, \varrho(a'_{3g-3})$ dans \mathbb{H}^2 (c'est-à-dire les longueurs des courbes fermées a_1, \dots, a_{3g-3} lorsque l'on identifie S avec $\varrho(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$),

- $3g - 3$ « paramètres de décalage » au niveau de a_1, \dots, a_{3g-3} (cf. HUBBARD, 2006, §7.6).

Les longueurs peuvent prendre n'importe quelles valeurs strictement positives, et les paramètres de décalage n'importe quelles valeurs réelles.

Pour $R > 0$, on notera $(\varrho_R, \text{dev}_R)$ un représentant de la structure hyperbolique marquée sur S dite *R-parfaite* par rapport à \mathcal{P} , pour laquelle toutes les courbes de bord a_i ont longueur $2R$ et paramètre de décalage 1. Elle est caractérisée par le fait que pour tout couple $(\Pi^+, \Pi^-) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{P}^-$ de pantalons adjacents comme à la figure 3, droite, il existe des fermés convexes \mathcal{C}^+ and \mathcal{C}^- de \mathbb{H}^2 tels que (cf. figure 4)

- \mathcal{C}^+ soit invariant par $\varrho_R(\pi_1(\Pi^+))$ et \mathcal{C}^- par $\varrho_R(\pi_1(\Pi^-))$,
- \mathcal{C}^+ (resp. \mathcal{C}^-) puisse être pavé par des hexagones à angles droits de \mathbb{H}^2 , avec un côté sur deux de longueur R , de sorte que deux hexagones adjacents forment un domaine fondamental pour l'action de $\varrho_R(\pi_1(\Pi^+))$ sur \mathcal{C}^+ (resp. de $\varrho_R(\pi_1(\Pi^-))$ sur \mathcal{C}^-),
- \mathcal{C}^+ et \mathcal{C}^- se rencontrent le long de l'axe de translation de $\varrho(a)$,
- les hexagones de \mathcal{C}^+ et de \mathcal{C}^- soient décalés de 1 le long de l'axe de translation (orienté) de $\varrho(a)$.

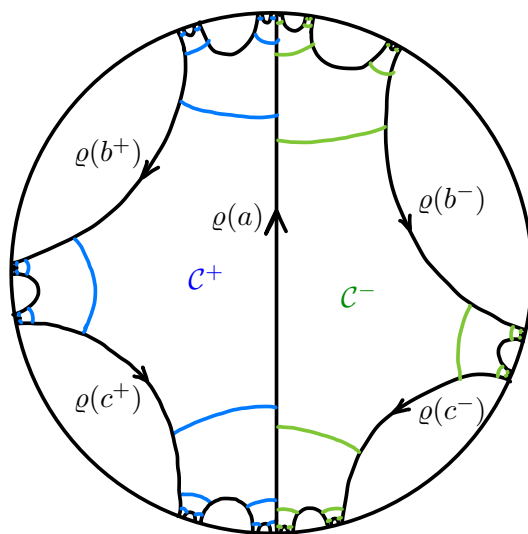


FIGURE 4. Les convexes \mathcal{C}^+ et \mathcal{C}^- de \mathbb{H}^2 , pavés par des d'hexagones à angles droits, relèvent deux pantalons adjacents de \mathcal{P} pour la structure hyperbolique marquée *R-parfaite*

Considérer un paramètre de décalage constant non nul permet de contrôler les petites déformations grâce au fait suivant (cf. KAHN et MARKOVIĆ, 2012, Lem. 2.7).

FAIT 3.1. — *Le diamètre de S munie d'une structure hyperbolique R -parfaite (c'est-à-dire le diamètre de $\varrho_R(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$) est uniformément borné lorsque R tend vers l'infini.*

Pour des pantalons adjacents $\Pi^+ \in \mathcal{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathcal{P}^-$, on dira que la restriction de $\tau \circ \varrho_R$ à $\pi_1(\Pi^+)$ est une représentation *R-parfaite* à valeurs dans G , que la restriction

de $\tau \circ \varrho_R$ à $\pi_1(\Pi^-)$ est une représentation $(-R)$ -parfaite à valeurs dans G , et que ces deux restrictions sont 1-bien recollées.

3.2. Étape géométrique : conditions suffisantes d'injectivité pour les représentations de groupes de surface

Une idée fondamentale de Kahn–Marković pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, développée ensuite par Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes pour des groupes G plus généraux, est d'introduire, pour $\varepsilon, R > 0$, les notions suivantes :

- pour $\Pi \in \mathcal{P}$, une notion de *représentation* $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite de $\pi_1(\Pi)$ dans G , à valeurs dans Γ : il s'agit d'une représentation qui est « proche à ε près » d'un conjugué d'une représentation $(\pm R)$ -parfaite au sens du paragraphe 3.1, ce qui se traduit par l'existence d'une bonne *donnée géométrique* associée à la représentation, décrivant une situation proche de celle du paragraphe 3.1 ;
- pour des pantalons adjacents $\Pi^+ \in \mathcal{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathcal{P}^-$, et pour des représentations $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaites $\rho_{\pm} : \pi_1(\Pi^{\pm}) \rightarrow \Gamma$, une notion de *représentations* $(\varepsilon, 1)$ -bien recollées via leurs données géométriques : cela signifie que les représentations « différent à ε près par un décalage hyperbolique de 1 » comme à la figure 4, le long d'une copie de \mathbb{H}^2 induite par τ .

Les données géométriques et les conditions qu'elles doivent satisfaire pour les deux notions sont exprimées de manière précise en termes de la géométrie des représentations dans l'espace symétrique riemannien de G (pour Kahn–Marković et Hamenstädt) ou la variété de drapeaux G/P_{τ} (pour Kahn–Labourie–Mozes). Nous esquissons l'approche de Hamenstädt à la partie 4 et celle de Kahn–Labourie–Mozes à la partie 5.

Une observation importante est que l'ensemble des classes de conjugaison de représentations (ε, R) -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans le groupe discret Γ est fini. Cela résulte du fait (cf. corollaire 5.13.(2)) que si $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \mid cba = 1 \rangle$ où a, b, c correspondent aux courbes de bord de Π , alors une telle représentation envoie, à conjugaison près, le triplet (a, b, c) sur un triplet d'éléments de Γ proche de

$$\tau \left(\left(\begin{array}{cc} e^{R/2} & 0 \\ 0 & e^{-R/2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} e^{-R/2} & e^{R/2} - e^{-R/2} \\ 0 & e^{R/2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} e^{-R/2} & 0 \\ e^{R/2} - e^{-R/2} & e^{R/2} \end{array} \right) \right) \in G^3.$$

Un raisonnement analogue vaut pour les représentations $(\varepsilon, -R)$ -presque parfaites.

La donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite n'est pas unique, mais varie dans un espace continu (compact).

La première étape de la démonstration des théorèmes 2.3 et 2.14 consiste à donner les conditions suffisantes suivantes pour qu'une représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \Gamma$ soit injective (et donc que son image soit un sous-groupe de Γ isomorphe à $\pi_1(S)$).

PROPOSITION 3.2. — *Dans le cadre du théorème 2.3, ou plus généralement dans le cadre 2.13, soient Γ un réseau cocompact irréductible de G et S une surface hyperbolique compacte avec une décomposition en pantalons bipartie $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$ et un graphe \mathcal{G}*

associé comme au paragraphe 3.1. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε , si une représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \Gamma$ vérifie que

1. pour tout $\Pi^\pm \in \mathcal{P}^\pm$, la restriction de ρ à $\pi_1(\Pi^\pm)$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaite,
2. on peut choisir les données géométriques de tous les pantalons de sorte que pour toute paire $(\Pi^+, \Pi^-) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{P}^-$ de pantalons adjacents, les restrictions de ρ à $\pi_1(\Pi^+)$ et $\pi_1(\Pi^-)$ soient $(\varepsilon/R, 1)$ -bien recollées via ces données géométriques,

alors ρ est injective.

Dans la version de KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018), les auteurs montrent de plus que ρ admet une application de bord (δ, τ) -sullivannienne de paramètre δ arbitrairement petit : cf. proposition 5.19.

Dans la version de HAMENSTÄDT (2015, 2021), les conditions de $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque perfection et $(\varepsilon/R, 1)$ -bon recollement dans la proposition 3.2 sont remplacées par des conditions plus simples mais plus fortes de $(e^{-\kappa R}, \pm R)$ -presque perfection et $(e^{-\kappa R}, 1)$ -bon recollement où $\kappa > 0$ est une constante indépendante de R : cf. proposition 4.11.

3.2.1. Injectivité selon Hamenstädt. — Soit G/K l'espace symétrique riemannien de G , où K est un sous-groupe compact maximal de G . Soit $M = \Gamma \backslash G/K$ l'espace localement symétrique compact associé à Γ . Soit $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \Gamma$ une représentation vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 3.2 pour $R > 0$ assez grand.

Pour montrer que ρ est injective, Hamenstädt suit une approche géométrique : à partir d'une structure hyperbolique R -parfaite sur S (cf. paragraphe 3.1) et des données géométriques des restrictions de ρ aux $\pi_1(\Pi)$ pour $\Pi \in \mathcal{P}$, elle construit, de manière explicite :

- une surface S' homéomorphe à S , munie d'un graphe la découpant en un nombre fini de « morceaux », et sur chaque morceau une structure hyperbolique ou euclidienne pour laquelle le bord est géodésique ;
- une application continue $f: S' \rightarrow M$, de morphisme induit $\rho = f_*: \pi_1(S) = \pi_1(S') \rightarrow \pi_1(M) = \Gamma$, qui est une immersion en restriction à chaque morceau ; elle se relève en une immersion par morceaux continue ρ -équivariante $\tilde{f}: \tilde{S}' \rightarrow G/K$.

La surface S' est obtenue à partir de la surface hyperbolique R -parfaite S en rajoutant, au niveau de chaque courbe de bord entre pantalons adjacents de \mathcal{P} , un fin anneau euclidien (éventuellement réduit à un cercle). Les « morceaux » sont ces anneaux et, pour chaque pantalon de \mathcal{P} , deux triangles équilatéraux (dont le diamètre est borné lorsque R tend vers l'infini) et trois bandes hyperboliques (dont la longueur est proche de R) qui partitionnent le pantalon : cf. figure 9. La condition (1) de la proposition 3.2 permet de construire f de sorte que sa restriction à chaque morceau soit presque isométrique, et la condition (2) de sorte que les angles de recollements soient proches de π et que les décalages entre pantalons soient proches de décalages hyperboliques de longueur 1 comme au paragraphe 3.1.

L'application \tilde{f} définit une métrique des chemins $\pi_1(S')$ -invariante sur \tilde{S}' : par définition, la distance entre deux points x, y de \tilde{S}' est la borne inférieure des longueurs,

dans G/K , des images par \tilde{f} de chemins de x à y dans \tilde{S}' . Cette borne inférieure est en fait un minimum : l'espace métrique \tilde{S}' est géodésique par le théorème de Hopf–Rinow (cf. BRIDSON et HAEFLIGER, 1999, Prop. I.3.7). Par un contrôle fin de la géométrie de l'immersion par morceaux, Hamenstädt montre, pour $R > 0$ suffisamment grand, que l'on peut trouver, pour toute droite géodésique \mathcal{L} de \tilde{S}' , une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de points de \mathcal{L} tels que

- la distance dans \tilde{S}' entre x_n et x_{n+1} soit uniformément majorée,
- la distance dans G/K entre $\tilde{f}(x_n)$ et $\tilde{f}(x_{n+1})$ soit uniformément minorée,
- l'angle entre $[\tilde{f}(x_n), \tilde{f}(x_{n-1})]$ et $[\tilde{f}(x_n), \tilde{f}(x_{n+1})]$ soit suffisamment proche de π ,
- la direction (cf. paragraphe 4.3) de $[\tilde{f}(x_n), \tilde{f}(x_{n+1})]$ soit suffisamment proche de la direction régulière donnée par h .

Un résultat de KAPOVICH, LEEB et PORTI (2014) (lemme de Morse, théorème 4.12) implique alors que la ligne géodésique par morceaux $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f(x_n), f(x_{n+1})]$ est une quasi-géodésique de G/K , à distance bornée d'un plat de G/K . En appliquant ceci à une droite géodésique \mathcal{L} invariante par $\gamma \in \pi_1(S) \setminus \{1\}$, on voit que la représentation ρ est injective. En fait, le lemme de Morse donne une uniformité sur les quasi-géodésiques, ce qui permet de voir que ρ est P_τ -anosovienne au sens du paragraphe 1.5.

3.2.2. Injectivité selon Kahn, Labourie et Mozes. — Soit G/P_τ la variété de drapeaux associée à τ , comme aux paragraphes 1.5, 2.1 et 2.2.3. Pour démontrer la proposition 3.2 et son raffinement (proposition 5.19), Kahn, Labourie et Mozes observent que, grâce à la condition (1), pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$ correspondant à une courbe de bord d'un pantalon de \mathcal{P} , l'élément $\rho(\gamma) \in G$ admet un unique point fixe attractif dans G/P_τ (lemme 5.12) ; on a donc une application (ϱ_R, ρ) -équivariante naturelle d'un sous-ensemble dense de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers G/P_τ , qui au point fixe attractif dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de $\varrho_R(\gamma)$ associe le point fixe attractif dans G/P_τ de $\rho(\gamma)$. Ils utilisent alors la condition (2) pour montrer que cette application se prolonge en une application (ϱ_R, ρ) -équivariante *continue* $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$, avec un contrôle suffisant pour établir qu'à $\delta > 0$ petit fixé, l'application ξ est (δ, τ) -sullivanienne (définition 2.6) dès que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. La proposition 2.9.(2b) assure alors que ρ est P_τ -anosovienne au sens du paragraphe 1.5, donc injective.

3.3. Étape dynamique

La deuxième étape de la démonstration des théorèmes 2.3 et 2.14 consiste à établir les propriétés d'existence suivantes, qui font intervenir les notions du paragraphe 3.2.

PROPOSITION 3.3. — *Dans le cadre 2.13, soit Γ un réseau cocompact irréductible de G , et soient Π^+ et Π^- deux pantalons adjacents le long d'une courbe de bord a comme à la figure 3, droite. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε ,*

1. *il existe des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ ;*

2. pour toute donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaite de $\pi_1(\Pi^+)$ dans Γ , on peut trouver une donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon/R, -R)$ -presque parfaite de $\pi_1(\Pi^-)$ dans Γ de sorte que les représentations soient $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollées le long de a via ces données géométriques.

On peut quantifier le point (2) en utilisant des mesures sur un espace continu $\text{Geom}_{\varepsilon, \pm R}$ (cf. paragraphe 6.1) qui paramètre, dans chacune des approches de HAMENSTÄDT (2015, 2021) ou de KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018), les données géométriques des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ modulo conjugaison.

PROPOSITION 3.4. — Dans le cadre de la proposition 3.3,

- (2)' il existe des mesures $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ sur $\text{Geom}_{\varepsilon, \pm R}$, de même masse totale, telles que pour tout sous-ensemble mesurable A de $\text{Geom}_{\varepsilon, R}$, l'ensemble des éléments de $\text{Geom}_{\varepsilon, -R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés à au moins un élément de A soit de $(\mu_{\varepsilon, -R})$ -mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon, R}(A)$.

Dans la partie 6, nous détaillons la démonstration des propositions 3.3 et 3.4 en suivant l'approche développée par KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018). La démonstration de Hamenstädt est analogue, mais avec un formalisme un peu différent, dû à sa définition différente des données géométriques.

Dans les deux approches, et déjà chez KAHN et MARKOVIĆ (2012), la démonstration repose crucialement sur la propriété de mélange suivante, appliquée à $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$ comme au cadre 2.13. Cette propriété, classique, provient de la décroissance exponentielle des coefficients matriciels des représentations tempérées (cf. la partie 4 de BERGERON, 2013 ou l'appendice B de KAHN, LABOURIE et MOZES, arXiv 2018).

FAIT 3.5. — Pour tout $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{a}$, le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur $\Gamma \backslash G$ donné par la multiplication à droite par $\exp(t\mathfrak{h}')$ est exponentiellement mélangeant : il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C, q > 0$ tel que pour toutes fonctions $\psi, \theta \in C^k(\Gamma \backslash G, \mathbb{R})$ et tout $R \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{[g] \in \Gamma \backslash G} \psi([g]) (\theta \circ \varphi_R)([g]) d[g] - \left(\int_{\Gamma \backslash G} \psi \right) \left(\int_{\Gamma \backslash G} \theta \right) \right| \leq C e^{-q|R|} \|\psi\|_{C^k} \|\theta\|_{C^k}.$$

KAHN et MARKOVIĆ (2012), HAMENSTÄDT (2015), et KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018) n'ont en fait pas besoin du mélange exponentiel (décroissance en $e^{-q|R|}$), seulement d'un mélange polynomial (décroissance en $1/R^\ell$ pour un certain $\ell \geq 2$).

3.4. Étape combinatoire

Pour conclure la démonstration des théorèmes 2.3 et 2.14, il s'agit de prendre les représentations de groupes de pantalons $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollées des propositions 3.3 et 3.4, avec les données géométriques appropriées correspondantes, et de montrer qu'on peut les agencer de manière adéquate pour obtenir une représentation d'une surface compacte S , avec une décomposition en pantalons bipartie et un graphe fini associé, vérifiant les hypothèses de la proposition 3.2. Pour cela, KAHN

et MARKOVIĆ (2012) et KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018) utilisent le lemme classique suivant.

FAIT 3.6 (Lemme des mariages de HALL, 1935). — Soient \mathcal{E}^+ et \mathcal{E}^- deux ensembles finis de même cardinal et $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-$ un sous-ensemble. Alors il existe une bijection $\psi: \mathcal{E}^+ \rightarrow \mathcal{E}^-$ telle que $(x, \psi(x)) \in \mathcal{M}$ pour tout $x \in \mathcal{E}^+$ dès que la condition suivante est vérifiée :

$$(3.1) \quad \forall A \subset \mathcal{E}^+, \quad \# \bigcup_{x \in A} \{y \in \mathcal{E}^- \mid (x, y) \in \mathcal{M}\} \geq \#A.$$

On pense à \mathcal{M} comme à l'ensemble des mariages possibles entre éléments de \mathcal{E}^+ et de \mathcal{E}^- . La condition (3.1) dit que pour tout sous-ensemble A de \mathcal{E}^+ , il existe au moins $\#A$ éléments de \mathcal{E}^- avec la propriété de pouvoir être marié à au moins un élément de A .

Dans notre contexte, \mathcal{E}^\pm sera un ensemble fini obtenu en prenant certaines données géométriques de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -parfaites, avec certaines multiplicités bien choisies données par les mesures $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ de la proposition 3.4, et \mathcal{M} correspondra à l'ensemble des paires $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollées : cf. paragraphe 7.3. La bijection ψ du lemme des mariages permet de construire un graphe fini biparti trivalent \mathcal{G} de sommets $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$ de la manière suivante : les sommets \mathcal{P}^\pm sont obtenus en prenant le quotient de \mathcal{E}^\pm par la transformation d'ordre trois correspondant à la permutation cyclique des courbes de bord (a, b^\pm, c^\pm) (cf. (7.1)) ; pour tout $x \in \mathcal{E}^+ \sqcup \mathcal{E}^-$, on relie la classe de x et celle de $\psi(x)$ par une arête. En épaississant ce graphe, on obtient une surface compacte S avec une décomposition en pantalons bipartie \mathcal{P} et, pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$, une classe de conjugaison de représentations $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ ; de plus, les classes de deux pantalons adjacents admettent des représentants $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés. On en déduit une représentation ρ de $\pi_1(S)$ dans Γ à laquelle la proposition 3.2 s'applique, et qui est donc injective.

L'approche de Hamenstädt est plus précise, et ne requiert par l'utilisation du lemme du mariage : cf. paragraphe 7.5.

4. ÉTAPE GÉOMÉTRIQUE SELON HAMENSTÄDT

Dans cette partie, nous présentons les notions de HAMENSTÄDT (2015, 2021) de représentation (ε, R) -presque parfaite d'un groupe de pantalon dans un réseau cocompact irréductible Γ de G (paragraphe 4.2), et de représentations $(\varepsilon, 1)$ -bien recollées (paragraphe 4.6). Nous donnons les grandes lignes de sa démonstration de la proposition 4.11 ci-dessous, qui est une variante de la proposition 3.2 ; les conditions de $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque perfection et $(C\varepsilon/R, 1)$ -bon recollement y sont remplacées par des conditions de $(e^{-\kappa R}, \pm R)$ -presque perfection et $(e^{-\kappa R}, 1)$ -bon recollement où $\kappa > 0$ est une constante fixée.

Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.13 ; la condition (R) du paragraphe 2.3.2 n'a pas besoin d'être satisfaite. On fixe un réseau cocompact irréductible Γ

de G . Par le lemme de Selberg, quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut le supposer sans torsion; c'est ce que nous ferons ici. On fixe un sous-groupe compact maximal K de G contenant $\tau(\text{PSO}(2))$ et l'on note $M = \Gamma \backslash G/K$ l'espace riemannien localement symétrique défini par Γ (une variété compacte).

4.1. Préliminaires : τ -copies de \mathbb{H}^2 et τ -repères

Le plongement $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ induit un plongement τ -équivariant $\underline{\tau}: \mathbb{H}^2 \hookrightarrow G/K$.

Définition 4.1. — Une τ -copie de \mathbb{H}^2 est une surface totalement géodésique de G/K de la forme $g \cdot \underline{\tau}(\mathbb{H}^2)$ où $g \in G$.

Il est facile de voir (en utilisant par exemple la condition des *systèmes de triplets de Lie*, cf. HELGASON, 2001, Ch. IV, § 7) que toute surface totalement géodésique de G/K est soit contenue dans un plat, soit égale à une τ' -copie de \mathbb{H}^2 pour un certain plongement τ' de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ (ou $\text{SL}(2, \mathbb{R})$) dans G . Ici on se restreint aux copies de \mathbb{H}^2 de type τ fixé.

Rappelons qu'un *repère* de \mathbb{H}^2 est une base orthonormée positivement orientée $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ d'un espace tangent $T_x \mathbb{H}^2$ où $x \in \mathbb{H}^2$. Le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur, et donc s'identifie à, l'espace des repères de \mathbb{H}^2 .

Définition 4.2. — Un *repère d'une τ -copie de \mathbb{H}^2* dans G/K est un couple de vecteurs unitaires tangents à G/K de la forme $g_* d\underline{\tau}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \subset T_{g \cdot \underline{\tau}(x)}^1 G/K$ où $g \in G$ et $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \subset T_x^1 \mathbb{H}^2$ est un repère de \mathbb{H}^2 .

L'ensemble des repères de τ -copies de \mathbb{H}^2 dans G/K est un G -espace homogène qui s'identifie à G/Z^τ , où Z^τ est le centralisateur de $d\tau(\mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}))$ dans G (supposé compact, cf. cadre 2.13). En effet, soit x_0 le point de \mathbb{H}^2 dont le stabilisateur dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est $\text{PSO}(2)$. L'espace tangent $T_{x_0} \mathbb{H}^2$ s'identifie au sous-espace de $\mathfrak{psl}(2, \mathbb{R})$ engendré par \mathfrak{h}_0 et $\mathfrak{e}_0 + \mathfrak{f}_0$ (cf. (2.3)), et $(\tilde{v}_1^0, \tilde{v}_2^0) := \frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_0 + \mathfrak{f}_0, \mathfrak{h}_0) \subset T_{x_0}^1 \mathbb{H}^2$ est un repère de \mathbb{H}^2 . Le stabilisateur de $d\underline{\tau}(\tilde{v}_1^0, \tilde{v}_2^0)$ dans G est égal à $K \cap Z^\tau$. Comme \mathfrak{h} est supposé régulier (cf. cadre 2.13), on a $K \cap Z^\tau = Z^\tau$.

4.1.1. τ -repères. — Pour définir les représentations (ε, R) -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans $\Gamma \subset G$ (qu'elle veut proches de représentations R -parfaites dans G , pas seulement modulo Z^τ), Hamenstädt a en fait besoin d'objets un peu plus précis, qui soient paramétrés par G plutôt que G/Z^τ . Pour cela, elle choisit un repère $(\tilde{v}_1^0, \tilde{v}_2^0) \subset T_{x_0}^1 G/K$ d'une τ -copie de \mathbb{H}^2 dans G/K et le complète en une famille finie $(\tilde{v}_1^0, \dots, \tilde{v}_r^0)$ d'éléments de $T_x^1 G/K$, orthonormée et positivement orientée, dont le stabilisateur dans G soit trivial. On peut alors voir G comme la G -orbite de cette famille finie. On appellera τ -repères de G/K les éléments de cette G -orbite, et τ -repères de M leurs images dans $T^1 M$ (Hamenstädt utilise la terminologie « special framed tripods »). Le quotient $\Gamma \backslash G$ s'identifie à l'ensemble des τ -repères de $M = \Gamma \backslash G/K$.

Exemple 4.3. — Soient $G = \mathrm{PU}(n, 1)$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement totalement réel de l'exemple 2.19. L'espace symétrique G/K est l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Les repères de τ -copies de \mathbb{H}^2 dans G/K sont les couples $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ de vecteurs unitaires d'un espace tangent $T_x \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, où $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, tels que les droites complexes $\mathbb{C}\tilde{v}_1$ et $\mathbb{C}\tilde{v}_2$ soient orthogonales dans $T_x \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Les τ -repères de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ considérés par HAMENSTÄDT (2015) sont les bases hermitiennes orthonormées $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ d'espaces tangents $T_x \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ où $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

4.1.2. Transformations de τ -repères. — Hamenstädt considère les transformations suivantes de l'espace des τ -repères $\tilde{\underline{v}}$ de G/K (cf. figure 5) :

- l'involution inv qui envoie $\tilde{\underline{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$ sur $(-\tilde{v}_1, -\tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \dots, \tilde{v}_r)$; elle correspond dans G à la multiplication à droite par $\tau\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$;
- le *flot des repères* $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, où $\varphi_t(\tilde{\underline{v}})$ est obtenu à partir de $\tilde{\underline{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$ par transport parallèle pendant un temps t le long de la géodésique définie par \tilde{v}_1 ; elle correspond dans G à la multiplication à droite par $\tau\left(\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\right)$;
- la transformation Rot d'ordre 3 qui envoie $\tilde{\underline{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$ sur $(\tilde{v}'_1, \tilde{v}'_2, \tilde{v}_3, \dots, \tilde{v}_r)$ où $(\tilde{v}'_1, \tilde{v}'_2)$ est obtenu à partir de $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ par une rotation d'angle $2\pi/3$; elle correspond dans G à la multiplication à droite par $\tau\left(\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right)$;
- pour $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le flot $(\varphi_t^{(i)})_{t \in \mathbb{R}} := (\mathrm{Rot}^{-(i-1)} \circ \varphi_t \circ \mathrm{Rot}^{i-1})_{t \in \mathbb{R}}$ correspondant au transport parallèle d'un τ -repère $\tilde{\underline{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$ pendant un temps t le long de la géodésique formant un angle de $(i-1)2\pi/3$ avec \tilde{v}_1 . Notons que $\varphi_t^{(1)} = \varphi_t$.

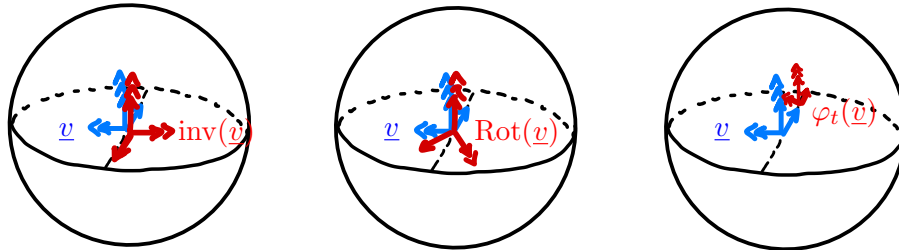


FIGURE 5. Les transformations inv , Rot et φ_t de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, vu comme l'espace des repères de $\mathbb{H}^3 = G/K$

Les transformations inv , φ_t , Rot et $\varphi_t^{(i)}$ de G commutent avec l'action de G par multiplication à gauche, et passent donc au quotient en des transformations de $\Gamma \backslash G$ (c'est-à-dire de l'espace des τ -repères de M), encore notées inv , φ_t , Rot et $\varphi_t^{(i)}$.

4.2. Représentations presque parfaites selon Hamenstädt

4.2.1. Intuition géométrique. — Soit Π un pantalon. Pour $R > 0$, munissons Π d'une structure hyperbolique R -parfaite comme au paragraphe 3.1. On peut découper Π en deux hexagones à angles droits de sorte que chaque hexagone soit recollé à l'autre le long de trois côtés non adjacents, et que les trois autres côtés soient de longueur R (cf. figure 6). Soit $T(R) > 0$ tel que la distance du centre de chaque hexagone à chaque côté recollé à l'autre hexagone soit égale à $T(R) + R/4$. Comme à la figure 6, on peut placer aux centres des deux hexagones deux repères \underline{v} et \underline{w} de Π de sorte que

1. pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, si l'on pose $\underline{v}^{(i)} := \varphi_{T(R)}^{(i)}(\underline{v})$, alors $\varphi_{R/2}^{(i)}(\underline{v}^{(i)}) = \text{inv} \circ \varphi_{T(R)}^{(-i+1)}(\underline{w})$;
2. si $a^{(i)} \in \pi_1(\Pi)$ est la classe d'homotopie du lacet géodésique par morceaux obtenu en concaténant les segments géodésiques les plus courts entre les points-bases de \underline{v} , de $\underline{v}^{(i)}$, de $\varphi_{T(R)}^{(-i+1)}(\underline{w})$, de $\varphi_{T(R)}^{(-i)}(\underline{w})$, de $\underline{v}^{(i-1)}$ et à nouveau de \underline{v} , alors

$$(4.1) \quad \pi_1(\Pi) = \langle a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)} \mid a^{(3)}a^{(2)}a^{(1)} = 1 \rangle.$$

(On note ici $(\varphi_t^{(i)})_{t \in \mathbb{R}}$ le flot du paragraphe 4.1.2 pour $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.)

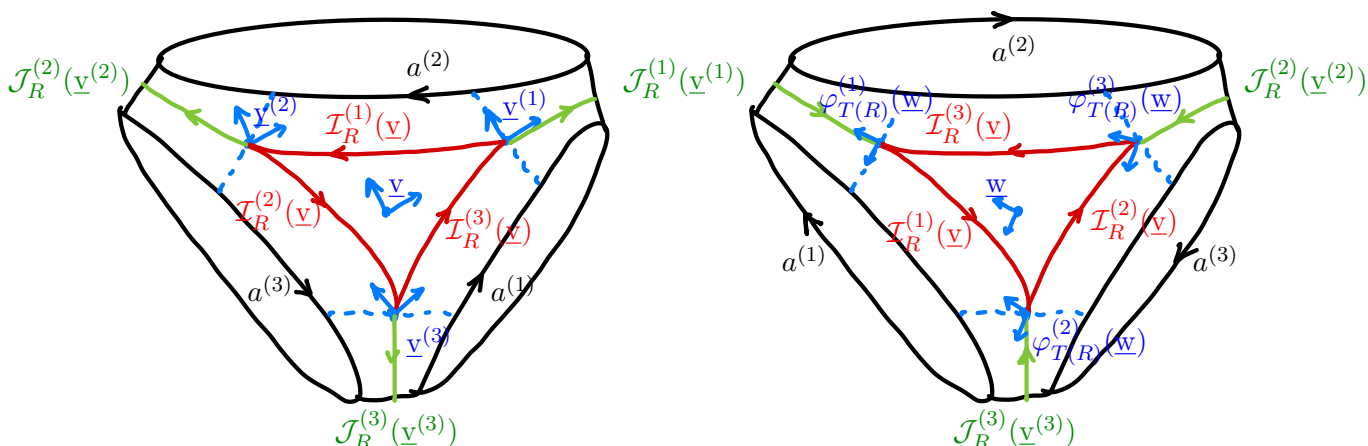


FIGURE 6. Un pantalon Π muni d'une structure hyperbolique R -parfaite, vu de devant et de derrière, avec des repères $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) du paragraphe 4.2.1, et les segments géodésiques orientés $\mathcal{I}_R^{(i)}(\underline{v})$, $\mathcal{I}_R^{(i)}(\underline{w})$ et $\mathcal{J}_R^{(i)}(\underline{v}^{(i)})$ comme au paragraphe 4.2.2

4.2.2. Notations. — Revenons à notre groupe de Lie réel semi-simple G et à notre plongement $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ comme dans le cadre 2.13. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et tout τ -repère $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$ de G/K , notons $\mathcal{I}_R^{(i)}(\tilde{v})$ (resp. $\mathcal{J}_R^{(i)}(\tilde{v})$) le segment géodésique orienté de G/K reliant le point-base de $\varphi_{T(R)}^{(i)}(\tilde{v})$ (resp. de \tilde{v}) au point-base de $\varphi_{T(R)}^{(i+1)}(\tilde{v})$ (resp. de $\varphi_{R/2}^{(i)}(\tilde{v})$). Ces deux segments sont contenus dans la τ -copie de \mathbb{H}^2 définie par $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$; la longueur de $\mathcal{J}_R^{(i)}(\tilde{v})$ est $R/2$, et celle de $\mathcal{I}_R^{(i)}(\tilde{v})$ est proche de $R/2$ pour R grand. Si \underline{v} est l'image de \tilde{v} dans $M = \Gamma \backslash G/K$, on note $\mathcal{I}_R^{(i)}(\underline{v})$ et $\mathcal{J}_R^{(i)}(\underline{v})$ les images respectives de $\mathcal{I}_R^{(i)}(\tilde{v})$ et $\mathcal{J}_R^{(i)}(\tilde{v})$ dans M . Voir la figure 6.

4.2.3. Définition. — Munissons G d'une métrique riemannienne invariante par multiplication à gauche par G (pour cela, on choisit une forme quadratique définie positive sur \mathfrak{g} et on la pousse en avant par G). Quitte à la remplacer par sa moyenne par le groupe d'ordre trois engendré par Rot , on supposera que cette métrique est également invariante par Rot . Elle induit une métrique riemannienne sur $\Gamma \backslash G$. Hamenstädt considère la notion suivante.

Définition 4.4. — Soit Π un pantalon de groupe fondamental comme en (4.1). Pour $\varepsilon, R > 0$, une représentation $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \Gamma$ est (ε, R) -presque parfaite s'il existe un quintuplet $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}) \in (\Gamma \backslash G)^5$ de τ -repères de $M = \Gamma \backslash G/K$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,

1. on a $d_{\Gamma \backslash G}(\underline{v}^{(i)}, \varphi_{T(R)}^{(i)}(\underline{v})) < \varepsilon$ et $d_{\Gamma \backslash G}(\varphi_{R/2}^{(i)}(\underline{v}^{(i)}), \text{inv} \circ \varphi_{T(R)}^{(-(i+1))}(\underline{w})) < \varepsilon$; en particulier, il existe un segment géodésique s_i (resp. s'_i) de longueur $< \varepsilon$ reliant le point base de $\varphi_{T(R)}^{(i)}(\underline{v})$ (resp. de $\varphi_{R/2}^{(i)}(\underline{v}^{(i)})$) au point base de $\underline{v}^{(i)}$ (resp. de $\varphi_{T(R)}^{(-(i+1))}(\underline{w})$);
2. le lacet géodésique par morceaux obtenu en concaténant $\mathcal{I}_R^{(i-1)}(\underline{v})$, s_i , $\mathcal{J}_R^{(i)}(\underline{v}^{(i)})$, s'_i , $\mathcal{I}_R^{(-(i+1))}(\underline{w})$, s'_{-i} (avec orientation opposée), $\mathcal{J}_R^{(i-1)}(\underline{v}^{(i-1)})$ (avec orientation opposée) et s_{i-1} (avec orientation opposée) appartient à la classe d'homotopie $\rho(a^{(i)}) \in \Gamma = \pi_1(M)$.

Le quintuplet $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}) \in (\Gamma \backslash G)^5$ est une *donnée géométrique* associée à la représentation (ε, R) -presque parfaite ρ .

La notion de représentation (ε, R) -parfaite à valeurs dans Γ ne dépend que de la classe de conjugaison au but modulo Γ . On peut changer l'ordre des courbes de bord : si ρ est (ε, R) -presque parfaite de donnée géométrique $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$, alors la représentation $\text{sym}(\rho): \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ qui envoie $a^{(i)}$ sur $\rho(a^{(i+1)})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est elle aussi (ε, R) -presque parfaite, de donnée géométrique

$$(4.2) \quad \text{sym}(Q) := (\text{Rot}(\underline{v}), \text{Rot}^{-1}(\underline{w}), \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}, \underline{v}^{(1)}).$$

4.3. Rappels généraux : directions dans G/K

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{k}^\perp$ la décomposition de Cartan de G associée au choix de K , où \mathfrak{k}^\perp est l'orthogonal de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} pour la forme de Killing. Soit \mathfrak{a}^+ une chambre de Weyl fermée d'un sous-espace abélien maximal \mathfrak{a} de \mathfrak{k}^\perp . On peut supposer que l'élément régulier $\mathfrak{h} = d\tau(\text{diag}(1, -1))$ appartient à l'intérieur de \mathfrak{a}^+ , comme au paragraphe 2.3.1.

L'espace tangent $T_{x_0}G/K$ à G/K en $x_0 = K \in G/K$ s'identifie à \mathfrak{k}^\perp , et l'espace tangent unitaire $T_{x_0}^1G/K$ à la sphère unité $\mathbb{S}(\mathfrak{k}^\perp)$. L'action de $K = \text{stab}_G(x_0)$ sur $T_{x_0}^1G/K$ est transitive si et seulement si G est de rang réel un. En général, $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+) := (\mathfrak{a}^+ \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ est un domaine fondamental pour l'action de K sur $T_{x_0}^1G/K$. Pour $x \in G/K$ et $\theta \in \mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$, on dira qu'un vecteur $v \in T_x^1G/K$ (ou la géodésique de G/K qu'il définit) est de *direction* θ s'il est le poussé en avant de $\theta \in T_{x_0}^1G/K$ par un élément de G .

On munit $\mathbb{S}(\mathfrak{a})$ de la distance sphérique pour la structure euclidienne donnée par la forme de Killing de \mathfrak{g} , ce qui permet de mesurer la proximité des directions de deux vecteurs de T^1G/K .

L'application qui à un vecteur $\theta \in T_{x_0}^1(G/K)$ associe la demi-droite géodésique de G/K qu'il engendre définit un homéomorphisme G -équivariant entre $T_{x_0}^1(G/K)$ et le *bord visuel* $\partial_\infty(G/K)$ de G/K , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de demi-droites géodésiques pour la relation « rester à distance bornée ».

Remarque 4.5. — Toute géodésique $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de G/K , de direction $\theta \in \mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$, définit deux points $\mathcal{G}^-, \mathcal{G}^+ \in \partial_\infty(G/K)$, dans son passé et son futur. Si θ appartient à l'intérieur de $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$, alors \mathcal{G} est contenue dans un unique plat maximal F de G/K , et les géodésiques de G/K définissant les mêmes points $\mathcal{G}^-, \mathcal{G}^+ \in \partial_\infty(G/K)$ que \mathcal{G} sont exactement les géodésiques parallèles à \mathcal{G} dans F .

4.4. Géodésiques de bord pour les pantalons presque parfaits

Fixons une métrique riemannienne G -invariante quelconque sur $T^1(G/K)$; elle induit une métrique riemannienne sur T^1M , dont nous noterons d_{T^1M} la distance correspondante. (Pour obtenir ses estimées, Hamenstädt considère la métrique dite de Sasaki.)

Afin de construire des représentations injectives de $\pi_1(S)$ dans G , Hamenstädt commence par associer, aux lacets géodésiques par morceaux de la définition 4.4.(2), de vraies géodésiques fermées de M , de la manière suivante.

PROPOSITION 4.6. — *Il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout pantalon Π de groupe fondamental comme en (4.1), et pour tout $R > 0$ assez grand, si $\rho : \pi_1(\Pi) \rightarrow \Gamma$ est une représentation $(e^{-\kappa R}, R)$ -presque parfaite, de donnée géométrique $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$ comme à la définition 4.4, alors pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ il existe une géodésique fermée $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ de $M = \Gamma \backslash G/K$, dans la classe d'homotopie libre de $\rho(a^{(i)}) \in \Gamma = \pi_1(M)$, qui soit*

- à distance de Hausdorff $\leq e^{-\kappa R/2}$, pour d_{T^1M} , de l'union des segments géodésiques $\mathcal{I}_R^{(i-1)}(\underline{v})$, $\mathcal{J}_R^{(i)}(\underline{v}^{(i)})$, $\mathcal{I}_R^{(-(i+1))}(\underline{w})$ et $\mathcal{J}_R^{(i-1)}(\underline{v}^{(i-1)})$ (avec orientation opposée),
- de direction $e^{-\kappa R/2}$ -proche de \mathfrak{h} dans $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$.

HAMENSTÄDT (2015) traite le cas où G est de rang réel un; la géodésique $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ est alors unique pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Le cas où G est de rang réel au moins deux est plus délicat : $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ n'est pas unique, elle admet une infinité de translatés qui se relèvent en des géodésiques parallèles de G/K , toutes contenues dans un même plat maximal F_i de G/K (cf. remarque 4.5). Cependant, HAMENSTÄDT (2021) décrit une manière canonique de choisir $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ dans sa classe d'homotopie : à i fixé, elle relève $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}) \in (\Gamma \backslash G)^5$ en un quintuplet $(\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{v}^{(1)}, \tilde{v}^{(2)}, \tilde{v}^{(3)}) \in G^5$ de τ -repères de G/K vérifiant encore la condition (1) de la définition 4.4; elle considère le projeté orthogonal x_i (resp. y_i) du point-base de \tilde{v} (resp. \tilde{w}) sur $\mathcal{I}_R^{(i-1)}(\tilde{v})$ (resp. $\mathcal{I}_R^{(-(i+1))}(\tilde{w})$), puis le projeté orthogonal z_i (resp. u_i) de x_i (resp. y_i) sur le plat maximal F_i ; elle choisit alors, dans sa classe de parallélisme, $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ dont un relevé dans F_i passe par le milieu de $[z_i, u_i]$.

La proposition 4.6 est une conséquence du lemme de fermeture général suivant (cf. figure 7) appliqué aux segments $\mathcal{I}_R^{(i-1)}(\underline{v})$, $\mathcal{J}_R^{(i)}(\underline{v}^{(i)})$, $\mathcal{I}_R^{(-(i+1))}(\underline{w})$ et $\mathcal{J}_R^{(i-1)}(\underline{v}^{(i-1)})$ (avec orientation opposée). Il repose sur des estimées géométriques utilisant des bornes supérieure (points (1) et (2)) et inférieure (point (2)) pour la courbure.

LEMME 4.7. — 1. *Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $\kappa > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tous segments géodésiques $\mathbb{I}_i : [0, T_i] \rightarrow G/K$ de longueur $T_i \in [R/4, 2R]$, où $i \in \{1, 2\}$, si $d_{T^1(G/K)}(\mathbb{I}'_1(T_1), \mathbb{I}'_2(0)) \leq e^{-\kappa R}$, alors le segment*

géodésique $I_3: [0, T_3] \rightarrow G/K$ reliant $I_1(0)$ à $I_2(T_2)$ est à distance de Hausdorff $\leq C_1 R e^{-\kappa R}$ pour $d_{T^1(G/K)}$ de l'union des segments I_1 et I_2 , et l'angle $\angle_{I_1(0)}(I_1'(0), I_3'(0))$ est $\leq C_1 e^{-\kappa R}$.

2. Il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $\kappa > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand, tout $x \in G/K$ et tout $g \in G$, si $d_{G/K}(x, g \cdot x) \geq R$, si l'angle $\angle_x([x, g^{-1} \cdot x], [x, g \cdot x])$ est $\geq \pi - e^{-\kappa R}$ et si la direction de $[x, g \cdot x]$ dans $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$ est $e^{-\kappa R}$ -proche de \mathfrak{h} , alors g est loxodromique et $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n \cdot x, g^{n+1} \cdot x]$ est à distance de Hausdorff $\leq C_2 e^{-\kappa R}$ pour $d_{T^1(G/K)}$ d'une géodésique g -invariante de G/K .

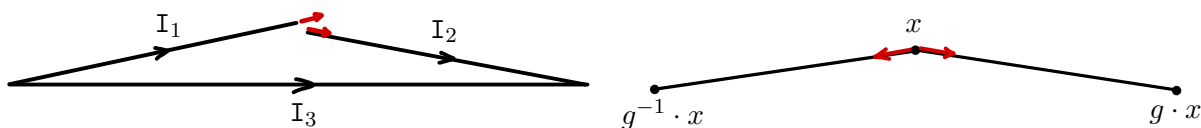


FIGURE 7. Illustration des points (1) et (2) du lemme 4.7

Remarque 4.8. — Il n’y a qu’un nombre fini de classes de conjugaison de représentations $(e^{-\kappa R}, R)$ -parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ au sens de la définition 4.4.

En effet, si ρ est $(e^{-\kappa R}, R)$ -parfaite, de donnée géométrique $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$, alors pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la longueur de la géodésique $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ est bornée par une constante ne dépendant que de R ; il n’y a qu’un nombre fini de classes de parallélisme de telles géodésiques dans M , et donc qu’un nombre fini de classes de conjugaison possibles pour chaque $\rho(a^{(i)})$ dans Γ . De plus, on peut relever \underline{v} en $\tilde{v} \in G$ et les $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ en des géodésiques $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(i)}$ de G/K de sorte que le triangle géodésique $\mathcal{I}_R^{(1)}(\tilde{v}) \cup \mathcal{I}_R^{(2)}(\tilde{v}) \cup \mathcal{I}_R^{(3)}(\tilde{v})$, contenu dans une τ -copie de \mathbb{H}^2 , soit à distance de Hausdorff $\leq e^{-\kappa R/2}$ de l’union des géodésiques $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(i)}$. Ceci permet de voir que le triplet $(\rho(a^{(1)}), \rho(a^{(2)}), \rho(a^{(3)}))$ ne peut appartenir qu’à un nombre fini de classes de conjugaison possibles de Γ^3 modulo Γ .

4.5. Surface immergée par morceaux associée à un pantalon presque parfait

Soit $\kappa > 0$ donné par la proposition 4.6 et soit Π un pantalon de groupe fondamental comme en (4.1). La suite de la construction géométrique de Hamenstädt consiste, pour R assez grand, à associer à toute représentation $(e^{-\kappa R}, R)$ -presque parfaite $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \Gamma = \pi_1(M)$, de donnée géométrique $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$ comme à la définition 4.4, une application continue ρ -équivariante du revêtement universel $\tilde{\Pi}$ de Π vers G/K , qui est une immersion par morceaux et qui passe au quotient en une immersion par morceaux de Π dans M de morphisme induit ρ .

Munissons Π d’une structure hyperbolique R -parfaite et découpons-le en deux hexagones à angles droits comme au paragraphe 4.2.1. Ces deux hexagones se relèvent en une union ρ_R -équivariante d’hexagones à angles droits de \mathbb{H}^2 , qui s’identifie à $\tilde{\Pi}$. Parmi eux, considérons l’hexagone de \mathbb{H}^2 bordé par les axes de translation de $\rho_R(a^{(1)})$, $\rho_R(a^{(2)})$ et $\rho_R(a^{(3)})$ et notons $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ les projetés orthogonaux respectifs du centre de l’hexagone sur ces trois axes : cf. figure 8. De même, considérons l’hexagone de \mathbb{H}^2 bordé par les

axes de translation de $\varrho_R(a^{(1)})$, $\varrho_R(a^{(2)})$ et $\varrho_R(a^{(1)}a^{(3)}(a^{(1)})^{-1})$ et notons $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3$ les projetés orthogonaux respectifs du centre de l'hexagone sur ces trois axes.

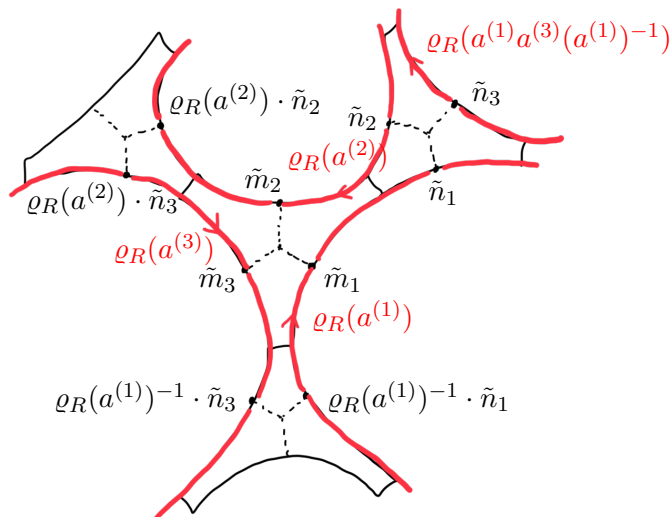


FIGURE 8. Les points \tilde{m}_i et \tilde{n}_i du paragraphe 4.5

D'autre part, soient $\mathcal{G}_Q^{(1)}, \mathcal{G}_Q^{(2)}, \mathcal{G}_Q^{(3)}$ les géodésiques fermées de M canoniquement associées à Q comme au paragraphe 4.4. Posons $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := (e, a^{(2)}, (a^{(1)})^{-1}) \in \pi_1(\Pi)^3$. On peut relever $Q = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}) \in (\Gamma \backslash G)^5$ en $(\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{v}^{(1)}, \tilde{v}^{(2)}, \tilde{v}^{(3)}) \in G^5$ et les $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ en des géodésiques $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(i)}$ de G/K de sorte que chaque $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(i)}$ soit à distance de Hausdorff $\leq e^{-\kappa R/2}$ de l'union des segments géodésiques $\mathcal{J}_R^{(i-1)}(\tilde{v}^{(i-1)})$ (avec orientation opposée), $\mathcal{I}_R^{(i-1)}(\tilde{v})$, $\mathcal{J}_R^{(i)}(\tilde{v}^{(i)})$ et $\alpha_i \cdot \mathcal{I}_R^{(-i+1)}(\tilde{w})$. Notons $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ les projetés orthogonaux respectifs du point-base de \tilde{v} sur $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(1)}, \tilde{\mathcal{G}}_Q^{(2)}, \tilde{\mathcal{G}}_Q^{(3)}$, et $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ les projetés orthogonaux respectifs du point-base de \tilde{w} sur $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(1)}, \tilde{\mathcal{G}}_Q^{(2)}, \rho(a^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{G}}_Q^{(3)}$.

Hamenstädt définit une application continue (ϱ_R, ρ) -équivariante de $\tilde{\Pi}$ dans G/K , qui est une immersion par morceaux, de la manière suivante :

- pour tout $t \in [0, 1]$, le segment géodésique de $\tilde{\Pi}$ entre \tilde{m}_1 et le point de $[\tilde{m}_2, \tilde{m}_3]$ à distance $t d_{\tilde{\Pi}}(\tilde{m}_2, \tilde{m}_3)$ de \tilde{m}_2 est envoyé, avec paramétrage à vitesse constante, sur le segment géodésique de G/K entre \tilde{p}_1 et le point de $[\tilde{p}_2, \tilde{p}_3]$ à distance $t d_{G/K}(\tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ de \tilde{p}_2 , et de même pour les \tilde{n}_i et \tilde{q}_i ;
- pour tous $t \in [0, 1]$ et $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le segment géodésique de $\tilde{\Pi}$ entre le point de $[\tilde{m}_i, \tilde{m}_{i+1}]$ à distance $t d_{\tilde{\Pi}}(\tilde{m}_i, \tilde{m}_{i+1})$ de \tilde{m}_i et le point de $\varrho_R(\alpha_i) \cdot [\tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1}]$ à distance $t d_{\tilde{\Pi}}(\tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1})$ de $\varrho_R(\alpha_i) \cdot \tilde{n}_i$ est envoyé, avec paramétrage à vitesse constante, sur le segment géodésique de G/K entre le point de $[\tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}]$ à distance $t d_{G/K}(\tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1})$ de \tilde{p}_i et le point de $\rho(\alpha_i) \cdot [\tilde{q}_i, \tilde{q}_{i+1}]$ à distance $t d_{G/K}(\tilde{q}_i, \tilde{q}_{i+1})$ de $\rho(\alpha_i) \cdot \tilde{q}_i$;
- on prolonge par (ϱ_R, ρ) -équivariance.

Notons p_i (resp. q_i) l'image de \tilde{p}_i (resp. \tilde{q}_i) dans M . L'immersion par morceaux (ϱ_R, ρ) -équivariante de $\tilde{\Pi}$ dans G/K ci-dessus passe au quotient en une immersion par morceaux f_Q de Π dans M dont l'image Π_Q est l'union de cinq parties (cf. figure 9) :

- la partie Δ_Q^p (resp. Δ_Q^q) est un « triangle courbé » formé d’une union de segments géodésiques entre p_1 (resp. q_1) et un point de $[p_2, p_3]$ (resp. $[q_2, q_3]$);
- pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, la partie $B_Q^{(i)}$ est une « bande courbée » formée d’une union de segments géodésiques entre les points de $[p_i, p_{i+1}]$ et ceux de $[q_i, q_{i+1}]$.

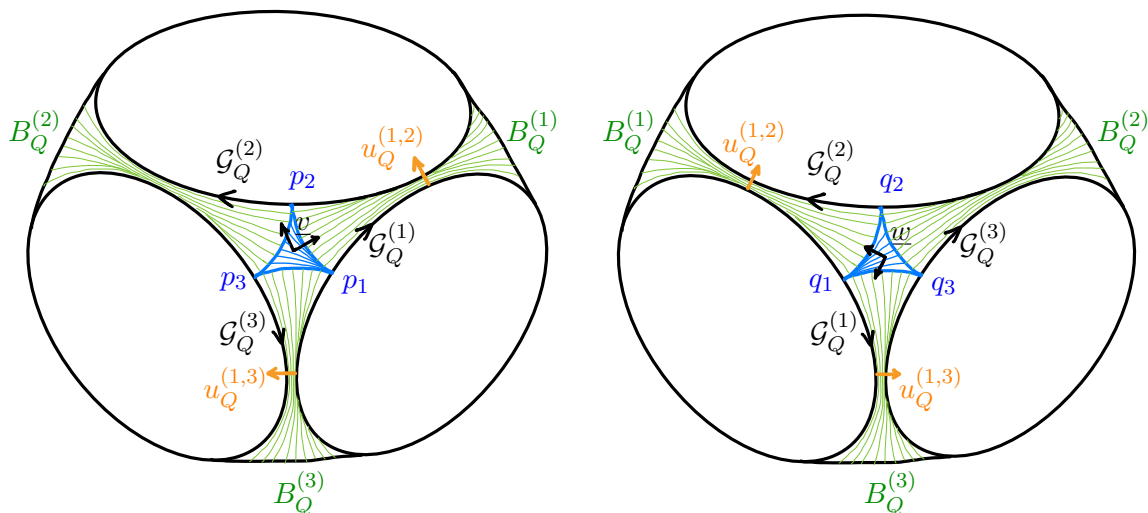


FIGURE 9. Surface immergée par morceaux Π_Q associée à une représentation presque parfaite de donnée géométrique Q , vue de devant et de derrière

Ces parties de M sont les images de régions compactes connexes (« triangles » ou « bandes ») de G/K qui, pour $R > 0$ assez grand, sont chacune proches d’une τ -copie de \mathbb{H}^2 , et recollées avec des angles proches de π . Hamenstädt en déduit en particulier que les géodésiques fermées $\mathcal{G}_Q^{(1)}, \mathcal{G}_Q^{(2)}, \mathcal{G}_Q^{(3)}$ sont deux à deux disjointes dans M , et que pour $i \neq i'$ il existe un unique segment géodésique de G/K de longueur minimale entre $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(i)}$ et $\tilde{\mathcal{G}}_Q^{(i')}$, dont l’image dans M est appelé *couture*. On notera $u_Q^{(i,i')} \in T^1M$ le vecteur unitaire tangent de point-base sur $\mathcal{G}_Q^{(i)}$ à l’extrémité de cette couture, parallèle à celle-ci, et pointant vers $\mathcal{G}_Q^{(i')}$ (cf. figure 9).

Remarque 4.9. — Les longueurs des côtés des « triangles courbés » Δ_Q^p et Δ_Q^q tendent, lorsque R tend vers l’infini, vers la longueur D du côté d’un triangle équilatéral inscrit dans un cercle lui-même inscrit dans un triangle idéal de \mathbb{H}^2 . On appellera *partie épaisse* de Π_Q l’ensemble des points de Π_Q dont la somme des distances aux deux géodésiques les plus proches parmi $\mathcal{G}_Q^{(1)}, \mathcal{G}_Q^{(2)}, \mathcal{G}_Q^{(3)}$ est $\geq D/10$ (c’est l’union de Δ_Q^p, Δ_Q^q et des parties des « bandes courbées » $B_Q^{(i)}$ où la largeur de la bande n’est pas trop petite); ceci définit, en prenant l’image réciproque par f_Q , une notion de *partie épaisse* de Π pour Q . On appellera *petits côtés* de la « bande courbée » $B_Q^{(i)}$ les segments $[p_i, p_{i+1}]$ et $[q_i, q_{i+1}]$.

4.6. Bons recollements selon Hamenstädt

Hamenstädt ne différencie pas entre représentations $(e^{-\kappa R}, R)$ -presque parfaites et $(e^{-\kappa R}, -R)$ -presque parfaites. À cet effet, dans la définition 4.10 suivante, elle a en tête des couples (Π^+, Π^-) de pantalons adjacents dont les groupes fondamentaux ont des

présentations $\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a_\pm^{(1)}, a_\pm^{(2)}, a_\pm^{(3)} \mid a_\pm^{(3)} a_\pm^{(2)} a_\pm^{(1)} = 1 \rangle$ où $a_+^{(1)}$ et $a_-^{(1)}$ correspondent à la même courbe de bord entre Π^+ et Π^- mais avec des orientations opposées (cf. figure 10); ainsi, Π^+ et Π^- ont la même orientation, par opposition à la figure 3, droite.

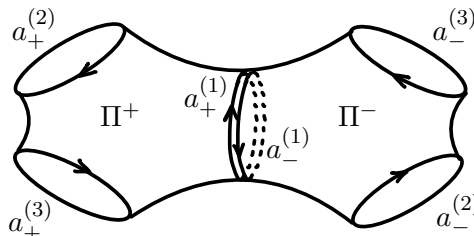


FIGURE 10. Les pantalons Π^+ et Π^- considérés par Hamenstädt

Définition 4.10. — Soit $\kappa > 0$ donné par la proposition 4.6, soient Π^+ et Π^- deux pantalons de groupes fondamentaux $\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a_\pm^{(1)}, a_\pm^{(2)}, a_\pm^{(3)} \mid a_\pm^{(3)} a_\pm^{(2)} a_\pm^{(1)} = 1 \rangle$, soit $R > 0$ et soient $\rho^\pm: \pi_1(\Pi^\pm) \rightarrow \Gamma \subset G$ des représentations $(e^{-\kappa R}, R)$ -presque parfaites, de données géométriques $Q^\pm = (v_\pm, \underline{w}_\pm, v_\pm^{(1)}, v_\pm^{(2)}, v_\pm^{(3)})$ comme à la définition 4.4. Pour $\varepsilon > 0$, on dit que ρ^+ et ρ^- sont $(\varepsilon, 1)$ -bien recollées le long de $a_+^{(1)}$ et $a_-^{(1)}$ via Q^+ et Q^- si

- $\rho^+(a_+^{(1)}) = \rho^-(a_-^{(1)})^{-1}$,
- les géodésiques $\mathcal{G}_{Q^+}^{(1)}$ et $\mathcal{G}_{Q^-}^{(1)}$ sont parallèles, d'orientations opposées, à distance $< \varepsilon$ l'une de l'autre, et
- pour tout $i \in \{2, 3\}$, le vecteur $u_{Q^+}^{(1,i)} \in T^1M$ est à distance $< \varepsilon$, pour d_{T^1M} , de l'image de $-u_{Q^-}^{(1,-(i+1))}$ par le transport parallèle de longueur -1 le long de $\mathcal{G}_{Q^-}^{(1)}$ (cf. figure 11).

Notons que les géodésiques fermées parallèles $\mathcal{G}_{Q^+}^{(1)}$ et $\mathcal{G}_{Q^-}^{(1)}$ de $M = \Gamma \backslash G/K$ coïncident si G est de rang réel un, mais pas en général. Le cas échéant, on peut recoller les surfaces immergées par morceaux Π_{Q^+} et Π_{Q^-} du paragraphe 4.5 en rajoutant un fin anneau euclidien $A_{(Q^+, Q^-)}$ entre $\mathcal{G}_{Q^+}^{(1)}$ et $\mathcal{G}_{Q^-}^{(1)}$: à savoir, on relève ces géodésiques fermées en des droites géodésiques $\tilde{\mathcal{G}}_{Q^+}^{(1)}$ et $\tilde{\mathcal{G}}_{Q^-}^{(1)}$ de G/K contenues dans un même plat F de dimension deux de G/K , et l'anneau $A_{(Q^+, Q^-)}$ à rajouter est alors l'image dans M de la bande euclidienne infinie de F bordée par $\tilde{\mathcal{G}}_{Q^+}^{(1)}$ et $\tilde{\mathcal{G}}_{Q^-}^{(1)}$ (de largeur $< \varepsilon$).

4.7. Injectivité des représentations de $\pi_1(S)$ dont les restrictions aux pantalons sont presque parfaites et bien recollées

Hamenstädt établit la variante suivante de la proposition 3.2 (cf. (4.2) pour la définition de sym).

PROPOSITION 4.11. — Dans le cadre 2.13, soit Γ un réseau cocompact irréductible de G . Soit S une surface hyperbolique compacte avec une décomposition en pantalons bipartie \mathcal{P} et un graphe \mathcal{G} comme au paragraphe 3.1, donnant une présentation $\pi_1(\Pi) = \langle a_\Pi^{(1)}, a_\Pi^{(2)}, a_\Pi^{(3)} \mid a_\Pi^{(3)} a_\Pi^{(2)} a_\Pi^{(1)} = 1 \rangle$ pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$. Soit $\kappa > 0$ donné par la proposition 4.6. Pour tout $R > 0$ assez grand et toute famille $(\rho_\Pi: \pi_1(\Pi) \rightarrow \Gamma)_{\Pi \in \mathcal{P}}$ de représentations, si

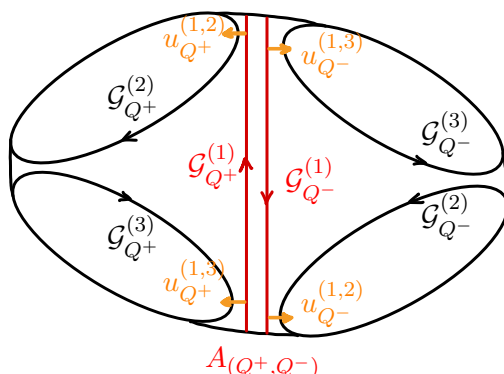


FIGURE 11. Représentations presque parfaites $\rho^\pm: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ bien recollées selon Hamenstädt. Chaque géodésique $\mathcal{G}_{Q^\pm}^{(i)}$ est homotope à $\rho^\pm(a_\pm^{(i)})$.

1. pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$, la représentation ρ_Π est $(e^{-\kappa R}, R)$ -presque parfaite comme à la définition 4.4, et
2. on peut choisir les données géométriques Q_Π des ρ_Π de telle sorte que pour tous $\Pi^+, \Pi^- \in \mathcal{P}$ adjacents le long d'une courbe de bord, cette courbe correspond à $a_{\Pi^+}^{(i^+)}$ et $(a_{\Pi^-}^{(i^-)})^{-1}$ pour $i^+, i^- \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et les représentations ρ_{Π^+} et ρ_{Π^-} sont $(e^{-\kappa R}, 1)$ -bien recollées le long de $a_{\Pi^+}^{(i^+)}$ et $a_{\Pi^-}^{(i^-)}$ via $\text{sym}^{i^+-1}(Q_{\Pi^+})$ et $\text{sym}^{i^--1}(Q_{\Pi^-})$ comme à la définition 4.10,

alors il existe une représentation injective $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \Gamma$ dont la restriction à chaque $\pi_1(\Pi)$, pour $\Pi \in \mathcal{P}$, est conjuguée à ρ_Π .

Pour démontrer la proposition 4.11, Hamenstädt considère les pantalons immergés par morceaux Π_{Q_Π} du paragraphe 4.5 et les fins anneaux euclidiens $A_{(Q_{\Pi^+}, Q_{\Pi^-})}$ entre pantalons adjacents du paragraphe 4.6. Elle les recolle selon la combinatoire de la décomposition en pantalons \mathcal{P} pour obtenir une immersion par morceaux $f: S' \rightarrow M$, où S' est une surface compacte homéomorphe à S constituée de pantalons paramétrés par \mathcal{P} , munis chacun d'une structure hyperbolique R -parfaite, et de fins anneaux euclidiens entre ces pantalons. Certains anneaux peuvent être réduits à des cercles (c'est par exemple le cas de tous les anneaux lorsque G est de rang réel un). Soit $\rho = f_*: \pi_1(S) = \pi_1(S') \rightarrow \pi_1(M) = \Gamma$ le morphisme induit par f . Par construction, la restriction de ρ à chaque $\pi_1(\Pi)$, pour $\Pi \in \mathcal{P}$, est conjuguée à ρ_Π . L'application continue $f: S' \rightarrow M$ se relève en une application continue ρ -équivariante $\tilde{f}: \tilde{S}' \rightarrow G/K$ qui est elle aussi une immersion par morceaux.

Hamenstädt munit \tilde{S}' de la métrique des chemins $\pi_1(S')$ -invariante définie par \tilde{f} , comme au paragraphe 3.2.1. L'espace métrique \tilde{S}' , propre et géodésique par le théorème de Hopf–Rinow, est également hyperbolique au sens de Gromov car S' est compacte. C'est un espace de Busemann : la fonction distance y est convexe. (En effet, on peut montrer que \tilde{S}' est CAT(0) en tant que recollement de morceaux CAT(0) avec de bonnes conditions d'angles, cf. BRIDSON et HAEFLIGER, 1999, Prop. II.1.7.) On en déduit que tout élément non trivial de $\pi_1(S) = \pi_1(S')$ admet une géodésique invariante

dans \tilde{S}' (non nécessairement unique si G est de rang réel supérieur); il suffit donc, pour démontrer la proposition 4.11, de montrer que l'image par \tilde{f} de cette géodésique est une quasi-géodésique de G/K . À cet effet, Hamenstädt utilise le résultat suivant, qui est classique lorsque G est de rang réel un et dû à KAPOVICH, LEEB et PORTI (2014, Th. 7.2 & Cor. 7.13) en général; il s'agit d'un lemme de Morse pour certains chemins géodésiques par morceaux dans G/K . On renvoie au paragraphe 4.3 pour la notion de direction dans $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$.

THÉORÈME 4.12 (Kapovich–Leeb–Porti). — *Pour tous $\ell, \delta > 0$, il existe $\varepsilon, L > 0$ tels que pour toute suite $(x_n) \in (G/K)^{\mathbb{Z}}$, si*

- (*) *pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $d_{G/K}(x_n, x_{n+1}) \geq \ell$ et $\angle_{x_n}([x_n, x_{n-1}], [x_n, x_{n+1}]) \geq \pi - \varepsilon$ et la direction de $[x_n, x_{n+1}]$ dans $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$ est ε -proche de \mathfrak{h} ,*

alors les x_n sont à distance uniformément bornée d'un certain plat de G/K , et pour tous $n \neq n'$ dans \mathbb{Z} la direction de $[x_n, x_{n'}]$ dans $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$ est δ -proche de \mathfrak{h} et l'on a $d_{G/K}(x_n, x_{n'}) \geq L^{-1} |n' - n| - L$.

Il suffit alors d'établir le résultat suivant, qui constitue le cœur technique de la démonstration de Hamenstädt. On fixe $\delta > 0$ tel que le 2δ -voisinage de \mathfrak{h} dans $\mathbb{S}(\mathfrak{a})$ soit contenu dans $\mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$.

PROPOSITION 4.13. — *Sous les hypothèses de la proposition 4.11, il existe $\ell, \ell' > 0$ tels que pour tout $R > 0$ assez grand, si $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.11, alors pour toute géodésique $\tilde{\mathcal{G}}: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{S}'$ on peut trouver une suite croissante $(t_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $t_{n+1} - t_n \leq \ell'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} := (\tilde{f}(\mathcal{G}(t_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse (*) du théorème 4.12.*

Quelques mots sur la démonstration de HAMENSTÄDT (2015) de la proposition 4.13 dans le cas où G est de rang réel un. Dans ce cas, S' n'est constituée que de pantalons (les anneaux entre les pantalons sont des cercles). Hamenstädt démontre le résultat en établissant l'existence de $\ell, \ell' > 0$ tels que pour tout $R > 0$ assez grand, si $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.11, alors pour toute géodésique $\tilde{\mathcal{G}}: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{S}'$ on peut trouver une suite croissante $(t_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $t_{n+1} - t_n \leq \ell'$ et l'image de $\tilde{\mathcal{G}}([t_n, t_{n+1}])$ dans S' est (avec la terminologie de la remarque 4.9)

- soit entièrement contenue dans la partie épaisse d'un certain pantalon $\Pi \in \mathcal{P}$,
- soit contenue dans une union finie de bandes de pantalon (cf. paragraphe 4.5), dont elle ne rencontre pas les petits côtés.

Hamenstädt parvient à contrôler de manière fine la géométrie dans les deux cas pour montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\tilde{f}(\mathcal{G}(t_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait les hypothèses du théorème 4.12. Dans le second cas, le décalage de 1 dans les recollements de pantalons (condition (2) de la proposition 4.11) assure que $\tilde{\mathcal{G}}([t_n, t_{n+1}])$ ne peut pas rencontrer trop de bandes à des endroits trop fins.

Le théorème 4.12 et la proposition 4.13 impliquent que pour tout $R > 0$ assez grand, si $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.11, alors ρ est injective. En fait, l’uniformité sur les quasi-géodésiques donnée par le théorème 4.12 permet de montrer que ρ est P_τ -anosovienne au sens du paragraphe 1.5 (cf. KAPOVICH, LEEB et PORTI, 2014).

5. ÉTAPE GÉOMÉTRIQUE SELON KAHN, LABOURIE ET MOZES

Dans cette partie, nous présentons les notions de KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018) de *représentation (ε, R) -presque parfaite* d’un groupe de pantalon dans Γ (paragraphe 5.2) et de représentations $(\varepsilon, 1)$ -*bien recollées* (paragraphe 5.5). Nous donnons les grandes lignes de leur démonstration de la proposition 5.19 ci-dessous, qui est une version plus précise de la proposition 3.2, faisant intervenir la notion d’application sullivanienne du paragraphe 2.2.

Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.13; la condition (R) du paragraphe 2.3.2 n’a pas besoin d’être satisfaite. On fixe un réseau cocompact irréductible Γ de G et un sous-groupe compact maximal K de G contenant $\tau(\text{PSO}(2))$.

5.1. Préliminaires : τ -triangles et tripodes

Rappelons que le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur l’ensemble \mathcal{T} des triplets de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, qui lui-même s’identifie à l’espace des triangles idéaux de \mathbb{H}^2 avec un ordre positif sur les sommets, au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$, et à l’espace des repères de \mathbb{H}^2 . Ainsi, tout élément de \mathcal{T} est de la forme $h \cdot (0, \infty, -1)$ où $h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est unique.

Comme au paragraphe 2.2.1, le plongement $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ induit un plongement τ -équivariant $\underline{\tau}: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow G/P_\tau$. La G -orbite de $(\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ (pour l’action diagonale de G) est un ouvert dense de $G/P_\tau \times G/P_\tau$ formé des couples de points dits *transverses*, ou encore en position générique. Notons encore $\underline{\tau}$ le plongement de $\mathcal{T} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})^3$ dans $(G/P)^3$ induit par $\underline{\tau}$.

Définition 5.1. — Un τ -triangle de G/P_τ est un triplet de points deux à deux transverses de G/P_τ de la forme $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ où $g \in G$.

Notons que pour tout $g \in G$ et tout $T \in \mathcal{T}$, l’élément $g \cdot \underline{\tau}(T)$ est un τ -triangle. En effet, on peut écrire $T = h \cdot (0, \infty, -1)$ où $h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et l’on conclut par équivariance. Un τ -triangle détermine de manière unique un τ -cercle $g \circ \underline{\tau}: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ au sens du paragraphe 2.2.1.

Par définition, le groupe G agit transitivement sur l’espace des τ -triangles de G/P_τ . Le stabilisateur de $\underline{\tau}(0, \infty, -1)$ est le centralisateur Z^τ de $d\tau(\mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}))$ dans G (supposé compact, cf. cadre 2.13). Ainsi, $[g] \mapsto g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ est une bijection G -équivariante entre G/Z^τ et l’espace des τ -triangles de G/P_τ .

Remarque 5.2. — L'espace des τ -triangles de G/P_τ est en général strictement inclus dans l'espace des triplets ordonnés de points deux à deux transverses de G/P_τ . Par exemple, pour $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible, le premier est de dimension complexe $(n+1)(n-1)$ et le second $3n(n-1)/2$.

5.1.1. *Lien avec le point de vue de Hamenstädt.* — Le sous-ensemble du bord visuel $\partial_\infty(G/K)$ formé des vecteurs de direction $\mathfrak{h} \in \mathbb{S}(\mathfrak{a}^+)$ (cf. paragraphe 4.3) s'identifie à G/P_τ ; il correspond aux classes de rayons géodésiques de G/K contenues dans des τ -copies de \mathbb{H}^2 . Ainsi, les objets suivants s'identifient de manière G -équivariante :

- les τ -triangles de G/P_τ utilisés par Kahn, Labourie et Mozes (définition 5.1),
- les triplets ordonnés de $\partial_\infty(G/K)$ correspondant à trois rayons géodésiques de G/K de direction \mathfrak{h} , contenus dans une même τ -copie de \mathbb{H}^2 , incidents en un point, et formant des angles de $2\pi/3$ en ce point,
- les triangles τ -idéaux de G/K (c'est-à-dire les images par $g \cdot \underline{\tau}$ de triangles idéaux de \mathbb{H}^2 avec un ordre positif sur les sommets, où $g \in G$),
- les repères de τ -copies de \mathbb{H}^2 utilisés par Hamenstädt (définition 4.2).

Chacune de ces classes d'objets est paramétrée par G/Z^τ où Z^τ est compact.

5.1.2. *Tripodes.* — Afin de définir les représentations (ε, R) -presque parfaites, Kahn, Labourie et Mozes ont besoin, comme Hamenstädt, d'objets un peu plus précis que les τ -triangles de G/P_τ , qui soient paramétrés par G plutôt que G/Z^τ . Pour cela, ils introduisent une notion de *tripode*, qui est par définition un isomorphisme d'une copie abstraite G_0 du groupe G vers G ou, de manière équivalente, un automorphisme de G . En réalité, pour démontrer les théorèmes 2.3 et 2.14 il n'est pas nécessaire de considérer tous les automorphismes de G : les automorphismes intérieurs (donnés par la conjugaison par un élément de G) suffisent. Dans la suite de cet exposé, nous travaillerons donc directement avec le groupe G plutôt qu'avec les tripodes de Kahn–Labourie–Mozes.

5.1.3. *Transformations de G .* — Kahn, Labourie et Mozes considèrent les transformations suivantes de l'espace G/Z^τ des τ -triangles de G/P_τ (cf. figure 12) :

- l'involution inv qui envoie $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(\infty, 0, 1)$; elle correspond dans G/Z^τ à la multiplication à droite par $\tau\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$;
- le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ qui envoie $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -e^t)$; il correspond dans G/Z^τ à la multiplication à droite par $\tau\left(\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\right)$;
- la transformation rot d'ordre 3 qui envoie $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(\infty, -1, 0)$; elle correspond dans G/Z^τ à la multiplication à droite par $\tau\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Ces transformations se relèvent en des transformations de G , encore notées inv , φ_t et rot , données par la multiplication à droite par les mêmes éléments. Elles commutent avec l'action de G par multiplication à gauche.

Notons que les transformations inv et φ_t décrites ici coïncident avec les transformations inv et φ_t de Hamenstädt du paragraphe 4.1.2, après identification des τ -triangles de G/P_τ avec les repères de τ -copies de \mathbb{H}^2 comme au paragraphe 5.1.1, et identification de G avec les τ -repères de G/K .

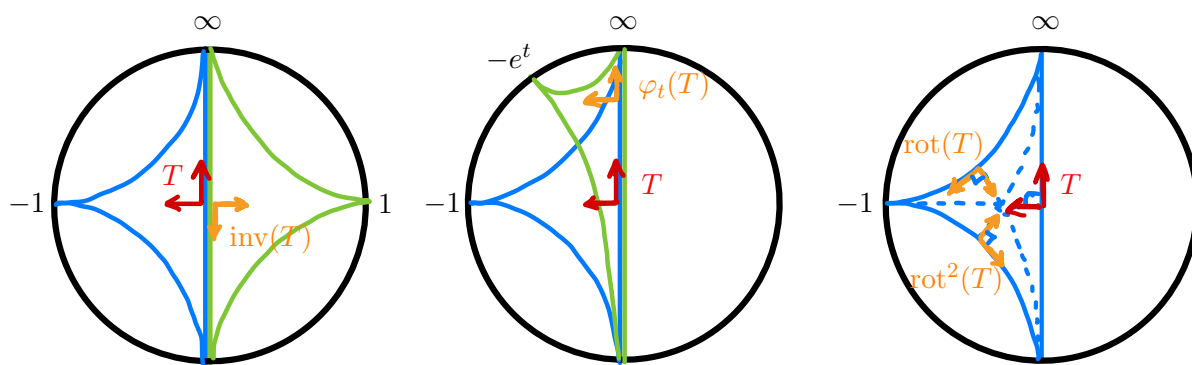


FIGURE 12. Les transformations inv , φ_t et rot de G/Z^T proviennent de transformations inv , φ_t et rot de $\mathcal{T} \simeq \{\text{repères de } \mathbb{H}^2\}$ représentées ici

5.2. Représentations presque parfaites selon Kahn, Labourie et Mozes

5.2.1. Intuition géométrique. — Pour tout élément hyperbolique $\alpha \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, on note α^\oplus (resp. α^\ominus) son point fixe attractif (resp. répulsif) dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \mid cba = 1 \rangle$, où a, b, c correspondent aux courbes de bord de Π . Pour $R > 0$, soit $\varrho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ une représentation R -parfaite (resp. $(-R)$ -parfaite) comme au paragraphe 3.1, c'est-à-dire l'holonomie d'une structure hyperbolique sur Π pour laquelle les trois courbes de bord sont de longueur $2R$ et l'ordre cyclique des points fixes $\varrho(a)^\ominus, \varrho(a)^\oplus, \varrho(b)^\ominus, \varrho(b)^\oplus, \varrho(c)^\ominus, \varrho(c)^\oplus \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est positif (resp. négatif). Considérons les éléments suivants de l'espace \mathcal{T} des triplets de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} T := (\varrho(a)^\ominus, \varrho(b)^\ominus, \varrho(c)^\ominus), \\ T' = (\varrho(a)^\ominus, \varrho(b^{-1}a^{-1})^\ominus, \varrho(b)^\ominus) \end{array} \right. \quad \left(\text{resp.} \quad \left\{ \begin{array}{l} T := (\varrho(b)^\ominus, \varrho(a)^\ominus, \varrho(c)^\ominus), \\ T' = (\varrho(b^{-1}a^{-1})^\ominus, \varrho(a)^\ominus, \varrho(b)^\ominus) \end{array} \right. \right).$$

Les éléments $T, T' \in \mathcal{T}$ correspondent à des triangles idéaux de \mathbb{H}^2 qui se projettent en des triangles idéaux disjoints de Π dont les côtés spiralent autour des courbes de bord et qui remplissent tout Π , comme à la figure 13.

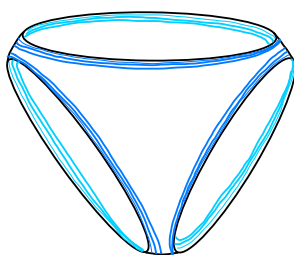


FIGURE 13. Décomposition d'un pantalon R -parfait en deux triangles idéaux qui spiralent le long des courbes de bord

Adoptons la terminologie suivante, où rot , inv et φ_t sont les transformations introduites au paragraphe 5.1.3, et où les signes \pm sont pris tous égaux à $+$ si la représentation est R -parfaite, et tous égaux à $-$ si elle est $(-R)$ -parfaite.

Définition 5.3. — Un élément $\alpha \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est $(\pm R)$ -réalisé par un couple (T_1, T_2) d'éléments de \mathcal{T}^2 si $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(T_1) = T_2$ et $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(T_2) = \alpha(T_1)$.

On vérifie alors (cf. figure 14) que pour (T, T') comme ci-dessus,

$$(5.1) \quad \begin{cases} \varrho(a) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } (T, T'), \\ \varrho(b) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } (\mathrm{rot}^{\pm 1}(T), (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1} \circ \varrho(b)(T')), \\ \varrho(c) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } ((\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(T), \mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \varrho(a)^{-1}(T')). \end{cases}$$

Une représentation $\varrho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est $(\pm R)$ -parfaite si et seulement s'il existe $(T, T') \in \mathcal{T}^2$ vérifiant ces conditions.

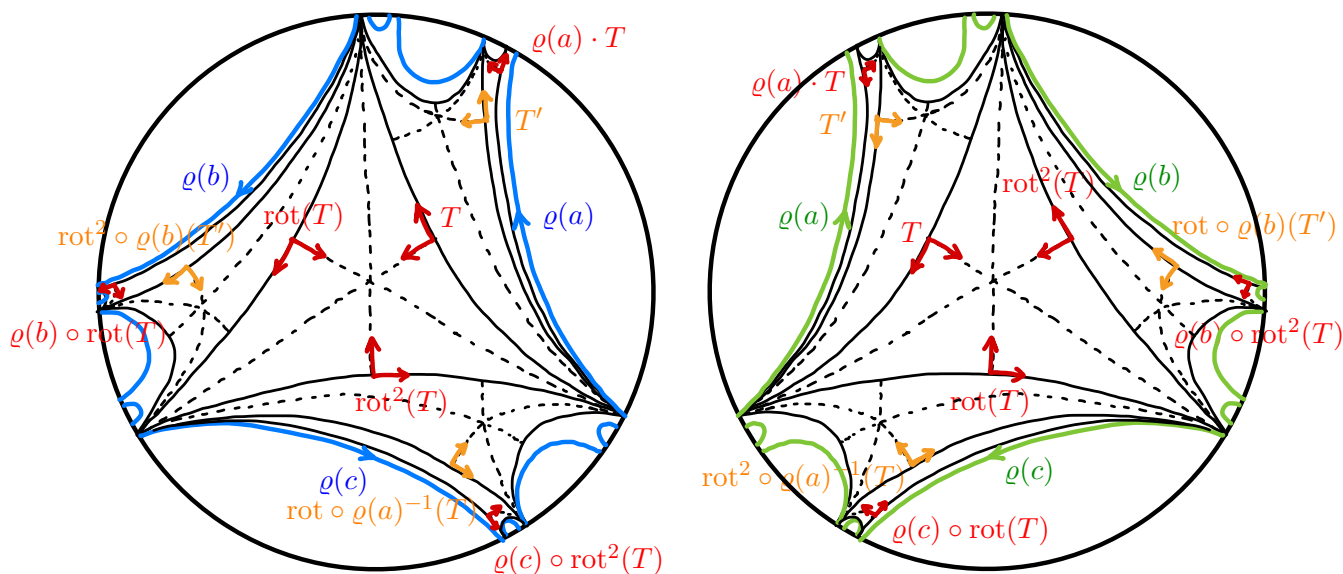


FIGURE 14. Représentations R -parfaite (à gauche) et $(-R)$ -parfaite (à droite)

Remarque 5.4. — Si α est $(\pm R)$ -réalisé par (T, T') au sens de la définition 5.3 et si l'on voit T comme un élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors $T^{-1}\alpha T$ est égal à $\begin{pmatrix} e^R & 0 \\ 1+e^{-R} & e^{-R} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} e^{-R} & 1+e^{-R} \\ 0 & e^R \end{pmatrix}$). En particulier, α est hyperbolique de longueur de translation $2R$, et ses points fixes répulsif et attractif vérifient que $T^{-1} \cdot \alpha^\ominus \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est égal à 0 (resp. ∞), et $T^{-1} \cdot \alpha^\oplus \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est proche de ∞ (resp. 0) pour R grand.

Ainsi, lorsque R tend vers 0, les points $\varrho(a)^\oplus, \varrho(b)^\oplus, \varrho(c)^\oplus$ d'une représentation $(\pm R)$ -parfaite $\varrho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tendent respectivement vers $\varrho(a)^\ominus, \varrho(b)^\ominus, \varrho(c)^\ominus$; autrement dit, $\varrho(a), \varrho(b), \varrho(c) \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tendent vers des éléments paraboliques. Lorsque R tend vers $+\infty$, les points $\varrho(a)^\oplus, \varrho(b)^\oplus, \varrho(c)^\oplus$ d'une représentation $(\pm R)$ -parfaite $\varrho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tendent respectivement vers $\varrho(b)^\ominus, \varrho(c)^\ominus, \varrho(a)^\ominus$ (cf. figure 14).

Remarque 5.5. — Les représentations R -parfaites de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont les images des représentations $(-R)$ -parfaites par la conjugaison par un élément de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ qui renverse l'orientation de \mathbb{H}^2 .

5.2.2. Représentations presque parfaites à valeurs dans G . — Comme au paragraphe 4.2, fixons une métrique riemannienne G -invariante à gauche sur G . Quitte à la remplacer par sa moyenne par le groupe d'ordre trois engendré par rot , on la suppose également invariante par rot . On note d_G la distance correspondante.

On a une notion naturelle de représentation $(\pm R)$ -parfaite de $\pi_1(\Pi)$ dans G , à savoir la composition d'une représentation $(\pm R)$ -parfaite à valeurs dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ au sens ci-dessus, avec $g\tau(\cdot)g^{-1}: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ où $g \in G$. La caractérisation (5.1) permet d'affaiblir cette notion de la manière suivante.

Définition 5.6. — Soient $\varepsilon, R > 0$. On dit qu'un élément $\alpha \in G$ est $(\varepsilon, \pm R)$ -presque réalisé par un couple $(g, g') \in G^2$ s'il existe $(h, h') \in G^2$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

$$\begin{aligned} d_G(g, h) < \varepsilon, \quad d_G(\text{rot}^{\pm 1} \circ \text{inv} \circ \varphi_{\pm R}(h), g') < \varepsilon, \\ d_G(g', h') < \varepsilon, \quad d_G(\text{rot}^{\pm 1} \circ \text{inv} \circ \varphi_{\pm R}(h'), \alpha g) < \varepsilon. \end{aligned}$$

On considère les conditions suivantes sur un quintuplet $(\alpha, \beta, \gamma, g, g') \in G^5$:

$$(5.2) \quad \begin{cases} \alpha \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } (g, g'), \\ \beta \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } (\text{rot}^{\pm 1}(g), (\text{rot}^2)^{\pm 1} \circ \rho(b)(g')), \\ \gamma \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } ((\text{rot}^2)^{\pm 1}(g), \text{rot}^{\pm 1} \circ \rho(a)^{-1}(g')). \end{cases}$$

Définition 5.7. — Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \mid cba = 1 \rangle$. On dit qu'une représentation $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ est $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite s'il existe $(g, g') \in G^2$ tels que le quintuplet $Q := (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (5.2). Ce quintuplet est une donnée géométrique associée à la représentation $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite ρ .

Remarque 5.8. — Ceci ne dépend pas de l'ordre choisi pour les courbes de bord : si $Q = (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (5.2), alors $\text{sym}(Q) := (\rho(b), \rho(c), \rho(a), \text{rot}^{\pm 1}g, (\text{rot}^2)^{\pm 1}g')$ et $\text{sym}^2(Q) := (\rho(c), \rho(a), \rho(b), (\text{rot}^2)^{\pm 1}g, \text{rot}^{\pm 1}g')$ aussi. De plus, la notion de représentation $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite est invariante par conjugaison au but par G : si $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (5.2), alors $(x\rho(a)x^{-1}, x\rho(b)x^{-1}, x\rho(c)x^{-1}, xg, xg')$ aussi.

Remarque 5.9. — Nous verrons à la proposition 6.9.(1) qu'en supposant la condition (R) du paragraphe 2.3.2 vérifiée, les notions de représentations (ε, R) -presque parfaite et $(\varepsilon, -R)$ -presque parfaite coïncident, mais pour des éléments $(g, g') \in G^2$ qui diffèrent par la multiplication à droite par un certain élément de G envoyant h sur $-h$ (ceci correspond au renversement d'orientation dans la remarque 5.5).

5.3. Rappels : proximalité

Soit $Z_K(\mathfrak{a})$ le centralisateur de \mathfrak{a} dans K . Comme $\mathfrak{h} \in \text{Int}(\mathfrak{a}^+)$, le sous-groupe parabolique P_τ de G est minimal et pour tout élément $g \in G$, les deux notions suivantes sont équivalentes :

- g est proximal dans G/P_τ , au sens où il admet un unique point fixe attractif g^\oplus et un unique point fixe répulsif g^\ominus dans G/P_τ ,

— g est *loxodromique*, au sens où il est conjugué à un élément de la forme $\exp(x)k$ où $x \in \text{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$; l'élément x est unique et l'on pose $\lambda(g) := x \in \text{Int}(\mathfrak{a}^+)$.

Le centralisateur $Z_G(\alpha_0)$ de $\alpha_0 := \exp(\mathfrak{h})$ dans G est le produit de $A := \exp(\mathfrak{a})$ et de $Z_K(\mathfrak{a})$. Pour un élément $\alpha \in G$ proximal dans G/P_τ quelconque, conjugué à $\exp(x)k$ où $x \in \text{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de α dans G est conjugué au produit de A et du groupe $Z_K(\mathfrak{a}) \cap Z_K(k)$, qui peut être plus petit que $Z_K(\mathfrak{a})$.

Exemple 5.10. — Soient $G = \text{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (cf. exemple 2.20). On a $K = \text{PSU}(n)$. Le sous-espace $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ est constitué des matrices diagonales réelles de trace nulle, et $A = \exp(\mathfrak{a})$ (resp. $Z_K(\mathfrak{a})$) des matrices diagonales de G à coefficients strictement positifs (resp. complexes de module un). Comme $Z_K(\mathfrak{a})$ est abélien, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de tout élément $\alpha \in G$ proximal dans G/P_τ est conjugué à $Z_G(\alpha_0) = A Z_K(\mathfrak{a}) \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-1}$.

Exemple 5.11. — Soient $G = \text{SO}(n, 1)$ et $\tau: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \text{SO}(2, 1)_0 \hookrightarrow G$ le plongement standard (cf. exemple 2.18). On a $K = \text{S}(\text{O}(n) \times \text{O}(1))$. Le groupe $A = \exp(\mathfrak{a})$ est isomorphe à \mathbb{R}_+^* , et $Z_K(\mathfrak{a})$ à $\text{SO}(n-1) \times \{\pm I_2\}$. Pour $\alpha = \exp(x)k \in G$ où $x \in \text{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de α dans G est strictement contenu dans $Z_G(\alpha_0)$ dès que k n'est pas central dans $Z_K(\mathfrak{a})$, ce qui peut arriver dès que $n \geq 4$.

5.4. Quelques observations utiles sur les pantalons presque parfaits

Soit $\|\cdot\|_{\mathfrak{a}}$ la norme euclidienne sur \mathfrak{a} induite par la forme de Killing de \mathfrak{g} . Munissons G/P_τ de la distance d_τ du paragraphe 2.2.2, invariante par $K \supset \tau(\text{PSO}(2))$. On renvoie au paragraphe 5.3 pour la notion de proximalité dans G/P_τ et la définition de λ .

LEMME 5.12. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α est (ε, R) -presque (resp. $(\varepsilon, -R)$ -presque) réalisé par (g, g') au sens de la définition 5.6, alors*

- α est proximal dans G/P_τ ;
- le point fixe attractif de $g^{-1}\alpha g$ dans G/P_τ est à distance $\leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $\underline{\tau}(\infty)$ (resp. $\underline{\tau}(0)$) pour d_τ ;
- le point fixe répulsif de $g^{-1}\alpha g$ dans G/P_τ est à distance $\leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $\underline{\tau}(0)$ (resp. $\underline{\tau}(\infty)$) pour d_τ ;
- $\|\lambda(\alpha) - \lambda(\exp(R\mathfrak{h}))\|_{\mathfrak{a}} \leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$; en particulier, la longueur de translation de α dans G/K appartient à $[2R - C(\varepsilon + e^{-R/2}), 2R + C(\varepsilon + e^{-R/2})]$;
- $g^{-1}g'$ appartient à $\mathcal{B}_\varepsilon \tau\left(\begin{pmatrix} e^{R/2} & 0 \\ e^{-R/2} & e^{-R/2} \end{pmatrix}\right) \mathcal{B}_\varepsilon$ (resp. à $\mathcal{B}_\varepsilon \tau\left(\begin{pmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} \\ 0 & e^{R/2} \end{pmatrix}\right) \mathcal{B}_\varepsilon$), où \mathcal{B}_ε désigne la boule fermée de rayon ε centrée en l'élément neutre dans (G, d_G) .

Démonstration. — Considérons les éléments $h_R := \begin{pmatrix} e^{R/2} & 0 \\ e^{-R/2} & e^{-R/2} \end{pmatrix}$ et $h_{-R} := \begin{pmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} \\ 0 & e^{R/2} \end{pmatrix}$ de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Généralisant la remarque 5.4, on note que pour tous $\varepsilon, R > 0$, si α est $(\varepsilon, \pm R)$ -presque réalisé par $(g, g') \in G^2$, alors il existe $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{B}_\varepsilon$ tels que

$$g^{-1}g' = g_1 \tau(h_{\pm R}) g_2 \quad \text{et} \quad g^{-1}\alpha g = g_1 \tau(h_{\pm R}) (g_2 g_3) \tau(h_{\pm R}) g_4.$$

L'élément $h_R \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique de point fixe répulsif $0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et de point fixe attractif $e^{R/2} - 1 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à distance $\arctan(1/(e^{R/2} - 1)) \sim e^{-R/2}$ de ∞ pour la distance $\mathrm{PSO}(2)$ -invariante de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. De même, h_{-R} est hyperbolique de point fixe attractif ∞ et de point fixe répulsif à distance $\sim e^{-R/2}$ de 0 .

Posons $x_0^+ := \underline{\tau}(\infty) \in G/P_\tau$ et notons H_0^- l'ensemble des points de G/P_τ non transverses à $\underline{\tau}(0)$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{V}_{3r}(x_0^+) \cap \mathcal{V}_{3r}(H_0^-) = \emptyset$, où $\mathcal{V}_\delta(\cdot)$ désigne le δ -voisinage uniforme dans $(G/P_\tau, d_\tau)$ pour $\delta > 0$. On vérifie qu'il existe $C > 0$ avec les propriétés suivantes :

- pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $g \in \mathcal{B}_\varepsilon$, la constante de Lipschitz de g dans $(G/P_\tau, d_\tau)$ est $\leq 1 + C\varepsilon$ et l'on a $d_\tau(x, g \cdot x) \leq C\varepsilon$ pour tout $x \in G/P_\tau$;
- pour tout $R > 0$ assez grand, $\tau(h_R)$ envoie le complémentaire de $\mathcal{V}_r(H_0^-)$ dans $\mathcal{V}_{Ce^{-R/2}}(x_0^+)$ avec une constante de Lipschitz $\leq Ce^{-R}$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tous $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{B}_\varepsilon$, l'élément $g_1 \tau(h_R) g_2 g_3 \tau(h_R) g_4 \in G$ envoie le complémentaire de $\mathcal{V}_{2r}(H_0^-)$ dans $\mathcal{V}_{C(\varepsilon + e^{-R/2})}(x_0^+)$ avec une constante de Lipschitz $\leq (1 + C\varepsilon)^4 C^2 e^{-2R}$, donc de manière uniformément contractante si ε est assez petit et R assez grand. On en déduit que $g_1 \tau(h_R) g_2 g_3 \tau(h_R) g_4$ est proximal dans G/P_τ , de point fixe attractif à distance $\leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $x_0^+ = \underline{\tau}(\infty)$. En raisonnant de même, on voit que son point fixe répulsif est à distance $\leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $\underline{\tau}(0)$. La borne supérieure pour $\|\lambda(g_1 \tau(h_R) g_2 g_3 \tau(h_R) g_4) - \lambda(\exp(Rh))\|_a$ est obtenue par des raisonnements analogues, tenant compte de manière plus précise de la constante de Lipschitz, dans divers espaces projectifs associés à τ , comme dans BENOIST (1997). Ceci prouve les propriétés voulues de $g^{-1}\alpha g = g_1 \tau(h_R) g_2 g_3 \tau(h_R) g_4$ lorsque α est (ε, R) -presque réalisé par $(g, g') \in G^2$. Le cas où α est $(\varepsilon, -R)$ -presque réalisé par (g, g') est analogue. \square

COROLLAIRE 5.13. — *Si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $R > 0$ assez grand, alors*

1. *toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ est τ -générique au sens où $\rho(a)$, $\rho(b)$ et $\rho(c)$ sont proximaux dans G/P_τ de points fixes attractifs $\rho(a)^\oplus, \rho(b)^\oplus, \rho(c)^\oplus \in G/P_\tau$ deux à deux transverses ;*
2. *pour tout réseau cocompact Γ de G , il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de représentations $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ à valeurs dans Γ .*

Démonstration. — (1) Les points $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-1)$ et $\underline{\tau}(0)$ sont transverses et la transversalité est une condition ouverte. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in G/P_\tau$, si x est δ -proche de l'un des points $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-1)$ ou $\underline{\tau}(0)$, et si y est δ -proche d'un autre de ces points, alors x et y sont transverses. Soit $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ une donnée géométrique associée à ρ , comme à la définition 5.7. D'après le lemme 5.12, si ε est assez petit et R assez grand par rapport à ε , alors $g^{-1}\rho(a)g$ (resp. $g^{-1}\rho(b)g$, resp. $g^{-1}\rho(c)g$) est proximal dans G/P_τ , de point fixe attractif δ -proche de $\underline{\tau}(\infty)$ (resp. $\underline{\tau}(-1)$, resp. $\underline{\tau}(0)$). On conclut en remarquant que $(g^{-1}\rho(d)g)^\oplus = g^{-1} \cdot \rho(d)^\oplus$ pour tout $d \in \{a, b, c\}$ et que l'action de G préserve la transversalité.

(2) Soit Γ un réseau cocompact de G : il existe une partie compacte K_1 de G telle que $G = \Gamma K_1$. D'après le lemme 5.12, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε , il existe une partie compacte K_2 de G telle que pour tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α est $(\varepsilon, \pm R)$ -presque réalisé par (g, g') au sens de la définition 5.6, alors $g^{-1}\alpha g \in K_2$. En particulier, si $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \Gamma$ est $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite, de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ comme à la définition 5.7, alors $g^{-1}\rho(a)g$ et $g^{-1}\rho(b)g$ appartiennent tous deux au compact $K'_2 := K_2 \cup \tau\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^{\pm 1} K_2 \tau\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^{\mp 1}$. Si l'on écrit $g = xk_1$ où $x \in \Gamma$ et $k_1 \in K_1$, alors $x^{-1}\rho(a)x$ et $x^{-1}\rho(b)x$ appartiennent tous deux à $K_1 K'_2 K_1^{-1} \cap \Gamma$, qui est fini car Γ est discret dans G . \square

D'après le lemme 5.12.(1), pour $\varepsilon > 0$ assez petit et R assez grand par rapport à ε , l'image de toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ est un groupe C_ε -Schottky au sens de BENOIST (1997, Def. 4.1). En particulier, ρ est injective et discrète, c'est un plongement quasi-isométrique (cf. BENOIST, 1997) et plus précisément une représentation P_τ -anosovienne au sens du paragraphe 1.5 (cf. CANARY, M. LEE, SAMBARINO et STOVER, 2017; KAPOVICH, LEEB et PORTI, 2018).

5.5. Application « pied » et bons recollements selon Kahn, Labourie, Mozes

Afin de définir les bons recollements de pantalons presque parfaits, Kahn, Labourie et Mozes introduisent une notion d'application « pied », définie de la manière suivante.

Soit $\alpha \in G$ un élément proximal dans G/P_τ . Soit L_α l'ensemble des éléments $g \in G$ dont le τ -triangle $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ de G/P_τ associé est de la forme $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus, \cdot)$. Choisissons $r > 0$ assez petit de sorte que le r -voisinage uniforme \mathcal{U}_α de L_α dans (G, d_G) soit homéomorphe au produit direct de L_α avec une boule.

Définition 5.14. — L'application « pied » associée à l'élément proximal $\alpha \in G$ est la projection orthogonale $\Psi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow L_\alpha$ sur L_α .

On peut choisir le même $r > 0$ pour tous les éléments α par la remarque suivante.

Remarque 5.15. — Pour $\alpha_0 = \exp(\mathfrak{h})$, l'ensemble L_{α_0} est le centralisateur $Z_G(\alpha_0) = AZ_K(\mathfrak{a})$ de α_0 dans G (cf. paragraphe 5.3). Pour un élément proximal quelconque $\alpha \in G$, on a $L_\alpha = g_\alpha L_{\alpha_0}$ et $\mathcal{U}_\alpha = g_\alpha \mathcal{U}_{\alpha_0}$ et $\Psi_\alpha = g_\alpha \Psi_{\alpha_0}(g_\alpha^{-1} \cdot)$ où $g_\alpha \in G$ envoie $(\alpha_0^\ominus, \alpha_0^\oplus) = (\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ sur $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. Le stabilisateur $\text{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$ de $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) \in G/P_\tau \times G/P_\tau$ dans G est égal à $g_\alpha L_{\alpha_0} g_\alpha^{-1} = L_\alpha g_\alpha^{-1}$; il agit sur \mathcal{U}_α et L_α par multiplication à gauche et Ψ_α est équivariante pour ces actions.

LEMME 5.16. — 1. Pour tout élément proximal $\alpha \in G$, les ensembles

$$\mathcal{N}_\delta := \{g \in G \mid d_\tau(g^{-1} \cdot \alpha^\ominus, \underline{\tau}(0)) \leq \delta \text{ et } d_\tau(g^{-1} \cdot \alpha^\oplus, \underline{\tau}(\infty)) \leq \delta\},$$

pour $\delta > 0$, forment une base de voisinages $\text{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$ -invariants de L_α dans G .

2. En particulier, si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $R > 0$ est assez grand, alors pour toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaite $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$, de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ comme à la définition 5.7, on a $g \in \mathcal{U}_{\rho(a)^{\pm 1}}$.

Démonstration. — (1) Soit $g_\alpha \in G$ tel que $g_\alpha^{-1} \cdot (\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) = (\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$. L'espace homogène $\text{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) \backslash G$ s'identifie à l'ensemble des couples de points transverses de G/P_τ via $[g] \mapsto g^{-1} \cdot (\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. Par conséquent, une base de voisinages de $[g_\alpha]$ dans $\text{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) \backslash G$ est donnée par les ensembles

$$\overline{\mathcal{N}}_\delta := \{[g] \in \text{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) \backslash G \mid d_\tau(g^{-1} \cdot \alpha^\ominus, \underline{\tau}(0)) \leq \delta \text{ et } d_\tau(g^{-1} \cdot \alpha^\oplus, \underline{\tau}(\infty)) \leq \delta\},$$

pour $\delta > 0$. Les images réciproques \mathcal{N}_δ des $\overline{\mathcal{N}}_\delta$ par la projection naturelle $G \rightarrow \text{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) \backslash G$ forment alors une base de voisinages $\text{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$ -invariants de L_α dans G .

- (2) Conséquence immédiate de (1), de la définition de $\mathcal{U}_{\rho(a)^{\pm 1}}$ et du lemme 5.12. \square

Notons que le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du paragraphe 5.1.3 préserve L_α , alors que l'involution inv échange L_α et $L_{\alpha^{-1}}$.

Dans la définition suivante, Kahn, Labourie et Mozes ont en tête des couples (Π^+, Π^-) de pantalons adjacents le long d'une courbe de bord a comme à la figure 3, droite.

Définition 5.17. — Soient Π^+ et Π^- deux pantalons, de groupes fondamentaux $\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a^\pm, b^\pm, c^\pm \mid c^\pm b^\pm a^\pm = 1 \rangle$. Soient $\varepsilon, R > 0$ et $\rho^\pm: \pi_1(\Pi^\pm) \rightarrow G$ des représentations $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaites de données géométriques $Q^\pm = (\rho^\pm(a^\pm), \rho^\pm(b^\pm), \rho^\pm(c^\pm), g_\pm, g'_\pm)$. Pour $\varepsilon' > 0$, on dit que ρ^+ et ρ^- (ou leurs images) sont $(\varepsilon', 1)$ -bien recollées le long de a^+ et a^- via Q^+ et Q^- si $\rho^+(a^+) = \rho^-(a^-) =: \alpha \in G$, si $g_\pm \in \mathcal{U}_{\alpha^{\pm 1}}$ et si

$$(5.3) \quad d_G(\Psi_\alpha(g_+), \varphi_1 \circ \text{inv} \circ \Psi_{\alpha^{-1}}(g_-)) < \varepsilon'.$$

Lorsque R est grand, l'élément g_\pm est très proche de son image par $\Psi_{\alpha^{\pm 1}}$ (lemmes 5.12 et 5.16.(1)), et l'inégalité (5.3) signifie donc que g_- est « presque » obtenu à partir de g_+ par inversion et décalage de 1 (cf. figure 15). En pratique, on prendra des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites qui sont $(\varepsilon', 1)$ -bien recollées pour $\varepsilon' = C\varepsilon/R$ où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de G .

Remarque 5.18. — En utilisant le lemme 5.12, on vérifie que pour tout $\delta > 0$, si $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ sont assez petits et $R > 0$ assez grand, alors les images par g_-^{-1} des points $\rho^\pm(a^\pm)^\ominus$, $\rho^\pm(a^\pm)^\oplus$, $\rho^+(b^+)^\ominus$, $\rho^+(b^+)^\oplus$, $\rho^+(c^+)^\ominus$, $\rho^+(c^+)^\oplus$, $\rho^-(b^-)^\ominus$, $\rho^-(b^-)^\oplus$, $\rho^-(c^-)^\ominus$ et $\rho^-(c^-)^\oplus$ sont à distance $\leq \delta$ pour d_τ , respectivement, de $\underline{\tau}(0)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-e)$, $\underline{\tau}(-e)$, $\underline{\tau}(0)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(1)$, $\underline{\tau}(1)$ et $\underline{\tau}(0)$ (cf. figure 15).

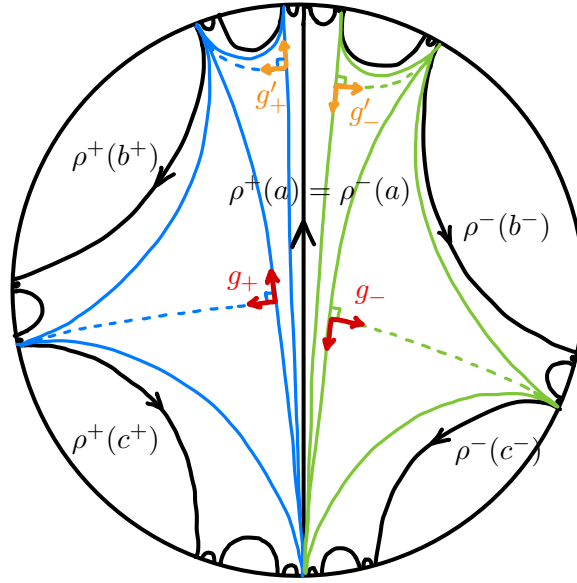


FIGURE 15. Représentations $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaites ρ^\pm qui sont bien recollées selon Kahn, Labourie et Mozes

5.6. Injectivité des représentations de $\pi_1(S)$ dont les restrictions aux pantalons sont presque parfaites et bien recollées

Kahn, Labourie et Mozes établissent la version plus précise suivante de la proposition 3.2. On note $\sigma_\Pi: \{a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi\} \rightarrow \{a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi\}$ la permutation cyclique envoyant a_Π sur b_Π , et l'on renvoie à la remarque 5.8 pour la définition de sym.

PROPOSITION 5.19. — *Dans le cadre 2.13, soit Γ un réseau cocompact irréductible de G , et soit S une surface hyperbolique compacte avec une décomposition en pantalons bipartie \mathcal{P} et un graphe \mathcal{G} comme au paragraphe 3.1, donnant une présentation $\pi_1(\Pi) = \langle a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi \mid c_\Pi b_\Pi a_\Pi = 1 \rangle$ pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$. Pour tout $\delta > 0$, tout $\varepsilon > 0$ assez petit par rapport à δ , tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et toute famille $(\rho_\Pi: \pi_1(\Pi) \rightarrow \Gamma)_{\Pi \in \mathcal{P}}$ de représentations, si*

1. *pour tout $\Pi^\pm \in \mathcal{P}^\pm$, la représentation ρ_{Π^\pm} est $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaite comme à la définition 5.7, et*
2. *on peut choisir les données géométriques Q_π des ρ_Π (définition 5.7) de telle sorte que pour tous $\Pi^+, \Pi^- \in \mathcal{P}$ adjacents le long d'une courbe de bord, cette courbe correspond à des éléments $\sigma_{\Pi^+}^{i^+}(a_{\Pi^+})$ et $\sigma_{\Pi^-}^{i^-}(a_{\Pi^-})$ pour $i^+, i^- \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et ρ_{Π^+} et ρ_{Π^-} sont $(\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés le long de $\sigma_{\Pi^+}^{i^+}(a_{\Pi^+})$ et $\sigma_{\Pi^-}^{i^-}(a_{\Pi^-})$ via $\text{sym}^{i^+}(Q_{\Pi^+})$ et $\text{sym}^{i^-}(Q_{\Pi^-})$, comme à la définition 5.17,*

alors il existe une représentation injective $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \Gamma$ dont la restriction à chaque $\pi_1(\Pi)$, pour $\Pi \in \mathcal{P}$, est conjuguée à ρ_Π , et qui admet une application de bord (δ, τ) -sullivanienne $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$.

Nous esquissons à présent les idées de la démonstration. Ces considérations de Kahn, Labourie et Mozes sur les applications de bord sullivanien, en lien avec les représentations anosoviennes en rang supérieur, constituent l’une des nouveautés importantes par rapport à l’approche originale de Kahn et Marković.

5.6.1. Pavage de \mathbb{H}^2 par des hexagones R -parfaits. — Soit $R > 1$. À toute représentation d’holonomie $\varrho_R: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ d’une structure hyperbolique marquée R -parfaite sur S est associé un pavage $\varrho_R(\pi_1(S))$ -invariant Hex_{ϱ_R} de \mathbb{H}^2 par des hexagones R -parfaits (cf. figure 4).

Tout hexagone H de Hex_{ϱ_R} est bordé par trois droites géodésiques orientées A_a, A_b, A_c de \mathbb{H}^2 , qui sont les axes de translation de trois éléments $\varrho_R(a), \varrho_R(b), \varrho_R(c)$ où $a, b, c \in \pi_1(S)$ correspondent à des courbes de bord de pantalons de \mathcal{P} , et les points fixes $\varrho_R(a)^\ominus, \varrho_R(a)^\oplus, \varrho_R(b)^\ominus, \varrho_R(b)^\oplus, \varrho_R(c)^\ominus$ et $\varrho_R(c)^\oplus$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont dans un ordre cyclique positif. On appellera *hexagone marqué* de Hex_{ϱ_R} la donnée d’un hexagone H et d’un ordre (a, b, c) ou (b, c, a) ou (c, a, b) sur les éléments définissant les côtés de H . On a une application (ϱ_R, ϱ_R) -équivariante $H \mapsto (h_H, h'_H)$ de l’ensemble des hexagones marqués du pavage vers $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})^2$, de sorte que si H est de côtés (a, b, c) , alors (h_H, h'_H) vérifie (5.1) pour la représentation R -parfaite $(\varrho_R)|_{\langle a, b, c \rangle}$.

Remarque 5.20. — Le fait 3.1 assure que tout point de \mathbb{H}^2 est à distance uniformément bornée (indépendante de R et ϱ_R) du centre d’un hexagone du pavage. En particulier, il existe une constante $C' > 0$ (indépendante de R et ϱ_R) telle que pour tout $h_T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ on puisse trouver un hexagone marqué H de Hex_{ϱ_R} tel que $d_\tau(\tau(h_T^{-1})(z), \tau(h_T^{-1})(z')) \leq C' d_\tau(\tau(h_H^{-1})(z), \tau(h_H^{-1})(z'))$ pour tous $z, z' \in G/P_\tau$.

Suivant Kahn, Labourie et Mozes, on dira qu’une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d’éléments de $\pi_1(S)$ correspondant à des courbes de bord de pantalons de \mathcal{P} est *acceptable* si pour tout n , les géodésiques A_{a_n} et $A_{a_{n+1}}$ d’une part, et $A_{a_{n+1}}$ et $A_{a_{n+2}}$ d’autre part, bordent des hexagones du pavage avec des côtés qui coïncident sur une longueur de $R - 1$ dans \mathbb{H}^2 (cf. figure 16). On dira qu’un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est *accessible* si c’est la limite, dans la compactification $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de \mathbb{H}^2 , d’une suite $(A_{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est acceptable; dans ce cas, si A_{a_0} et A_{a_1} bordent un hexagone H du pavage, on dira que x est accessible *à partir de H* . Kahn, Labourie et Mozes font l’observation suivante.

LEMME 5.21. — *Il existe une fonction $\vartheta: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, tendant vers 0 en $+\infty$, telle que pour tout $R > 0$, toute représentation d’holonomie $\varrho_R: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ d’une structure hyperbolique R -parfaite sur S et tout hexagone H du pavage Hex_{ϱ_R} , l’image par h_H^{-1} de l’ensemble des points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ accessibles à partir de H est $\vartheta(R)$ -dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ pour $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$.*

De manière analogue à l’application $H \mapsto (h_H, h'_H)$, pour $\varepsilon > 0$, à toute représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ vérifiant la condition (1) de la proposition 5.19, on peut associer une application (ϱ_R, ρ) -équivariante $H \mapsto (g_H, g'_H)$ de l’ensemble des hexagones marqués du pavage vers G^2 , de sorte que si H est de côtés (a, b, c) , alors $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g_H, g'_H)$ est

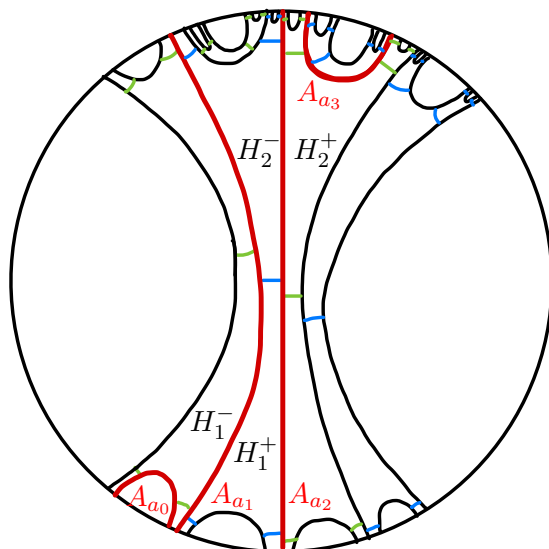


FIGURE 16. Le début d’une suite $(A_{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est acceptable ; les hexagones H_n^- et H_n^+ ont des côtés qui coïncident sur une longueur de $R - 1$

une donnée géométrique associée à la représentation $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaite $\rho|_{(a,b,c)}$ comme à la définition 5.7.

5.6.2. Applications de bord partielles et déformations. — Le cœur de la démonstration de la proposition 5.19 est formé des deux résultats ci-dessous. Le premier, comme la proposition 2.9 sur laquelle repose le second, fait intervenir une version précise, dans G/P_τ , du lemme de Morse de KAPOVICH, LEEB et PORTI (2014, 2018), déjà mentionnée au paragraphe 2.2.3.

Rappelons (lemme 5.12) que pour $\varepsilon, R > 0$, si une représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ vérifie la condition (1) de la proposition 5.19, alors pour tout $a \in \pi_1(S)$ correspondant à une courbe de bord d’un pantalon de \mathcal{P} , l’élément $\rho(a)$ admet un unique point fixe attractif $\rho(a)^\oplus$ dans G/P_τ . Soit $C' > 0$ la constante de la remarque 5.20.

PROPOSITION 5.22. — *Pour tout $\delta > 0$, tout $\varepsilon > 0$ est assez petit par rapport à δ , tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε , toute représentation d’holonomie $\varrho_R: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ d’une structure hyperbolique marquée R -parfaite sur S et toute représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 5.19, il existe une unique application (ϱ_R, ρ) -équivariante ξ de l’ensemble des points accessibles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers G/P_τ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite acceptable $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d’éléments de $\pi_1(S)$ correspondant à des courbes de bord de pantalons de \mathcal{P} , si (A_{a_n}) converge dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ vers un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ accessible à partir d’un hexagone H de Hex_{ϱ_R} , alors $(\rho(a_n)^\oplus)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans G/P_τ vers $\xi(x)$ et $d_\tau(g_H^{-1} \circ \xi(x), \mathcal{I} \circ h_H^{-1}(x)) \leq \delta/2C'$.*

PROPOSITION 5.23. — *Soit $\varrho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ l’holonomie d’une structure hyperbolique sur S . Pour tout $\delta > 0$ assez petit, il existe $\theta > 0$ tel que pour toute famille continue $(\rho_t)_{t \in [0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ de représentations et toutes applications (ϱ, ρ_t) -équivariantes*

$\xi_t: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$, si ξ_0 est (δ, τ) -sullivannienne et si pour tout $t \in]0, 1]$, les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(a_n) \in \pi_1(S)^\mathbb{N}$ telle que $\rho_t(a_n)$ soit proximal dans G/P_τ pour tout n et telle que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ vers x et $(\rho_t(a_n)^\oplus)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans G/P_τ vers $\xi_t(x)$,
2. pour tout $h_T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, il existe un élément $g_T \in G$ et un sous-ensemble $\varrho(\pi_1(S))$ -invariant D de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tels que $h_T^{-1}(D)$ soit θ -dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et que $d_\tau(g_T^{-1} \circ \xi_t(x), \underline{\tau} \circ h_T^{-1}(x)) \leq \delta/2$ pour tout $x \in D$,

alors ξ_t est (δ, τ) -sullivannienne pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration de la proposition 5.23. — Soient $\alpha, \delta_0, C > 0$ les constantes données par la proposition 2.9.(1). Prenons $\delta < \delta_0/2$ et θ tel que $\theta + C\theta^\alpha \leq \delta/2$, et montrons que l'ensemble E des $t \in [0, 1]$ tels que ξ_t soit (δ, τ) -sullivannienne est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.

Pour montrer que E est fermé, on observe que les applications (δ, τ) -sullivanniennes forment une famille équicontinue, par la proposition 2.9.(1) : ainsi, d'après le théorème d'Arzelà–Ascoli, si $(t_m) \in E^\mathbb{N}$ converge vers t , on peut supposer après extraction que $(\xi_{t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers une application $\xi'_t: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$. Cette application ξ'_t est encore (δ, τ) -sullivannienne, et (ϱ_0, ρ_t) -équivariante. D'après la proposition 2.9.(2a), la représentation ρ_t est P_τ -anosovienne et ξ'_t est son application de bord. En particulier (propriété générale des représentations anosoviennes), pour toute suite $(a_n) \in \pi_1(S)^\mathbb{N}$ convergeant dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ vers $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, l'élément $\rho_t(a_n)$ est proximal dans G/P_τ pour tout n et $(\rho_t(a_n)^\oplus)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans G/P_τ vers $\xi'_t(x)$. L'hypothèse (1) de la proposition implique alors $\xi'_t = \xi_t$. Ainsi, $t \in E$.

Vérifions que E est ouvert dans $[0, 1]$. D'après la proposition 2.9.(2b), tout $t \in E$ admet un voisinage dans $[0, 1]$ formé d'éléments s tels que ξ_s soit (δ_0, τ) -sullivannienne. Grâce à l'hypothèse (2) ci-dessus, on en déduit que ξ_s est (δ, τ) -sullivannienne, *i.e.* $s \in E$. En effet, soit $h_T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. D'après l'hypothèse (2) il existe $g_T \in G$ et, pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, un point $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tels que $d_\tau(\underline{\tau} \circ h_T^{-1}(x), \underline{\tau} \circ h_T^{-1}(y)) = d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h_T^{-1}(x), h_T^{-1}(y)) \leq \theta$ et $d_\tau(g_T^{-1} \circ \xi_s(y), \underline{\tau} \circ h_T^{-1}(y)) \leq \delta/2$. D'après la proposition 2.9.(1), on a

$$d_\tau(g_T^{-1} \circ \xi_s(x), g_T^{-1} \circ \xi_s(y)) \leq C d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h_T^{-1}(x), h_T^{-1}(y))^\alpha \leq C\theta^\alpha,$$

et l'on conclut par inégalité triangulaire. □

5.6.3. Démonstration de la proposition 5.19. — Prenons $\varepsilon > 0$ assez petit et $R > 0$ assez grand par rapport à ε comme dans la proposition 5.22. Prenons de plus R assez grand de sorte que le réel $\vartheta(R)$ du lemme 5.21 soit inférieur à θ/C' où θ et C' sont donnés respectivement par la proposition 5.23 et la remarque 5.20.

Supposons dans un premier temps qu'il existe une famille continue $(\rho_t)_{t \in [0, 1]} \subset \text{Hom}(\pi_1(S), G)$ telle que ρ_0 soit τ -fuchsienne, $\rho_1 = \rho$ et pour tout $t \in [0, 1]$, la représentation ρ_t vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 5.19. Considérons un

pavage $\varrho_R(\pi_1(S))$ -invariant Hex_{ϱ_R} de \mathbb{H}^2 par des hexagones R -parfaits comme au paragraphe 5.6.1 ; pour tout $t \in [0, 1]$ on a une application (ϱ_R, ϱ_R) -équivariante (resp. (ϱ_R, ρ_t) -équivariante) $H \mapsto (h_H, h'_H)$ (resp. $H \mapsto (g_{H,t}, g'_{H,t})$) de l'ensemble des hexagones marqués de Hex_{ϱ_R} vers $\text{PSL}(2, \mathbb{R})^2$ (resp. G^2). Soit ξ_t l'application (ϱ_R, ρ_t) -équivariante de la proposition 5.22, allant de l'ensemble des points accessibles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers G/P_τ ; on la prolonge en une application (ϱ_R, ρ_t) -équivariante $\xi_t: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ vérifiant la condition (1) de la proposition 5.23. Soit $C' > 0$ la constante de la remarque 5.20. Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, en posant $g_{T,t} := g_{H,t} \tau(h_H^{-1} h_T) \in G$, on a

$$\begin{aligned} d_\tau(g_T^{-1} \circ \xi_t(x), \underline{\tau} \circ h_T^{-1}(x)) &= d_\tau(\tau(h_T^{-1} h_H) g_{H,t}^{-1} \circ \xi_t(x), \tau(h_T^{-1} h_H) \circ \underline{\tau} \circ h_H^{-1}(x)) \\ &\leq C' d_\tau(g_{H,t}^{-1} \circ \xi_t(x), \underline{\tau} \circ h_H^{-1}(x)), \end{aligned}$$

qui est $\leq \delta/2$ dès que x est accessible à partir de H , d'après la proposition 5.22. Or, l'image par h_H^{-1} de l'ensemble des points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ accessibles à partir de H est (θ/C') -dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'après le lemme 5.21 et notre choix de R , donc l'image par h_T^{-1} de l'ensemble des points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ accessibles à partir de H est θ -dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'après la remarque 5.20. On peut alors appliquer la proposition 5.23 : on obtient que pour tout $t \in [0, 1]$, l'application de bord ξ_t est (δ, τ) -sullivannienne.

En général, Kahn, Labourie et Mozes ne construisent pas de famille continue $(\rho_t)_{t \in [0,1]} \subset \text{Hom}(\pi_1(S), G)$ telle que ρ_0 soit τ -fuchsienne et $\rho_1 = \rho$. Ils procèdent plutôt par approximation, en considérant une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de surfaces hyperboliques compactes obtenues en doublant des surfaces hyperboliques S'_n compactes à bord qui sont des unions de pantalons isométriques à des pantalons de \mathcal{P} , et telles que le revêtement universel de S coïncide avec celui de S'_n sur une boule de rayon n . La représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ définit des représentations $\rho^{(n)}: \pi_1(S'_n) \rightarrow G$ dont la restriction à tout pantalon est encore $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaite, avec des recollements $(\varepsilon/R, 1)$ -presque bons. Pour tout n , en utilisant le fait que $\pi_1(S'_n)$ est un groupe libre, ils construisent une famille continue $(\rho_t^{(n)})_{t \in [0,1]} \subset \text{Hom}(\pi_1(S'_n), G)$ telle que $\rho_0^{(n)}$ soit τ -fuchsienne, $\rho_1^{(n)} = \rho^{(n)}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, la représentation $\rho_t^{(n)}$ vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 5.19. D'après le paragraphe précédent, $\rho^{(n)}$ admet donc une application de bord (δ, τ) -sullivannienne $\xi^{(n)}: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$. La famille $(\xi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue d'après la proposition 2.9.(1). En procédant par convergence, on obtient alors une application de bord (δ, τ) -sullivannienne $\xi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow G/P_\tau$ pour ρ .

6. ÉTAPE DYNAMIQUE : UTILISATION DU MÉLANGE

Dans cette partie, nous décrivons les espaces continus $\text{Geom}_{\varepsilon, \pm R}$ qui paramètrent les données géométriques de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites selon les approches de HAMENSTÄDT (2015, 2021) et KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018) (paragraphe 6.1). Puis nous donnons (à partir du paragraphe 6.2) les grandes lignes de la démonstration des propositions 3.3 et 3.4 selon le point de vue de Kahn, Labourie et Mozes.

Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.13. On suppose à présent la condition (R) du paragraphe 2.3.2 vérifiée. On fixe un réseau cocompact irréductible Γ de G . Par le lemme de Selberg, quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut le supposer sans torsion; c'est ce que nous ferons ici.

6.1. Données géométriques associées aux représentations presque parfaites

Soit Π un pantalon.

Selon l'approche de Kahn, Labourie et Mozes, les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ sont les quintuplets $(\alpha, \beta, \gamma, g, g') \in G^5$ vérifiant (5.2), tels que $\gamma\beta\alpha = \text{id}$. D'après la remarque 5.8, conjuguer par $x \in \Gamma$ revient à remplacer $(\alpha, \beta, \gamma, g, g')$ par $(x\alpha x^{-1}, x\beta x^{-1}, x\gamma x^{-1}, xg, xg')$. Pour des raisons techniques, Kahn, Labourie et Mozes considèrent la donnée équivalente de quadruplets $(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g') \in G^4$ ou $(g, g'', \alpha g', \beta \alpha g') \in G^4$ modulo l'action diagonale de Γ par multiplication à gauche, où $(\alpha, \beta, (\beta\alpha)^{-1}, g, g')$ vérifie (5.2). Au paragraphe 6.4, ces quadruplets modulo l'action de Γ seront appelés *couples triconnectés*; ils forment une partie compacte de $\Gamma \backslash G^4$ qui sera notée $\text{Triconn}_{R\varepsilon, \pm R}$. L'espace $\text{Geom}_{\varepsilon, \pm R}$ des propositions 3.3 et 3.4 correspond à $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$.

Selon l'approche de Hamenstädt, les données géométriques associées aux classes de conjugaison modulo Γ de représentations (ε, R) -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ sont les quintuplets $(\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}) \in (\Gamma \backslash G)^5$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la définition 4.4. Ils forment une partie compacte de $(\Gamma \backslash G)^5$, que l'on peut munir de la mesure induite par la mesure de Haar de G . Cette partie compacte correspond à l'espace $\text{Geom}_{R\varepsilon, R}$ des propositions 3.3 et 3.4.

Dans le reste de la partie, on adopte l'approche de Kahn, Labourie et Mozes. Les notions de représentation presque parfaite et de bon recollement sont données par les définitions 5.7 et 5.17.

6.2. Fonctions poids sur $G \times G$

Pour démontrer la proposition 3.3.(1), l'idée est de montrer, en utilisant le mélange (fait 3.5), que pour tous éléments $[x], [y] \in \Gamma \backslash G$, il existe « beaucoup » d'éléments $[g] \in \Gamma \backslash G$ proches de $[x]$ tels que $\text{rot} \circ \text{inv} \circ \varphi_R([g])$ soit proche de $[y]$.

Plus précisément, fixons une fonction cloche $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, de support $[-1, 1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient une fonction cloche $\chi_\varepsilon \in C^\infty(G, \mathbb{R}^+)$ de support la boule de rayon ε autour de l'élément neutre $\text{id} \in G$, d'intégrale 1, en posant

$$\chi_\varepsilon(g) := \frac{1}{\int_G \chi(d_G(\cdot, \text{id})^2/\varepsilon^2)} \chi(d_G(g, \text{id})^2/\varepsilon^2).$$

Pour $R > 0$, on définit des fonctions « poids » $W_{\varepsilon, R}, W_{\varepsilon, -R}: G \times G \rightarrow \mathbb{R}^+$, à support compact dans $G \times G$, par

$$(6.1) \quad W_{\varepsilon, \pm R}(x, y) = \int_{g \in G} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g) \chi_{\varepsilon/R}(y^{-1}(\text{rot}^{\pm 1} \circ \text{inv} \circ \varphi_{\pm R})(g)) dg.$$

La fonction $W_{\varepsilon, \pm R}$ mesure la proportion d'éléments $g \in G$ tels que g soit (ε/R) -proche de x et $\text{rot}^{\pm 1} \circ \text{inv} \circ \varphi_{\pm R}(g)$ soit (ε/R) -proche de y . Elle est invariante sous l'action diagonale de G : on a $W_{\varepsilon, \pm R}(gx, gy) = W_{\varepsilon, \pm R}(x, y)$ pour tous $g, x, y \in G$, car rot , inv et φ_R correspondent à des multiplications à droite. Elle induit une fonction $(\Gamma \times \Gamma)$ -invariante $w_{\varepsilon, \pm R}: G \times G \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par

$$(6.2) \quad w_{\varepsilon, \pm R}(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} W_{\varepsilon, \pm R}(x, \gamma y).$$

(Cette somme est finie car à x fixé, la fonction $W_{\varepsilon, \pm R}(x, \cdot): G \rightarrow \mathbb{R}^+$ est à support compact et Γ est discret dans G ; ainsi, $w_{\varepsilon, \pm R}$ est bien définie et lisse.) La fonction $w_{\varepsilon, \pm R}$ passe au quotient en une fonction $\Gamma \backslash G \times \Gamma \backslash G \rightarrow \mathbb{R}^+$, que l'on notera encore $w_{\varepsilon, \pm R}$. Celle-ci mesure la proportion d'éléments $[g] \in \Gamma \backslash G$ proches de $[x]$ tels que $\text{rot}^{\pm 1} \circ \text{inv} \circ \varphi_{\pm R}([g])$ soit proche de $[y]$, ou encore la proportion d'éléments $g \in G$ proches de x pour lesquels il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(\text{rot}^{\pm 1} \circ \text{inv} \circ \varphi_{\pm R})(g)$ soit proche de y .

Le lemme suivant reprend l'approche de Margulis dans sa thèse. Suivant Kahn, Labourie et Mozes, on n'utilise ici qu'une vitesse de mélange polynomiale (cf. paragraphe 3.3), qui donne une estimée en ε/R^2 et suffit pour démontrer les propositions 3.3 et 3.4; en utilisant pleinement le mélange exponentiel (fait 3.5), on obtiendrait une estimée en $e^{-qR/2}$.

LEMME 6.1. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tous $[x], [y] \in \Gamma \backslash G$, on a*

$$(6.3) \quad |w_{\varepsilon, \pm R}([x], [y]) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{R^2}.$$

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $X_\varepsilon: G \times G \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par $X_\varepsilon(x, g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_\varepsilon(x^{-1}\gamma g)$ est de classe C^∞ et passe au quotient en une fonction $X_\varepsilon: \Gamma \backslash G \times \Gamma \backslash G \rightarrow \mathbb{R}^+$. Soit $k \in \mathbb{N}$ donné par le fait 3.5. Il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe $D > 0$ tel que $\|\chi_\varepsilon\|_{C^k} \leq D \varepsilon^{-k-D}$ pour tout $\varepsilon > 0$; on en déduit qu'il existe $D' > 0$ tel que $\|X_\varepsilon(x, \cdot)\|_{C^k}, \|X_\varepsilon(x, (\text{rot} \circ \text{inv})(\cdot))\|_{C^k} \leq D' \varepsilon^{-k-D'}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $[x] \in \Gamma \backslash G$.

Soit \mathcal{D} un domaine fondamental mesurable relativement compact de G pour l'action de Γ (on peut ici supposer Γ sans torsion). Soient $\varepsilon, R > 0$. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon, R}([x], [y]) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{g \in G} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g) \chi_{\varepsilon/R}(y^{-1}\gamma^{-1}(\text{rot} \circ \text{inv} \circ \varphi_R)(g)) \, dg \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \int_{g \in \mathcal{D}} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}\gamma'g) \chi_{\varepsilon/R}(y^{-1}\gamma^{-1}\gamma'(\text{rot} \circ \text{inv} \circ \varphi_R)(g)) \, dg \\ &= \int_{[g] \in \Gamma \backslash G} X_{\varepsilon/R}(x, [g]) X_{\varepsilon/R}(y, (\text{rot} \circ \text{inv} \circ \varphi_R)([g])) \, d[g]. \end{aligned}$$

Si l'on pose $\psi = X_{\varepsilon/R}(x, \cdot)$ et $\theta = X_{\varepsilon/R}(y, (\text{rot} \circ \text{inv})(\cdot))$, alors $\int_{\Gamma \backslash G} \psi = \int_{\Gamma \backslash G} \theta = \int_G \chi_{\varepsilon/R} = 1$, et le fait 3.5 donne

$$|w_{\varepsilon, R}([x], [y]) - 1| \leq C e^{-qR} \|\psi\|_{C^k} \|\theta\|_{C^k} \leq C D'^2 e^{-qR} \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{-2k-2D'}.$$

En particulier, on obtient (6.3) dès que R est assez grand par rapport à ε . Un raisonnement analogue vaut pour $w_{\varepsilon, -R}$. \square

COROLLAIRE 6.2. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tous $x, y \in G$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $W_{\varepsilon, R}(x, \gamma y) > 0$.*

6.3. Fonctions poids sur G^4 et représentations presque parfaites : démonstration de la proposition 3.3.(1)

Pour tous $\varepsilon, R > 0$, on définit des fonctions $W_{\varepsilon, \pm R}^{\text{tri}}: G^4 \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$(6.4) \quad \begin{cases} W_{\varepsilon, R}^{\text{tri}}(x, y_0, y_1, y_2) = W_{\varepsilon, R}(x, y_0) W_{\varepsilon, R}(\text{rot}^2(x), \text{rot}(y_1)) W_{\varepsilon, R}(\text{rot}(x), \text{rot}^2(y_2)), \\ W_{\varepsilon, -R}^{\text{tri}}(x, y_0, y_1, y_2) = W_{\varepsilon, -R}(x, \text{rot}^2(y_1)) W_{\varepsilon, -R}(\text{rot}(x), \text{rot}(y_0)) W_{\varepsilon, -R}(\text{rot}^2(x), y_2) \end{cases}$$

pour tous $x, y_0, y_1, y_2 \in G$, où $W_{\varepsilon, \pm R}$ est donnée par (6.1). Ces fonctions sont invariantes par l'action diagonale de G sur G^4 par multiplication à gauche. Le lemme suivant fait le lien avec les données géométriques de représentations $(\varepsilon, \pm R)$ -presque parfaites (définition 5.7).

LEMME 6.3. — *Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \mid cba = 1 \rangle$, soit $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ une représentation, soient $\varepsilon, R > 0$ et soient $g, g' \in G$. Posons $g'' := \rho(a)^{-1} \circ \text{rot}(g')$. Alors*

1. *la représentation ρ est (ε, R) -presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ si et seulement si $W_{\varepsilon, R, R}^{\text{tri}}(g, g', \rho(a)^{-1}g', \rho(b)g') > 0$;*
2. *la représentation ρ est $(\varepsilon, -R)$ -presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ si et seulement si $W_{\varepsilon, R, -R}^{\text{tri}}(g, g'', \rho(a)g'', \rho(ba)g'') > 0$.*

Démonstration. — Traitons le point (1) ; le point (2) est analogue.

Par définition (6.1) de $W_{\varepsilon, R, R}$, on a $W_{\varepsilon, R, R}(g, g') > 0$ si et seulement s'il existe $h \in G$ tel que $d_G(h, g) < \varepsilon$ et $d_G(\text{rot} \circ \text{inv} \circ \varphi_R(h), g') < \varepsilon$. De même, on a $W_{\varepsilon, R, R}(\text{rot}^2(g), \text{rot} \circ \rho(a)^{-1}(g')) > 0$ si et seulement s'il existe $h'' \in G$ tel que

$$d_G(h'', \text{rot}(g)) < \varepsilon \quad \text{et} \quad d_G(\text{rot} \circ \text{inv} \circ \varphi_R(h''), \text{rot} \circ \rho(a)^{-1}(g')) < \varepsilon ;$$

en posant $h' := \rho(a) \circ \text{inv} \circ \varphi_R(h'')$, ceci est équivalent à

$$d_G(g', h') < \varepsilon \quad \text{et} \quad d_G(\text{rot} \circ \text{inv} \circ \varphi_R(h'), \rho(a)(g)) < \varepsilon$$

(car d_G est invariante par G et rot , et $(\text{inv} \circ \varphi_R)^2 = \text{id}_G$). Ainsi, on a $W_{\varepsilon, R, R}(g, g') W_{\varepsilon, R, R}(\text{rot}^2(g), \text{rot} \circ \rho(a)^{-1}(g')) > 0$ si et seulement si $\rho(a)$ est (ε, R) -presque réalisé par (g, g') (définition 5.6). De même, $W_{\varepsilon, R, R}(g, g') W_{\varepsilon, R, R}(\text{rot}(g), \text{rot}^2 \circ \rho(b)(g')) > 0$ (resp. $W_{\varepsilon, R}(\text{rot}^2(g), \text{rot} \circ \rho(a)^{-1}(g')) W_{\varepsilon, R}(\text{rot}(g), \text{rot}^2 \circ \rho(b)(g')) > 0$) si et seulement si $\rho(b)$ (resp. $\rho(c)$) est (ε, R) -presque réalisé par $(\text{rot}(g), \text{rot}^2 \circ \rho(b)(g'))$ (resp. $(\text{rot}^2(g), \text{rot} \circ \rho(a)^{-1}(g'))$). On en déduit que $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ satisfait (5.2) avec les signes + si et seulement si $W_{\varepsilon, R, R}^{\text{tri}}(g, g', \rho(a)^{-1}g', \rho(b)g') > 0$. \square

Démonstration de la proposition 3.3.(1). — D’après le corollaire 6.2, si R est assez grand par rapport à ε , alors pour tous $g, g'' \in G$ on peut trouver $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que $W_{\varepsilon, R}^{\text{tri}}(g, \gamma_0 g'', \gamma_1 g'', \gamma_2 g'') > 0$. On peut alors appliquer le lemme 6.3 avec $g' = \gamma_0 g''$ et $(\alpha, \beta) = (\gamma_0 \gamma_1^{-1}, \gamma_2 \gamma_0^{-1})$ pour trouver des groupes de pantalons $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaits dans Γ . \square

6.4. Couples triconnectés et mesures $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ de la proposition 3.4

Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \mid cba = 1 \rangle$. Dans ce paragraphe, nous introduisons l’espace $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ qui paramètre les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ modulo l’action de Γ . Nous introduisons des mesures $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ dont nous montrerons plus loin (proposition 6.5) qu’elles satisfont la conclusion de la proposition 3.4.

Rappelons (remarque 5.8) que Γ agit sur l’ensemble des données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ par $x \cdot (\alpha, \beta, \gamma, g, g') = (x\alpha x^{-1}, x\beta x^{-1}, x\gamma x^{-1}, xg, xg')$. Comme expliqué au paragraphe 6.1, ces données géométriques, modulo l’action de Γ , sont paramétrées par les quadruplets de la forme $(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g') \in G^4$ où $(\alpha, \beta, (\beta\alpha)^{-1}, g, g')$ vérifie (5.2), modulo l’action diagonale de Γ sur G^4 par multiplication à gauche. D’après le lemme 6.3, ces données géométriques modulo Γ sont donc paramétrées par les éléments de $\Gamma \backslash G^4$ de la forme $[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')]$ où $W_{\varepsilon R, R}^{\text{tri}}(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g') > 0$. Étant donné un tel élément $[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')] \in \Gamma \backslash G^4$, la représentation $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaite correspondante est donnée par $(a, b) \mapsto (\alpha, \beta)$ modulo conjugaison par Γ .

De même, les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, -R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ , modulo l’action de Γ , sont paramétrées par les éléments de $\Gamma \backslash G^4$ de la forme $[(g, g', \alpha g', \beta \alpha g')]$ où $W_{\varepsilon R, -R}^{\text{tri}}(g, g', \alpha g', \beta \alpha g') > 0$. Étant donné un tel élément $[(g, g', \alpha g', \beta \alpha g')] \in \Gamma \backslash G^4$, la représentation $(\varepsilon/R, -R)$ -presque parfaite correspondante est donnée par $(a, b) \mapsto (\alpha, \beta)$ modulo conjugaison par Γ .

Nous appellerons *couple triconnecté dans $\Gamma \backslash G$* tout élément de

$$(6.5) \quad \text{Triconn} := \{[(x, y_0, y_1, y_2)] \in \Gamma \backslash G^4 \mid y_1, y_2 \in \Gamma y_0\},$$

où Γ agit diagonalement sur G^4 par multiplication à gauche. Pour $\varepsilon, R > 0$, on note $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ l’ensemble des couples triconnectés $[(x, y_0, y_1, y_2)] \in \text{Triconn}$ tels que $W_{\varepsilon, \pm R}^{\text{tri}}(x, y_0, y_1, y_2) > 0$. Notons $\mathcal{A}_{\varepsilon, \pm R}$ l’ensemble des classes de conjugaison dans Γ d’éléments $\rho(a)$ où $\rho: \pi_1(\Pi^\pm) \rightarrow \Gamma$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaite; c’est un ensemble fini d’après le corollaire 5.13.(2). Pour tout $\alpha \in \Gamma$, l’ensemble

$$(6.6) \quad \text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha := \{[(x, y_0, y_1, y_2)] \in \text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R} \mid y_0 = \alpha^{\pm 1} y_1\}$$

ne dépend que de la classe de conjugaison $[\alpha]$ de α dans Γ . L’ensemble $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ est l’union disjointe de ses sous-ensembles $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ où $[\alpha]$ parcourt $\mathcal{A}_{\varepsilon, \pm R}$. Par définition, tout élément de $\text{Triconn}_{\varepsilon, R}^\alpha$ (resp. $\text{Triconn}_{\varepsilon, -R}^\alpha$) est de la forme $[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')]$ (resp.

$[(g, g', \alpha g', \beta \alpha g')]$ où $(g, g') \in G^2$ et $\beta \in \Gamma$, et définit une représentation $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaite (resp. $(\varepsilon/R, -R)$ -presque parfaite) de $\pi_1(\Pi)$ par $(a, b) \mapsto (\alpha, \beta)$ modulo conjugaison au but par Γ .

D'après la remarque 5.8, l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -parfaites est invariant par la symétrie naturelle d'ordre trois sym de $\text{Hom}(\pi_1(\Pi), G)$ donnée par $\text{sym}(\rho)(a, b, c) = (\rho(b), \rho(c), \rho(a))$. Cette symétrie induit une symétrie d'ordre trois de l'ensemble des classes de conjugaison modulo Γ de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -parfaites, qui elle-même se relève en une symétrie d'ordre trois de $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$, que nous noterons encore sym et qui est donnée par

$$(6.7) \quad \begin{cases} \text{sym}(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g') = (x, x', \beta^{-1}x', \alpha^{-1}\beta^{-1}x') & \text{sur } \text{Triconn}_{\varepsilon, R}, \\ \text{sym}(g, g', \alpha g', \beta \alpha g') = (y, y', \beta y', \alpha^{-1}y') & \text{sur } \text{Triconn}_{\varepsilon, -R}, \end{cases}$$

où $(x, x') := (\text{rot}(g), \beta \circ \text{rot}^2(g'))$ et $(y, y') := (\text{rot}^2(g), \alpha \circ \text{rot}(g'))$.

L'observation suivante est une conséquence directe des lemmes 6.3 et 5.12 et des définitions 5.6 et 5.7.

Remarque 6.4. — Pour tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon, \pm R}$, l'adhérence de $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ dans $\Gamma \backslash G^4$ est compacte; ainsi, l'adhérence de $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ dans $\Gamma \backslash G^4$, c'est-à-dire l'image dans $\Gamma \backslash G^4$ du support de $W_{\varepsilon, \pm R}^{\text{tri}}$, est compacte.

On définit une mesure $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ sur $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ de la manière suivante. La mesure de Haar de G induit une mesure naturelle sur $\Gamma \backslash G^2$. L'espace Triconn de (6.5) se projette, en considérant les deux premières coordonnées, sur $\Gamma \backslash G^2$. Soit λ_{Triconn} la mesure sur Triconn obtenue en tirant en arrière la mesure de $\Gamma \backslash G^2$. On définit, sur $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$, la mesure

$$(6.8) \quad \mu_{\varepsilon, \pm R} := W_{\varepsilon, \pm R}^{\text{tri}} \lambda_{\text{Triconn}}$$

(cf. (6.4)). Elle est finie d'après la remarque 6.4. On vérifie également qu'elle est invariante par la symétrie d'ordre trois sym de $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ de (6.7).

Soient Π^+ et Π^- deux pantalons de groupes fondamentaux

$$\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a^\pm, b^\pm, c^\pm \mid c^\pm b^\pm a^\pm = 1 \rangle.$$

Pour $\varepsilon' > 0$, on dit que deux éléments $T^+ \in \text{Triconn}_{\varepsilon, R}$ et $T^- \in \text{Triconn}_{\varepsilon, -R}$ sont $(\varepsilon', 1)$ -bien recollés s'ils définissent des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans G qui, après conjugaison par Γ , sont bien recollées le long de a^+ et a^- via des données géométriques associées à T^+ et T^- , au sens de la définition 5.17.

Notre but est désormais d'expliquer le résultat suivant.

PROPOSITION 6.5. — *En supposant la condition (R) vérifiée, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε , les mesures sym-invariantes $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ sur $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ de (6.8) satisfont la conclusion de la proposition 3.4 : on a $\mu_{\varepsilon, R}(\text{Triconn}_{\varepsilon, R}) = \mu_{\varepsilon, -R}(\text{Triconn}_{\varepsilon, -R})$ et pour tout sous-ensemble mesurable A de $\text{Triconn}_{\varepsilon, R}$, l'ensemble des éléments de $\text{Triconn}_{\varepsilon, -R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés à au moins un élément de A est de $(\mu_{\varepsilon, -R})$ -mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon, R}(A)$.*

6.5. Reformulation en termes de distance de Lévy–Prokhorov

Soient $\varepsilon, R > 0$. Comme au paragraphe 6.4 précédent, notons $\mathcal{A}_{\varepsilon, R}$ l'ensemble fini des classes de conjugaison dans Γ d'éléments $\rho(a)$ où $\rho: \pi_1(\Pi^\pm) \rightarrow \Gamma$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaite. Supposons R assez grand par rapport à ε de sorte que pour tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon, R}$, l'élément $\alpha \in \Gamma \subset G$ soit proximal dans G/P_τ (lemme 5.12), de points fixes attractif α^\oplus et répulsif α^\ominus . Comme au paragraphe 5.5, notons L_α l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty) = (\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$; c'est une classe à gauche du centralisateur $Z_G(\alpha_0)$ de $\alpha_0 = \exp(\mathfrak{h})$ dans G (remarque 5.15). Le centralisateur $Z_\Gamma(\alpha)$ de α dans Γ agit sur L_α par multiplication à gauche. Dans ce paragraphe, nous reformulons la proposition 6.5 en termes de mesures sur $Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha$.

Notons que, comme Γ est un réseau cocompact de G et \mathfrak{h} est régulier (cadre 2.13), le quotient $Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha$ est compact (cf. WOLF, 1962, Th. 4.2).

Exemple 6.6. — Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (cf. exemples 2.20 et 5.10). Pour Γ sans torsion et $\alpha \in \Gamma$ proximal dans G/P_τ , les groupes $Z_G(\alpha)$ et $Z_\Gamma(\alpha)$ sont isomorphes respectivement à $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ et \mathbb{Z}^{n-1} , et $Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha \simeq Z_\Gamma(\alpha) \backslash Z_G(\alpha) \simeq \mathbb{T}^{2(n-1)}$ est un tore compact.

La projection naturelle $Z_\Gamma(\alpha) \backslash G^4 \rightarrow \Gamma \backslash G^4$ étant une bijection en restriction à l'ensemble $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ de (6.6), on peut voir $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ comme un sous-ensemble de $Z_\Gamma(\alpha) \backslash G^4$ plutôt que de $\Gamma \backslash G^4$. D'après le lemme 5.16.(2), si R est assez grand par rapport à ε , alors pour tout $[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')] \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon, R}^\alpha$ (resp. pour tout $[(g, g', \alpha g', \beta \alpha g')] \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon, -R}^\alpha$), l'élément g appartient au domaine de définition \mathcal{U}_α (resp. $\mathcal{U}_{\alpha^{-1}}$) de l'application « pied » $\Psi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow L_\alpha$ (resp. $\Psi_{\alpha^{-1}}: \mathcal{U}_{\alpha^{-1}} \rightarrow L_{\alpha^{-1}}$), cf. définition 5.14. L'application $\Psi_{\alpha^{\pm 1}}$ est équivariante par rapport aux actions de $Z_\Gamma(\alpha) = Z_\Gamma(\alpha^{-1})$ par multiplication à gauche, donc induit une application

$$(6.9) \quad \Psi_{\alpha^{\pm 1}}^{\mathrm{tri}}: \mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha \longrightarrow Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_{\alpha^{\pm 1}}$$

donnée par $\Psi_\alpha^{\mathrm{tri}}[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')] = [\Psi_\alpha(g)]$ (resp. $\Psi_{\alpha^{-1}}^{\mathrm{tri}}[(g, g', \alpha g', \beta \alpha g')] = [\Psi_{\alpha^{-1}}(g)]$). Soit $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ la mesure finie sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ de (6.8). Elle se restreint en une mesure finie $\mu_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$, qui induit sur $Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_{\alpha^{\pm 1}}$ une mesure finie

$$(6.10) \quad m_{\varepsilon, \pm R}^\alpha := (\Psi_{\alpha^{\pm 1}}^{\mathrm{tri}})_* \mu_{\varepsilon, \pm R}^\alpha.$$

Rappelons (cf. paragraphe 6.4) que $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ est l'union disjointe de ses sous-ensembles $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ où $[\alpha]$ parcourt l'ensemble fini $\mathcal{A}_{\varepsilon, \pm R}$. On a les applications suivantes entre espaces mesurés, où $m_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ est le poussé en avant de $\mu_{\varepsilon, \pm R}^\alpha$ par $\Psi_{\alpha^{\pm 1}}^{\mathrm{tri}}$:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}, \mu_{\varepsilon, \pm R}) &= \bigsqcup_{[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon, \pm R}} (\mathrm{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}^\alpha, \mu_{\varepsilon, \pm R}^\alpha) \\ &\quad \downarrow \Psi_{\alpha^{\pm 1}}^{\mathrm{tri}} \\ &= (Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha, m_{\varepsilon, \pm R}^\alpha). \end{aligned}$$

Rappelons (cf. paragraphe 5.5) que le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du paragraphe 5.1.3 préserve L_α , alors que l'involution inv échange L_α et $L_{\alpha^{-1}}$. Ainsi, $Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_{\alpha^{-1}} = (\varphi_1 \circ \mathrm{inv})(Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha)$.

La proposition 6.5 se reformule en termes de proximité des mesures $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ et $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \setminus L_\alpha$ pour la distance suivante, dite de *Lévy-Prokhorov*.

Définition 6.7. — Soient μ_1, μ_2 deux mesures finies sur un espace métrique X , telles que $\mu_1(X) = \mu_2(X)$. On pose

$$d_{LP}(\mu_1, \mu_2) := \inf \{ \delta \geq 0 \mid \mu_1(A) \leq \mu_2(\mathcal{V}_\delta(A)) \quad \forall A \subset X \},$$

où $\mathcal{V}_\delta(A)$ désigne le δ -voisinage uniforme de A dans X .

Ceci définit une distance d_{LP} sur les mesures sur X . (Pour vérifier la symétrie, notons que si $d_{LP}(\mu_1, \mu_2) \leq \delta$, alors pour tout $A \subset X$ on a

$$\mu_2(A) \leq \mu_2(X) - \mu_2(\mathcal{U}_\delta(X \setminus \mathcal{U}_\delta(A))) \leq \mu_1(X) - \mu_1(X \setminus \mathcal{U}_\delta(A)) = \mu_1(\mathcal{U}_\delta(A)),$$

d'où $d_{LP}(\mu_2, \mu_1) \leq \delta$.) Dans notre cas X sera $Z_\Gamma(\alpha) \setminus L_\alpha$ muni de la distance induite par d_G par restriction et passage au quotient, où $\alpha \in \Gamma$ est proximal dans G/P_τ .

La proposition 6.5 se reformule ainsi.

PROPOSITION 6.8. — *En supposant la condition (R) vérifiée, il existe $C > 0$ avec la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, les mesures finies $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ et $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \setminus L_\alpha$ ont même masse totale et l'on a*

$$(6.11) \quad d_{LP}(m_{\varepsilon,R}^\alpha, (\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha) \leq C\varepsilon/R.$$

Démonstration de la proposition 6.5 en admettant la proposition 6.8. — Toute mesure a même masse totale que ses poussés en avant. On a donc

$$\begin{cases} \mu_{\varepsilon,R}(\text{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \sum_{[\alpha]} \mu_{\varepsilon,R}^\alpha(\text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha) = \sum_{[\alpha]} m_{\varepsilon,R}^\alpha(Z_G(\alpha) \setminus L_\alpha), \\ \mu_{\varepsilon,-R}(\text{Triconn}_{\varepsilon,-R}) = \sum_{[\alpha]} m_{\varepsilon,-R}^\alpha(Z_G(\alpha) \setminus L_{\alpha^{-1}}) = \sum_{[\alpha]} ((\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha)(Z_G(\alpha) \setminus L_\alpha). \end{cases}$$

Ainsi, le fait que les mesures $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ et $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \setminus L_\alpha$ aient même masse totale comme dans la proposition 6.8 implique l'égalité $\mu_{\varepsilon,R}(\text{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,-R}(\text{Triconn}_{\varepsilon,-R})$ de la proposition 6.5.

Soit $C > 0$ la constante de la proposition 6.8. Pour tout sous-ensemble mesurable A de $\text{Triconn}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\text{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés à au moins un élément de A est l'union disjointe sur $\alpha \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$ des ensembles

$$B_\alpha := (\varphi_1 \circ \text{inv} \circ \Psi_{\alpha^{-1}}^{\text{tri}})^{-1}(\mathcal{U}_{C\varepsilon/R}(\Psi_\alpha^{\text{tri}}(A \cap \text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha))) \subset \text{Triconn}_{\varepsilon,-R}^\alpha.$$

Par définition (6.10) de $m_{\varepsilon,-R}^\alpha$, on a

$$\mu_{\varepsilon,-R}^\alpha(B_\alpha) = ((\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha)(\mathcal{U}_{C\varepsilon/R}(\Psi_\alpha^{\text{tri}}(A \cap \text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha)))$$

qui, par la proposition 6.8, est supérieur ou égal à $m_{\varepsilon,R}^\alpha(\Psi_\alpha^{\text{tri}}(A \cap \text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha))$. Par définition (6.10) de $m_{\varepsilon,R}^\alpha$, on a donc $\mu_{\varepsilon,-R}^\alpha(B_\alpha) \geq \mu_{\varepsilon,R}^\alpha(A \cap \text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha)$. Ainsi, la $(\mu_{\varepsilon,-R})$ -mesure de l'ensemble des éléments de $\text{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés à au moins un élément de A est égale à $\sum_{[\alpha]} \mu_{\varepsilon,-R}^\alpha(B_\alpha) \geq \sum_{[\alpha]} \mu_{\varepsilon,R}^\alpha(A \cap \text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha) = \mu_{\varepsilon,R}(A)$. \square

6.6. Utilisation de la condition de retournement (R)

Nous avons vu au paragraphe 6.5 précédent que pour démontrer la proposition 3.4, il suffit de démontrer la proposition 6.8. Expliquons à présent comment la condition (R) du paragraphe 2.3.2 intervient dans la démonstration de la proposition 6.8.

La condition (R) affirme que $Z_G(\mathfrak{h})$ contient, dans sa composante neutre, un élément central j d'ordre deux tel qui échange $\tau(0, \infty, -1)$ et $\tau(0, \infty, 1)$. Notons $\text{refl}: G \rightarrow G$ la multiplication à droite par j ; elle commute à inv . Posons

$$(6.12) \quad I := \text{inv} \circ \text{refl}: G \longrightarrow G.$$

Si $g \in G$ correspond au triangle $g \cdot \tau(0, \infty, -1)$ de G/P_τ , alors $\text{refl}(g)$ correspond au triangle $g \cdot \tau(0, \infty, 1)$ de G/P_τ et $I(g)$ au triangle $g \cdot \tau(\infty, 0, -1)$, cf. figure 17. (Par exemple, si τ est la restriction à $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ d'un plongement $\tau_{\mathbb{C}}: \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow G$ comme à la remarque 2.16.(1), alors refl et I correspondent à la multiplication à droite respectivement par $\tau_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right)$ et $\tau_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right)$.) Notons que rot et I engendrent un

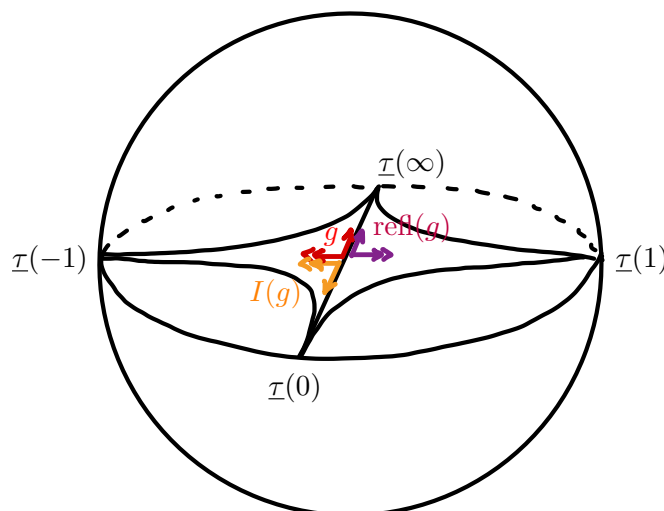


FIGURE 17. Les transformations refl et I de $G = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, vu comme l'espace des τ -triangles de $G/P_\tau = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

groupe de transformations de G qui est relativement compact, car il préserve l'ensemble $\{\tau(\infty), \tau(0), \tau(-1)\}$ et le sous-groupe Z^τ de G qui fixe ces trois points est compact. Quitte à remplacer la distance riemannienne G -invariante à gauche d_G par sa moyenne par le groupe engendré par rot et I , on supposera désormais que d_G est invariante par rot et par I . Pour tout élément proximal $\alpha \in G$, les transformations refl et I de G préservent l'ensemble L_α , et induisent des transformations de $\Lambda \backslash L_\alpha$ pour tout sous-groupe Λ de $Z_G(\alpha)$.

6.6.1. Première utilisation de la condition (R). — La condition (R) permet tout d'abord d'oublier les mesures $m_{\varepsilon, -R}^\alpha$ pour ne plus travailler qu'avec $m_{\varepsilon, R}^\alpha$.

PROPOSITION 6.9. — *En supposant la condition (R) vérifiée, soient $\varepsilon, R > 0$.*

1. Une représentation $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ est (ε, R) -presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ si et seulement si ρ est $(\varepsilon, -R)$ -presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), I(g), I(g'))$.
2. Pour tout élément proximal $\alpha \in \Gamma$, on a $m_{\varepsilon, -R}^\alpha = I_* m_{\varepsilon, R}^\alpha$. En particulier, $m_{\varepsilon, R}^\alpha$ et $m_{\varepsilon, -R}^\alpha$ ont même masse totale.

Démonstration. — (1) Comme d_G est invariante par rot et par $I = \text{refl} \circ \text{inv}$, l'application cloche $\chi_\varepsilon: G \rightarrow \mathbb{R}^+$ du paragraphe 6.2 satisfait, pour tous $x, g \in G$,

$$\chi_\varepsilon(I(x)^{-1}I(g)) = \chi_\varepsilon(x^{-1}g) \quad \text{et} \quad \chi_\varepsilon(\text{rot}(x)^{-1}\text{rot}(g)) = \chi_\varepsilon(x^{-1}g).$$

De plus, on a $\varphi_R \circ \text{inv} = \text{inv} \circ \varphi_{-R}$ pour tout $R \in \mathbb{R}$ et $I \circ \text{rot} = \text{rot}^2 \circ I$. En utilisant ces deux remarques, on vérifie aisément, grâce à un simple changement de variable, que

$$(6.13) \quad W_{\varepsilon, R}^{\text{tri}} \circ I^{\text{tri}} = W_{\varepsilon, -R}^{\text{tri}}$$

où $I^{\text{tri}}: \text{Triconn} \rightarrow \text{Triconn}$ est l'involution donnée par

$$(6.14) \quad I^{\text{tri}}(x, y_0, y_1, y_2) = (I(x), \text{rot} \circ I(y_1), \text{rot} \circ I(y_0), \text{rot} \circ I(y_2)).$$

On conclut en appliquant le lemme 6.3.

(2) D'après (6.13), on a $I_*^{\text{tri}} \mu_{\varepsilon, R}^\alpha = \mu_{\varepsilon, -R}^{\alpha^{-1}}$. D'autre part, on a $I(L_\alpha) = L_{\alpha^{-1}}$ et, comme Ψ_α est une projection orthogonale (définition 5.14) pour la métrique riemannienne associée à d_G , qui est par hypothèse invariante par I , on a $I(\mathcal{U}_\alpha) = \mathcal{U}_{\alpha^{-1}}$ et $I \circ \Psi_\alpha = \Psi_{\alpha^{-1}} \circ I: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow L_{\alpha^{-1}}$. On en déduit $I \circ \Psi_\alpha^{\text{tri}} = \Psi_{\alpha^{-1}}^{\text{tri}} \circ I^{\text{tri}}$, puis

$$m_{\varepsilon, -R}^\alpha = (\Psi_{\alpha^{-1}}^{\text{tri}})_* \mu_{\varepsilon, -R}^\alpha = (\Psi_{\alpha^{-1}}^{\text{tri}})_* I_*^{\text{tri}} \mu_{\varepsilon, R}^\alpha = I_*(\Psi_\alpha^{\text{tri}})_* \mu_{\varepsilon, R}^\alpha = I_* m_{\varepsilon, R}^\alpha. \quad \square$$

Pour démontrer la proposition 6.8, il suffit donc de montrer que la mesure $m_{\varepsilon, R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \setminus L_\alpha$ est proche, pour la distance de Lévy–Prokhorov, de son poussé en avant par $\varphi_1 \circ \text{inv} \circ I = \varphi_1 \circ \text{refl}$.

6.6.2. Seconde utilisation de la condition (R). — La condition (R) permet également d'obtenir une action d'un certain tore compact \mathbb{S}_α , ce qui est utile de manière générale pour contrôler la distance de Lévy–Prokhorov (cf. lemme 6.15 ci-dessous).

LEMME 6.10. — *Il existe un entier $N \geq 1$, ne dépendant que de G , avec la propriété suivante : en supposant la condition (R) vérifiée, pour tout réseau cocompact irréductible sans torsion Γ de G et tout élément proximal $\alpha \in \Gamma$, il existe un sous-groupe Λ_α d'indice $\leq N$ de $Z_\Gamma(\alpha)$ et un tore compact \mathbb{S}_α de $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ tels que l'application $\text{refl}: \Lambda_\alpha \setminus L_\alpha \rightarrow \Lambda_\alpha \setminus L_\alpha$ corresponde à la multiplication à gauche par un élément de \mathbb{S}_α .*

Démonstration. — Soient Γ un réseau cocompact irréductible sans torsion de G et $\alpha \in \Gamma$ un élément proximal. Comme à la remarque 5.15, soit $g_\alpha \in G$ envoyant $(\tau(0), \tau(\infty))$ sur $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. On a $L_\alpha = g_\alpha Z_G(\mathbf{h})$ et $Z_G(\alpha) \subset g_\alpha Z_G(\mathbf{h})g_\alpha^{-1}$, où $Z_G(\mathbf{h}) = AZ_K(\mathbf{h})$. Comme Γ est sans torsion, la projection de $Z_\Gamma(\alpha)$ sur $g_\alpha A g_\alpha^{-1}$ est injective, donc $Z_\Gamma(\alpha)$ est abélien. La projection de $Z_\Gamma(\alpha)$ sur $g_\alpha Z_K(\mathbf{h})g_\alpha^{-1}$ est contenue dans un sous-groupe abélien maximal \mathbb{S}'_α de $g_\alpha Z_K(\mathbf{h})g_\alpha^{-1}$. Or, il existe $N \geq 1$, ne dépendant que de G , tel que \mathbb{S}'_α admette un sous-groupe d'indice $\leq N$ qui est un tore maximal \mathbb{S}_α de $g_\alpha Z_K(\mathbf{h})g_\alpha^{-1}$ (cf.

MILNOR, 1964). On note Λ_α l'intersection de $Z_\Gamma(\alpha)$ avec l'image réciproque de \mathbb{S}_α par la projection : c'est un sous-groupe d'indice $\leq N$ de $Z_\Gamma(\alpha)$. Par construction, $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ contient le tore maximal \mathbb{S}_α de $g_\alpha Z_K(\mathbf{h})g_\alpha^{-1}$.

L'application $\text{refl} : \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha \rightarrow \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ correspond à la multiplication à droite par $j \in G$, qui appartient par définition (cf. condition (R), paragraphe 2.3.2) au centre de $Z_G(\mathbf{h})_0$, et même (cf. paragraphe 2.3.4) au centre de $Z_K(\mathbf{h})_0$. Elle correspond donc à l'action de $j_\alpha := g_\alpha j g_\alpha^{-1}$ sur L_α par multiplication à gauche. L'élément j_α appartient au centre de $g_\alpha Z_K(\mathbf{h})_0 g_\alpha^{-1}$, donc est contenu dans le tore maximal \mathbb{S}_α (cf. KNAPP, 2002, Cor. IV.4.47). \square

La distance de Lévy–Prokhorov se comporte bien par revêtement fini de degré borné (cf. KAHN, LABOURIE et MOZES, arXiv 2018, § 18), ce qui implique le fait suivant.

Remarque 6.11. — Pour que les mesures finies $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ et $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha$ satisfassent la conclusion de la proposition 6.8, il suffit que leurs tirées en arrière sur $\Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ (où Λ_α est donné par le lemme 6.10) la satisfassent.

Dans la suite, on travaille avec Λ_α plutôt que $Z_\Gamma(\alpha)$ afin de pouvoir utiliser le tore \mathbb{S}_α du lemme 6.10. Le lecteur pourra penser en première approximation $\Lambda_\alpha = Z_\Gamma(\alpha)$, motivé notamment par l'exemple suivant.

Exemple 6.12. — Soient $G = \text{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (cf. exemples 2.20 et 5.10). Pour Γ sans torsion et $\alpha \in \Gamma$ proximal, on peut prendre $\Lambda_\alpha = Z_\Gamma(\alpha)$ et $\mathbb{S}_\alpha = g_\alpha Z_K(\mathbf{h})g_\alpha$ où $g_\alpha \in G$ envoie $(\tau(0), \tau(\infty))$ sur $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. On a $C_\alpha^\Gamma := Z_G(\Lambda_\alpha)_0 = Z_G(\alpha)$ et $C_\alpha^\Gamma / (C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha) \simeq \mathbb{T}^{2(n-1)}$ (cf. exemple 6.6).

6.6.3. Stratégie de démonstration de la proposition 6.8. — Le groupe $C_\alpha^\Gamma := Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ agit sur $X := \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ par multiplication à gauche. Cette action factorise en une action libre du quotient $C_\alpha^\Gamma / (C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ de C_α^Γ par son sous-groupe discret distingué $C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha$. Pour démontrer la proposition 6.8, l'idée est de :

1. trouver une mesure finie $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha$, invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, telle que $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ soit absolument continue par rapport à $n_{\varepsilon,R}^\alpha$, de dérivée de Radon–Nikodym proche de 1 : c'est l'objet de la proposition 6.13, qui utilise le mélange (fait 3.5) via le lemme 6.1 ; en tirant $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ en arrière, on obtient une mesure finie sur $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$, invariante par $C_\alpha^\Gamma = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$, par rapport à laquelle le tiré en arrière de $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ est absolument continu, de dérivée de Radon–Nikodym proche de 1 ;
2. observer que pour un bon sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset C_\alpha^\Gamma$ contenant α , l'élément φ_1 agit sur X « presque » comme α_1 (proposition 6.16) ; considérer alors le tore compact \mathbb{T}_α de $C_\alpha^\Gamma / (C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ engendré par les images de $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et du tore \mathbb{S}_α du lemme 6.10, et montrer en utilisant (1) et un argument général (lemme 6.15) que la mesure $m_{\varepsilon,R}$ tirée en arrière sur $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ est proche pour la distance de Lévy–Prokhorov de sa moyenne par \mathbb{T}_α ; en déduire, en utilisant la remarque 6.11, que $m_{\varepsilon,R}$ est proche pour la distance de Lévy–Prokhorov de la mesure $(\varphi_1 \circ \text{refl})_* m_{\varepsilon,R}^\alpha$, qui est égale à $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ d'après la proposition 6.9.

6.7. Mesures proches au sens de la dérivée de Radon–Nikodym

La première étape de la démonstration de la proposition 6.8 consiste à établir le résultat suivant, qui utilise le mélange (fait 3.5) via le lemme 6.1.

PROPOSITION 6.13. — *En supposant la condition (R) vérifiée, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, il existe une mesure finie $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \setminus L_\alpha$, invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, telle que $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ soit absolument continue par rapport à $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ et que sa dérivée de Radon–Nikodym vérifie*

$$\left\| \frac{dm_{\varepsilon,R}^\alpha}{dn_{\varepsilon,R}^\alpha} - 1 \right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{R^2}.$$

La proposition 6.13 implique que, sous la condition (R), les mesures $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ et $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ sont absolument continues l’une par rapport à l’autre, avec une dérivée de Radon–Nikodym proche de 1. En effet, d’après la proposition 6.9 on a $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha = (\varphi_1 \circ \text{refl})_* m_{\varepsilon,R}^\alpha$. En raisonnant comme à la fin de la démonstration du lemme 6.10, on voit que l’action de $\varphi_1 \circ \text{refl}$ sur $Z_\Gamma(\alpha) \setminus L_\alpha$ correspond à la multiplication à gauche par un élément de $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$. La mesure $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ est donc elle aussi absolument continue par rapport à $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ et sa dérivée de Radon–Nikodym vérifie $\|d((\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,-R}^\alpha)/dn_{\varepsilon,R}^\alpha - 1\|_\infty \leq \varepsilon/R^2$. Pour $\varepsilon/R^2 \leq 1/2$, on en déduit que $(\varphi_1 \circ \text{refl})_* m_{\varepsilon,R}^\alpha$ est absolument continue par rapport à $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ et que

$$\left\| \frac{d((\varphi_1 \circ \text{refl})_* m_{\varepsilon,R}^\alpha)}{dm_{\varepsilon,R}^\alpha} - 1 \right\|_\infty \leq \frac{4\varepsilon}{R^2}.$$

Afin de construire une mesure $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ vérifiant la conclusion de la proposition 6.13, pour tous $\varepsilon, R > 0$, on définit une fonction $W_{\varepsilon,R}^{\text{bi}}: G^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$W_{\varepsilon,R}^{\text{bi}}(x, y_0, y_1) = W_{\varepsilon,R}(x, y_0) W_{\varepsilon,R}(\text{rot}^2(x), \text{rot}(y_1)),$$

où $x, y_0, y_1 \in G$. Elle est invariante par l’action diagonale de G par multiplication à gauche. On appelle *couple biconnecté dans $\Gamma \setminus G$* tout élément de

$$\text{Biconn} := \{[(x, y_0, y_1)] \in \Gamma \setminus G^3 \mid y_1 \in \Gamma y_0\},$$

où Γ agit diagonalement sur G^3 par multiplication à gauche. Pour $\varepsilon, R > 0$ et $\alpha \in \Gamma$, on pose

$$\text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha := \{[(x, y_0, y_1)] \in \text{Biconn} \mid W_{\varepsilon,R}^{\text{bi}}(x, y_0, y_1) > 0 \text{ et } y_1 = \alpha^{-1}y_0\}.$$

Comme pour les couples triconnectés, on peut voir $\text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha$ comme un sous-ensemble de $Z_\Gamma(\alpha) \setminus G^3$. En particulier, $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$ agit sur $\text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha$ par multiplication à gauche. On a une projection naturelle $\pi: \text{Triconn} \rightarrow \text{Biconn}$, qui envoie $\text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $\text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha$ de manière $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$ -équivariante. Pour R assez grand par rapport à ε , l’application « pied » $\Psi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow L_\alpha$ de la définition 5.14 induit (par analogie avec Ψ_α^{tri} , cf. (6.9))

une application $\Psi_\alpha^{\text{bi}}: \text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha \rightarrow Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha$ qui à $[(g, g', \alpha^{-1}g')]$ associe $\Psi_\alpha^\Gamma([g])$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Triconn}_{\varepsilon,R}^\alpha & \xrightarrow{\pi} & \text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha & \xrightarrow{\Psi_\alpha^{\text{bi}}} & Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha \\ & & \searrow \Psi_\alpha^{\text{tri}} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

Démonstration de la proposition 6.13. — Comme Triconn, l'espace Biconn se projette, en considérant les deux premières coordonnées, sur $\Gamma \backslash G^2$. Soit λ_{Biconn} la mesure sur Biconn obtenue en tirant en arrière la mesure de $\Gamma \backslash G^2$ induite par la mesure de Haar de G . On définit, sur $\text{Biconn}_{\varepsilon,R}$, la mesure $\nu_{\varepsilon,R} := W_{\varepsilon,R}^{\text{bi}} \lambda_{\text{Biconn}}$. Soit $\nu_{\varepsilon,R}^\alpha$ sa restriction à $\text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha$ pour $\alpha \in \Gamma$. Montrons que la mesure $n_{\varepsilon,R}^\alpha := (\Psi_\alpha^{\text{bi}})_* \nu_{\varepsilon,R}^\alpha$ convient. Comme la fonction $W_{\varepsilon,R}^{\text{bi}}: G^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est invariante par l'action diagonale de G , la mesure $\nu_{\varepsilon,R}^\alpha$ est invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, donc $n_{\varepsilon,R}^\alpha = (\Psi_\alpha^{\text{bi}})_* \nu_{\varepsilon,R}^\alpha$ aussi par équivariance de π . Soit $f_{\varepsilon,R}^\alpha: \text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction lisse donnée par

$$f_{\varepsilon,R}^\alpha([g, g', \alpha^{-1}g']) = w_{\varepsilon,R}([\text{rot}(g)], [\text{rot}^2(g')]) = \sum_{\beta \in \Gamma} W_{\varepsilon,R}(\text{rot}(g), \text{rot}^2 \circ \beta(g'))$$

(cf. (6.2)). On a $\pi_* \mu_{\varepsilon,R}^\alpha = f_{\varepsilon,R}^\alpha \nu_{\varepsilon,R}^\alpha$, et pour R assez grand par rapport à ε on a $\|f_{\varepsilon,R}^\alpha - 1\|_\infty \leq \varepsilon/R^2$ par le lemme 6.1. La mesure $m_{\varepsilon,R}^\alpha = (\Psi_\alpha^{\text{bi}})_* \pi_* \mu_{\varepsilon,R}^\alpha$ est absolument continue par rapport à $n_{\varepsilon,R}^\alpha = (\Psi_\alpha^{\text{bi}})_* \nu_{\varepsilon,R}^\alpha$, et sa dérivée de Radon–Nikodym $h_{\varepsilon,R}^\alpha = \frac{dm_{\varepsilon,R}^\alpha}{dn_{\varepsilon,R}^\alpha}$ vérifie $\|h_{\varepsilon,R}^\alpha - 1\|_\infty \leq \|f_{\varepsilon,R}^\alpha - 1\|_\infty$. En effet, pour toute fonction $\psi \in L^1(Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha} \psi (h_{\varepsilon,R}^\alpha - 1) dn_{\varepsilon,R}^\alpha \right| &= \left| \int_{\text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha} (\psi \circ \Psi_\alpha^{\text{bi}}) (f_{\varepsilon,R}^\alpha - 1) d\nu_{\varepsilon,R}^\alpha \right| \\ &\leq \|f_{\varepsilon,R}^\alpha - 1\|_\infty \left| \int_{\text{Biconn}_{\varepsilon,R}^\alpha} (\psi \circ \Psi_\alpha^{\text{bi}}) d\nu_{\varepsilon,R}^\alpha \right| = \|f_{\varepsilon,R}^\alpha - 1\|_\infty \left| \int_{Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha} \psi dn_{\varepsilon,R}^\alpha \right|. \quad \square \end{aligned}$$

6.8. Mesures proches au sens de la distance de Lévy–Prokhorov

On souhaite à présent déduire la proposition 6.8 de la proposition 6.13. Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer Γ sans torsion (lemme de Selberg).

6.8.1. Premier ingrédient. — On utilise les observations générales suivantes sur la distance de Lévy–Prokhorov. La démonstration du lemme 6.15 est esquissée au paragraphe 6.9 ci-dessous.

Remarques 6.14. — Soient (X, d) un espace métrique, μ, ν deux mesures finies sur X et $f, g: X \rightarrow X$ deux applications mesurables.

1. Si f est une isométrie bijective de (X, d) , alors $d_{LP}(f_*\mu, f_*\nu) = d_{LP}(\mu, \nu)$.
2. En général, $d_{LP}(f_*\mu, g_*\mu) \leq \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. En effet, supposons $\delta := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) < +\infty$. Pour tout $A \subset X$ et tout $x \in X$, si $f(x) \in A$, alors $g(x) \in \mathcal{U}_\delta(A)$, d'où $(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)) \leq \mu(g^{-1}(\mathcal{U}_\delta(A))) = (g_*\mu)(\mathcal{U}_\delta(A))$.

LEMME 6.15. — Pour tout $k \geq 1$, il existe une constante $C_k > 0$ avec la propriété suivante : pour toute variété riemannienne X munie d'une action par isométries d'un tore compact \mathbb{T} de dimension k , préservant une mesure n sur X , pour tout $\delta > 0$ et toute fonction $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, si la moyenne $\bar{h} := \int_{g \in \mathbb{T}} h \circ g \, dg$ de h pour la mesure de probabilité de Haar de \mathbb{T} vérifie $e^{-\delta} \bar{h} \leq h \leq e^{\delta} \bar{h}$, alors

$$d_{LP}(hn, \bar{h}n) \leq \delta \cdot C_k \sup_{x \in X} \text{diam}(\mathbb{T} \cdot x).$$

6.8.2. Second ingrédient. — Pour $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon, R}$, soit Λ_α le sous-groupe d'indice fini de $Z_\Gamma(\alpha)$ du lemme 6.10, et soit $C_\alpha^\Gamma = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$. On utilise le résultat suivant, qui provient d'un raffinement du lemme 5.12, et dont la démonstration est esquissée au paragraphe 6.10 ci-dessous.

PROPOSITION 6.16. — Il existe $C' > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon, R}$, il existe un sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de C_α^Γ tel que $\alpha_{2R} = \alpha$ et $d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) \leq C'(\varepsilon/R + e^{-R})$ pour tous $x \in L_\alpha$ et $t \in [0, 2R]$.

6.8.3. Esquisse de démonstration de la proposition 6.8. — Soient $\varepsilon, R > 0$ et $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon, R}$. On considère le quotient $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ de L_α par Λ_α , muni de la métrique riemannienne induite par celle de G par restriction à L_α et passage au quotient. Le groupe $C_\alpha^\Gamma = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ agit sur X par multiplication à gauche.

Soit $\mathbb{T}_\alpha \subset C_\alpha^\Gamma / (C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ le tore compact engendré par les images dans $C_\alpha^\Gamma / (C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ du tore \mathbb{S}_α du lemme 6.10 et du sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de la proposition 6.16. On vérifie qu'il existe $C'' > 0$, indépendant de ε et R , tel que le diamètre des orbites de \mathbb{T}_α dans $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ est borné par $C''R$ dès que R est assez grand par rapport à ε .

Soit $\hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha$ le tiré en arrière de $m_{\varepsilon, R}^\alpha$ par la projection naturelle $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha \rightarrow Z_\Gamma(\alpha) \backslash L_\alpha$. La proposition 6.13 implique, pour R est assez grand par rapport à ε , l'existence d'une mesure finie $\hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha$ sur $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$, invariante par C_α^Γ , telle que $\hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha = h \hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha$ où $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifie $\|h - 1\|_\infty \leq \varepsilon/R^2$. La moyenne $\bar{h} = \int_{g \in \mathbb{T}_\alpha} h \circ g \, dg$ de h par \mathbb{T}_α vérifie alors $e^{-3\varepsilon/R^2} \bar{h} \leq h \leq e^{3\varepsilon/R^2} \bar{h}$ dès que R assez grand par rapport à ε . Le lemme 6.15 implique

$$(6.15) \quad d_{LP}(\hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha, \bar{h} \hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha) = d_{LP}(h \hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha, \bar{h} \hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha) \leq \frac{3\varepsilon}{R^2} \cdot 8 \sup_{x \in X} \text{diam}(\mathbb{T}_\alpha \cdot x) \leq 24C''\varepsilon/R.$$

Or, d'après la proposition 6.9 on a $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* \hat{m}_{\varepsilon, -R}^\alpha = (\varphi_1 \circ \text{refl})_* \hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha$. D'après le lemme 6.10 la transformation $\text{refl}: X \rightarrow X$ correspond à l'action d'un élément de $\mathbb{S}_\alpha \subset \mathbb{T}_\alpha$, et d'après la proposition 6.16 l'élément $\alpha_1 \in \mathbb{T}_\alpha$ envoie tout $x \in X$ à distance $\leq C'\varepsilon/R$ de $\varphi_1(x)$. Par inégalité triangulaire, on a $d_{LP}(\hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha, (\varphi_1 \circ \text{refl})_* \hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha) \leq d_{LP}(\hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha, \bar{h} \hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha) + d_{LP}(\bar{h} \hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha, (\alpha_1 \circ \text{refl})_* \hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha) + d_{LP}((\alpha_1 \circ \text{refl})_* \hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha, (\varphi_1 \circ \text{refl})_* \hat{m}_{\varepsilon, R}^\alpha)$. Le premier terme de droite est borné par $24C''\varepsilon/R$ d'après (6.15). Le deuxième terme est égal au premier par la remarque 6.14.(1), en utilisant le fait que $\alpha_1 \circ \text{refl} \in \mathbb{T}_\alpha$ agit sur X comme une isométrie et préserve $\bar{h} \hat{n}_{\varepsilon, R}^\alpha$. Le troisième terme est borné par $C'\varepsilon/R$, d'après la remarque 6.14.(2) et le fait que α_1 envoie tout $x \in X$ à distance $\leq C'\varepsilon/R$

de $\varphi_1(x)$. On obtient ainsi $d_{LP}(\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha, (\varphi_1 \circ \text{refl})_* \hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha) \leq (48C''' + C'')\varepsilon/R$. On conclut en utilisant la remarque 6.11.

6.9. Démonstration du lemme 6.15

Nous traitons ici le cas où X est un tore compact \mathbb{T}^ℓ muni de sa mesure de Haar n et \mathbb{T}^k est un sous-tore, pour $1 \leq k \leq \ell$; c'est le cas par exemple si G est un groupe simple complexe. Le cas général utilise les mêmes idées : cf. KAHN, LABOURIE et MOZES ([arXiv 2018](#), § 18).

Comme la distance de Lévy–Prokhorov entre deux mesures est invariante par multiplication des deux mesures par une même constante, on peut supposer que n est une mesure de probabilité. On raisonne en trois étapes :

1. pour $k = \ell = 1$, si $\bar{h} \leq e^{2\delta} h$, alors $d_{LP}(hn, \bar{h}n) \leq \delta$;
2. pour $k = 1$ et $\ell \geq 1$ quelconque, si $\bar{h} \leq e^{2\delta} h$, alors $d_{LP}(hn, \bar{h}n) \leq \delta$;
3. pour $1 \leq k \leq \ell$ quelconques, si $e^{-2\delta} \bar{h} \leq h \leq e^{2\delta} \bar{h}$, alors $d_{LP}(hn, \bar{h}n) \leq (2^k - 1) \delta$.

• Démonstration de (1) : Supposons $\bar{f} \leq e^{2\delta} f$ et soit $A \subset X = \mathbb{T}^1$. Si $\mathcal{U}_\delta(A) = \mathbb{T}^1$, on a

$$(hn)(\mathcal{U}_\delta(A)) = \int_{\mathbb{T}^1} h dn = \bar{h} \geq \bar{h} n(A).$$

Si $\mathcal{U}_\delta(A) \subsetneq \mathbb{T}^1$, alors $n(A) \leq n(\mathcal{U}_\delta(A)) - 2\delta \leq (1 - 2\delta) n(\mathcal{U}_\delta(A))$ car $X = \mathbb{T}^1$, d'où

$$(hn)(\mathcal{U}_\delta(A)) \geq e^{-2\delta} \bar{h} n(\mathcal{U}_\delta(A)) \geq \frac{e^{-2\delta}}{1 - 2\delta} \bar{h} n(A) \geq \bar{h} n(A).$$

• Démonstration de (2) : Écrivons $X = \mathbb{T}^\ell$ comme le produit de $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}^1$ et d'un facteur $\mathbb{T}^{\ell-1}$. Toute mesure m sur X se désintègre en des mesures m_x sur $\mathbb{T}^1 \times \{x\}$ pour $x \in \mathbb{T}^{\ell-1}$. D'après (1) on a $d_{LP}((hn)_x, (\bar{h}n)_x) \leq \delta$ pour tout $x \in \mathbb{T}^{\ell-1}$. Par intégration, pour tout $A \subset X$, en utilisant le fait que $(\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}) \cap \mathcal{U}_\delta(A)$ contient le δ -voisinage de $(\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}) \cap A$ dans $\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}$, on voit que $(hn)(\mathcal{U}_\delta(A)) \geq (\bar{h}n)(A)$.

• Démonstration de (3) : On raisonne par récurrence sur k . Le cas $k = 1$ est contenu dans (2). Supposons le résultat vrai pour $k - 1$. Écrivons notre facteur \mathbb{T}^k comme $\mathbb{T}^{k-1} \times \mathbb{T}^1$, et soit \tilde{h} la moyenne de h par \mathbb{T}^{k-1} . Par hypothèse on a $e^{-2\delta} \bar{h} \leq h \leq e^{2\delta} \bar{h}$, d'où $e^{-2\delta} \bar{h} \leq \tilde{h} \leq e^{2\delta} \bar{h}$ en prenant la moyenne par \mathbb{T}^{k-1} . On en déduit $e^{-4\delta} \tilde{h} \leq h \leq e^{4\delta} \tilde{h}$, et donc $d_{LP}(hn, \tilde{h}n) \leq (2^{k-1} - 1) 2\delta$ par hypothèse de récurrence. D'autre part, comme \bar{h} est la moyenne de \tilde{h} par \mathbb{T}^1 , on a $d_{LP}(\tilde{h}n, \bar{h}n) \leq \delta$ par (2). Par inégalité triangulaire, on obtient

$$d_{LP}(hn, \bar{h}n) \leq d_{LP}(hn, \tilde{h}n) + d_{LP}(\tilde{h}n, \bar{h}n) \leq (2^{k-1} - 1) 2\delta + \delta = (2^k - 1) \delta.$$

6.10. Démonstration de la proposition 6.16

Le lemme 5.12 affirme que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α est (ε, R) -presque réalisé par (g, g') au sens de la définition 5.6, alors $g^{-1}\alpha g$ est proche de $\exp(R\mathfrak{h})$ au sens où les points fixes attractifs, les points fixes répulsifs et les projections de Lyapounov de ces deux éléments sont proches. Le lemme suivant affirme que dans ce contexte, l'élément $\Psi_\alpha(g)^{-1}\alpha\Psi_\alpha(g)$ est proche de $\exp(R\mathfrak{h})$ au sens de la distance G -invariante à gauche d_G , où $\Psi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow L_\alpha$ est l'application « pied » de la définition 5.14.

LEMME 6.17. — *Il existe $C'' > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α est (ε, R) -presque réalisé par (g, g') au sens de la définition 5.6, alors*

$$d_G(\varphi_{2R}(\Psi_\alpha(g)), \alpha\Psi_\alpha(g)) \leq C''(\varepsilon + e^{-R}).$$

Pour démontrer le lemme 6.17, Kahn, Labourie et Mozes utilisent les propriétés suivantes de contraction et de dilatation du flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Soit U_τ^+ le radical unipotent du sous-groupe parabolique P_τ de G du paragraphe 1.5, de sorte que $P_\tau = Z_K(\mathfrak{a})AU_\tau^+$. Soit U_τ^- le conjugué de U_τ^+ par $\tau(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix})$, de sorte que $P_\tau^- := Z_K(\mathfrak{a})AU_\tau^-$ soit un sous-groupe parabolique de G opposé à P_τ . Le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ préserve chaque classe à gauche de A (resp. U_τ^+ , resp. P_τ , resp. U_τ^- , resp. P_τ^-) et agit dessus de manière isométrique (resp. uniformément contractante, resp. contractante au sens large, resp. uniformément dilatante, resp. dilatante au sens large). L'ensemble de ces classes à gauche forme un feuilletage de G , dit central (resp. stable, resp. central stable, resp. instable, resp. central instable). Pour $x, y \in G$ suffisamment proches, la feuille stable de x intersecte la feuille centrale instable de y en un unique point, proche de x et y .

Exemple 6.18. — Pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, vu comme $T^1\mathbb{H}^2$ comme au paragraphe 5.1, le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot géodésique. La feuille du feuilletage central stable (resp. central instable) contenant $x \in T^1\mathbb{H}^2$ est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents pointant vers le même point à l'infini $\eta_x^+ \in \partial\mathbb{H}^2$ (resp. $\eta_x^- \in \partial\mathbb{H}^2$) dans le futur (passé) que x . La feuille du feuilletage stable (resp. instable) contenant x est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents de la feuille centrale stable (resp. centrale instable) de x qui sont basés sur le même horocycle centré en η_x^+ (resp. η_x^-) que x .

Kahn, Labourie et Mozes utilisent ces propriétés dynamiques du flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ pour établir l'existence de constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

1. pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si (g, g') réalise (ε, R) -presque α (définition 5.6), alors il existe $z \in G$ tel que $d_G(z, g) \leq C_1(\varepsilon + e^{-R})$ et $d_G(\varphi_{2R}(z), \alpha g) \leq C_1(\varepsilon + e^{-R})$;
2. pour tout $\delta > 0$ assez petit, tout $R > 0$ et tous $\alpha, z \in G$, si α est proximal dans G/P_τ , de points fixes attractif α^\oplus et répulsif α^\ominus , si $d_\tau(z'^{-1} \cdot \alpha^\ominus, \mathcal{I}(0)) \leq \delta$ et si

$d_\tau(z'^{-1} \cdot \alpha^\oplus, \mathcal{I}(\infty)) \leq \delta$ pour tout $z' \in \{z, \varphi_{2R}(z)\}$, alors

$$d_G(\Psi_\alpha \circ \varphi_{2R}(z), \varphi_{2R} \circ \Psi_\alpha(z)) \leq C_2 \delta.$$

Ils en déduisent alors le lemme 6.17 en utilisant le lemme 5.12 et le fait que l'application « pied » Ψ_α , définie comme la projection orthogonale d'un petit voisinage de L_α sur L_α , est lipschitzienne ; sa constante de Lipschitz ne dépend pas de α d'après la remarque 5.15.

Démonstration de la proposition 6.16. — Pour tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon, R}$, par définition, il existe $(g, g') \in G$ tel que α est $(\varepsilon/R, R)$ -presque réalisé par (g, g') . Le lemme 6.17 affirme que si R est assez grand par rapport à ε , alors il existe $y \in L_\alpha$ tel que $d_G(\varphi_{2R}(y), \alpha y) = d_G(y \exp(R\mathbf{h}), \alpha y) \leq C'' r_{\varepsilon/R, R}$, où l'on pose $r_{\varepsilon/R, R} := (\varepsilon/R + e^{-R})$; autrement dit, comme d_G est G -invariante à gauche, on a $d_G(\exp(-R\mathbf{h})y^{-1}\alpha y, \text{id}) \leq C'' r_{\varepsilon/R, R}$.

Soit $v \in Z_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ de norme minimale tel que $\exp(2Rv) = \exp(-R\mathbf{h})y^{-1}\alpha y$. Pour tout $t \in [0, 2R]$, on a $d_G(\exp(tv), \text{id}) \leq d_G(\exp(2Rv), \text{id}) \leq C'' r_{\varepsilon/R, R}$. On considère le sous-groupe à un paramètre

$$(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}} := \left(y \exp\left(t\left(\frac{\mathbf{h}}{2} + v\right)\right) y^{-1} \right)_{t \in \mathbb{R}}$$

de $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))_0 \subset C_\alpha^\Gamma$. On a $\alpha_{2R} = \alpha$ et $d_G(\varphi_t(y), \alpha_t y) = d_G(\exp(tv), \text{id}) \leq C'' r_{\varepsilon/R, R}$ pour tout $t \in [0, 2R]$.

En écrivant L_α comme une classe à gauche de $AZ_K(\mathfrak{a})$ comme à la remarque 5.15, on voit que pour tout $x \in L_\alpha$ et tout $t \in [0, 2R]$, on a $x^{-1}y \in AZ_K(\mathfrak{a})$ et

$$d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) = d_G((x^{-1}y) \exp(tv)(x^{-1}y)^{-1}, \text{id}).$$

Les éléments $(x^{-1}y) \exp(tv)(x^{-1}y)^{-1}$ et $\exp(tv)$ de $AZ_K(\mathfrak{a})$ ne diffèrent que selon leurs composantes dans $Z_K(\mathfrak{a})$, qui sont conjuguées par un élément de $Z_K(\mathfrak{a})$ indépendant de t (à savoir la composante de $x^{-1}y$ dans $Z_K(\mathfrak{a})$). On en déduit l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que $d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) \leq (C'/C'') d_G(\varphi_t(y), \alpha_t y) \leq C' r_{\varepsilon/R, R}$ pour tous $x \in L_\alpha$ et $t \in [0, 2R]$. \square

7. CONCLUSION : ÉTAPE COMBINATOIRE

Dans cette partie nous concluons la démonstration des théorèmes 2.3 et 2.14 à partir des propositions 3.2 et 3.4. Nous présentons d'abord l'approche de Kahn, Labourie et Mozes qui utilise le lemme des mariages de Hall (fait 3.6), puis mentionnons brièvement l'approche de Hamenstädt.

Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.13. On suppose la condition (R) du paragraphe 2.3.2 vérifiée. On fixe un réseau cocompact irréductible Γ de G , que l'on suppose comme précédemment sans torsion.

7.1. Idée de la démonstration : graphes enrubannés

Comme expliqué au paragraphe 3.4, pour conclure la démonstration des théorèmes 2.3 et 2.14, il s’agit de prendre les représentations de groupes de pantalons $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollées des propositions 3.3 et 3.4, avec les données géométriques appropriées correspondantes, et de montrer qu’on peut les agencer de manière adéquate pour obtenir une représentation d’une surface compacte S , avec une décomposition en pantalons bipartie et un graphe \mathcal{G} comme au paragraphe 3.1, vérifiant les hypothèses de la proposition 3.2 ou de ses raffinements (propositions 4.11 ou 5.19).

Pour trouver la surface S et la décomposition en pantalons, l’idée est de commencer par construire le graphe \mathcal{G} . Plus précisément, \mathcal{G} sera un *graphe enrubanné*, c’est-à-dire un graphe muni d’un ordre cyclique sur l’ensemble des arêtes en chaque sommet. Le point est que tout graphe enrubanné fini trivalent \mathcal{G} peut être épaissi (en remplaçant chaque arête par un cylindre) pour obtenir une surface compacte S de genre au moins deux qui fibre en cercles au-dessus de \mathcal{G} . Les cercles au-dessus des milieux des arêtes définissent alors une décomposition en pantalons de S , telle que le graphe Γ contient exactement un sommet à l’intérieur de chaque pantalon, et l’on a une arête pour chaque courbe de bord entre deux pantalons, comme au paragraphe 3.1. Le graphe \mathcal{G} est biparti si et seulement si la décomposition en pantalons l’est.

7.2. Le point de vue de Kahn, Labourie et Mozes

Fixons deux pantalons Π^+ et Π^- de groupes fondamentaux

$$\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a^\pm, b^\pm, c^\pm \mid c^\pm b^\pm a = 1 \rangle.$$

Pour $\varepsilon, R > 0$, soit $\mathcal{C}_{\varepsilon, \pm R}$ l’ensemble des classes de conjugaison modulo Γ de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ . Rappelons qu’il est fini d’après le corollaire 5.13.(2). Il admet une symétrie naturelle sym d’ordre trois induite par la symétrie sym de $\text{Hom}(\pi_1(\Pi^\pm), G)$ donnée par

$$(7.1) \quad \text{sym}(\rho)(a^\pm, b^\pm, c^\pm) = (\rho(b^\pm), \rho(c^\pm), \rho(a^\pm))$$

pour tout $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(\Pi^\pm), G)$ (cf. remarque 5.8). Cette symétrie est sans point fixe pour R assez grand par rapport à ε d’après le corollaire 5.13.(1).

D’autre part, rappelons que l’ensemble $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ du paragraphe 6.4 paramètre les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ modulo l’action de Γ . Il est muni lui aussi d’une symétrie sym d’ordre trois, donnée par (6.7). On a une projection naturelle $\varpi: \text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R} \rightarrow \mathcal{C}_{\varepsilon, \pm R}$, qui induit une projection naturelle de $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}/\langle \text{sym} \rangle$ vers $\mathcal{C}_{\varepsilon, \pm R}/\langle \text{sym} \rangle$, encore notée ϖ . Comme au paragraphe 6.4, pour $\varepsilon' > 0$, la définition 5.17 induit une notion d’éléments de $\text{Triconn}_{\varepsilon, R}$ et $\text{Triconn}_{\varepsilon, -R}$ qui sont $(\varepsilon', 1)$ -bien recollés.

En utilisant les mesures $\mu_{\varepsilon, R}^\pm$ de la proposition 6.5 et le lemme des mariages (fait 3.6), Kahn, Labourie et Mozes établissent le résultat suivant.

PROPOSITION 7.1. — *Supposons la condition (R) vérifiée. Soit $C > 0$ la constante de la proposition 6.5. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε , il existe*

- un graphe enrubanné fini \mathcal{G} , trivalent, biparti, de sommets $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$,
- une application $E: \mathcal{P}^\pm \rightarrow \text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R} / \langle \text{sym} \rangle$ (« étiquetage »)

tels que pour tout sommet $v \in \mathcal{P}^\pm$, de sommets adjacents $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{P}^\mp$, on puisse trouver $\mathbf{T} \in \text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ et $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3 \in \text{Triconn}_{\varepsilon, \mp R}$ vérifiant $E(v) = [\mathbf{T}]$ et $E(v_i) = [\mathbf{T}_i]$, tels que $\text{sym}^i(\mathbf{T})$ et \mathbf{T}_i soient $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Adoptons la terminologie suivante : pour une classe de conjugaison $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_{\varepsilon, \pm R}$ de représentations de $\pi_1(\Pi^\pm)$, et pour un pantalon Π quelconque, disons qu’une représentation $\rho_\Pi: \pi_1(\Pi) \rightarrow G$ est de type \mathbf{c} si l’on peut identifier les courbes de bord de Π à a, b^\pm, c^\pm de sorte que ρ définisse une représentation de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans la classe de conjugaison \mathbf{c} . Ceci ne dépend que de la classe de \mathbf{c} dans $\mathcal{C}_{\varepsilon, \pm R} / \langle \text{sym} \rangle$.

Le graphe enrubanné \mathcal{G} de la proposition 7.1 définit une surface compacte S avec une décomposition en pantalons bipartie comme au paragraphe 7.1, et l’on en déduit une représentation de $\pi_1(S)$ dans Γ par le lemme suivant.

LEMME 7.2. — *Soit S une surface compacte de genre au moins deux avec une décomposition en pantalons bipartie $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$. Soit \mathcal{G} un graphe fini sur S , avec un sommet à l’intérieur de chaque pantalon et une arête pour chaque courbe de bord entre deux pantalons, comme au paragraphe 3.1. Pour $\varepsilon, R > 0$, soit $E: \mathcal{P}^\pm \rightarrow \text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R} / \langle \text{sym} \rangle$ un étiquetage comme à la proposition 7.1. Alors il existe une représentation $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \Gamma$, unique à conjugaison par Γ près, telle que pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$, la restriction de ρ à $\pi_1(\Pi)$ soit de type $\varpi \circ E(\Pi) \in \mathcal{C}_{\varepsilon, \pm R} / \langle \text{sym} \rangle$.*

Notons que $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R} \subset \text{Triconn}_{C\varepsilon, \pm R}$ si $C \geq 1$. Par la proposition 3.2 on obtient, pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $R > 0$ assez grand par rapport à ε , une représentation injective ρ de $\pi_1(S)$ dans Γ . De plus, à $\delta > 0$ fixé, la proposition 5.19 assure que si $\varepsilon > 0$ est assez petit par rapport à δ et $R > 0$ assez grand par rapport à ε , alors ρ admet une application de bord (δ, τ) -sullivannienne de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans G/P_τ , ce qui démontre les théorèmes 2.3 et 2.14.

7.3. Démonstration de la proposition 7.1

D’après la proposition 6.5, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε , il existe des mesures $\mu_{\varepsilon, \pm R}$ sur $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$, invariantes par la transformation sym de (6.7), vérifiant $\mu_{\varepsilon, R}(\text{Triconn}_{\varepsilon, R}) = \mu_{\varepsilon, -R}(\text{Triconn}_{\varepsilon, -R})$ et telles que pour tout sous-ensemble mesurable A de $\text{Triconn}_{\varepsilon, R}$, l’ensemble des éléments de $\text{Triconn}_{\varepsilon, -R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés à au moins un élément de A soit de $(\mu_{\varepsilon, -R})$ -mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon, R}(A)$.

Les espaces $\text{Triconn}_{\varepsilon, R}$ et $\text{Triconn}_{\varepsilon, -R}$ étant compacts, on peut remplacer les mesures $\mu_{\varepsilon, R}$ et $\mu_{\varepsilon, -R}$ par des mesures $\mu_{\varepsilon, R}^f$ et $\mu_{\varepsilon, -R}^f$ de même masse totale, de supports finis, qui sont encore invariantes par sym et vérifient encore que pour tout $A \subset \text{Triconn}_{\varepsilon, R}$,

l'ensemble des éléments de $\text{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés à au moins un élément de A est de $\mu_{\varepsilon,-R}^f$ -mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon,R}^f(A)$. Autrement dit, en notant \mathcal{F}^\pm le support (fini) de $\mu_{\varepsilon,R}^f$ et \mathcal{F} l'union disjointe de \mathcal{F}^+ et \mathcal{F}^- , le système d'inéquations

$$(7.2) \quad \begin{cases} \mu(\mathbb{T}) & = \mu(\text{sym}(\mathbb{T})) & \forall \mathbb{T} \in \mathcal{F}, \\ \sum_{\mathbb{T}^+ \in \mathcal{F}^+} \mu(\mathbb{T}^+) & = \sum_{\mathbb{T}^- \in \mathcal{F}^-} \mu(\mathbb{T}^-), \\ \sum_{\mathbb{T}^- \in \mathcal{F}^-(A)} \mu(\mathbb{T}^-) & \geq \sum_{\mathbb{T}^+ \in A} \mu(\mathbb{T}^+) & \forall A \subset \mathcal{F}^+ \end{cases}$$

admet une solution $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ non nulle, où $\mathcal{F}^-(A)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}^- \subset \text{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés à au moins un élément de $A \subset \mathcal{F}^+ \subset \text{Triconn}_{\varepsilon,R}$. Le système (7.2) étant à coefficients entiers, ceci implique l'existence d'une solution *rationnelle*, et donc (en multipliant par un entier assez grand) l'existence d'une solution *entière* non nulle $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$.

Soit \mathcal{E}^\pm l'ensemble obtenu en prenant $\mu(\mathbb{T}) \in \mathbb{N}$ copies de chaque élément $\mathbb{T} \in \mathcal{F}^\pm$. La première ligne de (7.2) assure que la transformation d'ordre trois (sans point fixe) sym de $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ induit une transformation d'ordre trois (sans point fixe) sym de \mathcal{E}^\pm . La deuxième ligne assure que $\#\mathcal{E}^+ = \#\mathcal{E}^-$. Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-$ le sous-ensemble correspondant à des couples $(\mathbb{T}^+, \mathbb{T}^-) \in \text{Triconn}_{\varepsilon,R} \times \text{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollés. La troisième ligne de (7.2) assure que la condition (3.1) est vérifiée. D'après le lemme des mariages de Hall (fait 3.6), il existe une bijection $\psi: \mathcal{E}^+ \rightarrow \mathcal{E}^-$ telle que tout couple de la forme $(x, \psi(x))$ où $x \in \mathcal{E}^+$ corresponde à un couple $(C\varepsilon/R, 1)$ -bien recollé.

Soit \mathcal{G} le graphe fini biparti de sommets $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$ où $\mathcal{P}^\pm := \mathcal{E}^\pm / \langle \text{sym} \rangle$, pour lequel on met une arête entre les images de x et $\psi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{E}^+$. Ce graphe est trivalent car sym est d'ordre trois sans point fixe. C'est un graphe enrubanné : sym définit un ordre cyclique sur les arêtes en chaque sommet. La projection naturelle de \mathcal{E}^\pm vers $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ induit une application $E: \mathcal{P}^\pm \rightarrow \text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} / \langle \text{sym} \rangle$ vérifiant les conclusions de la proposition 7.1.

7.4. Démonstration du lemme 7.2

On utilise l'observation suivante.

Remarque 7.3. — Pour ε/R assez petit, si $\rho^+: \pi_1(\Pi^+) \rightarrow G$ est $(\varepsilon/R, R)$ -presque parfaite, si $\rho^-: \pi_1(\Pi^-) \rightarrow G$ est $(\varepsilon/R, -R)$ -presque parfaite et si les représentations ρ^+ et ρ^- sont $(C\varepsilon/R)$ -bien recollées le long de a^+ et a^- , alors pour $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ les représentations ρ^+ et $\gamma\rho^-(\cdot)\gamma^{-1}$ ne sont pas $(C\varepsilon/R)$ -bien recollées le long de a^+ et a^- .

En effet, soit $\gamma \in \Gamma$. Si ρ^+ et $\gamma\rho^-(\cdot)\gamma^{-1}$ sont $(C\varepsilon/R)$ -bien recollées le long de a^+ et a^- , alors $\gamma\rho^-(a^-)\gamma^{-1} = \rho^+(a^+) = \rho^-(a^-) =: \alpha$, donc γ appartient au centralisateur $Z_\Gamma(\alpha)$ de α dans Γ . Or, l'application « pied » $\Psi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow L_\alpha$ est $Z_\Gamma(\alpha)$ -équivariante et tout élément non trivial du groupe discret sans torsion $Z_\Gamma(\alpha)$ déplace les points de L_α d'au moins une certaine distance, indépendante de ε et R . La condition (5.3) sur (g_+, g_-)

pour $\varepsilon' = C\varepsilon/R$ ne peut donc pas être satisfaite par $(g_+, \gamma g_-)$ pour $\gamma \in Z_\Gamma(\alpha) \setminus \{\text{id}\}$ si ε/R est assez petit.

Dans la suite, on note $\widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, \pm R} \subset G^4$ la pré-image de $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ par la projection naturelle $G^4 \rightarrow \Gamma \backslash G^4$. La symétrie d'ordre trois sym de $\text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R}$ se relève en une symétrie de $\widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, \pm R}$, encore notée sym . La projection $\varpi: \text{Triconn}_{\varepsilon, \pm R} \rightarrow \mathcal{C}_{\varepsilon, \pm R}$ du paragraphe 7.2 se relève en une projection $\widetilde{\varpi}$ de $\widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, \pm R}$ vers l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ , telle que $\widetilde{\varpi} \circ \text{sym} = \text{sym} \circ \widetilde{\varpi}$. On dit que des éléments de $\widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, R}$ et $\widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, -R}$ sont $(C\varepsilon/R)$ -bien recollés si leurs images par $\widetilde{\varpi}$ le sont.

Dans le cadre du lemme 7.2, le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{G})$ est un groupe libre non abélien. On peut voir S comme un épaississement de \mathcal{G} , ce qui donne une injection $\pi_1(\mathcal{G}) \hookrightarrow \pi_1(S)$. On peut voir \mathcal{G} comme l'image d'une rétraction $r: S \rightarrow \mathcal{G}$, ce qui donne une surjection $r_*: \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G})$. On en déduit

$$\pi_1(S) = (\text{Ker } r_*) \rtimes \pi_1(\mathcal{G}),$$

et il existe un revêtement infini \widehat{S} de S tel que $\text{Ker } r_*$ s'identifie à $\pi_1(\widehat{S})$ et $\pi_1(\mathcal{G})$ au groupe de Galois du revêtement $\widehat{S} \rightarrow S$. Le graphe trivalent \mathcal{G} sur S se relève en un arbre trivalent $\widetilde{\mathcal{G}}$ (revêtement universel de \mathcal{G}) sur \widehat{S} (cf. figure 18); notons $\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}}^+ \sqcup \widetilde{\mathcal{P}}^-$ l'ensemble de ses sommets. Pour toute arête \widetilde{A} de $\widetilde{\mathcal{G}}$, notons $a_{\widetilde{A}}$ un

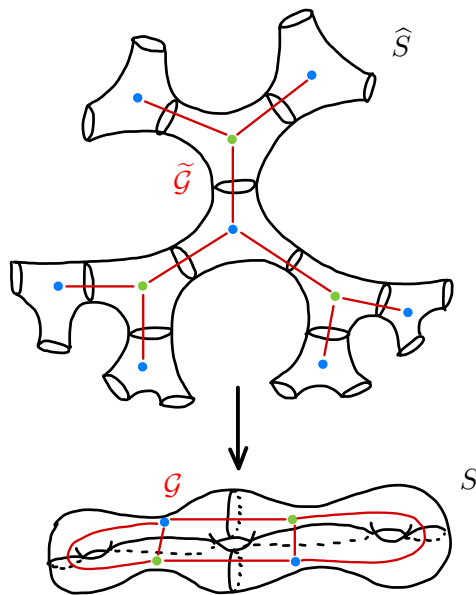


FIGURE 18. Le revêtement \widehat{S} de S

élément de $\pi_1(\widehat{S})$ correspondant à la courbe de bord entre les deux pantalons de \widehat{S} définis par \widetilde{A} , orientée de sorte que si $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3$ sont incidentes dans cet ordre en un même sommet, alors $a_{\widetilde{A}_3} a_{\widetilde{A}_2} a_{\widetilde{A}_1} = 1$. Le groupe $\pi_1(\widehat{S})$ admet alors la présentation par

le système générateur $\{a_{\tilde{A}} \mid \tilde{A} \text{ arête de } \tilde{G}\}$ et les relations $a_{\tilde{A}_3} a_{\tilde{A}_2} a_{\tilde{A}_1} = 1$ pour toutes arêtes $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ incidentes dans cet ordre en un même sommet.

Fixons un sommet initial de \mathcal{G} , appartenant à un pantalon $\Pi_0 \in \mathcal{P}^+$, et un relevé $\tilde{\Pi}_0 \in \tilde{\mathcal{P}}^+$ dans $\tilde{\mathcal{G}}$. Choisissons un représentant $[\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_0}] \in \widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, R}/\langle \text{sym} \rangle$ de $E(\Pi_0) \in \text{Triconn}_{\varepsilon, R}/\langle \text{sym} \rangle$. Par hypothèse, pour tout sommet $\tilde{\Pi}_1 \in \tilde{\mathcal{P}}^-$ adjacent à $\tilde{\Pi}_0$, se projetant dans $\Pi_1 \in \mathcal{P}^-$, il existe un représentant $[\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_1}] \in \widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, -R}/\langle \text{sym} \rangle$ de $E(\Pi_1) \in \text{Triconn}_{\varepsilon, -R}/\langle \text{sym} \rangle$ qui est *compatible* avec $[\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_0}]$ au sens où il existe $i_0, i_1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tels que $\text{sym}^{i_0}(\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_0})$ et $\text{sym}^{i_1}(\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_1})$ soient $(C\varepsilon/R)$ -bien recollés ; ce représentant est unique d'après la remarque 7.3. De même, pour tout sommet $\tilde{\Pi}_2 \in \tilde{\mathcal{P}}^+$ adjacent à $\tilde{\Pi}_1$, se projetant dans $\Pi_2 \in \mathcal{P}^+$, il existe un unique représentant $[\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_2}] \in \widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, R}/\langle \text{sym} \rangle$ de $E(\Pi_2) \in \text{Triconn}_{\varepsilon, R}/\langle \text{sym} \rangle$ qui soit compatible avec $[\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_1}]$. On continue. Comme $\tilde{\mathcal{G}}$ est un arbre, il n'y a pas d'autre condition de compatibilité à vérifier. En raisonnant de proche en proche, on obtient ainsi une famille $([\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}^+}])_{\tilde{\Pi}^+ \in \tilde{\mathcal{P}}^+}$ d'éléments de $\widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, R}/\langle \text{sym} \rangle$ paramétrés par les sommets $\tilde{\mathcal{P}}^+$, et une famille $([\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}^-}])_{\tilde{\Pi}^- \in \tilde{\mathcal{P}}^-}$ d'éléments de $\widetilde{\text{Triconn}}_{\varepsilon, -R}$ paramétrés par les sommets $\tilde{\mathcal{P}}^-$, de sorte que les éléments au-dessus de deux sommets adjacents soient compatibles. Pour toute arête \tilde{A} de \mathcal{G} entre $\tilde{\Pi}^+$ et $\tilde{\Pi}^-$, si $\text{sym}^{i^+}(\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}^+})$ et $\text{sym}^{i^-}(\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}^-})$ sont bien recollés où $i^+, i^- \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on note $\rho_{\tilde{S}}(a_{\tilde{A}}) \in \Gamma$ l'image de $a_{\tilde{A}}$ par $\tilde{\omega}(\text{sym}^{i^+}(\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}^+}))$. Étant donnée la présentation par générateurs et relations de $\pi_1(\hat{S})$ décrite ci-dessus, on obtient ainsi une représentation $\rho_{\hat{S}}: \pi_1(\hat{S}) \rightarrow \Gamma$.

Ceci nous donne également une *représentation d'holonomie* $\rho_{\mathcal{G}}: \pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma$, définie de manière unique. En effet, pour tout $f \in \pi_1(\mathcal{G})$, il existe un unique élément $\rho_{\mathcal{G}}(f) \in \Gamma$ tel que $[\tilde{\mathbb{T}}_{f \cdot \tilde{\Pi}_0}] = \rho_{\mathcal{G}}(f) \cdot [\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_0}]$. Par unicité de la construction (remarque 7.3), on a $[\tilde{\mathbb{T}}_{f \cdot \tilde{\Pi}}] = \rho_{\mathcal{G}}(f) \cdot [\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}}]$ pour tout sommet $\tilde{\Pi}$ de $\tilde{\mathcal{G}}$, et $\rho_{\mathcal{G}}(ff') = \rho_{\mathcal{G}}(f)\rho_{\mathcal{G}}(f')$ pour tous $f, f' \in \pi_1(\mathcal{G})$.

Par construction, pour tout $f \in \pi_1(\mathcal{G})$ et toute arête \tilde{A} de \mathcal{G} , on a $\rho_{\hat{S}}(fa_{\tilde{A}}f^{-1}) = \rho_{\mathcal{G}}(f)\rho_{\hat{S}}(a_{\tilde{A}})\rho_{\mathcal{G}}(f)^{-1}$. Comme les $a_{\tilde{A}}$ engendrent $\pi_1(\hat{S})$, on en déduit $\rho_{\hat{S}}(f\gamma f^{-1}) = \rho_{\mathcal{G}}(f)\rho_{\hat{S}}(\gamma)\rho_{\mathcal{G}}(f)^{-1}$ pour tout $\gamma \in \pi_1(\hat{S})$. Ainsi, les représentations $\rho_{\hat{S}}: \pi_1(\hat{S}) \rightarrow G$ et $\rho_{\mathcal{G}}: \pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow G$ se combinent en une représentation

$$\rho: \pi_1(S) = \pi_1(\hat{S}) \rtimes \pi_1(\mathcal{G}) \longrightarrow G.$$

Cette représentation est unique étant donné notre choix initial de représentant $[\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_0}]$ de $E(\Pi_0)$. Changer le choix initial pour $[\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\Pi}_0}]$ revient à conjuguer $\rho: \pi_1(S) \rightarrow G$ par un élément de Γ .

Ceci conclut la démonstration du lemme 7.2, et donc des théorèmes 2.3 et 2.14.

7.5. Le point de vue de Hamenstädt

Hamenstädt obtient elle aussi des groupes de surface dans Γ en construisant des graphes enrubannés trivalents dont les sommets correspondent à des données géométriques de représentations presque parfaites de groupes de pantalon modulo Γ . Cependant, elle

n'utilise pas le lemme des mariages de Hall, contrairement à l'approche originale de Kahn et Marković poursuivie par Kahn, Labourie et Mozes.

7.5.1. Construction d'un graphe enrubanné trivalent. — Soit $\kappa > 0$ donné par la proposition 4.6 et soit Π un pantalon de groupe fondamental comme en (4.1). Prenons $R > 0$ assez grand, posons $\varepsilon := Re^{-\kappa R} > 0$ et notons $\text{Geom}_{\varepsilon,R} \subset (\Gamma \backslash G)^5$ l'espace des données géométriques (cf. paragraphe 6.1) associées aux représentations $(\varepsilon/R, R) = (e^{-\kappa R}, R)$ -presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ au sens de la définition 4.4. (Rappelons que Hamenstädt ne distingue pas entre représentations (ε, R) -parfaites et représentations $(\varepsilon, -R)$ -parfaites car elle recolle les pantalons de manière différente de Kahn, Labourie et Mozes : cf. paragraphe 4.6.) Cet ensemble $\text{Geom}_{\varepsilon,R}$ admet une symétrie sym d'ordre trois donnée par (4.2).

On peut partitionner $\text{Geom}_{\varepsilon,R}$ en un nombre fini de sous-ensembles mesurables B_i et choisir pour tout i un point $Q_i \in B_i$ de telle sorte que l'ensemble des B_i et des Q_i est invariant par sym et que pour tous i, i' , si la paire $(Q_i, Q_{i'})$ est $(\varepsilon/R, 1)$ -bien recollée au sens de la définition 4.10, alors toutes les paires dans $B_i \times B_{i'}$ sont encore $(2\varepsilon/R, 1)$ -bien recollées. Soit $\mathcal{F} \subset \text{Geom}_{\varepsilon,R} \subset (\Gamma \backslash G)^5$ l'ensemble (fini) des Q_i . Hamenstädt établit le résultat suivant.

PROPOSITION 7.4. — *Il existe une application $\Phi: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*

- Φ soit symétrique : $\Phi(Q, Q') = \Phi(Q', Q)$ pour tous $Q, Q' \in \mathcal{F}$;
- le support de Φ soit non vide et contenu dans l'ensemble des paires d'éléments de \mathcal{F} qui sont $(\varepsilon/R, 1)$ -bien recollées au sens de la définition 4.10 ;
- pour tout $Q \in \mathcal{F}$,

$$\sum_{Q' \in \mathcal{F}} \Phi(Q, Q') = \sum_{Q' \in \mathcal{F}} \Phi(\text{sym}(Q), Q') =: n_Q.$$

De même qu'on avait au paragraphe 7.3 un système d'inéquations à coefficients entiers, on a ici un système d'équations à coefficients entiers. L'existence d'une fonction Φ comme à la proposition 7.4 implique donc l'existence d'une telle fonction à valeurs entières. Fixons une telle fonction $\Phi: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$.

Hamenstädt construit un graphe fini \mathcal{G} de la manière suivante. Pour $Q \in \mathcal{F}$, notons $[Q]$ son image dans $\mathcal{F}/\langle \text{sym} \rangle$. Les sommets du graphe \mathcal{G} sont obtenus en prenant $n_Q \in \mathbb{N}$ copies de chaque élément $[Q] \in \mathcal{F}/\langle \text{sym} \rangle$. Pour chaque $Q \in \mathcal{F}$, Hamenstädt partitionne les $n_Q \in \mathbb{N}$ copies de $[Q]$ en une collection de sous-ensembles $\mathcal{F}^{Q,Q'}$ de cardinal $\Phi(Q, Q')$, où Q' parcourt \mathcal{F} ; elle relie chaque élément de $\mathcal{F}^{Q,Q'}$ à un unique élément de $\mathcal{F}^{Q',Q}$ par une arête.

Le graphe \mathcal{G} ainsi obtenu est trivalent : chaque sommet $[Q]$ est l'extrémité de trois arêtes provenant de la construction ci-dessus pour Q , $\text{sym}(Q)$ et $\text{sym}^2(Q)$. C'est un graphe enrubanné : sym définit un ordre cyclique sur les arêtes en chaque sommet. Par construction, on a une projection naturelle de l'ensemble des sommets de \mathcal{G} vers $\mathcal{F}/\langle \text{sym} \rangle$.

Comme au paragraphe 7.1, le graphe \mathcal{G} définit une surface compacte S avec une décomposition en pantalons bipartie. Le lemme 7.4 et la proposition 4.11 permettent alors de conclure la démonstration du théorème 2.14.

7.5.2. *Comment construire l'application Φ de la proposition 7.4.* — Dans le même esprit que les paragraphes 6.4 et 6.5, l'ensemble $\text{Geom}_{\varepsilon,R}$ est une union disjointe finie de sous-ensembles $\text{Geom}_{\varepsilon,R}^\alpha$, $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, paramétrant les représentations (ε, R) -presque parfaites $\rho: \pi_1(\Pi) \rightarrow \Gamma$ telles que $\rho(a^{(1)}) = \alpha$ à conjugaison par Γ près. Chaque ensemble B_i du paragraphe 7.5.1 ci-dessus est contenu dans un unique ensemble $\text{Geom}_{\varepsilon,R}^\alpha$.

Dans le même esprit que l'application Ψ_α^{tri} de (6.9), Hamenstädt définit une application « pied » $\Psi_\alpha^{\text{Geom}}$ de $\text{Geom}_{\varepsilon,R}^\alpha$ vers un certain fibré \mathcal{S}_α au-dessus d'une géodésique fermée de $M = \Gamma \backslash G/K$ associée à α . Dans le même esprit que le paragraphe 6.7, Hamenstädt construit une mesure finie $\mu_{\varepsilon,R}$ sur $\text{Geom}_{\varepsilon,R}$, qui se restreint, pour tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, en une mesure finie $\mu_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $\text{Geom}_{\varepsilon,R}^\alpha$; en notant $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ le poussé en avant de $\mu_{\varepsilon,R}$ par $\Psi_\alpha^{\text{Geom}}$, elle montre que $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ est absolument continue par rapport à $(\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,R}^{\alpha^{-1}}$, de dérivée de Radon–Nikodym proche de 1.

Le résultat clé établi par Hamenstädt est l'existence d'un homéomorphisme ψ_α de \mathcal{S}_α tel que

- $(\psi_\alpha)_* m_{\varepsilon,R}^\alpha = (\varphi_1 \circ \text{inv})_* m_{\varepsilon,R}^{\alpha^{-1}}$;
- $d(x, \psi_\alpha(x)) \leq e^{-\kappa R}$ pour tout $x \in \mathcal{S}_\alpha$.

On peut penser à ce résultat comme à un renforcement de la proposition 6.8.

On peut alors construire, à l'aide d'une intégrale, une application $\Phi: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tous $Q_i, Q_{i'} \in \mathcal{F}$ où $Q_i \in B_i \subset \text{Geom}_{\varepsilon,R}^\alpha$ et $Q_{i'} \in B_{i'} \subset \text{Geom}_{\varepsilon,R}^{\alpha'}$,

- si $[\alpha'] = [\alpha^{-1}]$, alors la quantité $\Phi(Q_i, Q_{i'})$ mesure la proportion de couples dans $\text{Geom}_{\varepsilon,R}^\alpha \times \text{Geom}_{\varepsilon,R}^{\alpha^{-1}}$, pour $\mu_{\varepsilon,R}^\alpha \times \mu_{\varepsilon,R}^{\alpha^{-1}}$, tels que l'image par $\Psi_\alpha^{\text{Geom}}$ du membre de gauche diffère de l'image par $\varphi_1 \circ \text{inv} \circ \Psi_{\alpha^{-1}}^{\text{Geom}}$ du membre de droite par la bijection ψ_α ;
- sinon, $\Phi(Q_i, Q_{i'})$ vaut 0.

Cette application vérifie les conclusions de la proposition 7.4. Ceci termine la démonstration des théorèmes 2.3 et 2.14.

RÉFÉRENCES

- Ian AGOL (2013). « The virtual Haken conjecture », *Doc. Math.* **18**. Avec un appendice par Agol, Groves et Manning, p. 1045-1087.
- Daniele ALESSANDRINI, Gye-Seon LEE et Florent SCHAFFHAUSER (2021). « Hitchin components for orbifolds », *J. Eur. Math. Soc.* À paraître.
- Mark D. BAKER et Daryl COOPER (2015). « Finite-volume hyperbolic 3-manifolds contain immersed quasi-Fuchsian surfaces », *Algebr. Geom. Topol.* **15**, p. 1199-1228.
- Yves BENOIST (1997). « Propriétés asymptotiques des groupes linéaires », *Geom. Funct. Anal.* **7**, p. 1-47.

- Yves BENOIST (2009). « Five lectures on lattices in semisimple Lie groups », *Séminaires et Congrès, vol. 18, Société Mathématique de France* **18**, p. 1-47.
- Nicolas BERGERON (2013). « La conjecture des sous-groupes de surfaces [d'après Jeremy Kahn et Vladimir Marković] », *Astérisque* **352**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1055, p. 429-458.
- (2014). « La conjecture de Waldhausen est démontrée! », *Gazette des mathématiciens* **140**, p. 31-37.
- Mladen BESTVINA (2000). « Questions in geometric group theory ». <https://www.math.utah.edu/~bestvina/eprints/questions-updated.pdf>.
- Jonas BEYRER (2021). « Cross ratios on boundaries of symmetric spaces and Euclidean buildings », *Transform. Groups* **26**, p. 31-68.
- Jairo BOCHI, Rafael POTRIE et Andrés SAMBARINO (2019). « Anosov representations and dominated splittings », *J. Eur. Math. Soc.* **21**, p. 3343-3414.
- Martin R. BRIDSON et André HAEFLIGER (1999). *Metric spaces of non-positive curvature*. T. 319. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin : Springer-Verlag.
- Danny CALEGARI (2008). « Surface subgroups from homology », *Geom. Topol.* **12**, p. 1995-2007.
- Richard D. CANARY, Michelle LEE, Andrés SAMBARINO et Matthew STOVER (2017). « Projective Anosov Schottky groups and strongly amalgam Anosov representations », *Geom. Topol.* **21**. appendice à l'article *Amalgam Anosov representations* de Canary, Lee et Stover, p. 215-251.
- Daryl COOPER et David FUTER (2019). « Ubiquitous quasi-Fuchsian surfaces in cusped hyperbolic 3-manifolds », *Geom. Topol.* **23**, p. 241-298.
- Daryl COOPER, Darren D. LONG et Alan W. REID (1997). « Essential surfaces in bounded 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **10**, p. 553-563.
- Kelly DELP, Diane HOFFOSS et Jason F. MANNING (2015). « Problems in groups, geometry, and three-manifolds », arXiv:1512.04620.
- Thomas DELZANT (1995). « L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique », *Comment. Math. Helv.* **70**, p. 267-284.
- Leon EHRENPREIS (1970). « Cohomology with bounds », in : *Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69)*. London : Academic Press, p. 389-395.
- Benson FARB et Lee MOSHER (2002). « Convex cocompact subgroups of mapping class groups », *Geom. Topol.* **6**, p. 91-152.
- Gabino GONZÁLEZ-DIEZ et William J. HARVEY (1999). « Surface groups in mapping class groups », *Topology* **38**, p. 57-69.
- Cameron McA. GORDON, Darren D. LONG et Alan W. REID (2004). « Surface subgroups of Coxeter and Artin groups », *J. Pure Appl. Algebra* **189**, p. 135-148.
- Mikhael GROMOV (1987). « Hyperbolic groups », in : *Essays in group theory*. T. 8. MSRI Publications. New York : Springer, p. 75-263.
- Daniel GROVES et Jason F. MANNING (2021). « Quasiconvexity and Dehn filling », *Amer. J. Math.* **143**, p. 95-124.

- Olivier GUICHARD (2019). « Groupes convexes-cocompacts en rang supérieur [d'après Labourie, Kapovich, Leeb, Porti, ...] » *Astérisque* **414**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1138, p. 95-124.
- Olivier GUICHARD et Anna WIENHARD (2012). « Anosov representations: Domains of discontinuity and applications », *Invent. Math.* **190**, p. 357-438.
- Philip HALL (1935). « On representatives of subsets », *J. London Math. Soc.* **1**, p. 26-30.
- Ursula HAMENSTÄDT (2005). « Word hyperbolic extensions of surface groups ». arXiv : 0505244.
- (2015). « Incompressible surfaces in rank one locally symmetric spaces », *Geom. Funct. Anal.* **25**, p. 815-859.
- (2021). « Incompressible surfaces in some locally symmetric spaces of arbitrary rank ». En préparation.
- Sigurdur HELGASON (2001). *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. T. 34. Graduate Studies in Mathematics. Réimpression corrigée de l'original de 1978. Providence, RI : American Mathematical Society.
- John H. HUBBARD (2006). *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1. Teichmüller theory*. Avec des contributions de A. Douady, W. Dunbar, R. Roeder, S. Bonnot, D. Brown, A. Hatcher, C. Hruska et S. Mitra. Ithaca, NY : Matrix Editions.
- Jeremy KAHN, François LABOURIE et Shahar MOZES (arXiv 2018). « Surface groups in uniform lattices of some semi-simple groups ». arXiv : 1805.10189.
- Jeremy KAHN et Vladimir MARKOVIĆ (2012). « Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold », *Ann. Math.* **175**, p. 1127-1190.
- (2015). « The good pants homology and the Ehrenpreis Conjecture », *Ann. Math.* **182**, p. 1-72.
- Jeremy KAHN et Alex WRIGHT (2021). « Nearly Fuchsian surface subgroups of finite covolume Kleinian groups », *Duke Math. J.* **70**, p. 503-573.
- Michael KAPOVICH, Bernhard LEEB et Joan PORTI (2014). « Morse actions of discrete groups on symmetric spaces ». arXiv : 1403.7671.
- (2018). « A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and euclidean buildings », *Geom. Topol.* **22**, p. 3827-3923.
- Fanny KASSEL (2019). « Geometric structures and representations of discrete groups », in : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018 (ICM 2018)*. World Scientific, p. 1113-1150.
- Richard P. KENT IV et Christopher J. LEININGER (2008). « Shadows of mapping class groups: capturing convex cocompactness », *Geom. Funct. Anal.* **18**, p. 1270-1325.
- Anthony W. KNAPP (2002). *Lie groups beyond an introduction*. T. 140. Progress in mathematics. Deuxième édition. Boston, MA : Birkhäuser Boston, Inc.
- Alex KONTOROVICH, Darren D. LONG, Alexander LUBOTZKY et Alan W. REID (2019). « What is... a thin group? », *Notices Amer. Math. Soc.* **66**, p. 905-910.

- François LABOURIE (2006). « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », *Invent. Math.* **165**, p. 51-114.
- Mark LACKENBY (2010). « Surface subgroups of Kleinian groups with torsion », *Invent. Math.* **179**, p. 175-190.
- Christopher J. LEININGER et Alan W. REID (2006). « A combination theorem for Veech subgroups of the mapping class group », *Geom. Funct. Anal.* **16**, p. 403-436.
- Darren D. LONG et Alan W. REID (2013). « Constructing thin groups », in : *Proceedings of the Hot Topics workshop on Thin groups and super-strong approximation*. T. 61. MSRI Publications, p. 151-166.
- (2016). « Thin surface subgroups in cocompact lattices in $SL(3, \mathbb{R})$ », *Illinois J. Math.* **60**. Special issue to celebrate the work of Wolfgang Haken, p. 39-53.
- Darren D. LONG, Alan W. REID et Morwen THISTLETHWAITE (2011). « Zariski dense surface subgroups in $SL(3, \mathbb{Z})$ », *Geom. Topol.* **15**, p. 1-9.
- Darren D. LONG et Morwen THISTLETHWAITE (2018). « Zariski dense surface subgroups in $SL(4, \mathbb{Z})$ », *Exp. Math.* **27**, p. 82-92.
- (2020). « Zariski dense surface subgroups in $SL(2k + 1, \mathbb{Z})$ ». Prépublication.
- Ricardo MAÑÉ, Paulo SAD et Dennis SULLIVAN (1983). « On the dynamics of rational maps », *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **16**, p. 193-217.
- Joseph D. MASTERS et Xingru ZHANG (2008). « Closed quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic knot complements », *Geom. Topol.* **12**, p. 2095-2171.
- (2009). « Quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic link complements ». arXiv:0909.4501.
- John MILNOR (1964). « On the Betti numbers of real varieties », *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**, p. 275-280.
- Pierre PANSU (1995). « Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité », *Astérisque* **227**. Séminaire Bourbaki, Exposé 778, p. 69-105.
- Maria Beatrice POZZETTI (2019). « Higher rank Teichmüller theories », *Astérisque* **422**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1159, p. 327-354.
- Alan W. REID (2006). « Surface subgroups of mapping class groups », in : *Problems on mapping class groups and related topics*. T. 74. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI : American Mathematical Society, p. 257-268.
- John R. STALLINGS (1968). « On torsion free groups with infinitely many ends », *J. Algebra* **2**, p. 312-334.
- William P. THURSTON (1997). *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. T. 35. Princeton Mathematical Series. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Jacques TITS (1972). « Free subgroups in linear groups », *J. Algebra* **20**, p. 250-270.
- Friedhelm WALDHAUSEN (1968). « On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large », *Ann. of Math.* **87**, p. 56-88.
- Daniel T. WISE (2021). *The structure of groups with a quasiconvex hierarchy*. Annals of Mathematics Studies. À paraître. Princeton University Press.
- Joseph A. WOLF (1962). « Discrete groups, symmetric spaces, and global holonomy », *Amer. J. Math.* **84**, p. 527-542.

Fanny KASSEL

CNRS et Laboratoire Alexander Grothendieck
Institut des Hautes Études Scientifiques
Université Paris-Saclay
35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
E-mail : kassel@ihes.fr