Séminaire BOURBAKI Janvier 2020
72e année, 2019–2020, nO 1173

PHÉNOMÈNES DE TYPE RATNER DANS LES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE VOLUME INFINI [d'après McMullen, Mohammadi, Oh, Benoist, ...]

par **Nicolas Tholozan**

INTRODUCTION

Au début des années 1990, Marina Ratner démontre un ensemble de théorèmes de « rigidité » dans un contexte très général de dynamique homogène : soit G un groupe de Lie semi-simple, Γ un réseau de G et H un sous-groupe de Lie de G. On s'intéresse à l'action à droite du sous-groupe H sur le quotient $\Gamma\backslash G$ ou, dualement, à l'action à gauche de Γ sur l'espace homogène G/H. Dans ce contexte, les théorèmes de Ratner classifient les fermés et les mesures invariantes, à condition que le groupe H contienne « suffisamment » d'éléments unipotents. Citons plus précisément un de ces théorèmes :

Théorème 0.1 (Ratner, 1991). — *Supposons le groupe H engendré par ses sous-groupes unipotents. Alors, pour tout point x de $\Gamma\backslash G$, il existe un sous-groupe H' de G contenant H tel que*

$$\overline{xH} = xH' .$$

Dans les applications concrètes, on peut souvent lister les sous-groupes de G contenant H et donc classifier les adhérences possibles de H-orbites. En outre, si x est la classe à gauche de $g \in G$, alors xH' est fermé dans $\Gamma\backslash G$ si et seulement si $gH'g^{-1}$ intersecte Γ en un réseau de $gH'g^{-1}$. Cette condition n'est pas générique et la plupart des H-orbites sont donc denses.

Les applications retentissantes de ces théorèmes sont nombreuses, tant en arithmétique qu'en géométrie. Du côté arithmétique, le théorème 0.1 contient par exemple la célèbre *conjecture d'Oppenheim*, démontrée quelques années auparavant par Margulis :

Théorème 0.2 (Margulis, 1989). — *Soit q une forme quadratique de signature $(p, n-p)$ sur $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 3$ et $0 < p < n$. Si q n'est pas multiple d'une forme quadratique à coefficients entiers, alors les valeurs prises par q sur le réseau $\mathbb{Z}^n$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Raghunathan avait en effet remarqué que ce théorème est équivalent au fait que toute orbite bornée de $H = \mathrm{SO}(2,1)$ sur $\Gamma\backslash G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ est compacte.

Ici, nous nous intéresserons plutôt à l'application géométrique suivante, obtenue indépendamment par Shah :

Théorème 0.3 (Ratner, 1991 ; Shah, 1991). — *Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ une variété hyperbolique compacte* [(1)] *de dimension* 3 *et P un plan totalement géodésique de* $\mathbb{H}^3$. *Alors la projection de P dans M est soit fermée, soit dense.*

Là encore le théorème découle directement du théorème de Ratner appliqué à $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ et $H = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Des travaux récents de McMullen, Mohammadi et Oh (2018) et Benoist et Oh (2018) généralisent ce théorème à une vaste classe de variétés hyperboliques de volume infini, en adaptant certains arguments développés par Margulis dans sa résolution de la conjecture d'Oppenheim. L'objet de ce texte est de présenter ces résultats, qui sont énoncés de façon plus précise à la fin de la section 1, après quelques rappels sur la géométrie des variétés hyperboliques. Dans la section 2, nous reformulons ces théorèmes dans le langage de la dynamique homogène. Dans la section 3, nous donnons une preuve presque complète du théorème 0.3, adaptée des arguments de McMullen–Mohammadi–Oh. Enfin, dans la section 4, nous présentons les nouvelles idées introduites par ces auteurs pour étendre le théorème 0.3 au cas de variétés convexe-cocompactes.

1. VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

1.1. L'espace hyperbolique (de dimension 3)

Il y a de nombreuses façons de présenter l'espace hyperbolique de dimension 3. Nous optons ici pour le modèle de la boule unité conformément plate dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Nous définissons donc :

Définition 1.1. — *L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ est la boule ouverte de centre* 0 *de rayon* 1 *dans $\mathbb{R}^3$ munie de la métrique riemannienne*

$$\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{(1 - (x^2 + y^2 + z^2))^2}\,.$$

L'espace hyperbolique est homogène sous l'action du groupe de ses isométries. Mieux : le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ agit simplement transitivement sur les repères orthonormés, i.e. les quadruplés (p, e, u, v) où p est un point de $\mathbb{H}^3$ et (e, u, v) une base orthonormée de $T_p\mathbb{H}^3$. On notera G le sous-groupe d'indice 2 des isométries préservant l'orientation.

Notons o le repère orthonormé $(0, e_1, e_3, -e_2)$, où 0 désigne l'origine de $\mathbb{R}^3$ vu comme point de $\mathbb{H}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, vue comme base orthonormée de $T_0\mathbb{H}^3$. [(2)] Alors l'application

$$g \mapsto g \cdot o$$

1. La théorie de Ratner s'applique plus généralement aux variétés de volume fini. Nous avons choisi ici de nous restreindre à l'énoncé compact par souci de cohérence avec le reste du texte.

2. Ce choix peu conventionnel permet que, via l'identification de G avec $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui nous a semblé la plus naturelle, le sous groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ s'identifie bien au stabilisateur du plan engendré par les deux premiers vecteurs du repère o.

identifie G avec l'espace $F\mathbb{H}^3$ des repères orthonormés directs, et l'application

$$g \mapsto g \cdot 0$$

identifie $\mathbb{H}^3$ avec le quotient à droite G/K, où K désigne le groupe des isométries linéaires directes de $\mathbb{R}^3$, qui agit isométriquement sur $\mathbb{H}^3$ en fixant 0.

On appelle *bord à l'infini* de $\mathbb{H}^3$ —et on note $\partial\mathbb{H}^3$— la sphère unité $\mathbb{S}^2$ munie de sa structure conforme. L'action de G sur $\mathbb{H}^3$ s'étend en une action sur $\partial\mathbb{H}^3$ par transformations conformes et, réciproquement, toute transformation conforme de $\partial\mathbb{H}^3$ s'étend en une unique isométrie de $\mathbb{H}^3$. Via la projection stéréographique de $\mathbb{S}^2$ depuis le point $(0, 0, 1)$ sur le plan $\{z = 0\}$, on identifie le groupe G au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\pm \mathrm{Id}$ agissant sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par homographies.

Les *géodésiques* de $\mathbb{H}^3$ sont les arcs de cercle et les segments de droites orthogonaux à la sphère unité $\mathbb{S}^2$. Si S est une sphère euclidienne ou un plan dans $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\mathbb{S}^2$, alors $P = S \cap \mathbb{H}^3$ est une sous-variété totalement géodésique de $\mathbb{H}^3$ de dimension 2, qu'on appellera donc un *plan*.

Le groupe G agit transitivement sur les géodésiques et sur les plans de $\mathbb{H}^3$. Notons P_o le plan orienté de $\mathbb{H}^3$ d'équation $y = 0$ et H son stabilisateur dans G. Alors l'application

$$g \mapsto g \cdot P_o$$

identifie l'espace $\mathcal{P}$ des plans orientés de $\mathbb{H}^3$ au quotient à droite G/H. Via la projection stéréographique, le groupe H est identifié au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, qui agit sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en préservant de demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^+ = \{x + iy \mid y > 0\}$.

Tout plan P de $\mathbb{H}^3$ possède un bord à l'infini ∂P qui est un cercle de $\partial\mathbb{H}^3$ et, réciproquement, tout cercle de $\partial\mathbb{H}^3$ est le bord à l'infini d'un unique plan de $\mathbb{H}^3$. L'espace $\mathcal{P}$ est donc aussi l'espace des cercles orientés de $\partial\mathbb{H}^3$.

Rappelons enfin qu'un *horocycle* et une *horosphère* désignent réciproquement un cercle et une sphère contenus dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ et tangents à $\partial\mathbb{H}^3$ en un unique point (ou, plus précisément, le complémentaire de ce point de tangence dans le cercle ou la sphère). Les horocycles et horosphères sont les orbites de l'action sur $\mathbb{H}^3$ des sous-groupes unipotents de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

1.2. 3-variétés hyperboliques et groupes kleinéens

Une *3-variété hyperbolique* est une variété différentielle de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante -1. Elle est *complète* si toutes ses géodésiques se prolongent en temps infini. Sans perte de généralité, on supposera toujours que nos variétés sont orientées.

Soit M une variété hyperbolique complète. Le revêtement universel de M est isomorphe à $\mathbb{H}^3$, et M s'identifie donc au quotient de $\mathbb{H}^3$ par un *groupe kleinéen* Γ, c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Les propriétés topologiques et géométriques de M se trouvent être étroitement liées aux propriétés dynamiques de l'action de Γ sur $\partial\mathbb{H}^3$.

Définition 1.2. — *Un groupe kleinéen est* élémentaire *s'il fixe un point dans* $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ *ou une géodésique de* $\mathbb{H}^3$. *Il est* Zariski dense [3] *s'il est non élémentaire et ne préserve pas un plan de* $\mathbb{H}^3$.

Proposition 1.3. — *Soit* Γ *un groupe kleinéen non élémentaire de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. *Alors :*
— *l'action de* Γ *sur* $\partial\mathbb{H}^3$ *admet un unique fermé invariant minimal, noté* Λ_Γ *;*
— Γ *agit proprement discontinûment sur le complémentaire de* Λ_Γ, *noté* Ω_Γ.

On appelle Λ_Γ *l'ensemble limite* de Γ et son complémentaire Ω_Γ le *domaine de discontinuité* de Γ. Le quotient $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ peut être vu comme le bord conforme de $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$. Plus précisément, le quotient

$$\overline{M} = \Gamma\backslash(\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\Gamma)$$

est une variété à bord qui peut être munie d'une métrique riemannienne dont la restriction à M est conforme à la métrique hyperbolique, et dont la restriction au bord $\partial M = \Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ est dans la classe conforme héritée de $\partial\mathbb{H}^3$.

Définition 1.4. — *L'enveloppe convexe de* Λ_Γ, *notée* $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$, *est le plus petit convexe fermé non vide de* $\mathbb{H}^3$ *invariant par* Γ. *Son quotient par* Γ *est le* cœur convexe *de* M, *noté* $\mathrm{Core}(M)$.

On notera également $\mathrm{Conv}^*(\Lambda_\Gamma)$ l'intérieur de $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ et $M^* = \Gamma\backslash\mathrm{Conv}^*(\Lambda_\Gamma)$ l'intérieur de $\mathrm{Core}(M)$.

Le complémentaire de $\mathrm{Core}(M)$ dans M est homéomorphe à $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma \times \mathbb{R}_+^*$. Ses composantes connexes sont parfois appelées *vasques* de M. Notons que $\overline{M}$ se rétracte par déformation sur $\mathrm{Core}(M)$, qui capture donc toute la topologie de $\overline{M}$. En fait, dès que Γ est Zariski-dense, $\mathrm{Core}(M)$ est d'intérieur non vide et $\overline{M}$ est homéomorphe à $\mathrm{Core}(M)$.

On peut maintenant introduire les notions de groupe kleinéen *convexe-cocompact* et *géométriquement fini*.

Définition 1.5. — *Le groupe* Γ (*ou la variété* $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$) *est* convexe-cocompact(e) *si* $\mathrm{Core}(M)$ *est compact, et* géométriquement fini(e) *si le* ε*-voisinage de* $\mathrm{Core}(M)$ *est de volume fini pour* $\varepsilon > 0$. [4]

La pertinence de ces définitions est soulignée par leurs nombreuses autres caractérisations (discutées entre autres dans Bowditch (1993)). Par exemple, Γ est convexe-cocompact si et seulement s'il est de type fini et *quasi-isométriquement plongé* dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Il est géométriquement fini si et seulement si $\mathrm{Core}(M)$ est la réunion d'une partie compacte et d'un nombre fini de *pointes*, dont le groupe fondamental fixe une horosphère de $\partial\mathbb{H}^3$.

3. Le lecteur pourra se convaincre que cette définition *ad hoc* est bien équivalente à la densité de Γ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ vu comme groupe algébrique réel et muni de sa topologie de Zariski.

4. Lorsque Γ est Zariski dense, M est géométriquement finie si et seulement si $\mathrm{Core}(M)$ est de volume fini.

Exemple 1.6. — Si Γ est un réseau de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, alors $\Lambda_\Gamma = \partial\mathbb{H}^3$ et $M = \mathrm{Core}(M) = \overline{M}$ est géométriquement finie. De plus, Γ est convexe-cocompact si et seulement s'il est cocompact.

Exemple 1.7. — Soit Γ un réseau uniforme de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Alors Λ_Γ est le cercle $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, son complémentaire est l'union des demi-plans supérieur et inférieur, et $\mathrm{Conv}(\Gamma)$ est le plan P_o. La variété $\overline{M}$ est homéomorphe à $\Gamma\backslash P_o \times [-1,1]$. On dit que Γ est un groupe *fuchsien.*

Exemple 1.8. — Soit Γ un groupe fuchsien et $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ un morphisme suffisamment proche de l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Alors $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$ est une courbe de Jordan et son complémentaire est l'union disjointe de deux disques ouverts. La variété $\overline{M}$ est encore homéomorphe à $\rho(\Gamma)\backslash P_o \times [-1,1]$, mais son coeur convexe est maintenant d'intérieur non vide. On dit que $\rho(\Gamma)$ est un groupe *quasi-fuchsien.*

1.3. Topologie des 3-variétés

Pour énoncer précisemment les résultats de McMullen–Mohammadi–Oh, nous devons encore introduire certaines restrictions topologiques sur les 3-variétés étudiées. Dans cette section, $\overline{M}$ désigne une variété orientable compacte à bord de dimension 3. On supposera en outre que le bord de $\overline{M}$ ne contient pas de sphère ni de tore.

Une sphère plongée dans $\overline{M}$ est dite *incompressible* si elle ne borde pas une boule. Une surface connexe Σ de genre supérieur ou égal à 1 plongée dans $\overline{M}$ est dite *incompressible* si le morphisme $\pi_1(\Sigma) \to \pi_1(\overline{M})$ est injectif.

On dit que $\overline{M}$ est *irréductible* si elle ne contient pas de sphère incompressible (autrement dit, si $\overline{M}$ n'est pas la somme connexe de deux variétés). On dit que le bord de $\overline{M}$ est incompressible si chacune de ses composantes connexes est incompressible. Enfin, la variété $\overline{M}$ est dite *atoroïdale* si $\overline{M}$ ne contient pas de tore incompressible.

Remarque 1.9. — On peut montrer que toute variété hyperbolique convexe-cocompacte est irréductible et atoroïdale. Ces deux conditions topologiques sont donc nécessaires à l'hyperbolisation d'une variété.

Le *double* de $\overline{M}$ est la variété obtenue en recollant deux copies de $\overline{M}$ le long de leur bord. Plus formellement, le double de $\overline{M}$ est la variété $\overline{M} \times \{0,1\}/\sim$, où $(x,0) \sim (x,1)$ pour tout $x \in \partial M$.

DÉFINITION 1.10. — *On dira que $\overline{M}$ est* acylindrique *si son double est irréductible et atoroïdal.*

Cette définition non standard a l'avantage d'être synthétique. Elle implique que $\overline{M}$ est elle-même irréductible et atoroïdale, mais aussi que ∂M est incompressible (sans quoi $\overline{M}$ contiendrait un disque dont le double formerait une sphère incompressible) et que $\overline{M}$ ne contient pas de *cylindre essentiel*, dont le double formerait un tore incompressible.

Thurston a démontré que toutes les variétés acylindriques à bord non vide sont hyperbolisables. Plus précisément, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.11 (THURSTON, 1982). — *Soit* $\overline{M}$ *une variété compacte à bord non vide acylindrique. Alors :*

- *Pour tout choix de structure conforme sur* ∂M*, il existe un unique sous-groupe convexe-cocompact* Γ *de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *pour lequel il existe un difféomorphisme de* $\overline{M}$ *dans* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\Gamma$ *qui est conforme en restriction à* ∂M*.*
- *Il existe un unique sous-groupe convexe-cocompact* Γ_0 *de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *pour lequel* M *est difféomorphe à* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3 \sqcup \Omega_{\Gamma_0}$ *et tel que le bord de* $\mathrm{Conv}(\Lambda_{\Gamma_0})$ *est une réunion disjointe de plans de* $\mathbb{H}^3$*.*

À partir de maintenant, on dira qu'une variété hyperbolique convexe-cocompacte $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ est acylindrique si $\overline{M}$ est acylindrique, et on dira que M est *à bord géodésique* si le bord de $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ est une union disjointe de plans (ce que McMullen, Mohammadi et Oh appellent une variété *rigide*).

Remarque 1.12. — Si M est convexe-cocompacte à bord géodésique, alors :

- soit Γ est fuchsien, et $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ est réduit à 1 plan,
- soit Γ est Zariski dense, $\overline{M}$ est homéomorphe à $\mathrm{Core}(M)$, le double de $\overline{M}$ est hyperbolisable, et M est donc acylindrique.

Le théorème 1.11 est à la fois une conséquence et une étape clé de la géométrisation des variétés Haken. Très grossièrement, soit M une variété compacte sans bord de dimension 3 irréductible et atoroïdale qui est *Haken*, i.e. contient une surface incompressible Σ. Supposons pour simplifier que Σ sépare M en deux variétés à bord N_1 et N_2 qui sont acylindriques. Thurston construit par récurrence des structures hyperboliques à bord totalement géodésique sur N_1 et N_2, puis déforme ces structures hyperboliques en modifiant leurs structures conformes au bord, et montre qu'il existe un (unique) choix de structures conformes sur ∂N_1 et ∂N_2 pour lesquelles les structures hyperboliques de N_1 et N_2 se recollent en une structure hyperbolique sur M. Sans entrer plus dans les détails, nous retiendrons que les variétés convexes cocompactes acylindriques sont les « pièces de construction » du théorème d'hyperbolisation de Thurston. Pour plus de précisions sur ce merveilleux sujet, on pourra par exemple consulter OTAL (1998).

Remarque 1.13. — Le programme de géométrisation de Thurston nécessite plus généralement d'hyperboliser des variétés compactes à bords toriques. Cela nécessite d'adapter les définitions d'« atoroïdal » et « acylindrique », après quoi la stratégie fonctionne de façon similaire, avec des variétés hyperboliques qui ne sont plus convexe-cocompactes mais seulement géométriquement finies.

1.4. Les théorèmes de McMullen–Mohammadi–Oh

Nous pouvons enfin énoncer les résultats de McMullen, Mohammadi et Oh qui généralisent le théorème 0.3 aux variétés convexe-cocompactes acylindriques.

Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ une variété hyperbolique convexe-cocompacte. On appelle *plan* de M l'image par l'application de revêtement d'un plan de $\mathbb{H}^3$. Les auteurs ont d'abord étudié le cas où M est à bord géodésique. Ils classifient alors complètement les adhérences possibles des plans de M.

Théorème 1.14 (McMullen, Mohammadi et Oh, 2017)
Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ *une variété convexe-cocompacte acylindrique à bord géodésique et* P *un plan de* M*. Alors :*
- *Si* P *intersecte* $\mathrm{Core}(M)$*, alors* P *est soit fermé, soit dense dans* M*,*
- *Si* P *n'intersecte pas* $\mathrm{Core}(M)$*, alors* P *est soit fermé, soit dense dans la vasque qui le contient.*

Puis, dans un deuxième article, les auteurs obtiennent un résultat moins complet dans le cadre plus général où le bord du cœur convexe n'est plus supposé totalement géodésique. Rappelons que M^* désigne l'intérieur du coeur convexe de M.

Théorème 1.15 (McMullen, Mohammadi et Oh, 2018)
Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ *une variété convexe-cocompacte acylindrique et* P *un plan de* M *qui intersecte* M^**. Alors, soit* $P \cap M^*$ *est fermé dans* M^**, soit* P *est dense dans* M*.*

Remarque 1.16. — Lorsque le bord de $\mathrm{Core}(M)$ est totalement géodésique, on montre que, si P intersecte l'intérieur du cœur convexe, alors $P \cap M^*$ est fermé dans M^* si et seulement si P est fermé dans M. On ne sait malheureusement pas si cette équivalence reste valide en général.

Remarque 1.17. — Soit P un plan de M. Alors $P \cap M^*$ est fermé dans M^* si et seulement s'il y est *proprement immergé*. Quelques précisions à ce sujet seront données dans la section 4.5.

Remarque 1.18. — Lorsque Γ est un groupe fuchsien, l'inersection d'un plan P de $\mathbb{H}^3$ avec $\mathrm{Conv}(\Gamma)$ est une géodésique, et l'adhérence de P dans M peut donc être aussi générale que l'adhérence d'une géodésique dans une surface hyperbolique. À cause de la dynamique hyperbolique du flot géodésique, cette adhérence peut prendre des formes très diverses, et la conclusion du théorème 1.14 ne se généralise pas à ce cas. McMullen, Mohammadi et Oh montrent que ce phénomène persiste pour certaines variétés quasi-fuchsiennes. Ces exemples mettent en évidence l'importance de l'hypothèse « acylindrique » des théorèmes 1.14 et 1.15.

Remarque 1.19. — McMullen, Mohammadi et Oh démontrent au passage un certain nombre de résultats plus généraux, dont il ressort que la nature de l'adhérence d'un plan P de $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ dépend fortement des propriétés de l'ensemble $\partial\widetilde{P} \cap \Lambda_\Gamma$, où $\widetilde{P}$ est un plan de $\mathbb{H}^3$ qui se projette sur P. Pour une variété convexe-cocompacte de volume infini quelconque, les auteurs démontrent par exemple que si $\partial\widetilde{P}$ est contenu dans Λ_Γ, alors P est une surface *compacte* de M.

Mentionnons enfin quelques prolongements des théorèmes 1.14 et 1.15.
- Benoist et Oh (2018) ont étendu le théorème 1.15 aux 3-variétés hyperboliques géométriquement finies.

— McMullen, Mohammadi et Oh (2016) utilisent le théorème 1.14 pour classifier les adhérences possibles des horocycles d'une 3-variété hyperbolique convexe-cocompacte à bord géodésique.
— Ces travaux ont été généralisés par Lee et Oh (2019) à la dimension supérieure, toujours pour des variétés convexe-cocompactes à bord géodésique. Sous cette hypothèse, Lee et Oh classifient les adhérences des horocycles et en déduisent tous les « théorèmes de Ratner topologiques » que l'on puisse espérer dans ce cadre.
— Ces résultats sont à rapprocher d'un théorème de Dal'Bo (2000) d'après lequel, dans une variété hyperbolique géométriquement finie (de dimension quelconque), les horosphères sont soit fermées, soit denses.

2. DYNAMIQUE HOMOGÈNE

Les théorèmes de McMullen–Mohammadi–Oh, comme ceux de Ratner, se reformulent dans le langage de la dynamique homogène. Nous détaillons ici ce point de vue qui, bien que classique, nécessite toujours quelques précautions.

2.1. Actions à droite sur le fibré des repères

Rappelons que l'application $g \mapsto g \cdot o$ identifie le groupe $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ au fibré des repères directs $F\mathbb{H}^3$ de $\mathbb{H}^3$. Soit K le stabilisateur de 0 dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Alors, pour tout g dans G, le sous-ensemble gK s'identifie à l'ensemble des repères orthonormés directs basés au point $g \cdot 0$, et la fibration $F\mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ s'identifie donc à la fibration $G \to G/K$.

Soit P un plan orienté de $\mathbb{H}^3$. On dit que le repère (p,e,u,v) est tangent à P si $p \in P$ et si (e,u) est une base directe de T_pP. Avec nos conventions, le repère canonique o est bien tangent au plan P_o stabilisé par $H = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Les autres repères tangents à P_o sont les images du repère canonique par l'action à gauche de H.

Notons $FP \subset F\mathbb{H}^3$ l'ensemble des repères orthonormés directs de $\mathbb{H}^3$ tangents à P. L'ensemble FP est l'image de FP_o par un élément g de G envoyant P_o sur P, et s'identifie dont à $gH \cdot o \simeq H$ via l'identification $G \simeq F\mathbb{H}^3$. Les plans de $\mathbb{H}^3$ s'identifient donc aux projections dans G/K des H-orbites à droite dans G.

On identifie de la même façon certains sous-ensembles géométriques de $\mathbb{H}^3$ aux projections d'orbites à droite de sous-groupes de G. Soit $x = (p,e,u,v)$ un repère orthonormé, et notons $x^+ \in \partial\mathbb{H}^3$ l'extrémité du rayon géodésique partant de p dirigé par e. Introduisons trois sous-groupes à 1 paramètre de G :

$$A = \{a_t, t \in \mathbb{R}\}\ ,\ \text{où } a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\ ,$$

$$U = \{u_t, t \in \mathbb{R}\}\ ,\ \text{où } u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

$$V = \{v_t, t \in \mathbb{R}\}\ ,\ \text{où } v_t = \begin{pmatrix} 1 & it \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Alors :

— La géodésique passant par p dirigée par e s'identifie à la projection de xA. L'action à droite de A sur G est appelée *flot géodésique.*

— L'horocycle passant par p, dirigé par u et tangent à $\partial\mathbb{H}^3$ en x^+ s'identifie à la projection de xU. L'action à droite de U sur G est appelée *flot horocyclique.*

— L'horocycle passant par p, dirigé par v et tangent à $\partial\mathbb{H}^3$ en x^+ s'identifie à la projection de xV.

Notons que toutes ces identifications dépendent du choix du point base o dans $F\mathbb{H}^3$.

2.2. Reformulation du théorème 1.15

Soit maintenant $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ une variété hyperbolique complète. Le fibré des repères orthonormés directs FM de M s'identifie au quotient $\Gamma\backslash G$. Comme la projection de FM sur M est propre, comprendre l'adhérence d'un plan P de M revient essentiellement à comprendre l'adhérence de FP dans FM, c'est-à-dire l'adhérence d'une H-orbite à droite de $\Gamma\backslash G$.

Un fermé H-invariant à droite X de $\Gamma\backslash G$ est la projection d'un fermé $\widetilde{X}$ de G qui est Γ-invariant à gauche et H-invariant à droite. Ce fermé $\widetilde{X}$ est aussi la préimage d'un fermé Γ-invariant de G/H, qu'on note $\mathcal{P}(X)$. Classifier les fermés H-invariants de $\Gamma\backslash G$ revient donc à classifier les fermés Γ-invariants de G/H.

La dynamique homogène jongle traditionnellement entre ces deux points de vue, et la preuve de McMullen–Mohammadi–Oh n'échappe pas à la règle. Ici, rappelons que G/H s'identifie à l'espace $\mathcal{P}$ des plans de $\mathbb{H}^3$. Ce point de vue permet d'en décrire certains ensembles Γ-invariants :

— L'ensemble $\mathcal{P}_\Lambda$ des plans P tels que

$$\partial P \cap \Lambda_\Gamma \neq \emptyset\ ,$$

— L'ensemble $\mathcal{P}^*$ des plans qui intersectent $\mathrm{Conv}^*(\Lambda_\Gamma)$.

Remarque 2.1. — Un plan P intersecte $\mathrm{Conv}^*(\Lambda_\Gamma)$ si et seulement si P *sépare* Λ_Γ, au sens où Λ_Γ intersecte les deux composantes connexes de $\partial\mathbb{H}^3 \smallsetminus \partial P$.

Notons que $\mathcal{P}^*$ est ouvert et $\mathcal{P}_\Lambda$ est fermé. Si Λ_Γ est connexe —c'est le cas lorsque $\overline{M}$ acylindrique (cf. Proposition 4.8)— $\mathcal{P}^*$ est l'intérieur de $\mathcal{P}_\Lambda$.

Les ensembles $\mathcal{P}_\Lambda$ et $\mathcal{P}^*$ correspondent dualement aux ensembles H-invariants F_Λ et F^* de FM, projections des sous-ensembles $\widetilde{F}_\Lambda$ et $\widetilde{F}^*$ de $F\mathbb{H}^3$, où :

— $\widetilde{F}_\Lambda$ est l'ensemble des repères tangents à un plan de $\mathcal{P}_\Lambda$,

— $\widetilde{F}^*$ est l'ensemble des repères tangents à un plan de $\mathcal{P}^*$.

On peut enfin reformuler le théorème 1.15 dans un cadre de dynamique homogène.

Théorème 2.2 (McMullen, Mohammadi et Oh, 2018)
Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ une variété convexe-cocompacte et acylindrique. Alors :
— *pour tout $x \in F^*$, la H-orbite de x dans $FM \simeq \Gamma\backslash G$ est soit fermée dans F^*, soit dense dans F_Λ.*
— *dualement, pour tout $P \in \mathcal{P}^*$, la Γ-orbite de P dans $\mathcal{P} \simeq G/H$ est soit fermée dans $\mathcal{P}^*$, soit dense dans $\mathcal{P}_\Lambda$.*

3. DÉMONSTRATION DANS LE CAS COMPACT

Dans cette section, nous démontrons le théorème 2.2 dans le cas où le groupe Γ est cocompact, ce qui implique le théorème 0.3. La stratégie générale est la suivante : Soit X l'adhérence d'une H-orbite non fermée de $\Gamma\backslash G$, et Y un fermé U-invariant minimal de X. En utilisant la récurrence de X et Y et la dynamique du sous-groupe unipotent U, on construit beaucoup d'éléments g du normalisateur de U tels que Yg est contenu dans X, ce qui permet in fine de conclure que $X = \Gamma\backslash G$.

Cette technique a été développée par Margulis dans sa preuve de la conjecture d'Oppenheim. Elle donne une première idée des outils utilisés par McMullen–Mohammadi–Oh, et met en évidence l'importance de la dynamique unipotente dans les phénomènes de type Ratner.

3.1. Réduction du problème

Soit x un point de $\Gamma\backslash G$. On définit le *lieu d'accumulation* $\mathrm{Acc}(xH)$ *de* xH par :
— $\mathrm{Acc}(xH) = \overline{xH} \smallsetminus xH$ si l'orbite xH est localement fermée dans $\Gamma\backslash G$,
— $\mathrm{Acc}(xH) = \overline{xH}$ dans le cas contraire.
Notons que $\mathrm{Acc}(xH)$ est un fermé H-invariant, qui est vide si et seulement si xH est fermé.

Supposons donc $\mathrm{Acc}(xH)$ non vide. Le cœur de la preuve est le lemme suivant, qui affirme que $\overline{xH}$ contient « beaucoup » de H-orbites.

Lemme 3.1. — *Il existe $y \in \mathrm{Acc}(xH)$ et V_+ un semi-groupe à 1 paramètre de V tel que*
$$yV_+ \subset \overline{xH}\,.$$

La preuve de ce lemme fera l'objet de la section suivante. Voyons pour l'instant comment il permet de conclure. Le lemme 3.1 implique que le fermé $\mathcal{P}(X)$ dual de X contient $gV_+ \cdot P_o$ pour un certain $g \in G$. La proposition suivante se démontre aisément :

Proposition 3.2. — *Soit V_+ un sous-semi-groupe à* 1 *paramètre de V, et g un élément de G. Alors la réunion*
$$\bigcup_{v \in V_+} gv \cdot \partial P_o$$
est un des deux hémisphères de $\partial\mathbb{H}^3$ délimités par $g \cdot \partial P_o$.

Ainsi, la réunion des bords des plans de $\mathcal{P}(X)$ contient un disque ouvert de $\partial\mathbb{H}^3$. Le lemme suivant conclut alors que $\mathcal{P}(X) = G/H$, et donc que $X = \Gamma\backslash G$.

Lemme 3.3. — *Soit Γ un sous-groupe kleinéen Zariski dense de G et S un fermé Γ-invariant de G/H. Si la réunion*

$$\bigcup_{P\in S} \partial P$$

contient un ouvert de Λ_Γ, alors $S = G/H$.

Idée de preuve. — Voyons $S \subset \mathcal{P}$ comme un ensemble de cercles de $\partial\mathbb{H}^3$. Par minimalité de l'action de Γ sur Λ_Γ, l'union des cercles contenus dans F recouvre tout Λ_Γ. En utilisant la dynamique Nord/Sud des éléments hyperboliques de Γ, on montre ensuite que F contient des cercles passant par n'importe quelle paire de points distincts (x, y). On peut ensuite faire « pivoter » certains de ces cercles autour de leur axe (x, y) en utilisant des éléments hyperboliques de Γ dont les valeurs propres ne sont pas réelles (et qui ont donc une composante de rotation autour de leur axe de translation). De tels éléments existent en abondance car Γ est Zariski dense dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. □

3.2. Renormalisation unipotente

Le cœur du théorème 2.2 dans le cas compact est donc le lemme 3.1, dont la preuve va exploiter la dynamique du sous-groupe unipotent $U \subset H$. Soit Y un fermé U-invariant minimal de $\mathrm{Acc}(xH)$. Remarquons que Y n'est pas une U-orbite fermée puisque Γ ne contient pas d'élément unipotent.

Notons $N = AUV$ le normalisateur de U dans G. Étant donnés E et F deux sous-ensembles de $\Gamma\backslash G$, on définit

$$S(E, F) = \{g \in G \mid Eg \subset F\}\,.$$

Il est clair que $S(E, F)$ est fermé dès que F est fermé. Pour tous $g, h \in G$, on a

$$S(Eg, Fh) = g^{-1}S(E, F)h\,.$$

En particulier, $S(E, F)$ est G_1-invariant à gauche dès que E est G_1-invariant à droite et G_2-invariant à droite dès que F est G_2-invariant à droite. Pour alléger les notations, on note $S(E) = S(E, E)$.

Proposition 3.4. — *L'ensemble $S(Y) \cap AV$ contient un semi-groupe à 1 paramètre L.*

Proposition 3.5. — *L'ensemble $S(Y, X) \cap V$ contient une suite d'éléments distincts g_n qui converge vers* Id.

Le lemme 3.1 se déduit de ces deux propositions en jouant avec L, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A et la compacité de $\mathrm{Acc}(xH)$. Nous ne détaillons pas cette étape pour mieux nous focaliser sur la preuve des deux propositions.

Commençons par quelques remarques simples sur la façon dont le normalisateur N de U interagit avec les ensembles $S(Y)$ et $S(Y, X)$. Ces remarques découlent aisément de la U-invariance de Y et X et de la minimalité de Y.

Proposition 3.6. — *Pour tout $y \in Y$, on a*

$$S(\{y\}, Y) \cap N \subset S(Y)$$

et

$$S(\{y\}, X) \cap N \subset S(Y, X)\,.$$

De plus, $S(Y) \cap N$ est un sous-semi-groupe de N.[5]

La stratégie de la preuve des propositions 3.4 et 3.5 est similaire. Comme Y est minimal pour l'action de U et contenu dans $\mathrm{Acc}(xH)$, tout élément y de Y peut être approché par

— une suite (y_n) de points de Y qui n'appartiennent pas à yU,

— une suite (x_n) de points de X qui n'appartiennent pas à yH.

Écrivons $y_n = y\delta_n$ et $x_n = y\eta_n$, où $\delta_n \in G \smallsetminus U$ et $\eta_n \in G \smallsetminus H$ convergent vers Id. On va renormaliser δ_n et η_n en suivant les U-orbites de y, y_n et x_n, de façon à les faire converger vers des éléments arbitrairement petits de AV et V respectivement.

Démonstration de la proposition 3.4. — Soient (s_n) et (t_n) deux suites de réels. Écrivons

$$y_n u_{s_n} = y u_{t_n} \delta'_n\,.$$

En choisissant convenablement (s_n) et (t_n), on peut faire converger δ'_n vers $\delta' \in AV \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}$ arbitrairement proche de l'identité. Quitte à extraire, on peut supposer que yu_{s_n} converge vers $z \in Y$, et on a alors

$$\delta' \in S(\{z\}, Y) \cap AV \subset S(Y) \cap AV\,.$$

Comme $S(Y) \cap N$ est un sous-semi-groupe fermé de N est que δ' peut être choisi arbitrairement petit, on conclut que $S(Y)$ contient un sous-semi-groupe de AV.

Pour choisir t_n et s_n, écrivons

$$\delta_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\ ,$$

avec a_n, d_n proches de 1 et b_n, c_n proches de 0. On a alors

$$\delta'_n = \begin{pmatrix} a_n - t_n c_n & b_n - t_n d_n + s_n(a_n - tc_n) \\ c_n & a_n + s_n c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_n & b'_n \\ c'_n & d'_n \end{pmatrix}\,.$$

On choisit s_n tel que $\mathbf{Re}(b'_n) = 0$, ce qui revient en un certain sens à choisir $y_n u_{s_n}$ aussi proche que possible de yu_{t_n} dans la U-orbite de y_n. On vérifie que, lorsque t_n croît, la norme d'un des coefficients de δ'_n diverge. Par continuité, on peut donc choisir t_n tel que

(1) $$\max\{|a'_n - 1|, |b'_n|, |c'_n|, |d'_n - 1|\} = \varepsilon\ ,$$

5. En fait, un sous-groupe, mais ce ne sera plus le cas lorsque Γ sera seulement supposé convexe-cocompact.

pour un $\varepsilon > 0$ quelconque. Après extraction, δ'_n converge vers δ'. Il est clair que c'_n tend vers 0, et une estimée un peu plus subtile montre que $\mathbf{Im}(a'_n)$ et $\mathbf{Im}(d'_n)$ tendent vers 0. Enfin $\mathbf{Re}(b'_n) = 0$ par construction de s_n. Ainsi δ' appartient à AV. □

Démonstration de la proposition 3.5. — Comme X est H-invariant, on peut remplacer x_n par $x_n h_n$ pour un $h_n \in H$ bien choisi, et donc supposer

$$\eta_n = \exp(i\ell_n)\ ,$$

où

$$\ell_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & -a_n \end{pmatrix}\ ,$$

avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ proches de 0. Soit (t_n) une suite de réels. Écrivons

$$x_n u_{t_n} = y u_{t_n} \eta'_n\,.$$

En choisissant t_n convenablement, on fait en sorte que η'_n converge vers η' arbitrairement proche de Id dans V. Quitte à extraire, on peut supposer que yu_{t_n} converge vers $z \in Y$ et on a alors $\eta' \in S(\{z\}, X) \subset S(Y, X)$.

Pour choisir t_n, écrivons $\eta'_n = \exp(i\ell'_n)$, où

$$\ell'_n = u_{t_n} \ell_n u_{t_n}^{-1} \begin{pmatrix} a_n - t_n c_n & b_n - 2t_n a_n + t_n^2 c_n \\ c_n & -(a_n - t_n c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_n & b'_n \\ c'_n & -a'_n \end{pmatrix}\,.$$

Si η_n n'appartient pas déjà à V, alors c_n ou a_n est non nul, et la valeur absolue de b'_n tend vers $+\infty$ lorsque t_n tend vers $+\infty$. Par continuité, on peut donc choisir t_n tel que

$$\max\{|a'_n|, |b'_n|, |\gamma'_n|, |\delta'_n|\} = \varepsilon\,. \tag{2}$$

Quitte à extraire, ℓ'_n converge alors vers ℓ' et η'_n vers $\eta' = \exp(i\ell')$.

Il est clair que c'_n tend vers 0. En utilisant le fait que $\mathrm{Tr}(\ell'^2_n) = \mathrm{Tr}(\ell_n^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on montre également que a'_n tend vers 0. On conclut donc que η' appartient à V. □

4. DÉMONSTRATION DANS LE CAS GÉNÉRAL

Supposons maintenant que $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ est seulement convexe-cocompacte. La principale faille des preuves précédentes est que la suite yu_{t_n} n'a pas de raison de rester dans un compact, puisque les U-orbites ne sont plus bornées. On va donc essayer de se restreindre à un compact de FM par rapport auquel l'action de U est « suffisamment récurrente », au sens où la U-orbite d'un point de ce compact revient souvent dans le compact.

Pour être plus précis, introduisons la notion de sous-ensemble *épais* de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1 (McMullen, Mohammadi et Oh, 2017)
Soit $0 < k \leq 1$. *Un sous-ensemble* T *de* $\mathbb{R}$ *est* k-épais *si pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$[-x, -kx] \cup [kx, x] \cap T \neq \{0\}\,.$$

Nous allons construire, pour un k suffisamment petit, un compact A-invariant R_kFM de FM avec la propriétés suivantes :

— pour tout $x \in F^*$, l'orbite xH intersecte R_kFM,

— pour tout $x \in R_kFM$, l'ensemble

$$T_k(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid xu_t \in R_kFM\}$$

est k-épais.

Dans le cas où M est à bord géodésique, l'ensemble R_kFM est l'ensemble non errant du flot géodésique de M. Sa construction dans le cas général est plus subtile.

Nous verrons dans la section 4.3 comment ces propriétés permettent d'adapter le lemme 3.1 et de conclure la preuve du théorème 2.2.

4.1. Ensemble non errant du flot géodésique

L'*ensemble non errant* du flot géodésique de M est l'ensemble des $x \in FM$ dont l'orbite à droite sous l'action de A est bornée. On le note RFM. C'est aussi la projection dans FM de l'ensemble $RF\widetilde{M}$ formé des repères $(p, e, u, v) \in F\mathbb{H}^3$ tels que la géodésique passant par p et dirigée par e a ses extrémités dans Λ_Γ.

Pour tout $x \in RFM$, définissons

$$T(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid xu_t \in RFM\}\,.$$

Les propriétés suivantes découlent aisément de la définition de $T(x)$ et de la relation de commutation $a_s u_t a_s^{-1} = u_{te^s}$:

Proposition 4.2. — *Pour tout $x \in RFM$, tout $t \in T(x)$ et tout $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$T(xu_t) = T(x) - t$$

et

$$T(xa_s) = e^{-s}T(x)$$

On dit qu'un sous-ensemble T de $\mathbb{R}$ est *uniformément k-épais* si $0 \in T$ et si $T - t$ est k-épais pour tout $t \in T$. (Ici, $T - t$ désigne le translaté de T par l'application $x \mapsto x - t$.) On peut enfin définir l'ensemble R_kFM introduit dans McMullen, Mohammadi et Oh (2018) :

Définition 4.3. — *Soit $0 < k \leq 1$. L'ensemble R_kFM est l'ensemble des $x \in RFM$ tels que $T(x)$ contient un ensemble uniformément k-épais.*

Cette définition astucieuse a le bon goût de vérifier les premières propriétés désirées :

Lemme 4.4 (McMullen, Mohammadi et Oh, 2018, Proposition 4.2)
L'ensemble R_kFM est un compact A-invariant, et pour tout $x \in R_kFM$, l'ensemble

$$T_k(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid xu_t \in R_kFM\}$$

est uniformément k-épais.

Pour le moment, il se pourrait toutefois que R_kFM soit vide. Pour montrer que ce n'est pas le cas, il nous faut mieux comprendre l'ensemble $T(x)$.

4.2. Intersection de Λ_Γ et ∂P

Soit $x = (p, e, u, v)$ un point de $RF\widetilde{M}$. On note x^- et $x^+ \in \partial\mathbb{H}^3$ les extrémités de la géodésique passant par p et dirigée par e, et P_x plan géodésique passant par p et tangent à e et u.

Lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, l'extrémité $(xu_t)^+$ est fixée, tandis que l'extrémité $(xu_t)^-$ parcourt $\partial P \smallsetminus \{x^+\}$. Or xu_t appartient à $RF\widetilde{M}$ si et seulement si $(xu_t)^+$ et $(xu_t)^-$ appartiennent à Λ_Γ. Par conséquent, l'ensemble $T(x)$ des temps de récurrence du flot unipotent se déduit de l'intersection de ∂P avec Λ_Γ. Plus précisément :

Proposition 4.5. — *L'ensemble $T(x)$ est l'image de $(\partial P \cap \Lambda_\Gamma) \smallsetminus \{x^+\}$ par l'isométrie de P dans le demi-plan de Poincaré qui envoie x sur i et x^+ sur ∞.*

Cette remarque nous invite à réinterpréter la propriété de k-épaisseur d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ comme une propriété d'un sous-ensemble du bord d'un plan hyperbolique. C'est ce que font les définition et proposition suivantes :

Définition 4.6. — *Soit P un plan hyperbolique et κ un fermé de ∂P. On dit que κ est de* module supérieur à δ *si pour toute paire d'intervalles disjoints (a, b) et $(c, d) \subset \partial P \smallsetminus \kappa$, les géodésiques d'extrémités (a, b) et (c, d) sont à distance supérieure à δ dans P.* [6]

Proposition 4.7. — *Pour tout $0 < k < 1$, il existe $\delta > 0$ tel qu'un fermé T de $\mathbb{R}$ est uniformément k-épais si et seulement si $0 \in T$ et si $T \cup \{\infty\} \subset \partial\mathbb{H}^+$ est de module supérieur à $\delta(k)$.*

Pour décrire R_kFM, il nous faut donc trouver les plans P de $\mathbb{H}^3$ pour lesquels $\partial P \cap \Lambda_\Gamma$ contient un fermé de module supérieur à $\delta(k)$. C'est là qu'intervient l'hypothèse *acylindrique*, au travers de ses conséquences sur la topologie de Λ_Γ.

Proposition 4.8. — *Supposons M acylindrique. Alors Λ_Γ est un* tapis de Sierpinski, *c'est-à-dire que Ω_Γ est l'union disjointe d'une infinité d'ouverts $\{\Omega_i, i \in I\}$ dont les adhérences $\overline{\Omega_i}$ sont deux à deux disjointes et homéomorphes à des disques fermés.*

De plus, Λ_Γ est de module strictement positif, *c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $i \neq j \in I$, l'anneau $\partial\mathbb{H}^3 \smallsetminus (\overline{\Omega_i \cup \Omega_j})$ a un module conforme supérieur à δ.*

6. Cette définition n'est pas celle donnée dans McMullen, Mohammadi et Oh (2018), mais elle lui est équivalente, et peut se reformuler comme une borne uniforme sur le birapport des quatre points a, b, c, d.

Cas où M_Γ est à bord géodésique. — McMullen, Mohammadi et Oh (2017) ont d'abord traité le cas où le bord du cœur convexe de M est totalement géodésique. On comprend alors mieux la géométrie de Λ_Γ, et il est plus facile de décrire son intersection avec un cercle.

En effet, dans ce cas, les ouverts Ω_i sont de vrais disques, et $\partial\Omega_i$ est le bord à l'infini d'un plan P_i. Les P_i forment les composantes de bord de $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$, et la propriété de module positif se déduit du fait que la distance entre deux composantes de bord est uniformément minorée par un $\delta > 0$.

Cette minoration implique aisément que l'intersection $\partial P \cap \Lambda_\Gamma$, lorsqu'elle contient au moins deux points, est un fermé de module supérieur à δ. On en déduit l'existence d'un $k > 0$ tel que $R_kFM = RFM$. Autrement dit, pour tout $x \in RFM$, l'ensemble des temps t tels que $xu_t \in RFM$ est k-épais pour un k indépendant de x.

Cas général. — Le cas général est plus compliqué car les bords des composantes Ω_i de Ω_Γ sont typiquement des courbes de Jordan fractales, dont l'intersection avec le cercle ∂P est difficilement contrôlable. Cette intersection peut par exemple avoir des points isolés, auquel cas elle n'est pas de module positif.

L'idée centrale de McMullen, Mohammadi et Oh (2018) est l'introduction du sous-ensemble R_kFM, qui permet entre autre de se débarasser de ces points isolés. En utilisant la positivité du module de Λ_Γ, les auteurs démontrent le lemme technique suivant :

Lemme 4.9. — *Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ une variété convexe-cocompacte acylindrique. Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout plan P de $\mathbb{H}^3$ qui sépare Λ_Γ, l'intersection de ∂P avec Λ_Γ contient un ensemble de Cantor de module supérieur à δ.*

Corollaire 4.10. — *Il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in F^*$, l'orbite xH intersecte R_kFM.*

On a donc construit un compact R_kFM qui vérifie de bonnes propriétés de récurrence vis-à-vis du flot horocyclique, et qui « voit » toute la dynamique de H restreinte à F^*.

4.3. Retour sur le lemme 3.1

On fixe dorénavant $k > 0$ tel que R_kFM intersecte toutes les H-orbites contenues dans F^*. Expliquons maintenant comment les bonnes propriétés de R_kFM permettent d'adapter le lemme 3.1 au cas convexe-cocompact.

Soit x un point de F^*. Supposons que xH n'est pas fermé dans F^* ou, autrement dit, que l'ensemble $\mathrm{Acc}(xH)$ intersecte F^*. Introduisons l'ensemble

$$W = \mathrm{Acc}(xH) \cap F^* \cap R_kFM\,.$$

L'ensemble W est non vide puisque $\mathrm{Acc}(xH) \cap F^*$ est une union de H-orbites contenues dans F^*. Il est aussi A-invariant, et vérifie les mêmes propriétés de récurrence que R_kFM vis-à-dis de l'action de U (puisque $\mathrm{Acc}(xH) \cap F^*$ est U-invariant).

Dans ce paragraphe, on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse. — *L'ensemble W est compact.*

(Le cas où W n'est pas compact sera discuté dans la section suivante.) Sous cette hypothèse, on peut alors démontrer un analogue du lemme 3.1 :

Lemme 4.11. — *Il existe $y \in W$ et un sous-semi-groupe à 1 paramètre V_+ de V tel que yV_+ est inclus dans $\overline{xH}$.*

La preuve suit la même stratégie que celle du lemme 3.1. Posons $X = \overline{xH}$. L'axiome du choix et la compacité de W permettent de construire un ensemble U-invariant non vide Y qui est minimal *parmi les fermés U-invariants qui intersectent W*. Le lemme 4.11 se déduit alors à nouveau des propositions 3.4 et 3.5, dont nous devons montrer qu'elles restent valides dans ce nouveau contexte.

On reprend pour cela la preuve de ces deux lemmes, en partant d'un point $y \in Y \cap W$, mais avec la contrainte additionnelle que t_n doit appartenir à

$$T_k(y) = \{t \in \mathbb{R} \mid yu_t \in W\} \ ,$$

de sorte que la suite yu_{t_n} reste dans le compact W. La preuve fonctionne encore en raison du principe suivant, selon lequel une fonction polynomiale est « bien contrôlée » par ses valeurs sur un ensemble k-épais.

Proposition 4.12. — *Soit T un ensemble k-épais de $\mathbb{R}$ et d un entier. Il existe alors une constante $C > 0$ dépendant de k et d telle que, pour tout intervalle symétrique I de $\mathbb{R}$ et tout polynôme Q de degré d, on a*

$$\sup_{t \in I \cap T} |Q(t)| \geq C \sup_{t \in I} |Q(t)| \, .$$

Rappelons que t_n était choisi de façon à satisfaire les équations (1) ou (2), dont on vérifie qu'elles font intervenir des fonctions polynomiales de t_n. D'après la proposition 4.12, et comme l'ensemble $T_k(y)$ est k-épais, on peut choisir t_n dans $T_k(y)$ quitte à affaiblir ces conditions en

$$C\varepsilon \leq \max\{|a'_n - 1|, |b'_n|, |c'_n|, |d'_n - 1|\} \leq \varepsilon \ , \tag{3}$$

et

$$C\varepsilon \leq \max\{|a'_n|, |b'_n|, |c'_n|, |\delta'_n|\} \leq \varepsilon \, . \tag{4}$$

respectivement (pour une constante $C > 0$ dépendant de k). Cela suffit à conclure les preuves des lemmes 3.5 et 3.4 dans ce contexte.

4.4. Fin de la preuve

Expliquons enfin comment conclure la preuve du théorème 2.2. Soit x un point de F^*. Posons $X = \overline{xH}$ et notons comme précédemment $\mathcal{P}(X)$ le fermé Γ-invariant de G/H dual de X. Ce fermé contient un plan P_x qui sépare Λ_Γ puisque x appartient à F^*. Rappelons que W désigne le fermé $\mathrm{Acc}(xH) \cap F^* \cap R_k FM$, qui est vide si et seulement si xH est fermé dans F^*. On suppose donc W non vide.

Cas où W est compact. — Le lemme 4.11 s'applique alors. Comme dans le cas cocompact, on en déduit que

$$\bigcup_{P\in\mathcal{P}(X)} \partial P$$

contient un des hémisphères délimités par ∂P. Comme P sépare Λ_Γ, cet hémisphère recouvre un ouvert non vide de Λ_Γ, et le lemme 3.3 conclut que $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_\Lambda$.

Cas où W n'est pas compact. — Supposons maintenant W non compact. Comme $\mathrm{Acc}(xH) \cap R_k FM$ est compact, il existe donc un point y de $\mathrm{Acc}(xH) \cap R_k FM$ qui n'appartient pas à F^*. Dualement, on obtient que $\mathcal{P}(X)$ contient un plan P_y qui ne sépare pas Λ_Γ, mais tel que ∂P_y intersecte Λ_Γ en un fermé de module strictement positif. Ce plan P_y est en particulier un hyperplan d'appui du cœur convexe. On montre alors que le fait que $\partial P_y \cap \Lambda_\Gamma$ soit non dénombrable implique que le stabilisateur Γ' de P_y dans Γ est non élémentaire. En utilisant l'action de Γ' sur des plans de $\mathcal{P}(X)$ arbitrairement proches de P_y qui séparent Λ_Γ, on montre alors que

$$\bigcup_{P\in\mathcal{P}(X)} \partial P$$

recouvre Λ_Γ, puis on conclut que $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_\Lambda$ grâce au lemme 3.3.

Notons que cette dernière partie de la preuve contient encore quelques arguments élaborés que nous n'avons pas détaillés. Elle utilise notamment une bonne compréhension de la géométrie des composantes du bord du cœur convexe, de la dynamique des sous-groupes convexe-cocompacts de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, ainsi qu'un théorème de densité des horocycles d'une surface hyperbolique dû à Dal'Bo (2000).

4.5. Quelques mots sur les plans fermés

Concluons par quelques remarques générales sur les plans de M qui sont fermés dans M^*. Soit $x = \Gamma g$ un point de F^*. Le stabilisateur de x dans H est le sous-groupe

$$\Gamma_x = g^{-1}\Gamma g \cap H\ .$$

D'après un résultat classique (mais non trivial) sur les feuilletages, les propriétés suivantes sont équivalentes :

— l'orbite xH est fermée dans F^*,

— l'application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x\backslash H & \to & F^* \\ g & \mapsto & xg \end{array}$$

est propre.

En adoptant le point de vue dual, on déduit de cette équivalence qu'un plan est fermé dans M^* si et seulement s'il y est proprement immergé. Pour être plus précis, soit P un plan de $\mathcal{P}^*$. Notons P^* l'intersection de P avec $\mathrm{Conv}^*(\Lambda_\Gamma)$ et Γ_P le stabilisateur de P dans Γ. Remarquons que Γ_P préserve P^*. Notons enfin $\pi : \mathbb{H}^3 \to M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ l'application de revêtement.

Proposition 4.13. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

— $\pi(P^*) = \pi(P) \cap M^*$ *est fermé dans* M^*,
— *l'application*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_P\backslash\widetilde{P}^* & \to & M^* \\ x & \mapsto & \pi(x) \end{array}$$

est une immersion propre.

McMullen, Mohammadi et Oh montrent en outre que les plans fermés ont un gros stabilisateur :

Théorème 4.14 (McMullen, Mohammadi et Oh, 2018)
Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ *une variété convexe-cocompacte acylindrique, et* $P \in \mathcal{P}^*$ *un plan tel que* $\pi(P^*)$ *est fermé dans* M^*. *Alors le stabilisateur* Γ_P *de* P *dans* Γ *est non élémentaire.*

Comme un sous-groupe non élémentaire de Γ stabilise au plus un plan de $\mathbb{H}^3$, on en déduit que M^* ne contient qu'un nombre dénombrable de plans fermés.

RÉFÉRENCES

Yves Benoist et Hee Oh (2018). « Geodesic planes in geometrically finite acylindrical 3-manifolds », arXiv : 1802.04423.
Brian H. Bowditch (1993). « Geometrical finiteness for hyperbolic groups », *Journal of Functional Analysis* **113** (2), p. 245-317.
Françoise Dal'Bo (2000). « Topologie du feuilletage fortement stable », *Annales de l'Institut Fourier* **50** (3), p. 981-993.
Minju Lee et Hee Oh (2019). « Orbit closures of unipotent flows for hyperbolic manifolds with Fuchsian ends », arXiv : 1902.06621.
Gregori Margulis (1989). « Indefinite quadratic forms and unipotent flows on homogeneous spaces », in : *Dynamical systems and ergodic theory (Warsaw, 1986).* T. 23. PWN, Warsaw, p. 399-409.
Curtis McMullen, Amir Mohammadi et Hee Oh (2016). « Horocycles in hyperbolic 3-manifolds », *Geometric and Functional Analysis* **26**, p. 961-973.
——— (2017). « Geodesic planes in hyperbolic 3-manifolds », *Inventiones Mathematicae* **209** (2), p. 425-461.
——— (2018). « Geodesic planes in the convex core of an acylindrical 3-manifold », arXiv : 1802.03853.
Jean-Pierre Otal (1998). « Thurston's hyperbolization of Haken manifolds », in : *Surveys in differential geometry, Vol. III (Cambridge, MA, 1996).* Int. Press, Boston, MA, p. 77-194.
Marina Ratner (1991). « Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows », *Duke Mathematical Journal* **63** (1), p. 235-280.

Nimish A. Shah (1991). « Closures of totally geodesic immersions in manifolds of constant negative curvature », in : *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*. World Sci. Publ., River Edge, NJ, p. 718-732.

William P. Thurston (1982). « Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry », *American Mathematical Society. Bulletin. New Series* **6** (3), p. 357-381.

Nicolas Tholozan

CNRS – ENS / PSL University
45 rue d'Ulm, 75005 Paris
E-mail : `nicolas.tholozan@ens.fr`