Séminaire BOURBAKI Janvier 2018
70ème année, 2017-2018, n$^{\text{o}}$ 1140

PROGRÈS RÉCENTS SUR LES CONJECTURES DE GAN-GROSS-PRASAD [d'après Jacquet–Rallis, Waldspurger, W. Zhang, etc.]

par **Raphaël BEUZART–PLESSIS**

INTRODUCTION

Les conjectures de Gan-Gross-Prasad [16] ont deux aspects : local et global. Localement, celles-ci portent sur certaines lois de branchements entre représentations de groupes de Lie réels ou p-adiques tandis que globalement, elles caractérisent la non-annulation de certaines intégrales explicites de formes automorphes que l'on appelle communément des périodes (automorphes). Ce qui rend ces prédictions intéressantes est qu'elles font intervenir des invariants arithmétiques fins : facteurs epsilon locaux d'une part et valeurs de fonctions L automorphes en leur centre de symétrie d'autre part. Ces conjectures, qui portent sur tous les groupes classiques (unitaires d'espaces hermitiens ou antihermitiens, symplectiques et spéciaux orthogonaux ; ce dernier cas avait d'ailleurs été considéré bien avant par Gross et Prasad [25], [26]), ont connu de nombreux progrès récents. Plus précisément, la conjecture locale est maintenant démontrée dans presque tous les cas après le travail fondateur de Waldspurger [62], [63], [64], [65] et Mœglin-Waldspurger [45] suivi de l'auteur [5], [6], [7], [8], Gan-Ichino [19], Hiraku Atobe [4] et enfin Hongyu He [29]. La conjecture globale a quant à elle été établie pour les groupes unitaires d'espaces hermitiens sous certaines restrictions locales dans une percée de Wei Zhang [75] faisant suite aux travaux de Jacquet-Rallis [35] et Zhiwei Yun [74]. Des résutats analogues ont été obtenus pour les groupes unitaires d'espaces antihermitiens par Hang Xue [69] à la suite de Yifeng Liu [40]. Il existe aussi un raffinement de la conjecture globale, initialement dû à Ichino-Ikeda [33] dans le cas des groupes orthogonaux puis étendu aux groupes unitaires et symplectiques par Neal Harris [27] et Hang Xue [70] [71], sous la forme d'une identité reliant explicitement périodes et valeurs centrales de fonctions L automorphes. Ce raffinement est maintenant lui aussi démontré pour les groupes unitaires sous certaines hypothèses locales après Wei Zhang [76], l'auteur [9] et Hang Xue [70], [73].

Dans ce texte, on se propose d'énoncer précisément ces conjectures et les résultats récents sus-mentionnés ainsi que de donner de brefs aperçus des preuves qu'il serait

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-13-BS01-0012 FERPLAY.

bien difficile de retranscrire fidèlement ici tant les techniques utilisées sont variées (formules des traces relatives, correspondance thêta, théorie de l'endoscopie...). De plus, comme nous l'avons déjà expliqué, ces conjectures portent sur tous les types de groupes classiques chacun ayant ses propres spécificités. Pour des raisons de place, on se concentrera sur le cas des groupes unitaires pour lesquels les résultats obtenus sont les plus exhaustifs. Enfin, on renvoie aussi à [17] pour une très bonne introduction à ce sujet (datant de 2013 cet article ne fait malheureusement pas mention des avancées les plus récentes).

On finit cette introduction en donnant deux exemples de résultats antérieurs qui sont des cas particuliers des conjectures de Gan-Gross-Prasad.

Loi de branchement de $U(n+1)$ à $U(n)$: On commence par donner un exemple classique de loi de branchement (dû à H. Weyl [68]) constituant un cas particulier des conjectures locales. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on notera

$$U(k) := \{g \in GL_k(\mathbb{C});\ {}^t\overline{g}g = I_k\}$$

le groupe unitaire réel compact de rang k. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On dispose d'un plongement naturel

$$U(n) \hookrightarrow U(n+1),\ g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit π une représentation complexe irréductible de $U(n+1)$. Une telle représentation est nécessairement de dimension finie (car $U(n+1)$ est compact) et on s'intéresse à la restriction de π à $U(n)$. La description explicite de cette restriction, ou plutôt de sa décomposition en représentations irréductibles, constitue ce que l'on appelle une loi de branchement. Évidemment, toute réponse intelligible à ce problème nécessite de savoir paramétrer (ou nommer) de façon indépendante les représentations irréductibles (à isomorphisme près) de $U(n)$ et $U(n+1)$. Une telle paramétrisation est précisément fournie par la théorie des plus hauts poids de Cartan-Weyl. Dans les cas qui nous intéressent cette théorie fournit des bijections naturelles

$$\mathrm{Irr}(U(n+1)) \simeq \{\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1};\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n+1}\}$$

$$\pi_{\underline{\alpha}} \longleftarrow\!\shortmid \underline{\alpha}$$

$$\mathrm{Irr}(U(n)) \simeq \{\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n;\ \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n\}$$

$$\sigma_{\underline{\beta}} \longleftarrow\!\shortmid \underline{\beta}$$

où $\mathrm{Irr}(U(n+1))$ et $\mathrm{Irr}(U(n))$ désignent les ensembles de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles complexes de $U(n+1)$ et $U(n)$ respectivement. En utilisant ces paramétrisations, la solution au problème initial se formule ainsi (voir [24] Chap. 8 par exemple) : pour tout $n+1$-uplet $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n$ avec $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n+1}$, on a

$$\pi_{\underline{\alpha}} \mid_{U(n)} = \bigoplus_{\substack{\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n \\ \alpha_1 \geqslant \beta_1 \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant \beta_n \geqslant \alpha_{n+1}}} \sigma_{\underline{\beta}}.$$

En d'autres termes : pour toute paire de représentations irréductibles $(\pi_{\underline{\alpha}}, \sigma_{\underline{\beta}}) \in \mathrm{Irr}(U(n+1)) \times \mathrm{Irr}(U(n))$ l'espace d'entrelacements

$$\mathrm{Hom}_{U(n)}(\pi_{\underline{\alpha}}, \sigma_{\underline{\beta}})$$

est de dimension au plus 1 et est non nul si et seulement si $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ satisfont la condition de branchement $\alpha_1 \geqslant \beta_1 \ldots \geqslant \beta_n \geqslant \alpha_{n+1}$. C'est sous cette forme que la conjecture locale de Gan-Gross-Prasad se généralise à des paires de groupes unitaires réels $U(p,q) \subset U(p+1,q)$ ou p-adiques $U(W) \subset U(V)$ plus généraux. Plus précisément, on verra dans la section 1.3 que pour π et σ des représentations irréductibles (dans un sens à préciser) de $U(p+1,q)$ et $U(p,q)$ l'espace d'entrelacements $\mathrm{Hom}_{U(p,q)}(\pi, \sigma)$ est toujours de dimension au plus un et qu'il en va de même si l'on considère des groupes unitaires p-adiques. La conjecture locale de Gan-Gross-Prasad donne alors (dans presque tous les cas) une condition nécessaire et suffisante, généralisant la relation de branchement ci-dessus, pour que cet espace soit non nul.

La formule de Waldspurger pour les formes de Maass de niveau 1 : Énonçons maintenant un cas particulier d'un résultat de Waldspurger [60] dont les conjectures globales donnent une généralisation. Soit $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$ le demi-plan de Poincaré et $f : SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une forme de Maass propre de niveau 1. Rappelons ce que cela signifie : f est une fonction C^∞ (et même analytique réelle) qui est vecteur propre du Laplacien hyperbolique $\Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ de valeur propre λ (i.e. $\Delta f = \lambda f$), invariante pour l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ par homographies (donnée par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \dfrac{az+b}{cz+d}$), à croissance modérée dans le sens où $|f(x+iy)| \ll Cy^N$ pour un certain N lorsque $y \to \infty$ et propre pour tous les opérateurs de Hecke T_p, p un nombre premier, définis par

$$(T_p f)(z) = f\left(\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} z\right) + \sum_{u=0}^{p-1} f\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ & p \end{pmatrix} z\right).$$

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = z+1$, une telle fonction admet un développement de Fourier de la forme

$$f(x+iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y) e^{2i\pi nx}, \quad x+iy \in \mathbb{H}.$$

De plus, l'équation différentielle vérifiée par f ainsi que la propriété de croissance modérée impliquent que les fonctions $a_n(y)$ sont, pour $n \neq 0$, de la forme $a_n(y) = a_n\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)$ où $a_n \in \mathbb{C}$ et K_ν est une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce de paramètre $\nu \in \mathbb{C}$ vérifiant $\lambda = \frac{1}{4} - \nu^2$. On suppose dorénavant f paire (i.e. $f(-\overline{z}) = f(z)$) et cuspidale (i.e. $a_0(y) = 0$). On a alors $a_{-n} = a_n$ pour $n \neq 0$ et on définit la fonction L complétée de f par

$$L(s,f) = \pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}, \quad Re(s) \gg 1.$$

Pour χ un caractère de Dirichlet quadratique vérifiant $\chi(-1) = -1$ on définit aussi une fonction L complétée tordue par χ de la façon suivante

$$L(s, f \times \chi = \pi^{-s}\Gamma\Big(\frac{s-1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s-1-\nu}{2}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\frac{a_n}{n^s}, \quad Re(s) \gg 1.$$

Alors $L(., f)$ et $L(., f \times \chi)$ admettent des prolongements holomorphes à $\mathbb{C}$ et satisfont les équations fonctionnelles $L(1-s, f) = L(s, f)$ et $L(1-s, f\times\chi) = L(s, f\times\chi)$. Soit F une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ de discriminant fondamental d (i.e. l'unique entier sans facteur carré sauf 4 qui est un carré modulo 4 et tel que $F = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$). On appelle *point de Heegner* (relatif à F) l'unique racine z_d dans $\mathbb{H}$ d'un trinôme de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ vérifiant $b^2 - 4ac = d$. On a alors la formule suivante, cas particulier d'un résultat de Waldspurger [60] :

$$\Big(\sum_{z_d/SL_2(\mathbb{Z})} f(z_d)\Big)^2 = \frac{\sqrt{|d|}}{2}L\Big(\frac{1}{2}, f\Big)L\Big(\frac{1}{2}, f \times \chi_d\Big), \tag{1}$$

où la somme porte sur l'ensemble des orbites sous $SL_2(\mathbb{Z})$ de points de Heegner et χ_d désigne l'unique caractère de Dirichlet quadratique de conducteur $|d|$ vérifiant $\chi_d(-1) = -1$.

Appliquée à ce cas particulier la conjecture globale de Gan-Gross-Prasad prédit (à quelques nuances près) l'équivalence

$$\sum_{z_d/SL_2(\mathbb{Z})} f(z_d) \neq 0 \Leftrightarrow L(\frac{1}{2}, f)L(\frac{1}{2}, f \times \chi_d) \neq 0,$$

tandis que le raffinement de la conjecture globale par Ichino et Ikeda permet de retrouver directement la formule (1).

1. LA CONJECTURE LOCALE

1.1. Les groupes

Soit E/F une extension quadratique de corps locaux de caractéristique nulle. On a donc soit $E/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$ soit que E et F sont des extensions finies du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ pour un certain nombre premier p ($\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique $|.|_p$ définie par $|p^k \frac{a}{b}|_p = p^{-k}$ pour a et b des entiers premiers à p). On note σ l'unique élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$ et $\mathrm{sgn}_{E/F}$ le caractère quadratique de $F^\times$ associé à l'extension E/F par la théorie du corps de classe (c'est donc l'unique caractère quadratique de noyau l'image de la norme $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$). Enfin, on fixera deux caractères additifs non triviaux $\psi_0 : F \to \mathbb{S}^1$ et $\psi : E \to \mathbb{S}^1$ avec la propriété que ψ est trivial sur F.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur E et $\epsilon \in \{\pm 1\}$. On suppose V muni d'une forme ϵ-hermitienne non dégénérée

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to E.$$

Par définition une forme ϵ-hermitienne vérifie

$$\langle \lambda v + \mu w, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle + \mu \langle w, u \rangle$$

$$\langle v, u \rangle = \epsilon \langle u, v \rangle^{\sigma}$$

pour tous $u, v, w \in V$ et $\lambda, \mu \in E$. Suivant que $\epsilon = 1$ ou -1 on parlera aussi d'espace hermitien ou antihermitien. On se donne un sous-espace W de V non dégénéré pour $\langle .,. \rangle$ vérifiant la condition suivante

$$\dim(V) - \dim(W) = \begin{cases} 1, & \text{si } \epsilon = 1; \\ 0, & \text{si } \epsilon = -1. \end{cases}$$

Soient $U(V) \subset GL(V)$ et $U(W) \subset GL(W)$ les sous-groupes algébriques (définis sur F) des automorphismes linéaires de V et W respectivement qui préservent la forme $\langle .,. \rangle$. Alors $U(V)$ et $U(W)$ sont des groupes unitaires et on dispose d'un plongement naturel $U(W) \hookrightarrow U(V)$ où $U(W)$ agit trivialement sur $W^{\perp}$ (qui est de dimension au plus 1). Dans toute la suite on identifiera (abusivement) un groupe algébrique défini sur F avec le groupe des F-points lui correspondant.

La discussion qui suit s'étend aussi au cas où $E = F \times F$ muni de l'involution $\sigma(x, y) = (y, x)$, cas qu'il sera de toute façon nécessaire d'inclure lorsque l'on traitera la conjecture globale. Dans une telle situation, une forme non dégénérée $\langle .,. \rangle$ comme ci-dessus identifie V et W à des sommes directes $V_0 \oplus V_0^{\vee}$ et $W_0 \oplus W_0^{\vee}$ où $W_0 \subset V_0$ sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur F et $V_0^{\vee}$, $W_0^{\vee}$ désignent leurs duaux. On a alors des identifications naturelles $U(V) \simeq GL(V_0)$ et $U(W) \simeq GL(W_0)$.

Dans tous les cas, on pose $G = U(W) \times U(V)$, $H = U(W)$ et on plonge H dans G de façon diagonale. Les groupes H et G héritent du corps F de topologies qui en font des groupes de Lie dans le cas archimédien (i.e. lorsque $F = \mathbb{R}$) et des groupes localement profinis dans le cas non archimédien (i.e. lorsque F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$; rappelons qu'un groupe topologique est *localement profini* s'il possède une base de voisinages de l'élément neutre formée de sous-groupes compacts).

1.2. Le problème de restriction

Soit $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation complexe lisse et irréductible de G. Dans le cas p-adique, cela signifie que π est une représentation de G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ (typiquement de dimension infinie) dont tous les vecteurs ont un stabilisateur ouvert, l'irréductibilité est alors une notion algébrique (i.e. aucun sous-espace non trivial stable par G). Dans le cas archimédien, cela signifie que $\mathcal{V}$ est un espace de Fréchet et que π est une représentation lisse (au sens C^{∞}), admissible (i.e. les représentations irréductibles d'un sous-groupe compact maximal apparaissent avec des multiplicités finies) sur $\mathcal{V}$ vérifiant une certaine condition de « croissance modérée » (qui a été introduite par

Casselman et Wallach, voir [11] et [66] Chap. 11) ; l'irréductibilité est alors une notion topologique (i.e. pas de sous-espace fermé non trivial stable par G). Dans tous les cas, une telle représentation irréductible se décompose comme un produit tensoriel $\pi = \pi_W \boxtimes \pi_V$ où π_W et π_V sont des représentations irréductibles (lisses) de $U(W)$ et $U(V)$ respectivement (et où le produit tensoriel est un produit tensoriel topologique dans le cas archimédien). On notera $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles lisses de G.

Pour définir le problème de restriction qui va nous intéresser on doit encore introduire une certaine « petite » représentation ν de H. Dans le cas hermitien (i.e. si $\epsilon = 1$), ν est la représentation triviale que l'on notera $\mathbf{1}$ ou simplement $\mathbb{C}$ dans la suite. Dans le cas antihermitien (i.e. si $\epsilon = -1$), on dispose d'une inclusion

$$U(W) \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{Res}_{E/F} W)$$

où $\mathrm{Res}_{E/F} W$ désigne la restriction des scalaires de E à F de W muni de la forme symplectique $\mathrm{Trace}_{E/F} \circ \langle .,. \rangle$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{Res}_{E/F} W)$ désigne le groupe symplectique correspondant. Soit $\mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W)$ le groupe métaplectique associé à cet espace symplectique (il s'agit d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-extension de $\mathrm{Sp}(\mathrm{Res}_{E/F} W)$). Le revêtement metaplectique se scinde au-dessus de $U(W)$ mais ce scindage n'est pas unique (car il existe des caractères non triviaux $U(W) \to \{\pm 1\}$). On peut cependant fixer un tel scindage par le choix d'un caractère $\mu : E^\times \to \mathbb{S}^1$ tel que $\mu \mid_{F^\times} = \mathrm{sgn}_{E/F}$ ce que l'on fait dorénavant. Soit $\omega_{\psi_0,W}$ la représentation de Weil de $\mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W)$ associée au caractère ψ_0 (cf. [43] Chap. 2. II). Alors $\nu = \omega_{\psi_0,W,\mu}$ est la restriction de cette représentation de Weil à $U(W)$ via le scindage que l'on vient de fixer.

Dans tous les cas, l'espace d'entrelacements qui nous intéressera est le suivant

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, \nu) \tag{2}$$

où implicitement dans le cas archimédien on ne considère que les entrelacements continus (pour les topologies d'espaces de Fréchet sous-jacentes). On notera $m(\pi)$ la dimension de cet espace :

$$m(\pi) := \dim \mathrm{Hom}_H(\pi, \nu).$$

Remarquons que dans le cas hermitien on a des identifications

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, \nu) = \mathrm{Hom}_{U(W)}(\pi_W \boxtimes \pi_V, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{U(W)}(\pi_V, \pi_W^\vee)$$

où $\pi_W^\vee$ désigne la contragrédiente (lisse) de π_W.

Un élément de l'espace (2) s'appelle une fonctionnelle de Bessel si $\epsilon = 1$ et une fonctionnelle de Fourier-Jacobi si $\epsilon = -1$. On parlera alors parallèlement des cas Bessel et Fourier-Jacobi de la conjecture.

1.3. Multiplicité 1

Le théorème suivant est dû à Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann [2] et Sun [56] dans le cas p-adique et à Sun-Zhu [57] dans le cas archimédien.

Théorème 1.1. — *Pour toute représentation irréductible lisse π de G on a*

$$m(\pi) \leqslant 1.$$

La conjecture locale de Gan-Gross-Prasad apporte alors essentiellement une réponse à la question simple suivante : quand a-t-on $m(\pi) = 1$? Tout comme pour la loi de branchement entre groupes unitaires réels compacts discutée dans l'introduction, toute réponse intelligible à cette question nécessite de savoir paramétrer les (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles de G. Une telle paramétrisation est précisément l'objet de la correspondance de Langlands locale (pour les groupes unitaires) dont nous rappelons maintenant les principales caractéristiques.

1.4. Correspondance de Langlands locale pour les groupes unitaires

Dans cette section on se donne un espace hermitien ou antihermitien V de dimension finie n sur E et on note $U(V)$ le groupe unitaire correspondant.

1.4.1. *Groupes de Weil-Deligne.* — Soit W_F le groupe de Weil de F. Si F est non archimédien, on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{k}_F/k_F) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] & W_F \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 1 \end{tikzcd}$$

où $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F, k_F est le corps résiduel de F, l'isomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}_F/k_F) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ correspond au choix du Frobénius géométrique Frob_F comme générateur topologique de $\mathrm{Gal}(\overline{k}_F/k_F)$ et I_F est le sous-groupe d'inertie (i.e. le noyau de la flèche $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}_F/k_F)$). On équipe alors W_F de la topologie qui fait de I_F un sous-groupe ouvert (muni de la topologie induite de celle de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$). Si F est archimédien, on a

$$W_F = \begin{cases} \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times j, & \text{si } F = \mathbb{R}, \\ \mathbb{C}^\times & \text{si } F = \mathbb{C}, \end{cases}$$

où $j^2 = -1$ et $jzj^{-1} = \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$. Le groupe de Weil-Deligne WD_F de F est défini par

$$WD_F = \begin{cases} W_F \times SL_2(\mathbb{C}), & \text{si } F \text{ est non archimédien}, \\ W_F & \text{si } F \text{ est archimédien}. \end{cases}$$

1.4.2. *Paramètres de Langlands.* — Langlands associe à $U(V)$, et plus généralement à tout groupe réductif connexe sur F, un *L-groupe* ${}^LU(V)$ produit semi-direct d'un groupe réductif complexe connexe $\widehat{U(V)}$ par le groupe de Weil W_F : ${}^LU(V) = \widehat{U(V)} \rtimes W_F$. Ici, le L-groupe se décrit explicitement ainsi : on a $\widehat{U(V)} = GL_n(\mathbb{C})$ et l'action de W_F se factorise par $W_F \to W_F/W_E = \mathrm{Gal}(E/F)$ avec σ agissant comme $\sigma(g) = J^t g^{-1} J^{-1}$ où

$$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ (-1)^{n-1} & & \end{pmatrix}.$$

Un paramètre de Langlands pour $U(V)$ est alors une classe de conjugaison sous $\widehat{U(V)}$ d'homomorphismes « admissibles » (i.e. satisfaisant à certaines propriétés de continuité, semi-simplicité et d'algébricité)

$$\phi : WD_F \to {}^L U(V)$$

commutant aux projections sur W_F. On notera $\Phi(U(V))$ l'ensemble des paramètres de Langlands pour $U(V)$. Pour les groupes unitaires on dispose de la description plus explicite suivante (cf. [16] Theorem 8.1) : la restriction à WD_E induit une bijection entre $\Phi(U(V))$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations complexes continues semi-simples et algébriques sur $SL_2(\mathbb{C})$ de dimension n de WD_E qui sont $(-1)^{n+1}$-conjuguées duales. Rappelons ce que ce dernier terme signifie. Fixons $c \in W_F \backslash W_E$ qui relève σ. Une représentation $\varphi : WD_E \to GL(M)$ est dite *conjuguée-duale* s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée

$$B : M \times M \to \mathbb{C}$$

vérifiant

$$B(\varphi(\tau)u, \varphi(c\tau c^{-1})v) = B(u, v), \quad \forall u, v \in M, \tau \in WD_E.$$

Cela signifie que M est isomorphe à $(M^c)^\vee$ où M^c désigne la c-conjuguée de M et $(.)^\vee$ le passage à la contragrédiente. On dit de plus que $\varphi : WD_E \to GL(M)$ est ϵ-conjuguée-duale, où $\epsilon \in \{\pm 1\}$, si on peut choisir une telle forme bilinéaire satisfaisant la condition supplémentaire

$$B(u, \varphi(c^2)v) = \epsilon B(v, u), \quad \forall u, v \in M.$$

On appellera une telle forme une forme ϵ-conjuguée-duale.

Pour énoncer la correspondance de Langlands dans sa version la plus complète, il faut introduire pour tout $\phi \in \Phi(U(V))$ un certain groupe fini S_ϕ. Ce dernier se définit comme le groupe des composantes connexes du centralisateur dans $\widehat{U(V)}$ de l'image de ϕ. Si on identifie ϕ à une représentation $(-1)^{n+1}$-conjuguée-duale $\varphi : WD_E \to GL(M)$ on a la description plus concrète suivante de S_ϕ. Fixons B une forme conjuguée-duale de signe $(-1)^{n+1}$ comme ci-dessus et notons $\mathrm{Aut}(\varphi, B)$ le groupe des automorphismes linéaires de M qui commutent à l'image de φ et préservent la forme B. On a alors (canoniquement)

$$S_\phi = \mathrm{Aut}(\varphi, B) / \mathrm{Aut}(\varphi, B)^0$$

où on a noté $\mathrm{Aut}(\varphi, B)^0$ la composante connexe de l'élément neutre. De plus, ce groupe est toujours abélien et isomorphe à un produit fini de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.4.3. *Formes intérieures pures.* — Suivant une idée de Vogan [59], la correspondance de Langlands devrait se formuler plus simplement si on considère plusieurs groupes à la fois. Plus précisément, il faut prendre en compte les *formes intérieures pures* de $U(V)$. Ces formes sont naturellement paramétrées par l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(F, U(V))$ et admettent toutes le même L-groupe que $U(V)$ (de sorte qu'un paramètre de Langlands pour $U(V)$ peut aussi être considéré comme paramètre de Langlands de toutes ses formes intérieures pures). Pour les groupes unitaires on sait décrire les formes intérieures pures explicitement : $H^1(F, U(V))$ classifie naturellement les classes d'isomorphisme d'espaces (anti)hermitiens de dimension n et les formes intérieures pures de $U(V)$ sont alors les groupes unitaires de ces derniers. Pour une classe $\alpha \in H^1(F, U(V))$, on notera V_α l'espace (anti)hermitien qu'elle détermine et $U(V_\alpha)$ la forme intérieure pure correspondante.

Dans le cas non archimédien, et pour $n \neq 0$, il existe exactement deux classes d'isomorphisme d'espaces (anti)hermitiens de dimension n, que l'on peut distinguer par le discriminant, et donc autant de formes intérieures pures. Dans le cas archimédien, il y a $n+1$ formes intérieures pures de $U(V)$ correspondant aux $U(p,q)$ pour $p+q=n$. Remarquons que deux formes intérieures pures distinctes de $U(V)$ peuvent être isomorphes (par exemple $U(p,q)$ et $U(q,p)$) mais du point de vue de la correspondance de Langlands celles-ci doivent être considérées comme distinctes.

1.4.4. *La correspondance.* — On peut maintenant énoncer la correspondance de Langlands locale pour $U(V)$ (et ses formes intérieures pures) de la façon informelle suivante. Pour tout $\alpha \in H^1(F, U(V))$, il devrait exister une partition

$$\mathrm{Irr}(U(V_\alpha)) = \bigsqcup_{\phi \in \Phi(U(V))} \Pi^{U(V_\alpha)}(\phi)$$

en sous-ensembles finis (éventuellement vides) appelés *L-paquets* et pour tout $\phi \in \Phi(U(V))$ il devrait exister une bijection

$$\bigsqcup_{\alpha \in H^1(F, U(V))} \Pi^{U(V_\alpha)}(\phi) \simeq \widehat{S_\phi} \tag{3}$$

$$\pi(\varphi, \chi) \longleftarrow\!\!\shortmid\, \chi$$

où $\widehat{S_\phi}$ désigne le groupe des caractères du groupe abélien fini S_ϕ. Ces données doivent bien sûr satisfaire un certain nombre de propriétés. De fait, les fameuses *relations endoscopiques*, que nous n'expliciterons pas ici, caractérisent, si elle existe, la correspondance de Langlands locale pour les groupes unitaires à partir de la correspondance, connue ([28], [31], [52]), pour les groupes linéaires. Ces relations endoscopiques dépendent cependant d'un certain choix correspondant à la normalisation de *facteurs de transfert.* La composition des L-paquets ne dépend pas de ce choix mais la bijection (3) y est sensible. Nous donnerons plus de détails sur les choix impliqués dans cette normalisation dans la section 1.4.7.

1.4.5. *Statut.* — Dans le cas archimédien, la correspondance locale a été construite par Langlands lui-même [38] pour tous les groupes réductifs réels à partir de résultats d'Harish-Chandra. Que cette correspondance vérifie les relations endoscopiques attendues découle des travaux de Shelstad [53], [54], [55] et Mezo [42] (voir aussi [13] pour le cas des groupes unitaires).

Dans le cas non archimédien, la correspondance a été obtenue bien plus récemment par Mok [47] pour les groupes unitaires quasi-déployés puis par Kaletha-Minguez-Shin-White [36] pour tous les groupes unitaires à la suite du travail fondateur d'Arthur [3] sur les groupes symplectiques et orthogonaux. Jusqu'à peu ces résultats étaient encore conditionnels à la stabilisation de la formule des traces tordue maintenant établie en toute généralité par Waldspurger et Mœglin-Waldspurger dans une série impressionnante d'articles [46].

1.4.6. *Fonctions L et facteurs ϵ.* — Étant donné un paramètre de Langlands $\phi : WD_F \to {}^L U(V)$ on peut lui associer certains invariants arithmétiques. Plus précisément, pour toute représentation algébrique $\rho : {}^L U(V) \to GL(M)$ où M est un espace vectoriel complexe de dimension finie, la composée $\rho \circ \phi$ est une représentation du groupe de Weil-Deligne WD_F à laquelle on peut associer une fonction L locale $L(s, \rho \circ \phi) = L(s, \rho, \phi)$ et un facteur ϵ local $\epsilon(s, \rho \circ \phi, \psi_0) = \epsilon(s, \phi, \rho, \psi_0)$ qui dépend du caractère additif $\psi_0 : F \to \mathbb{C}^\times$. Les fonctions L locales sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ sans zéro tandis que les facteurs epsilon locaux sont des fonctions holomorphes inversibles sur $\mathbb{C}$. Dans le cas où F est non archimédien et $\rho \circ \phi$ est trivial sur le facteur $SL_2(\mathbb{C})$ la fonction L est définie par

$$L(s, \phi, \rho) = \frac{1}{\det(1 - q^{-s}(\rho \circ \phi)(\mathrm{Frob}_F) \mid M^{I_F})},$$

où on a noté q le cardinal du corps résiduel de F, M^{I_F} le sous-espace des invariants pour I_F et Frob_F un relèvement du Frobenius (géométrique) dans W_F. On a une formule analogue dans le cas général si F est non archimédien (cf. [58] 4.1.6) et si F est archimédien les facteurs L locaux sont des produits explicites de fonctions gamma et de puissances de π et de 2 (cf. [58] §3). Les facteurs epsilon locaux sont des invariants bien plus subtils. En effet, ceux-ci doivent satisfaire un certain nombre de propriétés simples les caractérisant uniquement mais leur existence est un théorème difficile dû indépendamment à Langlands et Deligne ([14]).

Mentionnons ici une propriété de ces facteurs dont nous aurons besoin. Soit $\varphi : WD_E \to GL(M)$ une représentation (-1)-conjuguée-duale du groupe de Weil-Deligne de E. Alors, $\epsilon(\frac{1}{2}, \varphi, \psi) \in \{\pm 1\}$ où on rappelle que le caractère $\psi : E \to \mathbb{S}^1$ a été choisi trivial sur F. De plus, ce facteur epsilon ne dépend que de la $N(E^\times)$-orbite de ψ et ne dépend en fait pas du tout de ψ si $\dim(\varphi)$ est paire.

1.4.7. *Données de Whittaker et normalisation de la correspondance.* — Comme expliqué en 1.4.4, la bijection (3) dépend d'un choix permettant de normaliser certains facteurs de transfert. D'après [37], un tel choix peut être fait en fixant une *donnée de*

Whittaker d'une forme intérieure pure de $U(V)$. Plus précisément, on choisit d'abord une forme intérieure pure $U(V_\alpha)$ quasi-déployée de $U(V)$ c'est-à-dire possédant un sous-groupe de Borel $B \subset U(V_\alpha)$ défini sur F. Un tel groupe existe et quitte à remplacer V par un V_α (ce qui ne modifie pas la famille des formes intérieures pures), on peut supposer que l'on a choisi $U(V)$ (que l'on suppose donc quasi-déployé). Une donnée de Whittaker sur $U(V)$ est alors une classe de conjugaison de couples (N, θ) où N est le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel $B = TN$ défini sur F et $\theta : N \to \mathbb{S}^1$ est un caractère *générique* c'est-à-dire dont le stabilisateur dans T est réduit au centre de $U(V)$. Il existe une seule classe de conjugaison de données de Whittaker si $n = \dim(V)$ est impair tandis que si n est pair il en existe deux et on peut en fixer une à partir du caractère $\psi : E/F \to \mathbb{S}^1$ dans le cas hermitien et $\psi_0 : F \to \mathbb{S}^1$ dans le cas antihermitien.

1.4.8. *L-paquets génériques, tempérés et discrets.* — Un paramètre de Langlands $\phi : WD_F \to {}^L U(V)$ est dit *générique* si $L(s, \phi, \mathrm{Ad})$ n'a pas de pôle en $s = 1$ où Ad désigne la représentation adjointe de ${}^L U(V)$ sur son algèbre de Lie. Le L-paquet correspondant $\Pi^{U(V)}(\phi)$ contient alors une et une seule représentation π admettant un modèle de Whittaker relativement à (N, θ) c'est-à-dire telle que $\mathrm{Hom}_N(\pi, \theta) \neq 0$ (on dit alors que π est *générique* relativement à (N, θ)) et de plus cette représentation correspond via la bijection (3) au caractère trivial de S_ϕ.

Un paramètre de Langlands $\phi : WD_F \to {}^L U(V)$ est dit *tempéré* si la projection de l'image de W_F sur $\widehat{U(V)}$ est relativement compacte. Un paramètre tempéré est automatiquement générique et le L-paquet correspondant $\Pi^{U(V)}(\phi)$ ne contient que des représentations *tempérées* c'est-à-dire des repésentations qui apparaissent faiblement dans $L^2(U(V))$ (il existe aussi une caractérisation des représentations tempérées par une condition de croissance des coefficients). En fait, on peut reconstruire la correspondance de Langlands pour $U(V)$ à partir de la correspondance restreinte aux paramètres tempérés de $U(V)$ et ses sous-groupes de Lévi. Cela découle de la *classification de Langlands* qui permet d'obtenir toutes les représentations irréductibles d'un groupe réductif à partir des représentations tempérées de ses sous-groupes de Lévi par un procédé classique appelé *induction parabolique*.

Enfin, un paramètre de Langlands $\phi : WD_F \to {}^L U(V)$ est dit *discret* si le centralisateur de son image dans $\widehat{U(V)}$ est fini. Un paramètre discret est automatiquement tempéré (donc aussi générique) et détermine un L-paquet de représentations de la série discrète c'est-à-dire apparaissant comme sous-modules de $L^2(U(V))$.

1.5. La conjecture

On retourne à la situation introduite en 1.1 et 1.2. Appelons *forme intérieure pure* de (G, H) un couple (G_α, H_α) analogue obtenu de la façon suivante. Soient $\alpha \in H^1(F, H) = H^1(F, U(W))$ et W_α l'espace (anti)hermitien correspondant. On pose alors $V_\alpha = W_\alpha \oplus^\perp L$, où L est tel que $V = W \oplus^\perp L$, $H_\alpha = U(W_\alpha)$ et $G_\alpha = U(W_\alpha) \times U(V_\alpha)$. On dispose à nouveau d'une injection $H_\alpha \hookrightarrow G_\alpha$ et on définit comme dans le paragraphe 1.2 une « petite » représentation ν_α de H_α (qui dépend, comme ν, dans le cas Fourier-Jacobi des choix de ψ_0 et μ) ainsi qu'une fonction multiplicité $\pi \in \mathrm{Irr}(G_\alpha) \mapsto m(\pi)$ par

$$m(\pi) = \dim \mathrm{Hom}_{H_\alpha}(\pi, \nu_\alpha).$$

Notons que G_α est alors une forme intérieure pure de G mais que l'on n'obtient en général pas toutes les formes intérieures pures de G de cette façon. Les formes intérieures pures de G ainsi obtenues seront dites *relevantes*. Il se trouve qu'il existe toujours une forme intérieure pure relevante qui est quasi-déployée. Quitte à changer notre paire de départ, on supposera donc que G lui-même est quasi-déployé. On fixe alors la correspondance de Langlands pour $U(V)$ et $U(W)$ (et leurs formes intérieures pures) comme en 1.4.7.

Soient $\phi : WD_F \to {}^LU(V)$ et $\phi' : WD_F \to {}^LU(W)$ deux paramètres de Langlands que l'on identifie à des représentations complexes $\varphi : WD_F \to GL(M)$ et $\varphi' : WD_F \to GL(N)$ de dimensions $d_V = \dim(V)$ et $d_W = \dim(W)$ et qui sont $(-1)^{d_V+1}$- et $(-1)^{d_W+1}$-conjuguées-duales respectivement. Suivant Gan, Gross et Prasad, on définit deux caractères

$$\chi_{\phi,\phi'} : S_\phi \to \{\pm 1\} \text{ et } \chi_{\phi',\phi} : S_{\phi'} \to \{\pm 1\}$$

de la façon suivante. Fixons des formes non dégénérées B et B' sur M et N qui sont respectivement $(-1)^{d_V+1}$- et $(-1)^{d_W+1}$-conjuguées-duales de sorte que l'on a des identifications

$$S_\phi = \mathrm{Aut}(\varphi, B)/\,\mathrm{Aut}(\varphi, B)^0 \text{ et } S_{\phi'} = \mathrm{Aut}(\varphi', B')/\,\mathrm{Aut}(\varphi', B')^0.$$

Soient $s \in S_\phi$ et $s' \in S_{\phi'}$, que l'on relève en des éléments de $\mathrm{Aut}(\varphi, B)$ et $\mathrm{Aut}(\varphi', B')$ respectivement. Dans le cas Bessel (i.e. $\epsilon = 1$), on pose

$$\chi_{\phi,\phi'}(s) = \epsilon(\frac{1}{2}, \varphi^{s=-1} \otimes \varphi', \psi_{-2\delta}) \text{ et } \chi_{\phi',\phi}(s') = \epsilon(\frac{1}{2}, \varphi \otimes (\varphi')^{s'=-1}, \psi_{-2\delta})$$

où $\varphi^{s=-1}$ (resp. $(\varphi')^{s'=-1}$) désigne la sous-représentation de φ (resp. φ') où s (resp. s') agit comme -1, δ est le discriminant de l'unique espace hermitien de dimension impaire du couple (W, V) et $\psi_{-2\delta}(x) = \psi(-2\delta x)$. Dans le cas Fourier-Jacobi (i.e. $\epsilon = -1$), on pose

$$\chi_{\phi,\phi'}(s) = \epsilon(\frac{1}{2}, \varphi^{s=-1} \otimes \varphi' \otimes \mu^{-1}, \psi_\lambda) \text{ et } \chi_{\phi',\phi}(s') = \epsilon(\frac{1}{2}, \varphi \otimes (\varphi')^{s'=-1} \otimes \mu^{-1}, \psi_\lambda)$$

où μ est le caractère multiplicatif de $E^\times$ que l'on a fixé pour définir la représentation ν, $\lambda = 1$ dans le cas où $\dim(V)$ est paire et λ est l'unique élément de $F^\times$ tel que $\psi(\lambda x) = \psi_0(\mathrm{Trace}_{E/F}(ex))$ pour tout $x \in E$ avec e le discriminant de l'espace antihermitien V dans le cas où $\dim(V)$ est impaire. Dans tous les cas, on montre que le résultat ne dépend pas des choix des relèvements de s et s' et que l'on a bien ainsi défini des caractères de S_ϕ et $S_{\phi'}$ ([16] Theorem 6.1).

Conjecture 1.2 (Gan-Gross-Prasad). — *Supposons que ϕ et ϕ' soient des paramètres de Langlands génériques. Alors*

1. On a

$$\sum_{\alpha\in H^1(F,H)}\ \sum_{\pi\in\Pi^{G_\alpha}(\phi\times\phi')} m(\pi)=1.$$

2. Plus précisément, pour toute paire de caractères $(\chi,\chi')\in\widehat{S}_\phi\times\widehat{S}_{\phi'}$ *de sorte que* $\pi(\phi,\chi)\boxtimes\pi(\phi',\chi')$ *soit une représentation d'une forme intérieure pure relevante de* G*, on a*

$$m(\pi(\phi,\chi)\boxtimes\pi(\phi',\chi'))=1 \Longleftrightarrow \chi=\chi_{\phi,\phi'} \text{ et } \chi'=\chi_{\phi',\phi}.$$

La première partie de la conjecture ci-dessus est souvent appelée la propriété de multiplicité un dans les L-paquets. La deuxième partie de la conjecture, qui raffine la première de façon évidente et fait intervenir des facteurs epsilon locaux, constitue sans doute l'aspect le plus subtil de la conjecture.

1.6. Statut

1.6.1. *Cas Bessel.* — Dans une série de quatre articles fondateurs ([62], [63], [64], [65]), Waldspurger a établi l'analogue de la conjecture 1.2 pour les groupes spéciaux orthogonaux (analogue qui n'existe que dans le cas Bessel) lorsque F est p-adique et dans le cas où ϕ et ϕ' sont des paramètres de Langlands tempérés. Ce résultat a ensuite été étendu par Mœglin et Waldspurger [45] à tous les paramètres génériques. Dans ma thèse [5], [6], [7] j'ai adapté la méthode de Waldspurger afin de démontrer la conjecture 1.2 dans le cas Bessel et pour des paramètres de Langlands tempérés de groupes unitaires p-adiques. L'extension aux L-paquets génériques a été rédigée par Gan et Ichino dans [19] (section 9.3) en utilisant de façon cruciale un résultat d'Heiermann [30] qui généralise une partie de l'argument de Mœglin-Waldspurger. Toujours en suivant la méthode initiée par Waldspurger, j'ai établi dans [8] la propriété de multiplicité un dans les L-paquets (i.e. le 1 de la conjecture 1.2) toujours pour des paramètres tempérés et dans le cas Bessel mais cette fois pour des groupes unitaires réels. Le travail préliminaire effectué dans [8] devrait permettre d'adapter complètement la méthode de Waldspurger pour les corps archimédiens et ainsi d'obtenir une preuve complète de la conjecture dans le cas Bessel (pour les groupes unitaires). Malheureusement, la suite de [8] n'a pas encore été rédigée. Enfin, par une toute autre méthode utilisant la correspondance thêta et spécifique au cas archimédien, Hongyu He a obtenu dans [29] une preuve de la conjecture dans le cas Bessel pour les paramètres de Langlands *discrets* de groupes unitaires réels.

1.6.2. *Cas Fourier-Jacobi.* — Pour les corps p-adiques et peu après la preuve de la conjecture dans le cas Bessel, Gan et Ichino [19] ont montré comment, par une méthode utilisant la correspondance thêta locale, on pouvait en déduire la conjecture dans le cas Fourier-Jacobi. Cette méthode a par la suite été adaptée par Hiraku Atobe [4] afin d'établir l'analogue de la conjecture 1.2 pour les groupes symplectiques/métaplectiques (analogue qui n'existe que dans le cas Fourier-Jacobi) sur un corps p-adique. Par contre, le cas Fourier-Jacobi de la conjecture reste complétement ouvert sur les corps archimédiens.

1.7. Bref aperçu des preuves

1.7.1. *Le cas Bessel.* — On présente ici un rapide survol de la méthode initiée par Waldspurger, et adaptée par l'auteur au cas des groupes unitaires, pour démontrer la conjecture locale dans le cas Bessel pour les représentations tempérées. Cette méthode se base sur une formule intégrale calculant la multiplicité $m(\pi)$ lorsque π est tempérée. Présentons d'abord cette formule dans le cas le plus simple, c'est-à-dire lorsque les groupes G et H sont compacts (ceci peut arriver en tout rang pour les groupes réels mais sur les corps p-adiques cela impose $\dim(V) \leqslant 2$). La représentation π est alors de dimension finie et possède un caractère θ_π défini par $\theta_\pi(g) := \operatorname{Trace}\pi(g)$ pour tout $g \in G$. D'après les relations d'orthogonalité entre caractères on a alors directement

$$m(\pi) = \int_H \theta_\pi(h)dh$$

où dh est l'unique mesure de Haar sur H de masse totale 1. Par la formule d'intégration de Weyl, ceci peut se réécrire

$$m(\pi) = \sum_{T\in\mathcal{T}(H)} |W(H,T)|^{-1} \int_T D^H(t)\theta_\pi(t)dt \tag{4}$$

où $\mathcal{T}(H)$ désigne un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores maximaux dans H, $W(H,T)$ est le groupe de Weyl $\mathrm{Norm}_H(T)/T$ où $\mathrm{Norm}_H(T)$ est le normalisateur de T dans H et $D^H(t) = |\det(1 - Ad(t))_{\mathfrak{h}/\mathfrak{t}}|$ est le discriminant de Weyl (avec $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie de H et T respectivement). Dans le cas des groupes réels compacts, on connaît des formules explicites (aussi dues à Weyl) pour les caractères θ_π et la formule ci-dessus permet alors de retrouver directement la loi de branchement présentée dans l'introduction (signalons que dans ce cas $\mathcal{T}(H)$ est réduit à un élément).

La méthode de Waldspurger permet de généraliser la formule (4) à des groupes non nécessairement compacts. Plusieurs difficultés arrivent alors. Tout d'abord, le caractère θ_π n'a plus de sens a priori puisque la représentation π est en général de dimension infinie et les opérateurs $\pi(g)$, $g \in G$, ne sont pas alors traçables. Un résultat très profond d'Harish-Chandra permet néanmoins de définir un tel caractère θ_π. Plus précisément, Harish-Chandra définit d'abord un caractère-distribution $f \in C_c^\infty(G) \mapsto \theta_\pi(f) := \operatorname{Trace}\pi(f)$ où $\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$ (on montre sans trop de difficultés que ces opérateurs sont traçables ; ils sont même de rang fini pour les groupes p-adiques) et démontre que cette distribution est représentable par une fonction localement intégrable θ_π sur G ayant de bonnes propriétés. En particulier, cette fonction est lisse (c'est-à-dire localement constante dans le cas p-adique) sur le lieu ouvert G_{reg} des éléments semi-simples réguliers et Harish-Chandra a même décrit les singularités que θ_π peut avoir au voisinage des éléments singuliers. Puisque les tores maximaux de H coupent tous G_{reg} suivant un ouvert de complémentaire négligeable, on pourrait donc donner un sens à la formule (4) en général (modulo des questions de convergence). La formule de Waldspurger diffère cependant de (4) par deux aspects. Premièrement, tous les tores maximaux n'y contribuent pas mais seulement ceux qui sont compacts (ce qui règle, essentiellement, les questions de convergence). Deuxièmement, y contribuent aussi certains tores non maximaux (mais toujours compacts). Cette dernière propriété implique notamment l'existence de contributions non négligeables de certaines classes de conjugaison singulières ce qui nécessite de définir une régularisation $x \mapsto c_\pi(x)$ du caractère θ_π en ces points. Dans le cas particulier où $\dim(V) = 2$ (de sorte que $\dim(W) = 1$ et H est lui-même un tore) mais où le groupe G n'est pas compact la formule prend par exemple la forme suivante

$$m(\pi) = \int_H \theta_\pi(t)dt + c_\pi(1). \tag{5}$$

Ainsi, ici la seule contribution singulière provient de la classe de conjugaison triviale. On renvoie aux introductions de [62] (pour le cas des groupes orthogonaux) et [5] pour plus de détails sur la formule dans le cas général. Expliquons maintenant brièvement comment on peut déduire des formules (4) et (5) la première partie de la conjecture 1.2 dans le cas $\dim(V) = 2$ et F p-adique. Notons plus précisément dans ce cas (G_i, H_i) l'unique forme intérieure pure avec G_i quasi-déployé (et donc non compact) et (G_a, H_a) l'unique autre forme intérieure pure qui elle, par contre, est compacte. Soit $\phi : WD_F \to {}^LG_i = {}^LG_a$ un paramètre de Langlands tempéré. Les L-paquets $\Pi^{G_i}(\phi)$ et $\Pi^{G_a}(\phi)$ contiennent alors chacun au plus deux éléments (et $\Pi^{G_a}(\phi)$ peut éventuellement être vide). Posons $\theta_{\phi,\sharp} = \sum_{\pi\in\Pi^{G_\sharp}(\phi)} \theta_\pi$ pour $\sharp \in \{i, a\}$. D'après (4) et (5), on a $\sum_{\pi\in\Pi^{G_a}(\phi)} m(\pi) = \int_{H_a} \theta_{\phi,a}(h)dh$ et $\sum_{\pi\in\Pi^{G_i}(\phi)} m(\pi) = \int_{H_i} \theta_{\phi,i}(h)dh + c_{\phi,i}(1)$ où $c_{\phi,i}(1)$ est une certaine régularisation de $\theta_{\phi,i}$ en 1. Les groupes H_i et H_a étant des groupes unitaires de rang un, on a un isomorphisme naturel $H_i \simeq H_a$ et de plus via cet isomorphisme on a l'égalité $\theta_{\phi,i}(h) = -\theta_{\phi,a}(h)$ (c'est la plus simple de toutes les fameuses *relations endoscopiques*). En sommant les deux formules, on obtient donc

$$\sum_{\pi\in\Pi^{G_i}(\phi)\cup\Pi^{G_a}(\phi)} m(\pi) = c_{\phi,i}(1).$$

Enfin, d'après un résultat de Rodier [51] et la définition de $c_{\phi,i}(1)$ (que nous n'avons pas donnée ici), ce dernier terme compte le nombre de représentations génériques dans le L-paquet $\Pi^{G_i}(\phi)$ correspondant à une certaine donnée de Whittaker. Puisque ϕ est générique ce dernier nombre vaut 1, ce qui conclut la preuve. La même idée (légèrement plus élaborée) conduit à une preuve en tout rang de la première partie de la conjecture 1.2 à partir de la formule de Waldspurger.

Pour obtenir la deuxième partie de la conjecture, Waldspurger introduit un deuxième ingrédient essentiel : une formule intégrale, analogue à la précédente, exprimant certains facteurs epsilon de paires. Dans le cadre de la conjecture pour les groupes unitaires, cette formule exprime plus précisément un facteur de la forme $\epsilon(\frac{1}{2}, \pi \times \pi', \psi)$, où π et π' sont des représentations tempérées irréductibles de $GL_k(E)$ et $GL_l(E)$ qui sont conjuguées-duales (i.e. $\pi^\sigma \simeq \pi^\vee$ et $(\pi')^\sigma \simeq (\pi')^\vee$) avec $k \not\equiv l \mod 2$ en fonction de caractères « tordus » associés à π et π' (plus précisément la restriction à la composante connexe non neutre des caractères d'extensions de π et π' à $GL_i^+(E) = GL_i(E) \rtimes \langle\theta_i\rangle$ où $\theta_i g \theta_i^{-1} = {}^t(g^\sigma)^{-1}$ pour $i = k, l$). Ici, $\epsilon(s, \pi\times\pi', \psi)$ désigne un certain facteur epsilon défini par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika ([34]) et qui est égal au facteur epsilon d'Artin $\epsilon(s, \phi\otimes\phi', \psi)$ où $\phi : WD_E \to GL_k(\mathbb{C})$ et $\phi' : WD_E \to GL_l(\mathbb{C})$ sont les paramètres de Langlands de π et π' obtenus via la correspondance de Langlands locale pour les groupes linéaires (démontrée par Harris-Taylor [28], Henniart [29] et plus récemment Scholze [52] ; cette compatibilité aux facteurs ϵ de paires est d'ailleurs un ingrédient essentiel pour caractériser cette correspondance). Nous ne donnerons pas plus de détails sur cette formule (ni sur sa preuve) et nous contenterons de renvoyer le lecteur aux introductions de [64] et [6] pour plus de précisions. C'est cette formule pour les facteurs epsilon de paires qui n'a pas été démontrée dans le cas archimédien et qui manque pour finir la preuve de la conjecture 1.2 en général.

Enfin, la dernière partie de la démonstration pour les représentations tempérées [65], [7] consiste à relier les deux formules précédentes, pour la multiplicité $m(\pi)$ et pour les facteurs epsilon de paires, via les *relations endoscopiques* entre caractères. En effet, ces relations qui, rappelons-le, caractérisent la correspondance locale pour les groupes unitaires, permettent essentiellement d'exprimer le caractère de n'importe quelle représentation tempérée de G à partir de caractères « tordus » sur des groupes linéaires comme ci-dessus. On tombe alors, assez miraculeusement, sur une expression de $m(\pi)$, pour π une représentation tempérée de G, en termes de facteurs epsilon de paires qui est très exactement celle prévue par la conjecture de Gan-Gross-Prasad.

1.7.2. *Le cas Fourier-Jacobi.* — On explique ici les grandes lignes de la preuve par Gan et Ichino [19] de la conjecture 1.2 dans le cas Fourier-Jacobi. On a besoin pour cela de faire quelques rappels sur la correspondance thêta locale pour les groupes unitaires. Pour simplifier, on se restreindra au cas des représentations tempérées.

Rappelons qu'une *paire réductive duale* d'un goupe symplectique $Sp(\mathcal{W})$ consiste en la donnée d'un couple (U_1, U_2) formé de deux sous-groupes réductifs de $Sp(\mathcal{W})$ qui sont les centralisateurs l'un de l'autre. Soient W_n un espace antihermitien de dimension n, V_{n+1} un espace hermitien de dimension $n+1$, $V_n \subset V_{n+1}$ un hyperplan non dégénéré et V_1 l'orthogonal de V_n dans V_{n+1}. On dispose alors dans le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_{n+1})$ des deux paires réductives duales suivantes

$$(U(W_n), U(V_{n+1})) \text{ et } (U(W_n)\times U(W_n), U(V_n)\times U(V_1))$$

où l'action du premier couple sur $W_n \otimes V_{n+1}$ est l'action évidente tandis que l'action du deuxième couple respecte la décomposition $W_n\otimes V_{n+1} = W_n\otimes V_n \oplus W_n \otimes V_1$. De plus, on a des inclusions $U(W_n) \subset U(W_n)\times U(W_n)$ et $U(V_n)\times U(V_1) \subset U(V_{n+1})$. On résume la situation sous la forme du diagramme suivant, dit diagramme « see-saw » (ou diagramme en *ciseaux*),

$$
(6) \qquad \begin{tikzcd} U(W_n)\times U(W_n) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & U(V_{n+1}) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ U(W_n) & U(V_n)\times U(V_1). \end{tikzcd}
$$

Le caractère $\mu : E^\times \to \mathbb{C}^\times$ que l'on a fixé, et dont la restriction à $F^\times$ coïncide avec $\mathrm{sgn}_{E/F}$, permet de relever tous ces groupes dans le revêtement métaplectique $\mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_{n+1})$. Notons $\omega_{\psi_0,W_n,V_{n+1}}$ la représentation de Weil de $\mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_{n+1})$ associée au caractère additif ψ_0. Pour toute représentation irréductible σ de $U(W_n)$, le quotient σ-isotypique maximal de $\omega_{\psi_0,W_n,V_{n+1}}$ est de la forme $\sigma \boxtimes \Theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ où $\Theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ est une représentation de $U(V_{n+1})$ qui se trouve être toujours de longueur finie. De plus, si cette représentation est non nulle alors elle admet un unique quotient irréductible d'après [61] et [20] (il s'agit de la fameuse « conjecture de dualité de Howe »). Notons $\theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ ce quotient irréductible lorsqu'il existe. Alors, l'application partiellement définie $\sigma \mapsto \theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ réalise une bijection entre une partie de $\mathrm{Irr}(U(W_n))$ et une partie de $\mathrm{Irr}(U(V_{n+1}))$: c'est ce qu'on appelle la correspondance thêta locale. On définit de la même façon une application $\pi \in \mathrm{Irr}(U(V_n)) \mapsto \Theta_{W_n,V_n}(\pi)$ à valeurs dans les représentations de longueurs finies de $U(W_n)$ et une application partiellement définie $\pi \in \mathrm{Irr}(U(V_n)) \mapsto \theta_{W_n,V_n}(\pi) \in \mathrm{Irr}(U(W_n))$ en réalisant $(U(V_n), U(W_n))$ comme une paire réductive duale dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{Res}_{E/F} V_n \otimes W_n)$ (relevée comme précédemment dans le revêtement métaplectique). La restriction de la représentation de Weil $\omega_{\psi_0,W_n,V_{n+1}}$ à $\mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_n) \times \mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_1)$ via le morphisme naturel $\mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_n) \times \mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_1) \to \mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F} W_n \otimes V_{n+1})$ est isomorphe au produit tensoriel $\omega_{\psi_0,W_n,V_n} \boxtimes \omega_{\psi_0,W_n,V_1}$. Il s'ensuit par le diagramme (6) que l'on a un isomorphisme naturel (dit identité de « see-saw »)

$$
(7) \qquad \mathrm{Hom}_{U(W_n)}(\Theta_{W_n,V_n}(\pi) \otimes \omega_{\psi_0,W_n,V_1}, \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{U(V_n)}(\Theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma), \pi)
$$

pour toutes représentations $\pi \in \mathrm{Irr}(U(V_n))$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}(U(W_n))$. La contragrédiente de la représentation de Weil ω_{ψ_0,W_n,V_1} étant $\omega_{\psi_0^{-1},W_n,V_1}$, l'espace de gauche ci-dessus est essentiellement l'espace des fonctionnelles de Fourier-Jacobi sur la représentation $\Theta_{W_n,V_n}(\pi) \boxtimes \sigma^\vee$ du groupe $U(W_n) \times U(W_n)$ tandis que l'espace de droite est l'espace des fonctionnelles de Bessel sur la représentation $\pi^\vee \boxtimes \Theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ du groupe $U(V_n) \times U(V_{n+1})$. L'identité (7) relie ainsi les cas Bessel et Fourier-Jacobi de la conjecture et pour en déduire le cas Fourier-Jacobi à partir du cas Bessel, au moins pour les représentations tempérées, il suffit grosso modo de

— Montrer que pour π et σ tempérées les représentations $\Theta_{W_n,V_n}(\pi)$ et $\Theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ sont nulles ou irréductibles (auquel cas elles coïncident avec $\theta_{W_n,V_n}(\pi)$ et $\theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ respectivement).

— Expliciter les correspondances thêta locales $\pi \mapsto \theta_{W_n,V_n}(\pi)$ et $\sigma \mapsto \theta_{W_n,V_{n+1}}(\sigma)$ en termes de la correspondance de Langlands locale.

— Montrer que quitte à faire varier l'espace hermitien V_n, la correspondance thêta locale $\pi \mapsto \theta_{W_n,V_n}(\pi)$ restreinte aux représentations tempérées est surjective.

Le premier et le troisième points avaient déjà été établis par Gan et Ichino en [18] dans un autre but. Par ailleurs, Prasad ([48], [49]) avait énoncé des conjectures précises concernant le deuxième point. Ce sont ces conjectures qui sont démontrées dans [19] par Gan et Ichino par des méthodes que nous ne décrirons pas ici.

2. LES CONJECTURES GLOBALES

Dans toute cette partie on fixe une extension quadratique k'/k de corps de nombres. On notera $|k|$ l'ensemble des places de k et pour toute $v \in |k|$ par k_v le complété correspondant. On posera aussi $k'_v = k' \otimes_k k_v$. Ainsi, $k'_v \simeq k_v \times k_v$ si v est déployée dans k' et k'_v est une extension quadratique de k_v sinon. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k. Rappelons qu'il s'agit du produit restreint des k_v sur toutes les places $v \in |k|$ c'est-à-dire l'ensemble des familles $(x_v)_{v\in|k|}$ avec $x_v \in k_v$ pour tout v et $x_v \in \mathcal{O}_v$ pour presque toute place non archimédienne v où $\mathcal{O}_v$ désigne l'anneau des entiers de k_v. On dispose d'un plongement diagonal $k \hookrightarrow \mathbb{A}$ et on notera aussi $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finis (c'est-à-dire le produit restreint des complétés non archimédiens de k) et $k_\infty = k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \prod_{v|\infty} k_v$ la partie archimédienne de $\mathbb{A}$. On notera $\mathrm{sgn}_{k'/k}$ le caractère quadratique du groupe des idèles $\mathbb{A}^\times/k^\times$ associé, par la théorie du corps de classe, à l'extension k'/k. Pour toute $v \in |k|$, la restriction de $\mathrm{sgn}_{k'/k}$ à $k_v^\times$ coïncide avec $\mathrm{sgn}_{k'_v/k_v}$ (et donc est triviale si v est déployée dans k'). On se donne enfin deux espaces $W \subset V$ hermitiens ou antihermitiens sur k' avec

$$\dim(V) - \dim(W) = \begin{cases} 1, & \text{dans le cas hermitien,} \\ 0, & \text{dans le cas antihermitien,} \end{cases}$$

et on pose $G = U(W) \times U(V)$, $H = U(W)$ (des groupes algébriques définis sur k). Comme dans le cas local on dispose d'une inclusion « diagonale » $H \hookrightarrow G$ et le groupe des points adéliques $G(\mathbb{A})$ est un groupe localement compact admettant la description plus explicite suivante. Fixons un modèle de G sur $\mathcal{O}_k[1/N]$ pour un certain entier $N \geqslant 1$ où $\mathcal{O}_k$ désigne l'anneau des entiers algébriques de k. Alors pour presque toute place $v \in |k|$, le groupe des points $G(\mathcal{O}_v)$ de ce modèle sur $\mathcal{O}_v$ est un sous-groupe compact maximal de $G(k_v)$ et $G(\mathbb{A})$ est le produit restreint des $G(k_v)$, $v \in |k|$, par rapport aux $G(\mathcal{O}_v)$ c'est-à-dire l'ensemble des familles $(g_v)_{v\in|k|}$ avec $g_v \in G(k_v)$ pour toute $v \in |k|$ et $g_v \in G(\mathcal{O}_v)$ pour presque toute $v \in |k|$. Une description similaire vaut bien entendu pour $H(\mathbb{A})$.

2.1. Formes automorphes et périodes

On rappelle qu'une forme automorphe sur $G(\mathbb{A})$ est une fonction $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

— φ est invariante à gauche par $G(k)$.

— φ est invariante à droite par un sous-groupe compact-ouvert $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$.

— Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ la fonction $g_\infty \in G(k_\infty) \mapsto \varphi(gg_\infty)$ est C^∞, on en déduit en particulier une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\infty$ de $G(k_\infty)$ sur φ par $(X.\varphi)(g) = \frac{d}{dt}\varphi(ge^{tX}) \mid_{t=0}$ action qui s'étend à l'algèbre enveloppante complexifiée $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$.
— Si $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ désigne le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ alors l'espace vectoriel $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\infty)\varphi$ est de dimension finie.
— φ vérifie une certaine propriété de *croissance modérée* à l'infini (cf. [44] §1.2.3).

On notera $\mathcal{A}(G)$ l'espace des formes automorphes sur $G(\mathbb{A})$. Signalons que la définition ci-dessus diffère de celle usuellement admise qui impose une condition supplémentaire de K_∞-finitude où K_∞ est un sous-groupe compact maximal de $G(k_\infty)$ fixé à l'avance. Cette définition a cependant l'avantage de fournir un espace $\mathcal{A}(G)$ stable pour l'action par translation à droite de $G(\mathbb{A})$ (alors qu'avec la définition usuelle on obtient seulement une structure de $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-module aux places archimédiennes) et semble plus naturelle pour les questions que nous allons aborder. On notera $\mathcal{A}_{cusp}(G) \subset \mathcal{A}(G)$ le sous-espace des formes cuspidales c'est-à-dire des formes automorphes qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées (dans un sens que l'on ne rendra pas précis ici). Cet espace est stable sous l'action par translation à droite de $G(\mathbb{A})$ et admet une décomposition

$$\mathcal{A}_{cusp}(G) = \bigoplus_\pi \pi$$

en somme directe de représentations irréductibles de $G(\mathbb{A})$. Chacune de ces représentations irréductibles se décompose comme un certain type de produit tensoriel $\pi = \bigotimes'_{v\in|k|} \pi_v$ dit produit tensoriel restreint. Plus précisément, il existe une famille de représentations irréductibles lisses $(\pi_v)_{v\in|k|}$ des groupes locaux $G(k_v)$ qui sont non ramifiées en presque toute place $v \in |k|$ (ce qui signifie que $\pi_v^{G(\mathcal{O}_v)} \neq 0$ auquel cas $\pi_v^{G(\mathcal{O}_v)}$ est une droite par l'*isomorphisme de Satake*) et des vecteurs non nuls $\varphi_v^\circ \in \pi_v^{G(\mathcal{O}_v)}$ tels que π est isomorphe à la représentation naturelle de $G(\mathbb{A})$ sur

$$\bigotimes_v{}' \pi_v := \{\bigotimes_v \varphi_v;\ \varphi_v \in \pi_v \text{ pour toute } v \in |k| \text{ et } \varphi_v = \varphi_v^\circ \text{ pour presque toute } v \in |k|\}$$

(pour être précis, il faudrait considérer des produits tensoriels topologiques aux places archimédiennes).

Les constructions de la section 1.2 fournissent en toute place v une représentation ν_v du groupe local $H(k_v)$ (la représentation triviale dans le cas hermitien et une certaine représentation de Weil dans le cas antihermitien). On peut former leur produit tensoriel restreint $\nu = \bigotimes'_v \nu_v$ et il se trouve qu'il existe une réalisation naturelle $\nu \hookrightarrow \mathcal{A}(H)$ de ν dans l'espace des formes automorphes sur H (dans le cas hermitien la représentation triviale se réalise comme l'espace des fonctions constantes sur $H(k)\backslash H(\mathbb{A})$ tandis que dans le cas antihermitien ν est une certaine représentation de Weil globale et le plongement $\nu \hookrightarrow \mathcal{A}(H)$ s'obtient via les séries thêta). Plus précisément, dans le cas antihermitien on doit choisir des données locales $(\psi_{0,v}, \mu_v)$ pour toute $v \in |k|$ comme en 1.2 afin de spécifier les représentations ν_v. Pour obtenir le plongement $\nu \hookrightarrow \mathcal{A}(H)$ on doit supposer que ces données locales proviennent par localisation de caractères globaux $\psi_0 : \mathbb{A}/k \to \mathbb{C}^\times$ et $\mu : \mathbb{A}_{k'}^\times/(k')^\times \to \mathbb{C}^\times$ où la restriction de μ à $\mathbb{A}^\times$ coïncide avec $\mathrm{sgn}_{k'/k}$.

On définit une *période automorphe*

$$P_H : \mathcal{A}_{cusp}(G) \otimes \overline{\nu} \to \mathbb{C}$$

où $\overline{\nu}$ désigne la conjuguée complexe de la réalisation de ν dans $\mathcal{A}(H)$, par

$$P_H(\varphi \otimes \overline{\theta}) := \int_{H(k)\backslash H(\mathbb{A})} \varphi(h)\overline{\theta(h)}dh$$

pour tous $\varphi \in \mathcal{A}_{cusp}(G)$ et $\overline{\theta} \in \overline{\nu}$. L'intégrale est absolument convergente en raison de la décroissance rapide de φ et la mesure dh pour laquelle on intègre est une mesure $H(\mathbb{A})$-invariante que l'on peut obtenir comme quotient d'une mesure de Haar sur $H(\mathbb{A})$ car $H(k)$ en est un sous-groupe discret. Pour la conjecture globale de Gan-Gross-Prasad le choix précis de cette mesure de Haar importe peu car on ne s'intéresse qu'à des questions de non-annulation de la période. En revanche, ce choix importe pour la conjecture d'Ichino-Ikeda car celle-ci prédit une formule explicite pour (le carré de) la période ci-dessus. Notons que dans le cas hermitien, la représentation ν étant triviale, la période P_H est simplement la forme linéaire $\mathcal{A}_{cusp}(G) \to \mathbb{C}$ donnée par

$$P_H(\varphi) = \int_{H(k)\backslash H(\mathbb{A})} \varphi(h)dh.$$

Dans tous les cas, si $\pi \subset \mathcal{A}_{cusp}(G)$ est une représentation cuspidale irréductible, la restriction de la période P_H à π définit un élément de l'espace d'entrelacements

$$\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi \otimes \overline{\nu}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi, \nu)$$

qui lui-même se décompose en produit tensoriel (restreint) des espaces d'entrelacements locaux $\mathrm{Hom}_{H_v}(\pi_v, \nu_v)$ pour toute $v \in |k|$. Ainsi, une condition nécessaire pour que cette restriction soit non nulle est que ces espaces d'entrelacements locaux soient non triviaux (condition qui elle-même est explicitée par la conjecture locale).

2.2. Fonctions L automorphes et changement de base

Soit $\pi \subset \mathcal{A}_{cusp}(G)$ une représentation cuspidale irréductible que l'on suppose presque partout générique c'est-à-dire qu'en presque toute place $v \in |k|$ la représentation π_v est générique au sens du §1.4.8. On dit alors aussi que π est de *type Ramanujan* car ce sont les représentations pour lesquelles on espère avoir une conjecture de Ramanujan généralisée (i.e. π_v tempérée pour toute $v \in |k|$). Cette hypothèse permet aussi de définir les fonctions L globales seulement en termes de la correspondance de Langlands locale (alors qu'en général il faudrait considérer des paquets plus généraux de représentations appelés *paquets d'Arthur*). De plus les deux conjectures qui vont nous intéresser ne portent, pour l'instant, que sur ce type de représentations cuspidales.

Soit $\rho : {}^LG \to GL(M)$ une représentation algébrique du L-groupe de G. D'après la section 1.4.6, on peut associer, en toute place $v \in |k|$, à la représentation π_v une fonction L locale $L(s,\pi_v,\rho)$. On définit alors une fonction L globale $L(s,\pi,\rho)$ par

$$L(s,\pi,\rho)=\prod_{v\in|k|}L(s,\pi_v,\rho).$$

Le produit converge pour $Re(s)\gg 1$ et conjecturalement $L(s,\pi,\rho)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe et une équation fonctionnelle reliant $L(s,\pi,\rho)$ à $L(1-s,\pi,\rho^\vee)$. Dans la suite, on ne verra apparaître que deux fonctions L globales. La première, qui joue un rôle mineur, est la fonction L adjointe $L(s,\pi,Ad)$ associée à la représentation adjointe de ${}^LG$. La deuxième fonction L, celle qui nous intéressera le plus, $L(s,\pi,R)$ est associée à la représentation R suivante de ${}^LG$:

$$R=\begin{cases}\mathrm{Ind}_{\widehat{G}\times W_{k'}}^{{}^LG}(M_W\otimes M_V) & \text{dans le cas hermitien;}\\ \mathrm{Ind}_{\widehat{G}\times W_{k'}}^{{}^LG}((M_W\otimes M_V)\otimes\mu^{-1}) & \text{dans le cas antihermitien,}\end{cases}$$

où M_W et M_V désignent les représentations *standards* de $\widehat{U(W)}$ et $\widehat{U(V)}$ (rappelons qu'il s'agit de groupes linéaires sur $\mathbb{C}$) respectivement et on a identifié μ à un caractère du groupe de Weil $W_{k'}$ via la théorie du corps de classe. On peut aussi décrire les facteurs locaux de cette fonction L de la façon explicite suivante. Puisque $G=U(W)\times U(V)$, on peut décomposer π comme un produit tensoriel $\pi=\pi_1\boxtimes\pi_2$ où π_1 (resp. π_2) est une représentation cuspidale irréductible de $U(W)$ (resp. $U(V)$). D'après la section 1.4.2, en toute place $v\in|k|$ non déployée dans k' les paramètres de Langlands de $\pi_{1,v}$ et $\pi_{2,v}$ peuvent être identifiés avec des représentations $\varphi_{1,v}:WD_{k'_v}\to GL(M_1)$ et $\varphi_{2,v}: WD_{k'_v}\to GL(M_2)$ conjuguées-duales d'un certain signe. On pose alors $L(s,\pi_v,R)=L(s,\varphi_{1,v}\otimes\varphi_{2,v})$ dans le cas hermitien et $L(s,\pi_v,R)=L(s,\varphi_{1,v}\otimes\varphi_{2,v}\otimes\mu_v^{-1})$ dans le cas antihermitien. En une place v déployée dans k', les groupes $U(W)_v$ et $U(V)_v$ sont des groupes linéaires sur k_v et les paramètres de Langlands de $\pi_{1,v}$ et $\pi_{2,v}$ peuvent être identifiés à des représentations $\varphi_{1,v}$ et $\varphi_{2,v}$ de WD_{k_v}. On a alors $L(s,\pi_v,R)=L(s,\varphi_{1,v}\otimes\varphi_{2,v})L(s,\varphi_{1,v}^\vee\otimes\varphi_{2,v}^\vee)$ dans le cas hermitien et $L(s,\pi_v,R)=L(s,\varphi_{1,v}\otimes\varphi_{2,v}\otimes\mu'_v)L(s,\varphi_{1,v}^\vee\otimes\varphi_{2,v}^\vee\otimes(\mu'_v)^{-1})$ dans le cas antihermitien où on a écrit $\mu_v=(\mu'_v)^{-1}\boxtimes\mu'_v$ via une identification $k'_v\simeq k_v\times k_v$.

Par les résultats de Mok [47] et Kaletha-Minguez-Shin-White [36] sur la classification des représentations automorphes de groupes unitaires ainsi que les travaux de Jacquet-Piatetski-Shapiro-Shalika [34] et Shahidi sur les fonctions L de paires et d'Asai pour les groupes linéaires respectivement, on sait que $L(s,\pi,Ad)$ et $L(s,\pi,R)$ admettent des prolongements holomorphes à $\mathbb{C}$ et vérifient les équations fonctionnelles attendues. Pour être plus précis, d'après [47] et [36] il existe, avec les notations ci-dessus, des représentations automorphes irréductibles $BC(\pi_1)$ et $BC(\pi_2)$ (BC pour *changement de base*) de $GL_{d_W}(\mathbb{A}_{k'})$ et $GL_{d_V}(\mathbb{A}_{k'})$ respectivement (où on a noté $\mathbb{A}_{k'}$ l'anneau des adèles de k', $d_W=\dim(W)$ et $d_V=\dim(V)$) dont les composantes locales en $v\in|k|$ ont pour paramètres de Langlands $\varphi_{1,v}$, $\varphi_{2,v}$ respectivement si v est non déployée dans k' et $\varphi_{1,v}\times\varphi_{1,v}^\vee$, $\varphi_{2,v}\times\varphi_{2,v}^\vee$ respectivement si v est déployée dans k' (auquel cas $GL_{d_W}(k'_v)\simeq GL_{d_W}(k_v)\times GL_{d_W}(k_v)$ et $GL_{d_V}(k'_v)\simeq GL_{d_V}(k_v)\times GL_{d_V}(k_v)$).

De plus, $L(s, \pi, R)$ coïncide alors avec la fonction L de paire $L(s, BC(\pi_1) \times BC(\pi_2))$ définie par Jacquet-Piatetskii-Shapiro et Shalika [34] dans le cas hermitien et avec $L(s, BC(\pi_1) \times BC(\pi_2) \otimes \mu^{-1})$ dans le cas antihermitien tandis que $L(s, \pi, Ad)$ coïncide avec un produit de certaines fonctions L d'Asai de $BC(\pi_1)$ et $BC(\pi_2)$ définies par Shahidi. On note $BC(\pi) = BC(\pi_1) \boxtimes BC(\pi_2)$. Il s'agit d'une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_{k'}) \simeq GL_{d_W}(\mathbb{A}_{k'}) \times GL_{d_V}(\mathbb{A}_{k'})$ appelée le *changement de base* (quadratique) de π, et on posera $L(s, BC(\pi)) = L(s, BC(\pi_1) \times BC(\pi_2))$. Ainsi, dans le cas hermitien on a simplement

$$L(s, \pi, R) = L(s, BC(\pi)).$$

2.3. La conjecture

On a maintenant tous les ingrédients pour énoncer la conjecture globale de Gan-Gross-Prasad.

Conjecture 2.1 (Gan-Gross-Prasad). — *Soit $\pi \subset \mathcal{A}_{cusp}(G)$ une représentation cuspidale irréductible presque partout générique. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *La restriction de la période P_H à π est non nulle.*
2. *On a $L(\frac{1}{2}, \pi, R) \neq 0$ et pour toute place $v \in |k|$ on a $\mathrm{Hom}_{H_v}(\pi_v, \nu_v) \neq 0$.*

2.4. Le raffinement d'Ichino-Ikeda

Il existe un raffinement de la conjecture 2.1 sous la forme d'une identité reliant directement $L(\frac{1}{2}, \pi, R)$ à la période P_H. Cette conjecture est due à Ichino et Ikeda [33] dans le cas des groupes orthogonaux et a été étendue aux groupes unitaires par N. Harris [27] (dans le cas hermitien) et H. Xue [70] (dans le cas antihermitien). Pour simplifier l'exposition, on se limitera ici au cas Bessel de la conjecture (i.e. W et V sont des espaces hermitiens).

Soient $v \in |k|$ et π_v une représentation irréductible lisse et tempérée de $G(k_v)$. En particulier, π_v est unitaire et on peut fixer un produit scalaire $G(k_v)$-invariant $(.,.)_v$ sur (l'espace de) π_v. Grâce à ce produit scalaire, on définit une *période locale*

$$P_{H,v} : \pi_v \times \pi_v \to \mathbb{C}$$

par

$$P_{H,v}(\varphi_v, \varphi'_v) = \int_{H(k_v)} (\pi_v(h_v)\varphi_v, \varphi'_v)_v dh_v, \quad \varphi_v, \varphi'_v \in \pi_v,$$

où dh_v est une certaine mesure de Haar sur $H(k_v)$. L'intégrale ci-dessus est absolument convergente par l'hypothèse que π_v est tempérée et de plus $P_{H,v}$ induit une forme hermitienne $H(k_v) \times H(k_v)$-invariante sur π_v. En particulier, si la période locale $P_{H,v}$ est non nulle sur π_v alors $\mathrm{Hom}_{H(k_v)}(\pi_v, \mathbb{C}) \neq 0$. Une étape importante dans la preuve de la conjecture locale de Gan-Gross-Prasad est de montrer l'implication inverse (cf. [8] Theorem 8.2.1) : $P_{H,v}$ est non nulle sur π_v si et seulement si $\mathrm{Hom}_{H(k_v)}(\pi_v, \mathbb{C}) \neq 0$.

Soit maintenant $\pi \subset \mathcal{A}_{cusp}(G)$ une représentation cuspidale irréductible. On peut munir les groupes adéliques $G(\mathbb{A})$ et $H(\mathbb{A})$ de mesures de Haar canoniques dg_{Tam}, dh_{Tam} appelées mesures de Tamagawa (cf. [67] Chap.II). On normalise la période globale P_H grâce à la mesure de Tamagawa sur $H(\mathbb{A})$ et on normalise les périodes locales $P_{H,v}$ par des mesures locales qui factorisent la mesure de Tamagawa :

$$dh_{Tam} = \prod_{v\in|k|} dh_v.$$

On munit π du produit scalaire suivant (dit produit scalaire de *Petersson*)

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in \pi \times \pi \mapsto \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{Pet} = \int_{G(k)\backslash G(\mathbb{A})} \varphi_1(g)\overline{\varphi_2(g)} dg_{Tam}$$

et on choisit les produits scalaires locaux $(,)_v$, $v \in |k|$, de sorte qu'ils factorisent globalement $\langle .,. \rangle_{Pet}$:

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_{Pet} = \prod_{v\in|k|} (\varphi_v, \varphi_v)_v, \ \ \forall \varphi = \otimes'_v \varphi_v \in \pi = \otimes'_v \pi_v.$$

On associe à π le quotient suivant de fonctions L

$$\mathcal{L}(s, \pi) := \Delta_{n+1} \frac{L(s, BC(\pi))}{L(s + 1/2, \pi, Ad)}$$

où

$$\Delta_{n+1} := \prod_{i=1}^{n+1} L(i, \mathrm{sgn}^i_{k'/k})$$

est un produit fini de valeurs spéciales de fonctions L de Hecke. On définit de même pour toute place $v \in |k|$ un analogue local $\mathcal{L}(s, \pi_v)$ de $\mathcal{L}(s, \pi)$. Supposons π partout tempérée c'est-à-dire que π_v tempérée pour toute $v \in |k|$. Alors, pour presque toute place $v \in |k|$ et pour tout vecteur $\varphi_v^\circ \in \pi_v^{G(\mathcal{O}_v)}$, on a

$$P_{H,v}(\varphi_v^\circ, \varphi_v^\circ) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}, \pi_v) \operatorname{vol}(H(\mathcal{O}_v))(\varphi_v^\circ, \varphi_v^\circ)_v.$$

Ce qui nous amène à définir les *périodes locales normalisées*

$$P^\natural_{H,\pi_v} := \mathcal{L}(\frac{1}{2}, \pi_v)^{-1} P_{H,v} \mid_{\pi_v}, \quad v \in |k|.$$

On peut maintenant énoncer la conjecture d'Ichino-Ikeda pour les groupes unitaires dans le cas hermitien de la façon légèrement informelle suivante :

Conjecture 2.2 (Ichino-Ikeda, N.Harris). — *Soit $\pi \subset \mathcal{A}_{cusp}(G)$ une représentation cuspidale irréductible partout tempérée. Alors pour tout vecteur factorisable $\varphi = \otimes'_v \varphi_v \in \pi$, on a*

$$|P_H(\varphi)|^2 = \frac{1}{|S_\pi|} \mathcal{L}(\frac{1}{2}, \pi) \prod_{v\in|k|} P^\natural_{H,\pi_v}(\varphi_v, \varphi_v)$$

où S_π est le centralisateur du « paramètre de Langlands » de π (il s'agit d'un analogue global du groupe S_ϕ introduit dans la section 1.4.2 que nous ne tenterons pas de définir ici).

Remarque 2.3. — — D'après l'équivalence sus-mentionnée

$$P_{H,v}\mid_{\pi_v} \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{H(k_v)}(\pi_v, \mathbb{C}) \neq 0$$

la conjecture ci-dessus implique la conjecture 2.1 dans le cas où π est tempérée partout.

— D'après la conjecture de Ramanujan généralisée on s'attend à pouvoir remplacer l'hypothèse « π tempérée partout » par l'hypothèse « π est presque partout générique ». Cependant, même si la conjecture de Ramanujan généralisée est loin d'être établie en toute généralité, on peut énoncer une conjecture similaire sous l'hypothèse (a priori) plus faible « π presque partout générique » à condition d'étendre la définition des périodes locales normalisées $P^\natural_{H,\pi_v}$ (qui ne sont plus définies a priori par des intégrales absolument convergentes) par un certain « prolongement holomorphe ». Qu'un tel prolongement existe découle des résultats principaux de [9] et [10]. Sous cette forme plus générale (que nous n'énoncerons pas) la conjecture 2.2 devient alors strictement plus forte que la conjecture 2.1.

— Dans le cas où $\dim(W) = 1$ (et donc $\dim(V) = 2$), la conjecture 2.2 est essentiellement équivalente à une formule bien connue de Waldspurger [60] pour les périodes toriques sur les algèbres de quaternions (voir [27] Sect.3 pour une réduction formelle) dont nous avons donné un exemple dans l'introduction. Il semble d'ailleurs que cette formule de Waldspurger fut une des inspirations principales d'Ichino et Ikeda pour énoncer leur conjecture.

2.5. Statuts

Avant même que les conjectures de Gan-Gross-Prasad aient été étendues à tous les groupes classiques dans [16], Ginzburg, Jiang et Rallis ont montré dans une série de papiers [21], [22], [23] l'implication 1 ⇒ 2 de la conjecture 2.1 sous l'hypothèse que π est *globalement générique* c'est-à-dire qu'il existe une donnée de Whittaker globale (N, θ) de G avec θ trivial sur $N(k)$ et $\varphi \in \pi$ tels que $\int_{N(k)\backslash N(\mathbb{A})} \varphi(u)\theta(u)du \neq 0$, en particulier cela implique que le groupe G est quasi-déployé (car sinon G ne possède pas de données de Whittaker). Il n'est actuellement pas clair si l'approche de Ginzburg-Jiang-Rallis pourrait permettre d'établir l'implication inverse (au moins dans le cas globalement générique).

Comme nous l'avons déjà indiqué, dans le cas hermitien et où $\dim(W) = 1$ les conjectures 2.1 et 2.2 découlent d'une formule de Waldspurger [60]. Cette même formule de Waldspurger recouvre d'ailleurs aussi les analogues de ces conjectures pour une paire de groupes spéciaux orthogonaux $SO(W) \subset SO(V)$ avec $\dim(W) = 2$ et $\dim(V) = 3$. Toujours pour les groupes spéciaux orthogonaux et cette fois dans le cas où $\dim(W) = 3$ et $\dim(V) = 4$, l'analogue de la conjecture 2.2 a été établie par Ichino [32] (la fonction L

qui apparaît alors au numérateur du membre de droite de la formule est essentiellement associée au produit triple de trois représentations cuspidales de PGL_2).

Plus récemment, suivant une approche proposée par Jacquet-Rallis [35] de comparaisons de formules des traces relatives et grâce au lemme fondamental adéquat qui a été démontré par Z. Yun [74], W. Zhang a démontré la conjecture 2.1 dans le cas hermitien sous les hypothèses simplificatrices suivantes ([75] Theorem 1.1) :

— Toutes les places archimédiennes de k sont déployées dans k'.
— Il existe deux places non archimédiennes distinctes $v_0, v_1 \in |k|$ déployées dans k' telles que π_{v_0} est supercuspidale et π_{v_1} est tempérée.

Les travaux ultérieurs de H. Xue [72] d'une part et de Chaudouard-Zydor [12] d'autre part permettent maintenant de lever toutes ces restrictions sauf l'existence d'une place déployée dans k' en laquelle π est supercuspidale. Cette dernière hypothèse semble inévitable par la méthode de Zhang qui utilise des versions simples des formules des traces de Jacquet-Rallis. Les travaux en cours de M. Zydor et P.-H. Chaudouard pour établir des versions complètes de ces formules des traces relatives (travaux déjà initiés dans [77], [78], [79]) devraient permettre de lever cette dernière hypothèse.

À la suite de son premier papier, Zhang [76] s'est attaqué à la conjecture 2.2. Son résultat principal est une preuve de cette conjecture essentiellement sous les hypothèses suivantes (nous laissons de côté un détail technique) :

— Toutes les places archimédiennes de k sont déployées dans k'.
— Il existe une place non archimédienne $v_0 \in |k|$ déployée dans k' en laquelle π est supercuspidale.
— Pour toute place $v \in |k|$ non déployée dans k' la représentation π_v est soit supercuspidale soit non ramifiée.

Cette troisième hypothèse est bien plus restrictive que les autres et provient du problème suivant : outre la comparaison globale de formules des traces relatives proposée par Jacquet et Rallis, Zhang doit aussi comparer certaines périodes locales ce qu'il n'arrive à faire aux places non déployées que pour les représentations non ramifiées ou supercuspidales. Dans [9], l'auteur est parvenu à étendre cette comparaison à toutes les représentations tempérées aux places non archimédiennes ce qui permet finalement de lever la troisième hypothèse. De plus, dans un travail en cours de rédaction [10], l'auteur a obtenu, par une autre méthode, la comparaison cherchée entre périodes locales aux places archimédiennes modulo un signe indéterminé ce qui devrait permettre d'établir sans la première hypothèse la formule conjecturée par Ichino-Ikeda à un signe près. Finalement, signalons que modulo ce problème de signe les travaux en cours de Chaudouard-Zydor devraient aussi permettre de lever la deuxième hypothèse.

À la suite des travaux de Zhang, les conjectures 2.1 et 2.2 ont aussi été partiellement établies dans le cas Fourier-Jacobi (i.e. antihermitien). Plus précisément, dans [40] Y. Liu a proposé une comparaison de formules des traces relatives analogue à celle de Jacquet-Rallis pour attaquer ces conjectures. Suivant la méthode de Zhang, Hang

Xue [69], [70], [73] a alors pu démontrer les conjectures 2.1 et 2.2 dans le cas Fourier-Jacobi toujours sous la même hypothèse d'existence de deux places déployées distinctes en lesquelles π est supercuspidale et tempérée respectivement (ce qui lui permet, comme Zhang, de ne considérer que des formes simples de formules des traces relatives).

2.6. Survol de la preuve de la conjecture globale dans le cas hermitien

Dans cette section, on donne les grandes lignes de la preuve par Zhang [75] de la conjecture de Gan-Gross-Prasad (Conjecture 2.1) sous certaines hypothèses locales dans le cas hermitien. En particulier, on ne parlera pas de la preuve de la conjecture d'Ichino-Ikeda (Conjecture 2.2) ni du cas antihermitien.

2.6.1. *L'approche de Jacquet-Rallis.* — Dans [35] Jacquet et Rallis proposent une approche à la conjecture 2.1 via une comparaison de « formules des traces relatives ». Ces dernières, qui généralisent la célèbre formule des traces d'Arthur-Selberg, ont été introduites et étudiées dans de nombreux cas par Jacquet et ses coauteurs (voir [39] pour une introduction à ce sujet). Dans sa version la plus épurée, une formule des traces relative consiste à développer de deux façons une expression de la forme suivante

$$\int_{H_1(k)\backslash H_1(\mathbb{A})\times H_2(k)\backslash H_2(\mathbb{A})} K_f(h_1,h_2)\eta_1(h_1)\eta_2(h_2)dh_1dh_2 \tag{8}$$

où G_0 est un groupe réductif connexe sur k, H_1 et H_2 sont des sous-groupes algébriques de G_0 définis sur k, $\eta_1 : H_1(k)\backslash H_1(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ et $\eta_2 : H_2(k)\backslash H_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ sont des caractères automorphes, f est une fonction lisse à support compact sur $G_0(\mathbb{A})$ et

$$K_f(x,y) = \sum_{\gamma\in G_0(k)} K_f(x^{-1}\gamma y), \quad x,y\in G_0(\mathbb{A})$$

est le noyau de l'action par convolution à droite de f sur $L^2(G_0(k)\backslash G_0(\mathbb{A}))$. Les formules des traces relatives introduites par Jacquet et Rallis correspondent aux deux cas suivants :

- $G_0 = G = U(W)\times U(V)$ où $W\subset V$ sont des espaces hermitiens sur k' avec $\dim(W) = \dim(V)-1$, $H_1 = H_2 = H = U(W)$ (muni de l'inclusion diagonale $H \hookrightarrow G$) et η_1, η_2 sont triviaux.
- $G_0 = G' = R_{k'/k}GL_n \times R_{k'/k}GL_{n+1}$ où $R_{k'/k}$ désigne la restriction des scalaires à la Weil et $n = \dim(W)$, $H_1 = H'_1 = R_{k'/k}GL_n$ muni de l'inclusion diagonale $H'_1 \hookrightarrow G'$, $H_2 = H'_2 = GL_n\times GL_{n+1}$ muni de l'inclusion naturelle $H'_2 \hookrightarrow G'$, η_1 trivial et $\eta_2 = \eta$ un certain caractère quadratique de $H'_2(\mathbb{A})$.

Même dans ces cas particuliers, l'expression (8) n'est pas à prendre au sens littéral car l'intégrale est en général divergente et il faut la régulariser (par exemple en introduisant une suite de troncations comme le fait Arthur). Pour contourner ce problème Zhang ne considère que de « bonnes »fonctions f pour lesquelles l'expression (8) est absolument convergente et qui lui permettent aussi d'obtenir des développements géométriques et spectraux absolument convergents. C'est ce qu'on appelle une formule des traces *simple* (en raison de la restriction sur les fonctions tests). Notons $J(f)$ et $I(f')$ les formules des traces relatives de Jacquet-Rallis appliquées à de « bonnes » fonctions $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ et $f' \in C_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ respectivement. De simples manipulations formelles qui sont justifiées par le choix de « bonnes » fonctions tests fournissent alors les égalités

$$\sum_{\gamma \in H(k)\backslash G_{rs}(k)/H(k)} O(\gamma, f) = J(f) = \sum_{\pi \subset \mathcal{A}_{cusp}(G)} J_\pi(f) \tag{9}$$

$$\sum_{\delta \in H'_1(k)\backslash G'_{rs}(k)/H'_2(k)} O(\delta, f') = I(f') = \sum_{\Pi \subset \mathcal{A}_{cusp}(G'), \omega_\Pi|_{\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times} = 1} I_\Pi(f') \tag{10}$$

où

— $G_{rs} \subset G$ désigne l'ouvert de Zariski des éléments *semi-simples réguliers* pour l'action par bimultiplication de $H \times H$ i.e. $g \in G_{rs}$ si et seulement si la double classe HgH est fermée pour la topologie de Zariski et $g^{-1}Hg \cap H = \{1\}$ (c'est-à-dire que le stabilisateur de g dans $H \times H$ est trivial). On définit de même l'ouvert $G'_{rs} \subset G'$ des éléments semi-simples réguliers pour l'action de $H'_1 \times H'_2$ par bimultiplication.

— Pour $\gamma \in G_{rs}(k)$,

$$O(\gamma, f) = \int_{H(\mathbb{A})\times H(\mathbb{A})} f(h_1^{-1}\gamma h_2) dh_1 dh_2$$

désigne l'intégrale orbitale relative correspondante. Pour $\delta \in G'_{rs}(k)$, on définit $O(\delta, f')$ de façon similaire en introduisant le caractère η sur $H'_2(\mathbb{A})$.

— La somme de droite de la première formule porte sur toutes les représentations cuspidales irréductibles de $G(\mathbb{A})$ et la somme de droite de la deuxième formule porte sur l'ensemble des représentations cuspidales irréductibles Π de $G'(\mathbb{A})$ dont le caractère central (noté ici ω_Π) est trivial sur $\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times = Z_{H'_2}(\mathbb{A})$ (le centre de $H'_2(\mathbb{A})$).

— Les distributions $f \mapsto J_\pi(f)$ et $f' \mapsto I_\Pi(f')$ sont les *caractères relatifs* définis par

$$J_\pi(f) = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_\pi} P_H(\pi(f)\varphi)\overline{P_H(\varphi)}$$

$$I_\Pi(f') = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_\Pi} P_{H'_1}(\Pi(f')\varphi)\overline{P_{H'_2,\eta}(\varphi)}$$

où $\mathcal{B}_\pi$, $\mathcal{B}_\Pi$ désignent de (bonnes) bases orthonormées de π, Π respectivement pour les produits scalaires de Peterssen, P_H est la période de Gan-Gross-Prasad déjà introduite et $P_{H'_1}$ (resp. $P_{H'_2,\eta}$) est la période qui envoie une forme cuspidale sur son intégrale sur $H'_1(k)\backslash H'_1(\mathbb{A})$ (resp. sur $Z_{H'_2}(\mathbb{A})H'_2(k)\backslash H'_2(\mathbb{A})$ contre le caractère η).

Les caractères relatifs J_π et I_Π sont bien sûr intimement liés aux périodes P_H d'une part et $P_{H'_1}$, $P_{H'_2,\eta}$ d'autre part. En fait, on montre sans trop de difficultés que

$$J_\pi \neq 0 \Leftrightarrow P_H \mid_\pi \neq 0$$

$$I_\Pi \neq 0 \Leftrightarrow P_{H'_1} \mid_\Pi \neq 0 \text{ et } P_{H'_2,\eta} \mid_\Pi \neq 0.$$

D'après les travaux de Rallis et Flicker [15] sur la période $P_{H'_2,\eta}$ et la classification des représentations automorphes de groupes unitaires par Mok [47] et Kaletha-Minguez-Shin-White [36], la période $P_{H'_2,\eta}\;|_\Pi$ est non nulle si et seulement si Π provient par changement de base d'un produit de groupes unitaires $U(W') \times U(V')$. D'un autre côté, d'après les travaux de Jacquet-Piatetski-Shapiro-Shalika [34] sur la convolution de Rankin-Selberg, la période $P_{H'_1}\;|_\Pi$ est non nulle si et seulement si $L(\frac{1}{2}, \Pi) \neq 0$ (où, rappelons-le, $L(s, \Pi)$ désigne une fonction L de paire).

Pour prouver la conjecture 2.1, il suffit donc de montrer que

$$J_\pi \neq 0 \Leftrightarrow I_{BC(\pi)} \neq 0$$

et la stratégie proposée par Jacquet-Rallis pour établir cette équivalence consiste à comparer les formules (9) et (10). Plus précisément, il s'agit de comparer les côtés géométriques (i.e. les membres de gauche) pour en déduire une identité entre les côtés spectraux (i.e. les membres de droite). À cette fin, Jacquet et Rallis commencent par définir une injection

$$H(k)\backslash G_{rs}(k)/H(k) \hookrightarrow H'_1(k)\backslash G'_{rs}(k)/H'_2(k)$$

et plus généralement

$$H(F)\backslash G_{rs}(F)/H(F) \hookrightarrow H'_1(F)\backslash G'_{rs}(F)/H'_2(F) \tag{11}$$

pour toute extension F de k (en particulier pour les complétés k_v de k). On dira alors que deux éléments $(\gamma, \delta) \in G_{rs}(F) \times G'_{rs}(F)$ se *correspondent* si $H'_1(F)\delta H'_2(F)$ est l'image de la double classe $H(F)\gamma H(F)$ par (11). Afin de comparer les formules (9) et (10), on cherche des fonctions $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ et $f' \in C_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ telles que

$$O(\gamma, f) = O(\delta, f')$$

pour tout couple $(\gamma, \delta) \in G_{rs}(k) \times G'_{rs}(k)$ d'éléments se correspondant. Lorsque f (resp. f') se décompose en produit $f = \prod_v f_v$ (resp. $f' = \prod_v f'_v$) de fonctions locales $f_v \in C_c^\infty(G(k_v))$ (resp. $f'_v \in C_c^\infty(G'(k_v))$; on a alors $f_v = \mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_v)}$, resp. $f'_v = \mathbf{1}_{G'(\mathcal{O}_v)}$, pour presque toute $v \in |k|$), on a une factorisation correspondante des intégrales orbitales :

$$O(\gamma, f) = \prod_v O(\gamma, f_v) \text{ (resp. } O(\delta, f') = \prod_v O(\delta, f'_v))$$

et on peut d'abord chercher à comparer les intégrales orbitales locales $O(\gamma, f_v)$ et $O(\delta, f'_v)$. Pour cela, Jacquet et Rallis introduisent une famille de « facteurs de transfert »

$$\Delta_v : G_{rs}(k_v) \times G'_{rs}(k_v) \to \mathbb{C}$$

pour toute place $v \in |k|$ qui sont définis par des formules explicites et dont les propriétés essentielles sont les suivantes :

— $\Delta_v(\gamma, \delta) = 0$ sauf si γ et δ se correspondent.
— $\Delta_v(h_1\gamma h_2, h'_1\delta h'_2) = \eta_v(h'_2)\Delta_v(\gamma, \delta)$ pour tous $h_1, h_2 \in H(k_v)$, $h'_1 \in H'_1(k_v)$, $h'_2 \in H'_2(k_v)$ et où η_v désigne la composante locale en v du caractère η.

— Si $\gamma \in G_{rs}(k)$ et $\delta \in G'_{rs}(k)$ se correspondent alors

$$\prod_{v\in|k|} \Delta_v(\gamma, \delta) = 1.$$

Suivant Jacquet et Rallis on dit alors que deux fonctions $(f_v, f'_v) \in C_c^\infty(G(k_v)) \times C_c^\infty(G'(k_v))$ se *correspondent* ou encore qu'elles sont des *transferts* l'une de l'autre si

$$O(\gamma, f_v) = \Delta_v(\gamma, \delta) O(\delta, f'_v)$$

pour tout couple $(\gamma, \delta) \in G_{rs}(k_v) \times G'_{rs}(k_v)$ d'éléments se correspondant. Afin de construire suffisamment de couples de fonctions globales (f, f') permettant de comparer les formules (9) et (10) de façon effective, on est donc naturellement amené à considérer les deux problèmes locaux suivants :

- — Lemme fondamental : Montrer qu'en presque toute place v les fonctions $f_v = \mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_v)}$ et $f'_v = \mathbf{1}_{G'(\mathcal{O}_v)}$ se correspondent.
- — Existence du transfert : Montrer que pour toute fonction $f_v \in C_c^\infty(G(k_v))$ il existe une fonction $f'_v \in C_c^\infty(G'(k_v))$ lui correspondant et réciproquement.

Ces deux énoncés sont faciles à établir aux places $v \in |k|$ déployées dans k' et le problème essentiel se situe donc aux places non déployées. Signalons au passage qu'une fois la comparaison effectuée, il faut encore séparer les contributions du côté spectral (afin d'obtenir une identité reliant directement J_π et $I_{BC(\pi)}$). Pour cela, outre la conjecture locale (qui assure qu'étant donné Π il existe au plus une représentation cuspidale π vérifiant $\mathrm{Hom}_{H(k_v)}(\pi_v, \mathbb{C}) \neq 0$ partout et $\Pi = BC(\pi)$) on a besoin d'une version étendue du lemme fondamental pour tous les éléments de certaines algèbres de Hecke sphériques locales (c'est ce qui permet vraiment de séparer les contibutions spectrales via une application du théorème de Stone-Weierstrass). Cependant, ce lemme fondamental pour les algèbres de Hecke sphériques est lui aussi très facile à établir aux places déployées et Zhang a remarqué que cela était en fait suffisant pour isoler tous les termes spectraux d'après un résultat récent de Ramakhrishnan [50].

2.6.2. *Travail de Z. Yun.* — Dans [74], Zhiwei Yun établit le lemme fondamental de Jacquet-Rallis pour les corps de fonctions. Sa preuve utilise des méthodes géométriques proches de celles introduites par Ngô Bao Châu dans sa thèse pour démontrer le lemme fondamental de Jacquet-Ye (qui est le lemme fondamental issu d'une autre formule des traces relative). Dans l'appendice de [74], Julia Gordon montre comment l'on peut transférer ce résultat aux corps de nombres et en déduire le lemme fondamental en toute place v de caractéristique résiduelle suffisamment grande.

2.6.3. *Travail de W. Zhang.* — Le résultat principal démontré par Zhang dans [75] est l'existence du transfert aux places non archimédiennes. Les étapes principales sont les suivantes :

- — En utilisant des partitions de l'unité et une descente inspirée d'Harish-Chandra, Zhang localise le problème aux voisinages d'éléments semi-simples (pas nécessairement réguliers) $\gamma \in G(k_v)$ et $\delta \in G'(k_v)$. Il montre alors que si γ et δ ne sont pas

centraux on se ramène à un problème de transfert pour des groupes plus petits, ce qui permet de traiter ce cas par récurrence.
- Aux voisinages d'éléments centraux, via une transformation de Cayley adéquate on se ramène à un problème analogue sur les algèbres de Lie. Plus précisément, on se ramène à comparer des intégrales orbitales pour l'action adjointe de $U(W)$ sur $\mathfrak{u}(V)$ (l'algèbre de Lie de $U(V)$) à des intégrales orbitales pour l'action adjointe de GL_n sur $\mathfrak{gl}_{n+1}$.
- La même méthode de descente inspirée d'Harish-Chandra permet de montrer le résultat voulu pour les fonctions sur ces algèbres de Lie qui sont à support disjoint du cône nilpotent (i.e. l'ensemble des éléments dont les orbites contiennent l'origine dans leur clôture).
- Zhang montre que si f et f' sont des fonctions sur $\mathfrak{u}(V)$ et $\mathfrak{gl}_{n+1}$ respectivement, dont les intégrales orbitales se correspondent alors il en va de même de certaines de leurs transformées de Fourier partielles à une constante multiplicative explicite près (il faut en fait considérer quatre transformées de Fourier, y compris l'identité). Il s'agit du cœur de la preuve et cette étape se base sur des analogues locaux pour les algèbres de Lie des formules des traces de Jacquet-Rallis ainsi qu'une récurrence ingénieuse qui utilise le fait que les représentations adjointes de $U(W)$ et GL_n sur $\mathfrak{u}(V)$ et $\mathfrak{gl}_{n+1}$ respectivement sont *réductibles*.
- Enfin, d'après un résultat d'Aizenbud [1], on peut écrire n'importe quelle fonction lisse à support compact sur les algèbres de Lie concernées comme une somme d'images par les diverses transformées de Fourier de fonctions dont les supports sont disjoints du cône nilpotent et d'une fonction dont toutes les intégrales orbitales sont nulles. D'après les étapes précédentes, cela conclut la preuve de l'existence du transfert.

2.6.4. *Travaux de H. Xue et Chaudouard-Zydor.* — Dans [72], H. Xue a adapté la preuve de Zhang aux places archimédiennes et obtenu l'existence du transfert pour un sous-espace dense de l'espace des fonctions tests. En effet, dans ce cas seule l'assertion duale du résultat d'Aizenbud est connue (i.e. il n'existe pas de distribution invariante sur l'algèbre de Lie dont toutes les transformées de Fourier sont à support dans le cône nilpotent) ce qui entraîne seulement que toute fonction test est *approximable* par des sommes de transformées de Fourier de fonctions à support disjoint du cône nilpotent et d'une fonction d'intégrales orbitales nulles. Outre cette différence, la preuve de Xue est similaire à celle dans le cas non archimédien et permet de lever l'hypothèse de Zhang aux places archimédiennes.

Parallèlement, Zydor [77], [78] et Chaudouard-Zydor [12] ont commencé à développer les formules des traces de Jacquet-Rallis en toute généralité (i.e. sans restriction sur les fonctions tests). Comme corollaire de leurs premiers résultats, on peut appliquer et comparer ces formules des traces pour de « bonnes » fonctions un peu plus générales que celles de Zhang ce qui permet notamment de se passer de l'hypothèse de l'existence d'une place déployée en laquelle la représentation π est tempérée.

RÉFÉRENCES

[1] A. Aizenbud, *A partial analog of the integrability theorem for distributions on p-adic spaces and applications*, Israel J. Math. 193 (2013), no. 1, 233-262.

[2] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann, *Multiplicity one theorems*, Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 2, 1407-1434.

[3] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications (61), 2013.

[4] H. Atobe, *The local theta correspondence and the local Gan-Gross-Prasad conjecture for the symplectic-metaplectic case*, prépublication 2015, arXiv :1502.03528.

[5] R. Beuzart-Plessis, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires*, Mémoires de la SMF 149 (2016).

[6] R. Beuzart-Plessis, *Expression d'un facteur epsilon de paire par une formule intégrale*, Canad. J. Math. 66 (2014), no. 5, 993-1049.

[7] R. Beuzart-Plessis, *Endoscopie et conjecture locale raffinée de Gross-Prasad pour les groupes unitaires*, Compos. Math. 151 (2015), no. 7, 1309-1371.

[8] R. Beuzart-Plessis, *A local trace formula for the local Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups : The archimedean case*, prépublication 2015, arXiv : math/1506.01452.

[9] R. Beuzart-Plessis, *Comparison of local spherical characters and the Ichino-Ikeda conjecture for unitary groups*, prépublication 2016, arXiv : math/1602.06538.

[10] R. Beuzart-Plessis, *Factorisations de Périodes et formules de Plancherel*, Cours Peccot, Collège de France, Paris, 21 Avril-12 Mai 2017.

[11] W. Casselman, *Canonical extensions of Harish-Chandra modules to representations of G*, Canad. J. Math. 41 (1989), no. 3, 385-438.

[12] P.-H. Chaudouard, M. Zydor, *Le transfert singulier pour la formule des traces de Jacquet-Rallis*, prépublication 2016, arXiv :1611.09656.

[13] L. Clozel, *Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (1982), 45-115.

[14] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular Functions on one variable, II, pp 501-597, Lecture Notes in Mathematics, vol. 349, Springer, Berlin 1973.

[15] Y. Flicker, *Twisted tensors and Euler products*, Bull. Soc. Math. France 116 (1988), no. 3, 295-313.

[16] W.T. Gan, B.H. Gross, D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L-values and restriction problems in the representation theory of classical groups*, in « Sur les conjectures de Gross et Prasad. I », Astérisque No. 346 (2012), 1-109.

[17] W. T. Gan, *Recent progress on the Gross-Prasad conjecture*, Acta Math. Vietnam. 39 (2014), no. 1, 11-33.

[18] W.T. Gan, A. Ichino, *Formal degrees and local theta correspondence*, Invent. Math. 195 (2014), 509-672.

[19] W.T. Gan, A. Ichino, *The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence*, Invent. Math. 206 (2016), no. 3, 705-799.

[20] W.T. Gan, S. Takeda, *On the Howe duality conjecture in classical theta correspondence*, Advances in the theory of automorphic forms and their L-functions, 105-117, Contemp. Math., 664, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[21] D. Ginzburg, D. Jiang, S. Rallis, *On the nonvanishing of the central value of the Rankin-Selberg L-functions*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), no. 3, 679-722.

[22] D. Ginzburg, D. Jiang, S. Rallis, *On the nonvanishing of the central value of the Rankin-Selberg L-functions II*, dans « Automorphic representations, L-functions and applications : progress and prospects », 157-191, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 11, de Gruyter, Berlin, 2005.

[23] D. Ginzburg, D. Jiang, S. Rallis, *Models for certain residual representations of unitary groups*, dans « Automorphic forms and L-functions I. Global aspect », 125-146, Contemp. Math., 488, Israel Math. Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[24] R. Goodman, N.R. Wallach, *Symmetry, representations and invariants*, Graduate Texts in Mathematics, 255. Springer, Dordrecht, 2009.

[25] B. Gross, D. Prasad, *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}*, Canad. J. Math. 44 (1992), no. 5, 974-1002.

[26] B. Gross, D. Prasad, *On irreducible representations of $SO_{2n+1} \times SO_{2m}$*, Canad. J. Math. 46 (1994), no. 5, 930-950.

[27] R. N. Harris, *The Refined Gross-Prasad Conjecture for Unitary Groups*, prépublication 2012, arXiv :1201.0518.

[28] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, with an appendix by Vladimir G. Berkovich, Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton University Press, Princeton, NJ (2001).

[29] H. He, *On the Gan-Gross-Prasad conjecture for $U(p, q)$*, Invent. Math. 209 (2017), no. 3, 837-884.

[30] V. Heiermann, *A note on standard modules and Vogan L-packets*, Manuscripta Math. 150 (2016), no. 3-4, 571-583.

[31] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p-adique*, Invent. Math. 139(2), 439-455 (2010).

[32] A. Ichino, *Trilinear forms and the central values of triple product L-functions*, Duke Math. J. 145 (2008), no. 2, 281-307.

[33] A. Ichino, T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, Geom. Funct. Anal. 19 (2010), no. 5, 1378-1425.

[34] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro, J. A. Shalika, *Rankin- Selberg convolutions*, Amer. J. Math. 105 (1983), no. 2, 367-46.

[35] H. Jacquet, S. Rallis, *On the Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, dans « On certain L-functions », Clay Math. Proc. 13, Amer. Math. Soc. (2011), 205-264.

[36] T. Kaletha, A. Minguez, S.W. Shin, P.J. White, *Endoscopic classification of representations : Inner forms of unitary groups*, prépublication 2014.

[37] R. Kottwitz, D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999).

[38] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, in « Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups », 101-170, Math. Surveys Monogr., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[39] E. Lapid, *The relative trace formula and its applications*, dans « Automorphic Forms and Automorphic L-Functions » (Kyoto, 2005), Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 1468 (2006), 76-87.

[40] Y. Liu, *Relative trace formulae toward Bessel and Fourier-Jacobi periods on unitary groups*, Manuscripta Math. 145 (2014), no. 1-2, 1-69.

[41] Y. Liu, *Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Bessel periods*, J. reine angew. Math. 717 (2016), 133-194.

[42] P. Mezo, *Tempered spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups*, J. Inst. Math. Jussieu 15 (2016), no. 3, 569-612.

[43] C. Mœglin, M.-F. Vignéras, J.-L.Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Mathematics, 1291. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[44] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'Écriture*, Progress in Mathematics, 113. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[45] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux : le cas général*, dans « Sur les conjectures de Gross et Prasad II » Astérisque No. 347 (2012), 167-216.

[46] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordue*, volume 1 et 2, Progress in Mathematics (316-317), Birkhäuser, 2016.

[47] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 235 (2015), no. 1108.

[48] D. Prasad, *On the local Howe duality correspondence*, Int. Math. Res. Not. (1993), 279-287.

[49] D. Prasad, *Theta correspondence for unitary groups*, Pacific J. Math. 194 (2000), 427-438.

[50] D. Ramakrishnan, *A mild Tchebotarev theorem for $GL(n)$*, J. Number Theory 146 (2015), 519-533.

[51] F. Rodier, *Modèle de Whittaker et caractères de représentations*, dans « Non commutative harmonic analysis », J. Carmona, J. Dixmier, M. Vergne ed. Springer LN 466 (1981), 151-171.

[52] P. Scholze, *The local Langlands correspondence for GL_n over p-adic fields*, Invent. Math. 192 (2013), no. 3, 663-715.

[53] D. Shelstad, *L-indistinguishability for real groups*, Math. Ann. 259 (1982), 385-430.

[54] D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups I. Geometric transfer with canonical factors*, dans « Representation theory of real reductive groups », Contemp. Math. 472 (2008), 215-246.

[55] D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups II. Spectral transfer factors*, dans « Automorphic forms and the Langlands program », Advanced lectures in mathematics 9 (2010), 236-276.

[56] B. Sun, *Multiplicity one theorems for Fourier-Jacobi models*, Amer. J. Math. 134 (2012), 1655-1678.

[57] B. Sun, C.-B. Zhu, *Multiplicity one theorems : the Archimedean case*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), 23-44.

[58] J. Tate, *Number theoretic background*, dans « Automorphic forms, representations and L-functions » (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 3-26.

[59] D. Vogan, *The local Langlands conjecture*, Contemporary Maths, AMS 145 (1993), 305-379.

[60] J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*, Compositio Math. 54 (1985), no. 2, 173-242.

[61] J.-L. Waldspurger, *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$*, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I, Israel Math. Conf. Proc. 2, pp. 267-324, Weizmann, 1990.

[62] J.-L. Waldspurger, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad*, Compos. Math. 146 (2010), 1180-1290.

[63] J.-L. Waldspurger, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2e partie : extension aux représentations tempérées*, dans « Sur les conjectures de Gross et Prasad » Astérisque 346 (2012), 171-312.

[64] J.-L.Waldspurger, *Calcul d'une valeur d'un facteur ϵ par une formule intégrale*, dans « Sur les conjectures de Gross et Prasad II », Astérisque 347 (2012), 1-102.

[65] J.-L.Waldspurger, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux*, dans « Sur les conjectures de Gross et Prasad II », Astérisque 347 (2012), 103-165.

[66] N. Wallach, *Real reductive groups II*, Academic Press, 1992.

[67] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Birkhäuser, 1982.

[68] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton University Press.

[69] H. Xue, *The Gan-Gross-Prasad conjecture for* $U(n)\times U(n)$, Adv. Math. 262 (2014), 1130-1191.

[70] H. Xue, *Fourier-Jacobi periods and the central value of Rankin-Selberg L-functions*, Israel J. Math. 212 (2016), no. 2, 547-633.

[71] H. Xue, *Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Fourier-Jacobi periods on symplectic groups*, Compos. Math. 153 (2017), no. 1, 68-131.

[72] H. Xue, *On the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups : approximating smooth transfer of Jacquet-Rallis*, à paraître dans J. reine angew. Math.

[73] H. Xue, *Fourier-Jacobi periods and local spherical character identities*, prépublication 2017.

[74] Z. Yun, *The fundamental lemma of Jacquet and Rallis*, with an appendix by Julia Gordon, Duke Math. J. 156 (2011), no. 2, 167-227.

[75] W. Zhang, *Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 3, 971-1049.

[76] W. Zhang, *Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L-function*, J. Amer. Math. Soc. 27 (2014), no. 2, 541-612.

[77] M. Zydor, *La variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes unitaires*, Canad. J. Math. 68 (2016), no. 6, 1382-1435.

[78] M. Zydor, *La variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes linéaires*, à paraître au Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

[79] M. Zydor, *Les formules des traces relatives de Jacquet-Rallis grossières*, prépublication 2015, arXiv :1510.04301.

Raphaël BEUZART–PLESSIS

Université d'Aix-Marseille
I2M - CNRS (UMR 7373)
Campus de Luminy
13288 Marseille Cédex 9, France
E-mail : `rbeuzart@gmail.com`