Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70ème année, 2017-2018, n$^{\text{o}}$ 1139

LA THÉORIE DE HODGE DES BIMODULES DE SOERGEL [d'après Soergel et Elias–Williamson]

par **Simon RICHE**

INTRODUCTION

0.1. Bimodules de Soergel

Les *bimodules de Soergel* sont certains bimodules gradués sur des algèbres de polynômes, associés à un système de Coxeter (W, S) et une représentation V de W.

Ces bimodules ont été introduits au début des années 90 dans les travaux de Soergel [S1, S2], dans le cas particulier où W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique semisimple complexe G, et V est l'algèbre de Lie d'un tore maximal de G. Dans ce cas Soergel montre que cette catégorie est équivalente à la catégorie des complexes semi-simples B-équivariants (pour la t-structure perverse) sur la variété de drapeaux G/B de G (où $B \subset G$ est un sous-groupe de Borel) ; on en déduit que

1. l'anneau de Grothendieck scindé de cette catégorie est canoniquement isomorphe à l'algèbre de (Iwahori–)Hecke $\mathcal{H}_{(W,S)}$ de (W, S) ;
2. les bimodules de Soergel indécomposables (à décalage près de la graduation) sont paramétrés par W (on notera B_w le bimodule associé à $w \in W$) ;
3. les classes de ces objets dans l'anneau de Grothendieck, identifié à $\mathcal{H}_{(W,S)}$, forment la *base de Kazhdan–Lusztig* de $\mathcal{H}_{(W,S)}$.

En utilisant ces propriétés, Soergel obtient alors une nouvelle preuve de la conjecture de Kazhdan–Lusztig [KL] sur les multiplicités dans la catégorie $\mathcal{O}$ de l'algèbre de Lie semisimple complexe duale de G au sens de Langlands, prouvée précédemment et par d'autres méthodes (1) par Beĭlinson–Bernstein [BB] et Brylinski–Kashiwara [BK].

Dans un travail ultérieur [S5] (après des premiers résultats obtenus dans [S2]), Soergel a défini (2) et étudié ces bimodules pour un système de Coxeter arbitraire et une représentation de W satisfaisant une certaine condition technique (3). Dans ce cadre il n'existe pas de « géométrie » associée, de sorte que les arguments utilisés sont nécessairement algébriques. Il montre dans cet article que les propriétés (1) et (2) ci-dessus sont vraies

1. On renvoie à [Sp] pour une présentation de ces travaux.

2. Dans [S5], Soergel utilise le terme « speziellen Bimoduln » pour ces objets. Les premières occurrences du terme « bimodules de Soergel » dans la littérature semblent être dans [R1] et [Kh].

3. Wolfgang Soergel m'a fait savoir qu'il tenait à remercier particulièrement Patrick Polo pour ses contributions dans la genèse de l'article [S5].

dans cette généralité. Par contre, la propriété (3) s'avère être beaucoup plus subtile, et n'est énoncée que comme une conjecture (sous l'hypothèse que le corps de base est de caractéristique 0). Soergel remarque que cette conjecture impliquerait la positivité des polynômes de Kazhdan–Lusztig (comme conjecturé par Kazhdan–Lusztig [KL]), c'est-à-dire une solution à l'un des problèmes centraux dans la combinatoire des groupes de Coxeter.

Depuis ces travaux fondateurs, les bimodules de Soergel (sous différentes formes) se sont révélés être des outils extrêmement utiles en théorie des représentations (voir [S2, S6, WW, Do, BY, RW] pour quelques exemples), car ils permettent souvent de faire un lien avec la géométrie d'une variété de drapeaux appropriée. Mais dans tous les cas la preuve de certaines de leurs propriétés sort du cadre algébrique de leur définition, et repose sur la géométrie.

0.2. Les résultats d'Elias–Williamson

L'objet principal de cet exposé est d'expliquer la preuve, due à Elias–Williamson [EW1], de la conjecture de Soergel évoquée au §0.1. Soergel remarque dans [S5] que, si on cherche à démontrer la conjecture par récurrence sur la longueur de l'élément de W considéré, on doit vérifier que certaines formes bilinéaires sur des espaces de morphismes sont non dégénérées. L'intuition fondamentale de Elias–Williamson est que cette propriété n'est que la partie émergée d'un iceberg beaucoup plus profond : les bimodules de Soergel possèdent toute une « théorie de Hodge » qu'il faut construire en même temps qu'on démontre la conjecture de Soergel.

Plus précisément, Elias–Williamson se placent dans le cadre d'une représentation V *réelle* de (W, S) qui possède la propriété technique de Soergel et une autre condition de « positivité » [(4)]. (Chaque groupe de Coxeter possède une représentation de ce type.) On pose $R := \mathrm{Sym}(V^*)$, qu'on considère comme un anneau gradué engendré en degré 2. Ils considèrent alors un certain élement $\rho \in V^* = R^2$ et remarquent que si $w \in W$ et si la conjecture de Soergel est connue pour w (c'est-à-dire si la classe dans le groupe de Grothendieck scindé du bimodule indécomposable B_w associé à w est l'élément de la base de Kazhdan–Lusztig associé à w) alors B_w possède une forme bilinéaire symétrique « invariante » $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w} : \mathsf{B}_w \times \mathsf{B}_w \to R$ canonique, unique à un scalaire dans $\mathbb{R}_{>0}$ près. On notera de même la forme bilinéaire symétrique $(\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}) \times (\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ induite par $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$. Ils démontrent simultanément, par récurrence sur la longueur de w, que :

1. la conjecture de Soergel est vraie pour w ;
2. $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile, au sens où pour tout $i \geq 0$ la multiplication par ρ^i induit un isomorphisme $(\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^{-i} \xrightarrow{\sim} (\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^i$ entre les parties de degré $-i$ et i ;

4. La preuve d'Elias–Williamson repose sur l'utilisation de l'ordre sur $\mathbb{R}$, et donc ne s'applique pas à d'autres corps de coefficients. Les spécialistes semblent douter de la véracité de la conjecture de Soergel sur d'autres corps de caractéristique 0. (Divers contre-exemples sont connus en caractéristique positive.)

3. $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}$, muni de la forme induite par $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$, vérifie les relations de Hodge–Riemann, au sens où pour tout $i \geq 0$ la restriction de la forme $(x, y) \mapsto \langle x, \rho^i \cdot y \rangle_{\mathsf{B}_w}$ sur $(\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^{-i}$ aux éléments primitifs (c'est-à-dire annulés par ρ^{i+1}) est $(-1)^{\frac{\ell(w)-i}{2}}$-définie [5] (où ℓ désigne la fonction de longueur sur W).

Notons que la propriété (3) est l'étape cruciale pour démontrer (1), mais que d'un autre côté cette propriété n'a un sens précis qu'une fois que (1) est démontrée (pour que la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$ soit fixée). Les preuves de ces deux propriétés sont donc nécessairement imbriquées. La propriété (2) est elle impliquée par (3), mais joue un rôle crucial dans la récurrence.

Dans le cas où W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique complexe G, et où V est l'algèbre de Lie d'un tore maximal, $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}$ s'identifie à la cohomologie d'intersection de la variété de Schubert associée à W. Dans ce cas, les propriétés (2) et (3) découlent du théorème de Lefschetz difficile et des relations de Hodge–Riemann « classiques », appliqués à ce cas particulier. On renvoie à [EW2, W5] pour plus de détails.

0.3. Structure de la preuve

La structure de la preuve de [EW1] est inspirée par la preuve du Théorème de Décomposition donnée récemment par de Cataldo–Migliorini. (Voir [dCM, W4] pour des présentations de cette preuve. Notons cependant que la « traduction » de ces idées dans le langage algébrique des bimodules de Soergel est hautement non triviale !) On a essayé de ne présenter que les parties indispensables de cette preuve, quitte à omettre certains résultats intermédiaires intéressants mais qui peuvent être contournés (voir par exemple la Remarque 2.10).

Comme expliqué ci-dessus, la preuve procède par récurrence sur la longueur de l'élément considéré. On fixe donc $w \in W \smallsetminus \{e\}$, on écrit $w = ys$ avec $s \in S$ et $\ell(y) < \ell(w)$, et on suppose toutes les propriétés voulues pour les éléments de longueur $\leq \ell(y)$. Comme suggéré au §0.2, pour démontrer la conjecture de Soergel pour w il faut vérifier que certaines formes bilinéaires sur des espaces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s)$ (où $\ell(z) \leq \ell(y)$) sont non dégénérées. Pour ce faire, Elias–Williamson remarquent que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s)$ s'injecte (par une isométrie pour des formes bilinéaires appropriées) dans le sous-espace des éléments primitifs dans $\big((\mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s) \otimes_R \mathbb{R}\big)^{-\ell(z)}$. Puisque la restriction à un sous-espace d'une forme bilinéaire symétrique définie positive ou négative est non dégénérée, ceci ramène la preuve de la conjecture de Soergel pour w à un résultat de type « Hodge–Riemann » pour $\mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s$. Il est par ailleurs facile de voir que le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge–Riemann pour B_w découlent également de ce résultat.

Pour démontrer ce résultat, Elias–Williamson considèrent l'opérateur de Lefschetz « déformé »

$$L_\zeta^{y,s} := \rho \cdot \mathrm{id}_{\mathsf{B}_y \otimes \mathsf{B}_s} + \mathrm{id}_{\mathsf{B}_y} \otimes (\zeta \rho \cdot \mathrm{id}_{\mathsf{B}_s}) : \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s \to \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s(2)$$

5. Ici on dit qu'une forme bilinéaire symétrique est $(+1)$-définie, resp. (-1)-définie, si elle est définie positive, resp. définie négative.

pour $\zeta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. (Ici, (2) désigne le foncteur de décalage de la graduation par 2 vers la gauche.) Ils remarquent tout d'abord que les relations de Hodge–Riemann pour B_y impliquent que $L_\zeta^{y,s}$ vérifie le résultat voulu si $\zeta \gg 0$. En utilisant le fait que ce résultat peut s'énoncer en terme de la signature de certaines formes bilinéaires symétriques, et que la signature ne peut pas varier dans une famille continue de formes bilinéaires symétriques non dégénérées, ceci ramène la preuve du résultat voulu à vérifier que $L_\zeta^{y,s}$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile pour tout $\zeta \geq 0$.

Dans leur preuve de l'énoncé géométrique correspondant, de Cataldo–Migliorini utilisent le théorème de Lefschetz faible pour une section hyperplane. Cet énoncé n'a aucun analogue dans le monde des bimodules de Soergel, et Elias–Williamson utilisent à la place des différentielles apparaissant dans les « complexes de Rouquier », qui permettent de factoriser l'opérateur $\rho \cdot \mathrm{id}_{\mathsf{B}_y}$ en une composée $\mathsf{B}_y \to D(1) \to \mathsf{B}_y(2)$, où D est une somme de termes de la forme B_z avec $\ell(z) < \ell(y)$ qui vérifie une version appropriée des relations de Hodge–Riemann pour une forme convenable. Notons que cet argument impose de considérer également les relations de Hodge–Riemann pour l'opérateur L_ζ sur $\mathsf{B}_z \otimes_R \mathsf{B}_s$ (quand $\ell(zs) > \ell(z)$) comme une hypothèse de récurrence, en plus des propriétés considérées au §0.2.

0.4. Applications

La preuve de la conjecture de Soergel a deux applications très importantes, déjà suggérées au §0.1. La première est qu'elle permet de donner une preuve algébrique de la conjecture de Kazhdan–Lusztig concernant les multiplicités des modules simples dans les modules de Verma d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. La seconde application (suggérée par Soergel dans [S5]) est la preuve d'une autre conjecture de Kazhdan–Lusztig affirmant que les coefficients des *polynômes de Kazhdan–Lusztig* (des polynômes apparaissant dans diverses formules de caractères en théorie de Lie) sont positifs ou nuls. Cette conjecture était connue quand W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique (ou plus généralement d'un groupe de Kac–Moody) ; mais dans le cas général elle constituait un des problèmes centraux du domaine depuis sa formulation en 1979.

0.5. Prolongements

Du point de vue d'Elias–Williamson, les résultats énoncés au §0.2 forment la théorie de Hodge « globale » des bimodules de Soergel. Dans des articles ultérieurs [W3, EW3], ils ont développé des versions « locale » et « relative » de cette théorie, qui ont également des applications importantes en théorie de Lie. Pour des raisons de place, ces résultats (et leurs applications) ne sont évoqués que brièvement, à la fin de ces notes.

0.6. Contenu des notes

Dans la Partie 1, on rappelle les résultats de base sur les bimodules de Soergel, suivant [S5]. Dans la Partie 2 on présente les résultats principaux de [EW1] et leurs preuves. Dans la Partie 3 on expose les applications de ces résultats. Enfin, dans la Partie 4 on évoque brièvement les résultats de [W3] et [EW3].

0.7. Remerciements

Je remercie Geordie Williamson pour de nombreuses discussions autour de ces travaux et de résultats connexes, avant et pendant la préparation de cet exposé, ainsi que pour ses remarques sur une version préliminaire de ces notes. Je remercie également Wolfgang Soergel pour l'autorisation de reproduire sa preuve de la proposition 1.13 et pour ses remarques sur une version préliminaire de ce texte, et George Lusztig pour ses remarques. Enfin, je remercie V. Le Dret pour sa relecture très attentive de ces notes.

Ce travail a bénéficié du soutien de la bourse ANR-13-BS01-0001-01 de l'Agence Nationale de la Recherche. This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 677147).

1. BIMODULES DE SOERGEL

1.1. Systèmes de Coxeter et algèbres de Hecke

Soit W un groupe, et soit $S \subset W$ un sous-ensemble constitué d'éléments d'ordre 2, qu'on supposera fini. Pour tous $s, t \in S$ (non nécessairement distincts), on note $m_{st} \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ l'ordre de st dans W. On dit que (W, S) est un *système de Coxeter* si le morphisme canonique du groupe de présentation

$$\langle S \mid (st)^{m_{st}} = 1 \text{ pour tous } s, t \in S \text{ tels que } m_{st} \neq \infty \rangle$$

dans W est un isomorphisme. (On dit alors parfois – comme ici dans l'introduction – que W est un *groupe de Coxeter*, mais on évitera cette terminologie impropre dans le reste de ces notes.) Notons que pour tout ensemble fini S et tous éléments $m_{st} \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ tels que $m_{ss} = 1$ et $m_{st} = m_{ts} \geq 2$ pour $s \neq t$, il existe un système de Coxeter de générateurs S et tel que m_{st} est l'ordre de st pour tous $s, t \in S$; voir par exemple [Bo, §V.4.3].

Si $w \in W$, on appellera *décomposition réduite* de w toute écriture de w en produit d'éléments de S de longueur minimale. Cette longueur est appelée la longueur de w, et notée $\ell(w)$. L'ensemble W est muni d'un ordre naturel appelé *ordre de Bruhat*, qu'on notera $\leq$, et pour lequel la fonction $\ell : W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ est strictement croissante.

Ces groupes apparaissent « naturellement » en théorie de Lie de la façon suivante. Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur un corps algébriquement clos, soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel, et soit $T \subset B$ un tore maximal. Soit $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de (G, T). Soit également $\Phi \subset X^*(T)$ le système de racines de (G, T), soit $\Phi^+ \subset \Phi$ le système positif constitué des racines de B, et soit Φ_{s} la base de Φ associée. À toute racine α on peut associer une *coracine* $\alpha^\vee \in X_*(T)$, et une *réflexion* $s_\alpha \in W$ telle que s_α agit sur T par $s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^\vee(\alpha(t)^{-1})$. Si $S = \{s_\alpha : \alpha \in \Phi_{\mathrm{s}}\}$, alors (W, S) est un système de Coxeter. Si on considère une construction similaire plus généralement pour les *groupes de Kac–Moody* associés à des matrices de Cartan généralisées (voir [Ti, Ku]), on obtient de cette manière tous les groupes de Coxeter *cristallographiques*, c'est-à-dire tels que $m_{st} \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$ pour tous $s \neq t$.

Si (W, S) est un système de Coxeter, l'*algèbre de Hecke* associée est la $\mathbb{Z}[\mathsf{v}, \mathsf{v}^{-1}]$-algèbre $\mathcal{H}_{(W,S)}$ (où v est une indéterminée) engendrée par des éléments $\{H_s : s \in S\}$ soumis aux relations suivantes :

— *relations quadratiques* : $(H_s)^2 = 1 + (\mathsf{v}^{-1} - \mathsf{v})H_s$ pour $s \in S$;

— *relations de tresse* : si $s, t \in S$ avec $s \neq t$ et $m_{st} \neq \infty$, alors

$$\underbrace{H_s H_t \cdots}_{m_{st} \text{ termes}} = \underbrace{H_t H_s \cdots}_{m_{st} \text{ termes}}.$$

Les relations de tresse et le « lemme de Matsumoto » (voir [Bo, §IV.1.5, Proposition 5]) assurent que si $w \in W$ et si $w = s_1 \cdots s_n$ est une expression réduite, alors l'élément $H_w := H_{s_1} \cdots H_{s_n}$ ne dépend que de w. De plus, les éléments $\{H_w : w \in W\}$ forment une $\mathbb{Z}[\mathsf{v}, \mathsf{v}^{-1}]$-base de $\mathcal{H}_{(W,S)}$ (voir [Bo, §IV.2, Exercice 23]).

Les relations quadratiques montrent que les éléments H_s sont inversibles dans $\mathcal{H}_{(W,S)}$. Il en découle que cette propriété est vraie pour tous les éléments H_w, de sorte qu'on peut définir une involution d'anneaux d de $\mathcal{H}_{(W,S)}$ en posant

$$d(\mathsf{v}) = \mathsf{v}^{-1} \quad \text{et} \quad d(H_w) = (H_{w^{-1}})^{-1}.$$

Kazhdan–Lusztig ont construit dans [KL] une base remarquable de $\mathcal{H}_{(W,S)}$ de la façon suivante : pour tout $w \in W$, il existe un unique élément $\underline{H}_w$ qui vérifie

$$d(\underline{H}_w) = \underline{H}_w \quad \text{et} \quad \underline{H}_w \in H_w + \bigoplus_{y \in W} \mathsf{v}\mathbb{Z}[\mathsf{v}] \cdot H_y;$$

alors $\{\underline{H}_w : w \in W\}$ forme une base de $\mathcal{H}_{(W,S)}$. (Voir également [S3, Theorem 2.1] pour une preuve plus simple de ce résultat.)

Les *polynômes de Kazhdan–Lusztig* sont les éléments $\{h_{y,w} : y, w \in W\}$ de $\mathbb{Z}[\mathsf{v}]$ déterminés par

$$\underline{H}_w = \sum_{y \in W} h_{y,w} \cdot H_y.$$

(On peut facilement vérifier que si $h_{y,w} \neq 0$ alors $y \leq w$, et que $h_{w,w} = 1$.)

Ci-dessous on considérera également les constantes de structure $\{\mu^z_{x,y} : x, y, z \in W\}$ de la multiplication de $\mathcal{H}_{(W,S)}$ dans cette base, définies par

$$\underline{H}_x \cdot \underline{H}_y = \sum_{z \in W} \mu^z_{x,y} \cdot \underline{H}_z.$$

Il est facile de voir que si $x \in W$ et $s \in S$ satisfont $xs > x$, alors pour tout $z \in W$ on a

$$\mu^z_{x,s} \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

1.2. Représentations réflexion fidèles

Soit (W, S) un système de Coxeter, et soit V une représentation de W de dimension finie sur un corps de caractéristique impaire ou nulle. On pose $T := \{wsw^{-1} : w \in W, s \in S\}$. Suivant Soergel [S5], on dit que V est *réflexion fidèle* si

1. V est fidèle ;
2. pour tout $x \in W$, $V^x := \{v \in V \mid x \cdot v = v\}$ est un hyperplan de V si et seulement si $x \in T$.

(Les éléments de T sont souvent appelés *réflexions*. Notons que nos hypothèses assurent que ces éléments agissent sur V comme des réflexions, c'est-à-dire avec un hyperplan de points fixes et une droite propre de valeur propre associée -1.)

Deux exemples importants de représentations réflexion fidèles sont fournis par la proposition suivante. (Le cas (1) est important car il montre que tout système de Coxeter admet une représentation réflexion fidèle ; le cas (2) est celui qui apparaît naturellement en théorie de Lie.)

Proposition 1.1. — *1. Soit (W, S) un système de Coxeter, et soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une famille libre $(e_s)_{s \in S}$ de vecteurs et d'une famille libre $(e_s^\vee)_{s \in S}$ de formes linéaires telles que*

$$\langle e_t, e_s^\vee \rangle = -2\cos(\pi/m_{st}) \quad \text{pour tous } s, t \in S$$

(où par convention $\cos(\pi/\infty) = 1$). Alors la formule $s \cdot v = v - \langle v, e_s^\vee \rangle e_s$ définit une représentation de W sur V qui est réflexion fidèle.

2. Soit A une matrice de Cartan généralisée symétrisable[6] *dont les lignes et colonnes sont paramétrées par un ensemble fini I, et soit $(\mathfrak{h}, \{\alpha_i : i \in I\}, \{\alpha_i^\vee : i \in I\})$ une réalisation de A sur $\mathbb{R}$ au sens de Kac (voir* [Ku, Definition 1.1.2]*). Soit (W, S) le système de Coxeter associé (voir* [Ku, Definition 1.3.1 & Proposition 1.3.21]*). Alors la représentation de W sur $\mathfrak{h}^*$ est réflexion fidèle.*

Démonstration. — Le cas (1) est démontré dans [S5, Proposition 2.1]. (La condition que V est de dimension minimale imposée dans [S5] n'est pas nécessaire.) Le cas (2) est probablement bien connu, mais n'est pas traité dans la littérature à notre connaissance. Donnons-en donc la preuve (qui est très similaire à celle de [S5, Proposition 2.1]).

Puisque W est défini comme un sous-groupe des automorphismes de $\mathfrak{h}^*$, la représentation de W sur $\mathfrak{h}^*$ est fidèle ; par ailleurs, tous les éléments de T agissent par des réflexions. Soit maintenant $x \in W$, et supposons que $(\mathfrak{h}^*)^x$ est un hyperplan de $\mathfrak{h}^*$. Comme W est engendré par des réflexions de $\mathfrak{h}^*$, on a $\det(x) \in \{\pm 1\}$.

Supposons tout d'abord que $\det(x) = 1$. Choisissons $c \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\mathfrak{h}^* = (\mathfrak{h}^*)^x \oplus \mathbb{R}c$. Alors on a $x(c) \in c + (\mathfrak{h}^*)^x$; on note $v_0 = x(c) - c$. Pour tous $v \in (\mathfrak{h}^*)^x$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a donc $x(v + \lambda c) = v + \lambda c + \lambda v_0$. Puisque A est symétrisable, d'après [Ku, Proposition 1.5.2] il

6. Cette hypothèse n'est probablement pas nécessaire, mais nous n'avons pas pu trouver de preuve qui l'évite.

existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\langle -,-\rangle$ sur $\mathfrak{h}^*$ qui est W-invariante. Pour v et λ comme ci-dessus on a alors $\langle v+\lambda c, v+\lambda c\rangle = \langle v+\lambda c+\lambda v_0, v+\lambda c+\lambda v_0\rangle$, c'est-à-dire

$$2\lambda\langle v, v_0\rangle + \lambda^2\bigl(2\langle c, v_0\rangle + \langle v_0, v_0\rangle\bigr) = 0.$$

On en déduit que $\langle 2c+v_0, v_0\rangle = 0$ et que $\langle v, v_0\rangle = 0$ pour tout $v \in (\mathfrak{h}^*)^x$. Donc v_0 appartient au noyau de notre forme, ce qui implique que $v_0 = 0$. Donc $c \in (\mathfrak{h}^*)^x$, une contradiction.

On suppose maintenant que $\det(x) = -1$. Soient

$$D = \{v \in \mathfrak{h}^* \mid \forall i \in I,\ \langle v, \alpha_i^\vee\rangle \geq 0\}, \quad D^\circ = \{v \in \mathfrak{h}^* \mid \forall i \in I,\ \langle v, \alpha_i^\vee\rangle > 0\},$$

et considérons également le *cône de Tits* $C = \bigcup_{y\in W} y(D)$. Rappelons que C est convexe ; voir [Ku, Proposition 1.4.2(c)]. Les hyperplans de réflexion des éléments de T sont les hyperplans définis par les coracines réelles positives. Si $v \in D^\circ$, d'après [Ku, Proposition 1.4.2(a)] on a $\mathrm{Stab}_W(v) = \{1\}$. Donc D° et $x(D^\circ)$ n'intersectent aucun de ces hyperplans. Il découle de [Ku, Proposition 1.4.2(c)] que seul un nombre fini de ces hyperplans séparent D° et $x(D^\circ)$.

Pour une raison similaire, $(\mathfrak{h}^*)^x$ ne peut intersecter aucune région de la forme $y(D^\circ)$ pour $y \in W$. Si $v \in D^\circ$, le segment joignant v à $x(v)$ croise $(\mathfrak{h}^*)^x$. Ce point d'intersection appartient à C (par convexité) mais à aucun des $y(D^\circ)$ pour $y \in W$; donc il appartient à un hyperplan de réflexion associé à un élément de T, qui doit séparer D° et $x(D^\circ)$. Ainsi, une partie ouverte de $(\mathfrak{h}^*)^x$ est réunion de ses intersections avec un nombre fini d'hyperplans de réflexion. Ceci implique que $(\mathfrak{h}^*)^x$ coïncide avec l'un de ces hyperplans, dont nous noterons t la réflexion associée. Alors xt est un élément de W de déterminant 1 et dont les points fixes contiennent un hyperplan. Par le cas traité ci-dessus, on a nécessairement $xt = e$, donc $x = t$. □

Remarque 1.2. — Si A est une matrice de Cartan généralisée symétrisable, et si de plus $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ pour tous $i,j \in I$, alors on peut vérifier que les représentations du système de Coxeter (W,S) associé données par les points (1) et (2) de la proposition 1.1 (où on a supposé V de dimension minimale dans le cas (1)) sont isomorphes. Par contre, si $a_{ij}a_{ji} \geq 5$ pour un couple (i,j), ces représentations ne sont pas isomorphes en général ; en fait elle n'ont même pas nécessairement la même dimension.

1.3. Bimodules de Soergel

Fixons un système de Coxeter (W,S) et une représentation réflexion fidèle V de (W,S) sur un corps k infini [7]. On pose $R := \mathrm{Sym}(V^*)$, qu'on considère comme une algèbre graduée avec les formes linéaires $V^* \subset R$ en degré 2. Pour tout $s \in S$, on définit un bimodule gradué B_s sur R en posant

$$\mathsf{B}_s := R \otimes_{R^s} R(1),$$

7. Cette condition n'est pas nécessaire, mais elle est imposée dans [S5] pour pouvoir identifier R à l'algèbre des fonctions polynomiales sur V.

où $R^s \subset R$ désigne les invariants de s et où (1) est le foncteur de décalage de la graduation tel que $(M(1))^n = M^{n+1}$, de sorte que B_s est engendré en degré -1. (Ci-dessous, on notera (n) la n-ième puissance de (1), pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et on utilisera cette notation pour d'autres catégories d'objets $\mathbb{Z}$-gradués.)

Pour tout mot $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_r)$ en S on définit le *bimodule de Bott–Samelson* $\mathsf{BS}(\underline{w})$ associé à $\underline{w}$ en posant

$$\mathsf{BS}(\underline{w}) := \mathsf{B}_{s_1} \cdots \mathsf{B}_{s_r}.$$

(Ici et ci-dessous, on omet le symbole de produit tensoriel $\otimes_R$, et nous écrivons donc MN au lieu de $M \otimes_R N$.) Par convention, si $\underline{w}$ est vide ce produit tensoriel est interprété comme égal à R.

On définit la catégorie $\mathscr{B}$ des *bimodules de Soergel* associée à (W, S) et V comme la sous-catégorie pleine de la catégorie des R-bimodules gradués dont les objets sont les sommes directes de facteurs directs de bimodules de la forme $\mathsf{BS}(\underline{w})(n)$ pour $\underline{w}$ un mot en S et $n \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathsf{BS}(\underline{w}_1)\mathsf{BS}(\underline{w}_2) = \mathsf{BS}(\underline{w}_1\underline{w}_2)$, cette sous-catégorie est stable par produit tensoriel, et donc munie d'une structure naturelle de catégorie monoïdale.

Il est facile de voir que le bimodule B_s est libre et de type fini comme R-module à droite et comme R-module à gauche. Il en est donc de même des bimodules $\mathsf{BS}(\underline{w})$, et par suite (puisque tout R-module gradué projectif de type fini est libre) de tous les objets de $\mathscr{B}$. On en déduit que la catégorie $\mathscr{B}$ est de Krull–Schmidt ; en particulier, tout objet admet une décomposition essentiellement unique en somme d'objets indécomposables, et un objet est indécomposable si et seulement si son anneau d'endomorphismes est local.

Remarque 1.3. — La définition de $\mathscr{B}$ donnée ci-dessus n'est pas identique à celle adoptée dans [S5]. Plus précisément, Soergel commence par définir un morphisme de $\mathcal{H}_{(W,S)}$ vers l'anneau de Grothendieck scindé des R-bimodules gradués de type fini à gauche et à droite, puis définit $\mathscr{B}$ comme la sous-catégorie pleine dont les objets sont ceux dont la classe appartient à l'image de ce morphisme ; voir [S5, Definition 5.11]. Les objets de $\mathscr{B}$ sont alors des facteurs directs de sommes de décalés de bimodules de Bott–Samelson (voir [S5, Lemma 5.13]), mais a priori $\mathscr{B}$ ne contient pas *tous* les tels facteurs directs. Il démontre cependant à la fin de son article que $\mathscr{B}$ est stable par facteurs directs, voir [S5, Satz 6.14]. Cette catégorie contient donc tous les facteurs directs de sommes de décalés de bimodules de Bott–Samelson, ce qui montre qu'elle peut être définie comme on l'a fait ci-dessus.

1.4. Théorème de catégorification

On continue avec les conventions du §1.3. Notons $[\mathscr{B}]$ le groupe de Grothendieck scindé [8] de $\mathscr{B}$, qu'on considère comme une algèbre pour le produit induit par la structure monoïdale sur $\mathscr{B}$. Cette algèbre est en fait une $\mathbb{Z}[\mathsf{v},\mathsf{v}^{-1}]$-algèbre pour l'action définie par $\mathsf{v}\cdot[M]=[M(1)]$. Le théorème suivant est l'un des résultats principaux de [S5].

Théorème 1.4. — *Il existe un unique isomorphisme de* $\mathbb{Z}[\mathsf{v},\mathsf{v}^{-1}]$*-algèbres*

$$\mathcal{H}_{(W,S)} \xrightarrow{\sim} [\mathscr{B}]$$

envoyant $\underline{H}_s = H_s + \mathsf{v}$ *sur* B_s*.*

L'unicité dans ce théorème est évidente, puisque les éléments $\underline{H}_s$ engendrent $\mathcal{H}_{(W,S)}$ comme $\mathbb{Z}[\mathsf{v},\mathsf{v}^{-1}]$-algèbre. Ce qu'il faut démontrer est donc que les classes $\{[\mathsf{B}_s] : s \in S\}$ vérifient les relations définissant $\mathcal{H}_{(W,S)}$ (ce qui se ramène au cas des groupes dihédraux, et peut se faire « à la main » ; voir [S5, §4]), puis que le morphisme obtenu est un isomorphisme. Pour cela, Soergel construit un inverse à gauche de ce morphisme, puis classifie les objets indécomposables de $\mathscr{B}$, de la façon suivante (voir [S5, Satz 6.14]).

Théorème 1.5. — *Pour tout* $w \in W$ *et toute expression réduite* $\underline{w}$ *de* w*, il existe un unique facteur direct* B_w *de* $\mathsf{BS}(\underline{w})$ *qui n'est facteur direct d'aucun bimodule gradué de la forme* $\mathsf{BS}(\underline{w}')(n)$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $\underline{w}'$ *un mot de longueur strictement plus petite que celle de* $\underline{w}$*. De plus,* B_w *ne dépend que de* w*, et les bimodules* $\{\mathsf{B}_w(n) : w \in W,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *forment une famille de représentants des classes d'isomorphisme d'objets indécomposables dans* $\mathscr{B}$*.*

Remarque 1.6. —

1. Pour $s \in S$, le bimodule gradué B_s est clairement indécomposable, donc cette notation n'est pas ambiguë : cet objet est bien le bimodule de Soergel indécomposable associé à l'élément $s \in W$.
2. Puisque R est concentré en degrés pairs, tout bimodule gradué indécomposable est soit concentré en degrés pairs, soit concentré en degrés impairs ; plus précisément, dans notre cas on a $(\mathsf{B}_w)^n = 0$ si $n \not\equiv \ell(w) \pmod 2$.
3. L'objet B_w n'est défini qu'à isomorphisme près. Dans les cas où la conjecture de Soergel (voir le §1.5 ci-dessous) est connue, la formule (2) ci-dessous montre que $\mathrm{End}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_w) = k$; l'isomorphisme considéré ci-dessus est donc unique à scalaire près dans ces cas.

Le lemme suivant résume les propriétés "basiques" des bimodules de Soergel indécomposables. (Ici, le cas $w = s$ de (1), qui peut se vérifier « à la main », est la « catégorification » des relations quadratiques dans $\mathcal{H}_{(W,S)}$.)

Lemme 1.7. — *Soient* $w \in W$ *et* $s \in S$*.*

8. Rappelons que le groupe de Grothendieck scindé d'une catégorie additive (essentiellement petite) est le quotient du groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme d'objets par les relations $[M] = [M'] + [M'']$ si $M \cong M' \oplus M''$.

1. *Si $ws < w$, alors* $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \cong \mathsf{B}_w(1) \oplus \mathsf{B}_w(-1)$.
2. *Si $ws > w$, alors B_{ws} est un facteur direct de $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ avec multiplicité* 1*, et tous les autres facteurs directs sont de la forme $\mathsf{B}_y(i)$ avec $y < ws$.*

Idée de preuve. — La propriété (2) est évidente d'après la caractérisation des objets B_w et B_{ws} et la propriété de Krull–Schmidt dans $\mathscr{B}$. La propriété (1) est un petit peu plus subtile. Elle peut se démontrer en utilisant la théorie des bimodules de Soergel « singuliers » de [W1], qui implique qu'il existe un R-R^s bimodule gradué B_w^s tel que $B_w = B_w^s \otimes_{R^s} R$; voir [W1, Proposition 7.11]. Une autre approche, utilisant la "base de feuilles légères" de [Li], serait de procéder par récurrence sur $\ell(w)$, en utilisant l'analogue dans le contexte étudié ici de [RW, Lemma 4.2.3]. □

La preuve du théorème 1.5 repose sur une formule pour la dimension des espaces de morphismes entre bimodules de Soergel, qui jouera également un rôle important dans la suite. Remarquons que tout R-bimodule peut être vu naturellement comme un faisceau cohérent sur $V \times V$. Pour tout $x \in W$ on pose

$$\mathrm{Gr}(x) := \{(x \cdot v, v) : v \in V\} \subset V \times V,$$

et pour $A \subset W$ fini on note

$$\mathrm{Gr}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathrm{Gr}(x).$$

Pour tout R-bimodule M et tout $A \subset W$, on note $\Gamma_A(M)$ le sous-bimodule de M constitué des éléments dont le support est contenu dans $\mathrm{Gr}(A')$ (c'est-à-dire dont la restriction au complémentaire de $\mathrm{Gr}(A')$ est nulle) pour A' une partie finie de A. Pour $i \in \mathbb{Z}$ on notera $\Gamma_{\leq i}$ au lieu de $\Gamma_{\{y \in W \mid \ell(y) \leq i\}}$, et de même pour $\Gamma_{<i}$, $\Gamma_{\geq i}$ et $\Gamma_{>i}$.

Pour $x \in W$ on pose

$$\Delta_x := \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(x))(-\ell(x)), \quad \nabla_x := \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(x))(\ell(x)).$$

(En termes plus concrets, on peut identifier $\mathrm{Gr}(x)$ à V via la première projection ; ceci fournit un isomorphisme entre Δ_x – ou ∇_x – et R, sous lequel l'action de R à gauche s'identifie à l'action naturelle par multiplication. L'action à droite d'un élément $f \in R$ s'identifie elle à la multiplication par $x \cdot f$.) Si M est un R-bimodule gradué, on dira que M *admet une Δ-filtration*, resp. *une ∇-filtration*, si $M = \Gamma_A(M)$ pour une partie finie $A \subset W$ et si pour tout $i \in \mathbb{Z}$ il existe un isomorphisme

$$\Gamma_{\geq i}(M)/\Gamma_{>i}(M) \cong \bigoplus_{\substack{\ell(x)=i \\ n \in \mathbb{Z}}} \big(\Delta_x(n)\big)^{\oplus d(M,x,n)},$$

$$\text{resp.} \quad \Gamma_{\leq i}(M)/\Gamma_{<i}(M) \cong \bigoplus_{\substack{\ell(x)=i \\ n \in \mathbb{Z}}} \big(\nabla_x(n)\big)^{\oplus d'(M,x,n)}$$

pour des entiers $d(M,x,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, resp. $d'(M,x,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On pose alors

$$\mathrm{ch}_\Delta(M) = \sum_{\substack{x\in W\\ i\in\mathbb{Z}}} d(M,x,i)\mathsf{v}^i H_x, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{ch}_\nabla(M) = \sum_{\substack{x\in W\\ i\in\mathbb{Z}}} d'(M,x,i)\mathsf{v}^{-i} H_x.$$

Remarque 1.8. — 1. Il est clair que si M admet une Δ-filtration, respectivement une ∇-filtration, il en est de même de $M(1)$, et qu'on a $\mathrm{ch}_\Delta(M(1)) = \mathsf{v} \cdot \mathrm{ch}_\Delta(M)$, respectivement $\mathrm{ch}_\nabla(M(1)) = \mathsf{v}^{-1} \cdot \mathrm{ch}_\nabla(M)$.

2. Puisque les bimodules Δ_x et ∇_x sont libres comme R-modules à gauche et à droite, tout bimodule gradué qui admet une Δ-filtration ou une ∇-filtration est libre comme R-module à gauche et à droite.

3. Si M admet une ∇-filtration, alors il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{(R,R)}(R,M) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\leq 0}(M)$$

(où $\mathrm{Hom}_{(R,R)}(-,-)$ désigne l'espace des morphismes de R-bimodules non nécessairement gradués). En effet, il est clair que tout morphisme de R-bimodules $R \to M$ se factorise par $\Gamma_{\leq 0}(M)$, et comme $\Gamma_{\leq 0}(M)$ est une somme de copies de ∇_e on a $\mathrm{Hom}_{(R,R)}(R, \Gamma_{\leq 0}(M)) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\leq 0}(M)$. Donc pour conclure il suffit de remarquer que $\mathrm{Hom}_{(R,R)}(R, \Gamma_{\leq i}(M)/\Gamma_{<i}(M)) = 0$ pour tout $i > 0$ et d'utiliser les suites exactes appropriées.

4. Choisissons une forme linéaire α_s dont le noyau est V^s. La suite exacte

$$R(-1) \hookrightarrow \mathsf{B}_s \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(s))(1), \quad \text{resp.} \quad \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(s))(-1) \hookrightarrow \mathsf{B}_s \twoheadrightarrow R(1),$$

où les morphismes sont définis par $r \mapsto r \cdot \frac{1}{2}(\alpha_s \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_s)$, resp. $r \mapsto r \cdot \frac{1}{2}(\alpha_s \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_s)$, et $r \otimes r' \mapsto rs(r')$, resp. $r \otimes r' \mapsto rr'$, montre que $\mathrm{ch}_\nabla(\mathsf{B}_s) = \underline{H}_s$, resp. $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_s) = \underline{H}_s$.

5. On peut donner encore une autre preuve du Lemme 1.7(1) en utilisant les caractères [9]. Plus précisément, on remarque que $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_{ws}\mathsf{B}_s) = H_w + \mathsf{v}H_{ws} + (\text{reste})$ où (reste) est une combinaison linéaire des éléments H_y avec $y < w$ et $y \neq ws$. En utilisant le fait que les bimodules B_y sont stables par le foncteur $\mathbb{D}$ du §2.3 ci-dessous, on obtient que $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_w)$ est également de cette forme. Il s'ensuit que $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ est une somme de $\mathsf{B}_w(1) \oplus \mathsf{B}_w(-1)$ et de termes de la forme $\mathsf{B}_y(n)$ avec $y < w$. On conclut en utilisant que le morphisme d'algèbres $\mathcal{H}_{(W,S)} \to \mathbb{Z}[\mathsf{v},\mathsf{v}^{-1}]$ envoyant H_y sur $\mathsf{v}^{-\ell(y)}$ prend des valeurs positives sur les caractères des B_y, et prend la même valeur sur les caractères de $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ et $\mathsf{B}_w(1) \oplus \mathsf{B}_w(-1)$.

Soergel démontre alors le résultat suivant dans [S5], qui montre que les bimodules de Soergel vérifient des propriétés similaires à celles des objets basculants dans une catégorie de plus haut poids (voir par exemple [Ri, §7.5]). Dans cet énoncé on note $(-,-)_\mathcal{H}$ la forme $\mathbb{Z}[\mathsf{v},\mathsf{v}^{-1}]$-bilinéaire symétrique sur $\mathcal{H}_{(W,S)}$ (à valeurs dans $\mathbb{Z}[\mathsf{v},\mathsf{v}^{-1}]$) qui vérifie $(H_x, H_y)_\mathcal{H} = \delta_{xy}$.

9. Cette preuve m'a été expliquée par G. Williamson.

Proposition 1.9. — *1. Tout bimodule de Soergel B admet une Δ-filtration et une ∇-filtration ; de plus on a*

$$\mathrm{ch}_\Delta(B) = d(\mathrm{ch}_\nabla(B)),$$

où d est l'involution considérée au §1.1.

2. L'application $[B] \mapsto \mathrm{ch}_\Delta(B)$ est l'inverse de l'isomorphisme du théorème 1.4 *; en particulier c'est un morphisme d'algèbres, et de même pour ch_∇.*

3. Si B et B' sont des bimodules de Soergel, alors on a

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B'(i)) \cdot \mathsf{v}^i = (\mathrm{ch}_\Delta(B), \mathrm{ch}_\nabla(B'))_{\mathcal{H}}. \tag{2}$$

Démonstration. — Les points (1) et (2) sont démontrés dans [S5, Proposition 5.7 et Proposition 5.10]. (Les applications ch_Δ et ch_∇ sont notées h_Δ et h_∇ dans [S5]. La formule $\mathrm{ch}_\Delta = d \circ \mathrm{ch}_\nabla$ découle du fait que ces deux applications sont des inverses à gauche du morphisme du théorème 1.4 ; puisque ce morphisme est inversible elles doivent donc coïncider.) Le point (3) est démontré dans [S5, Theorem 5.15]. □

Remarque 1.10. — 1. Puisque l'application ch_∇ est un morphisme d'algèbres, de la remarque 1.8(4) on déduit que pour tout mot $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_n)$ en S on a

$$\mathrm{ch}_\nabla(\mathsf{BS}(\underline{w})) = \underline{H}_{s_1} \cdots \underline{H}_{s_n}. \tag{3}$$

En particulier, pour $w \in W$, en utilisant ceci pour $\underline{w}$ une expression réduite de w, on voit que $\mathrm{ch}_\nabla(\mathsf{B}_w) \in \bigoplus_{y\leq w} \mathbb{Z}[\mathsf{v}, \mathsf{v}^{-1}] \cdot H_y$, et que le coefficient de H_w dans la décomposition de $\mathrm{ch}_\nabla(\mathsf{B}_w)$ est 1 ; il s'ensuit que $(\mathsf{B}_w)^{-\ell(w)} \neq 0$. Comme le degré minimal en lequel $\mathsf{BS}(\underline{w})$ est non nul est $-\ell(w)$, et qu'il est de dimension 1 en ce degré, ceci implique que le degré minimal en lequel B_w est non nul est également $-\ell(w)$, et que pour tout choix d'inclusion scindée $\mathsf{B}_w \hookrightarrow \mathsf{BS}(\underline{w})$, l'inclusion $(\mathsf{B}_w)^{-\ell(w)} \hookrightarrow \mathsf{BS}(\underline{w})^{-\ell(w)}$ est un isomorphisme (entre k-espaces vectoriels de dimension 1).

2. Choisissons un raffinement $\preceq$ de l'ordre de Bruhat $\leq$ tel que $(W, \preceq)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ muni de son ordre naturel. Alors pour tout $y \in W$ et tout $B \in \mathscr{B}$, l'action de $R \otimes_k R$ sur $\Gamma_{\preceq y}(B)$ se factorise via $\mathcal{O}(\mathrm{Gr}(\preceq y))$ (où on note « $\preceq y$ » pour $\{w \in W \mid w \preceq y\}$). En effet, on peut démontrer cette propriété par récurrence de la façon suivante. Supposons la propriété connue pour un élément y, et soit z l'élément suivant de W (pour l'ordre $\preceq$). Soit $p_z \in R$ comme dans [S5, Notation 6.5]. Comme B est libre comme R-module à droite, pour montrer la propriété pour z il suffit de montrer que l'action de $R \otimes_k R$ sur tout élément de $\Gamma_{\preceq z}(B)p_z = \Gamma_{\preceq z}(Bp_z)$ se factorise par $\mathcal{O}(\mathrm{Gr}(\preceq z))$. Mais d'après [S5, Lemma 6.3 et Satz 6.6], les morphismes naturels

$$\Gamma_{\{z\}}(B) \to \Gamma_{\leq z}(Bp_z)/\Gamma_{<z}(Bp_z) \to \Gamma_{\preceq z}(Bp_z)/\Gamma_{\preceq z}(Bp_z)$$

sont des isomorphismes ; on a donc $\Gamma_{\preceq z}(Bp_z) = \Gamma_{\preceq y}(B)p_z \oplus \Gamma_{\{z\}}(B)$. Par hypothèse de récurrence l'action de $R \otimes_k R$ sur le premier facteur se factorise par $\mathcal{O}(\mathrm{Gr}(\preceq y))$, donc a fortiori par $\mathcal{O}(\mathrm{Gr}(\preceq z))$. Quant au deuxième facteur, en utilisant [S5, Proposition 5.9] on voit que $B \otimes_R \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(z^{-1}))$ admet une ∇-filtration, donc en particulier que

$$\Gamma_{\{z\}}(B) = \Gamma_{\leq 0}\big(B \otimes_R \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(z^{-1}))\big) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(z))$$

est isomorphe à une somme de copies de décalés de ∇_z, de sorte que l'action sur ce facteur se factorise également par $\mathcal{O}(\mathrm{Gr}(\preceq z))$.

1.5. Conjecture de Soergel

On continue avec les conventions du §1.3, en supposant de plus que k est de caractéristique nulle. En utilisant (3) (et l'autodualité des bimodules $\mathsf{BS}(\underline{w})$ et B_w qu'on verra au §2.3), on peut vérifier (par récurrence sur $\ell(w)$) que les éléments $\mathrm{ch}_\nabla(\mathsf{B}_w)$ sont fixes par l'involution d ; voir [S5, Bemerkung 6.16]. La conjecture suivante, énoncée par Soergel dans [S5], propose une description complète de ces éléments.

Conjecture 1.11 (« Conjecture de Soergel »). — *Pour tout $w \in W$, l'image inverse de $[\mathsf{B}_w]$ par l'isomorphisme du théorème 1.4 est $\underline{H}_w$; en d'autres termes on a*

$$\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_w) = \underline{H}_w.$$

Dans le cas considéré au point (2) de la proposition 1.1, cette conjecture peut se démontrer en utilisant la géométrie de la variété de drapeaux du groupe de Kac–Moody associé ; voir le §1.6 ci-dessous. Elle a également été démontrée algébriquement dans le cas $|S| = 2$ par Soergel (voir [S5]) et dans le cas où $m_{st} = \infty$ pour tous $s, t \in S$ distincts par Fiebig (voir [Fi]) puis Libedinsky (dans un travail non publié). Le cas général (pour une représentation réelle satisfaisant une condition technique) a été obtenu par Elias–Williamson [EW1] ; leur preuve est l'objet principal de cet exposé.

Dans la Partie 2 on utilisera de façon cruciale l'observation suivante. Si $x, y \in W$ et si la conjecture de Soergel est connue pour x et y (c'est-à-dire si $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_x) = \underline{H}_x$ et $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_y) = \underline{H}_y$), alors la formule (2) implique que

$$(4) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_x, \mathsf{B}_y) = \begin{cases} k & \text{si } x = y\,; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et que} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_x, \mathsf{B}_y(n)) = 0 \text{ si } n < 0.$$

1.6. Le cas des systèmes de Coxeter cristallographiques

Soit A une matrice de Cartan généralisée symétrisable, soit (W, S) le système de Coxeter associé, et soit $\mathfrak{h}$ une réalisation de A sur $\mathbb{R}$ au sens de Kac (voir le §1.2). D'après la proposition 1.1(2), la représentation de W sur $\mathfrak{h}^*$ est réflexion fidèle. Puisque A est symétrisable il existe un isomorphisme W-équivariant $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$ (voir [Ku, Proposition 1.5.2]), de sorte que la représentation de W sur $\mathfrak{h}$ est également réflexion fidèle. On notera $\mathscr{B}$ la catégorie des bimodules de Soergel associée à (W, S) et à son action sur $\mathfrak{h}$.

Dans ce cadre, cette catégorie peut se décrire géométriquement de la façon suivante. À A on peut associer un groupe de Kac–Moody $\mathbf{G}$ avec un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$. (Ici on considère le groupe de Kac–Moody « minimal » construit dans [Ku, §7.4], de sorte que $\mathbf{G}$ est un ind-schéma en groupes affine, cf. [Ku, Theorem 7.4.14].) On considère la catégorie dérivée $\mathbf{B}$-équivariante $D^{\mathrm{b}}_{\mathbf{B}}(\mathbf{G}/\mathbf{B}, \mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ au sens de Bernstein–Lunts [BL] ; cette catégorie admet un bifoncteur de *convolution* qui en fait une catégorie monoïdale. On notera $\widetilde{\mathscr{B}}$ la sous-catégorie pleine des complexes semisimples (c'est-à-dire des sommes directes de décalés cohomologiques de complexes de cohomologie d'intersection de $\mathbf{B}$-orbites) dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathbf{B}}(\mathbf{G}/\mathbf{B}, \mathbb{R})$. Le Théorème de Décomposition (dans sa version équivariante, soir [BL, §5.3]) assure que cette sous-catégorie est stable par convolution. On notera $[\widetilde{\mathscr{B}}]$ le groupe de Grothendieck scindé de $\widetilde{\mathscr{B}}$.

L'isomorphisme de Borel fournit un isomorphisme d'algèbres graduées

$$R = \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}^*) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^{\bullet}_{\mathbf{B}}(\mathrm{pt}; \mathbb{R}).$$

En utilisant cette identification, pour tout $\mathcal{F}$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathbf{B}}(\mathbf{G}/\mathbf{B}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel gradué $\mathsf{H}^{\bullet}_{\mathbf{B}}(\mathbf{G}/\mathbf{B}, \mathcal{F})$ admet une structure naturelle de R-bimodule gradué. On obtient ainsi un foncteur de $D^{\mathrm{b}}_{\mathbf{B}}(\mathbf{G}/\mathbf{B}, \mathbb{R})$ vers la catégorie des R-bimodules gradués, dont on notera $\mathbb{H}$ la restriction à $\widetilde{\mathscr{B}}$.

Le résultat suivant est démontré par Soergel dans [S4] dans le cas où A est de type fini (c'est-à-dire quand $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique semisimple). Le cas général est traité dans [Hä] et [BY].

Théorème 1.12. — *Le foncteur $\mathbb{H}$ induit une équivalence de catégories monoïdales $\widetilde{\mathscr{B}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}$.*

Via l'équivalence du théorème 1.12, l'application ch_Δ s'identifie au morphisme

$$\mathrm{ch}_{\mathbf{G}} : \begin{cases} [\widetilde{\mathscr{B}}] & \to & \mathcal{H}_{(W,S)} \\ [\mathcal{F}] & \mapsto & \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ y \in W}} \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{H}^i(\mathcal{F}_{y\mathbf{B}}) \mathsf{v}^{-i-\ell(y)} H_y \end{cases}.$$

Dans ce cas, la conjecture 1.11 découle donc du fait que

$$\mathrm{ch}_{\mathbf{G}}(\mathcal{IC}(\mathbf{B}w\mathbf{B}/\mathbf{B}, \underline{\mathbb{R}})) = \underline{H}_w$$

(un résultat dû à Kazhdan–Lusztig ; voir également [Sp] pour une preuve plus simple).

1.7. Modules de Soergel

Le résultat technique démontré dans ce paragraphe sera utilisé au §3.2, mais n'est pas utile à la compréhension de la Partie 2.

On suppose que W est fini. Si M, N sont des R-bimodules, resp. des R-modules, on notera $\mathrm{Hom}_{(R,R)}(M, N)$, resp. $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, le R-bimodule, resp. R-module, des morphismes de R-bimodules, resp. R-modules, non nécessairement gradués de M vers N. Si M et N sont des bimodules de Soergel, le morphisme naturel

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(M, N(n)) \to \mathrm{Hom}_{(R,R)}(M, N)$$

est un isomorphisme. Un énoncé similaire est vrai également pour les R-modules gradués de type fini.

Dans le cas particulier des groupes de Weyl des groupes algébriques réductifs, l'énoncé suivant est un cas particulier de [S2, Proposition 8]. (La preuve de [S2] repose sur la théorie des représentations et un argument de « déformation ». Alternativement, on peut également démontrer ce résultat dans le cas des groupes de Weyl en utilisant la géométrie de la variété de drapeaux associée.) La preuve algébrique donnée ci-dessous (dont l'existence est mentionnée dans [W2, Remark 3.2]) est due à Soergel.

Proposition 1.13. — *Pour tous bimodules de Soergel B, B', le morphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{(R,R)}(B, B') \otimes_R k \to \mathrm{Hom}_R(B \otimes_R k, B' \otimes_R k)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — En utilisant [S5, Proposition 5.10] on se ramène au cas $B = R$, et on note alors B pour B'. Rappelons que B possède une ∇-filtration ; voir la proposition 1.9. En utilisant la remarque 1.8(3) dans le premier cas, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{(R,R)}(R, B) \cong \Gamma_{\leq 0}(B), \quad \mathrm{Hom}_R(k, B \otimes_R k) \cong \{v \in B \otimes_R k \mid R^{>0} \cdot v = 0\},$$

où $R^{>0} := \bigoplus_{i>0} R^i$. L'inclusion $\Gamma_{\leq 0}(B) \hookrightarrow B$ est scindée comme morphisme de R-modules à droite (voir la remarque 1.8(2)), ce qui implique que notre morphisme est injectif. Pour conclure, il faut donc montrer que tout élément de $B \otimes_R k$ annulé par $R^{>0}$ appartient au sous-espace $\Gamma_{\leq 0}(B) \otimes_R k \subset B \otimes_R k$.

Soit donc $b \in B \otimes_R k$ non nul, et soit $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ l'unique entier tel que b appartient à $\Gamma_{\leq i}(B) \otimes_R k$ mais pas à $\Gamma_{\leq i-1}(B) \otimes_R k$. On va montrer que si $i \neq 0$, alors b n'est pas annulé par $R^{>0}$. Pour cela, choisissons une préimage a de b dans $\Gamma_{\leq i}(B)$. Écrivons le quotient $M = \Gamma_{\leq i}(B)/\Gamma_{\leq i-1}(B)$ comme une somme directe

$$M = \bigoplus_{\substack{y \in W \\ \ell(y)=i}} M_y$$

où chaque M_y est une somme de copies de décalés de ∇_y, et considérons la décomposition

$$\overline{a} = \sum_y \overline{a}_y$$

de l'image $\overline{a}$ de a dans M selon ces facteurs directs. Par hypothèse l'image de $\overline{a}$ dans $M \otimes_R k$ est non nulle, donc il existe y tel que l'image de $\overline{a}_y$ dans $M \otimes_R k$ est non nulle.

Soit maintenant $w_0 \in W$ l'élément de plus grande longueur, et considérons un élément c'_{w_0} de $(R \otimes_{R^W} R)^{2\ell(w_0)}$ non nul et qui s'annule sur chaque $\mathrm{Gr}(x)$ avec $x \neq w_0$, voir [S2, Proposition 2]. Choisissons également une préimage c_{w_0} de c'_{w_0} dans $(R \otimes_k R)^{2\ell(w_0)}$. Alors, si les opérateurs de Demazure $(\partial_x)_{x \in W}$ sont définis comme dans [S2, §2.2], l'élément $c_y := \partial_{yw_0}(c_{w_0}) \in (R \otimes_k R)^{2\ell(y)}$ s'annule sur tous les $\mathrm{Gr}(z)$ avec $z \not\geq y$ d'après [S2, Lemma 5]. En particulier, au vu de la remarque 1.10(2), le produit $c_y \cdot a$ ne dépend que de $\overline{a}_y$. D'autre part, il est remarqué dans [S5, Bemerkung 6.7] que la multiplication par c_y induit un isomorphisme (non gradué) $\Gamma_{\leq y}(B)/\Gamma_{<y}(B) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\{y\}}(B)$. Donc l'image de $c_y \cdot a$ dans $\Gamma_{\{y\}}(B) \otimes_R k$ est non nulle. Finalement, comme noté dans la remarque 1.10(2), le bimodule $B \otimes_R \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(y^{-1}))$ admet une ∇-filtration, de sorte que l'inclusion $\Gamma_{\{y\}}(B) \hookrightarrow B$

est scindée comme morphisme de R-modules à droite, et donc le morphisme naturel $\Gamma_{\{y\}}(B) \otimes_R k \to B \otimes_R k$ est injectif. On a finalement montré que l'image de $c_y \cdot a$ dans $B \otimes_R k$ est non nulle, ce qui achève la preuve puisque cette image coïncide avec $\overline{c}_y \cdot b$, où $\overline{c}_y$ est l'image de c_y dans $R = (R \otimes_k R) \otimes_R k$, et donc un élément $R^{>0}$ (puisque $i = \ell(y)$ est non nul par hypothèse). □

Il découle en particulier de la proposition 1.13 que si $w \in W$ l'anneau des endomorphismes de $\mathsf{B}_w \otimes_R k$ comme R-module gradué est un quotient de $\mathrm{End}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_w)$, donc est un anneau local. Donc ce module gradué est indécomposable. En appliquant des résultats généraux sur les algèbres de dimension finie (voir [GG]), on obtient même que $\mathsf{B}_w \otimes_R k$ est indécomposable comme R-module *non gradué*. En particulier, il s'ensuit que les modules $\mathsf{B}_w \otimes_R k$ sont exactement les R-modules (non gradués) qu'on peut obtenir comme facteurs directs indécomposables des modules de la forme

$$\mathsf{BS}(\underline{w}) \otimes_R k = R \otimes_{R^{s_1}} R \otimes_{R^{s_2}} \cdots \otimes_{R^{s_n}} k$$

où $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_n)$ est un mot en S.

Remarque 1.14. — La preuve ci-dessus utilise de façon cruciale l'hypothèse que W est fini. En fait, la proposition 1.13 est fausse en général si W est infini. Des exemples explicites de bimodules de Soergel B indécomposables tels que $B \otimes_R k$ est décomposable ont été exhibés par L. Patimo.

2. LA THÉORIE DE HODGE DES BIMODULES DE SOERGEL : CAS GLOBAL

Dans cette partie, le corps de base de tous les espaces vectoriels considérés sera (tacitement) $\mathbb{R}$.

2.1. Hypothèses

On fixe un système de Coxeter (W, S) et une représentation V de W qui est réflexion fidèle. On fixe également des éléments $(\alpha_s^\vee)_{s \in S}$ de V et $(\alpha_s)_{s \in S}$ de V^* tels que $s \cdot v = v - \langle \alpha_s, v \rangle \alpha_s^\vee$ pour tous $s \in S$ et $v \in V$. (De tels éléments existent puisque chaque $s \in S$ agit par une réflexion sur V.) On suppose qu'il existe un élément $\rho \in V^*$ tel que pour $s \in S$ et $w \in W$ on a

$$\langle w(\rho), \alpha_s^\vee \rangle > 0 \quad \Leftrightarrow \quad sw > w. \tag{5}$$

(En particulier, si $w = 1$, ceci implique que $\langle \rho, \alpha_s^\vee \rangle > 0$ pour tout $s \in S$.)

Dans les situations considérées dans la proposition 1.1, dans le cas (1) on peut poser $\alpha_s^\vee = e_s$, $\alpha_s = e_s^\vee$, et prendre pour ρ tout élément tel que $\langle \rho, e_s \rangle > 0$ pour tout $s \in S$ (voir [Bo, §V.4.4], en remarquant que $\mathrm{Vect}(\{e_s : s \in S\})$ est isomorphe comme W-représentation à la représentation géométrique de W) ; dans le cas (2) on peut prendre pour les α_s, resp. $\alpha_s^\vee$, les racines simples, resp. coracines simples, et pour ρ tout élément tel que $\langle \rho, \alpha_s^\vee \rangle > 0$ pour tout $s \in S$ (voir [Ku, Lemma 1.3.13]).

2.2. Algèbre linéaire « de Hodge »

Dans cette sous-partie on fixe une terminologie qui permet d'énoncer de façon « compacte » les résultats principaux de [EW1]. Cette terminologie est motivée par la théorie de Hodge des variétés projectives complexes ; voir [W5, §§2–3] pour plus de détails. (Notons toutefois que les définitions considérées ici sont légèrement différentes de celles considérées dans [W5].)

On appellera *donnée de Lefschetz* une paire (E, L) où E est un espace vectoriel gradué de dimension finie concentré soit en degrés pairs, soit en degrés impairs, et $L : E \to E(2)$ est une application linéaire graduée. On dira que (E, L) *vérifie le théorème de Lefschetz difficile* si, pour tout $i \geq 0$, l'application linéaire $L^{\circ i} : E^{-i} \to E^{i}$ est un isomorphisme. Dans ce cas, en posant, pour tout $i \geq 0$,

$$P_L^{-i} := \{v \in E^{-i} \mid L^{\circ(i+1)}(v) = 0\},$$

on obtient un isomorphisme canonique de $\mathbb{R}[L]$-modules gradués

$$\bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{R}[L]/L^{i+1} \otimes_{\mathbb{R}} P_L^{-i} \xrightarrow{\sim} E.$$

(Le sous-espace $P_L^{-i} \subset E^{-i}$ est appelé sous-espace des *éléments primitifs* de degré $-i$.)

On appellera *donnée de Hodge–Riemann* un triplet $(E, L, \langle -, - \rangle)$ où (E, L) est une donnée de Lefschetz et $\langle -, - \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée graduée (c'est-à-dire telle que $\langle E^i, E^j \rangle = 0$ si $i + j \neq 0$) pour laquelle L est autoadjoint (c'est-à-dire vérifie $\langle Lx, y \rangle = \langle x, Ly \rangle$ pour tous $x, y \in E$). On dira que $(E, L, \langle -, - \rangle)$ *vérifie les relations de Hodge–Riemann*[10] si, en notant min le degré minimal en lequel E est non nul, pour tout $i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\min + i \leq 0$, la restriction de la forme bilinéaire symétrique sur $E^{\min + i}$ définie par

$$(x, y) \mapsto \langle x, L^{\circ(-\min - i)}(y) \rangle$$

à $P_L^{\min + i} = \{v \in E^{\min + i} \mid L^{\circ(-\min - i + 1)}(v) = 0\}$ est $(-1)^{\frac{i}{2}}$-définie.

Les relations de Hodge–Riemann sont « plus fortes » que le théorème de Lefschetz difficile, au sens suivant.

Lemme 2.1. — *Soit* $(E, L, \langle -, - \rangle)$ *une donnée de Hodge–Riemann qui vérifie les relations de Hodge–Riemann (ce qui implique en particulier que* $\dim(E^i) = \dim(E^{-i})$ *pour tout* $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*). Alors* (E, L) *vérifie le théorème de Lefschetz difficile.*

Démonstration. — Nous allons démontrer par récurrence descendante sur j que, pour tout $j \geq 0$, la forme bilinéaire symétrique sur E^{-j} définie par $(x, y) \mapsto \langle x, L^{\circ j}(y) \rangle$ est non dégénérée. Cette propriété implique que $L^{\circ j} : E^{-j} \to E^{j}$ est injective, et donc un isomorphisme puisque $\dim(E^{-j}) = \dim(E^{j})$.

10. Dans [EW1], les auteurs autorisent les signes « opposés » à ceux considérés ici dans les relations de Hodge–Riemann. Ils parlent alors de « signes standard » pour les conditions considérées dans ces notes.

Le cas initial est $j = -\min$ (où min est le degré minimal en lequel E est non nul), qui découle des relations de Hodge–Riemann en degré min puisque $L^{\circ(-\min+1)} = 0$. Supposons maintenant le résultat démontré pour $j+2$ (c'est-à-dire en degré $-j-2$). Puisque $L^{\circ(j+2)} : E^{-j-2} \to E^{j+2}$ est un isomorphisme, L est injectif sur E^{-j-2} et on a $E^{-j} = L(E^{-j-2}) \oplus P_L^{-j}$. De plus il est facile de voir que cette décomposition est orthogonale pour la forme sur E^{-j} considérée ci-dessus, et que L induit une isométrie de E^{-j-2} (muni de $(x,y) \mapsto \langle x, L^{\circ(j+2)}(y)\rangle$) vers $L(E^{-j-2})$ (muni de $(x,y) \mapsto \langle x, L^{\circ j}(y)\rangle$). On déduit de notre hypothèse de récurrence que la restriction de notre forme à $L(E^{-j-2})$ est non dégénérée. Sa restriction à P_L^{-j} est également non dégénérée par hypothèse. Donc la forme est non dégénérée sur E^{-j}. □

Dans l'autre sens, la propriété de Lefschetz difficile peut parfois aider à démontrer les relations de Hodge–Riemann grâce au résultat suivant, dont la preuve utilise les mêmes méthodes que la preuve précédente.

Lemme 2.2. — *Soit $(E, L, \langle -, - \rangle)$ une donnée de Hodge–Riemann, et supposons que (E, L) vérifie le théorème de Lefschetz difficile. Alors $(E, L, \langle -, - \rangle)$ vérifie les relations de Hodge–Riemann si et seulement si pour tout $i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\min + i \leq 0$ (où min est le degré minimal en lequel E est non nul), la forme bilinéaire sur $E^{\min+i}$ définie par $(x,y) \mapsto \langle x, L^{\circ(-\min-i)}(y)\rangle$ a pour signature*[11]

$$\dim(E^{\min}) - \big(\dim(E^{\min+2}) - \dim(E^{\min})\big) + \cdots + (-1)^{\frac{i}{2}}\big(\dim(E^{\min+i}) - \dim(E^{\min+i-2})\big).$$

En utilisant le fait que la signature d'une famille continue de formes bilinéaires symétriques non dégénérées ne peut pas varier, on en déduit le principe suivant, qui est crucial dans la preuve de [EW1].

Corollaire 2.3. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose donnés :*
- *un espace vectoriel gradué E de dimension finie concentré soit en degrés pairs, soit en degrés impairs ;*
- *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée graduée $\langle -, - \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$;*
- *une famille continue $(L_t)_{t \in I}$ d'applications linéaires graduées $E \to E(2)$ auto-adjointes pour $\langle -, - \rangle$.*

Supposons que (E, L_t) vérifie le théorème de Lefschetz difficile pour tout $t \in I$. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $(E, L_{t_0}, \langle -, - \rangle)$ vérifie les relations de Hodge–Riemann, alors $(E, L_t, \langle -, - \rangle)$ vérifie les relations de Hodge–Riemann pour tout $t \in I$.

Enfin, le lemme suivant (voir [EW1, Lemma 2.3]) joue un rôle crucial pour démontrer le théorème de Lefschetz difficile.

11. Ici, la *signature* d'une forme bilinéaire symétrique est interprétée comme $r - s$, où r, respectivement s, est le nombre de coefficients strictement positifs, respectivement strictement négatifs, dans la décomposition de la forme quadratique associée en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

Lemme 2.4. — *Soit $(E, L_E, \langle -, - \rangle_E)$ une donnée de Hodge–Riemann qui vérifie les relations de Hodge–Riemann, et soit E' un espace vectoriel gradué de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle -, - \rangle_{E'}$ (qu'on ne suppose pas non dégénérée) et d'une application linéaire graduée $L_{E'} : E' \to E'(2)$. Soit également $\varphi : E' \to E(1)$ une application linéaire graduée qui est injective en degrés ≤ -1 et qui vérifie*

$$\varphi \circ L_{E'} = L_E \circ \varphi \quad \textit{et} \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_E = \langle x, L_{E'}(y) \rangle_{E'} \textit{ pour tous } x, y \in E'.$$

Alors $(L_{E'})^{\circ i} : (E')^{-i} \to (E')^i$ est injective pour tout $i \geq 0$.

Démonstration. — Le résultat est évident pour $i = 0$. Soient maintenant $i \geq 1$ et $x \in (E')^{-i} \smallsetminus \{0\}$. Si $0 \neq (L_E)^{\circ i}(\varphi(x)) = \varphi\big((L_{E'})^{\circ i}(x)\big)$, alors $(L_{E'})^{\circ i}(x) \neq 0$. Sinon, $\varphi(x)$ est un élément primitif non nul de E^{-i+1}, de sorte que $0 \neq \langle \varphi(x), (L_E)^{\circ(i-1)}(\varphi(x)) \rangle_E = \langle x, (L_{E'})^{\circ i}(x) \rangle_{E'}$, et donc $(L_{E'})^{\circ i}(x) \neq 0$. □

2.3. Formes invariantes

Si B est un bimodule de Soergel, une *forme invariante* sur B est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire graduée [12]

$$\langle -, - \rangle_B : B \times B \to R$$

qui vérifie $\langle rx, y \rangle = \langle x, ry \rangle$ et $\langle xr, y \rangle = \langle x, yr \rangle = \langle x, y \rangle r$ pour tous $x, y \in B$ et $r \in R$. La donnée d'une telle forme est équivalente, via $x \mapsto \langle x, - \rangle_B$ à celle d'un morphisme de R-bimodules gradués $B \to \mathbb{D}(B)$, où on a défini $\mathbb{D}$ par

$$\mathbb{D}(B) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} - R}(B, R(i)),$$

où $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} - R$ désigne la catégorie des R-modules à droite gradués, et où la structure de R-bimodule est définie par $(rfr')(x) = f(rxr')$ pour $r, r' \in R$, $f \in \mathbb{D}(B)$, $x \in B$. On dira que cette forme invariante est *non dégénérée* si le morphisme associé $B \to \mathbb{D}(B)$ est un isomorphisme.

Le lemme suivant (facile à vérifier) fournit la méthode principale pour construire de telles formes.

Lemme 2.5. — *Soient B, B' des bimodules de Soergel, et $\langle -, - \rangle_B$, $\langle -, - \rangle_{B'}$ des formes invariantes sur B et B'. On définit une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur BB' en posant*

$$\langle b_1 \otimes b_1', b_2 \otimes b_2' \rangle_{BB'} = \langle (\langle b_1, b_2 \rangle_B) \cdot b_1', b_2' \rangle_{B'}.$$

Alors $\langle -, - \rangle_{BB'}$ est une forme invariante sur BB', qui est non dégénérée, resp. symétrique, si $\langle -, - \rangle_B$ et $\langle -, - \rangle_{B'}$ sont non dégénérées, resp. symétriques.

En particulier, on peut construire une forme invariante symétrique non dégénérée sur B_s de la façon suivante : les vecteurs

$$c_e := 1 \otimes 1 \quad \text{et} \quad c_s := \frac{1}{2}(\alpha_s \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_s)$$

12. Ici, cette condition signifie que $\langle x, y \rangle_B \in R^{i+j}$ si $x \in B^i$ et $y \in B^j$.

forment une base de B_s comme R-module à droite ; on définit alors $\langle r_1 \otimes r_2, r'_1 \otimes r'_2 \rangle_{\mathsf{B}_s}$ comme le coefficient de $r_1 r'_1 \otimes r_2 r'_2$ sur c_s dans la base précédente. Pour tout mot $\underline{w}$ en S, la construction du lemme 2.5 fournit alors une forme invariante symétrique et non dégénérée sur $\mathsf{BS}(\underline{w})$, qu'on notera $\langle -, - \rangle_{\mathsf{BS}(\underline{w})}$ et qu'on appellera *forme d'intersection*(13).

L'existence de la forme d'intersection sur $\mathsf{BS}(\underline{w})$ montre en particulier que $\mathbb{D}(\mathsf{BS}(\underline{w})) \cong \mathsf{BS}(\underline{w})$. En utilisant la caractérisation de B_w donnée au théorème 1.5 on en déduit que pour tout $w \in W$ on a

$$\mathbb{D}(\mathsf{B}_w) \cong \mathsf{B}_w. \tag{6}$$

En particulier, ceci implique que $\dim((\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^{-i}) = \dim((\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^{i})$ pour tout $i \geq 0$.

De la forme d'intersection sur $\mathsf{BS}(\underline{w})$ on peut déduire (par restriction) une forme invariante symétrique non dégénérée sur chaque B_w grâce au lemme suivant.

Lemme 2.6. — *Si B est un bimodule de Soergel muni d'une forme invariante non dégénérée $\langle -, - \rangle_B$, si $w \in W$, et si B_w apparaît comme facteur direct de B avec multiplicité 1, alors pour tout choix d'inclusion scindée $\mathsf{B}_w \hookrightarrow B$ la restriction de $\langle -, - \rangle_B$ à B_w est non dégénérée.*

Démonstration. — Notons $f : \mathsf{B}_w \hookrightarrow B$ l'inclusion scindée choisie. Notre forme sur B induit un isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(B)$. Notre hypothèse et (6) montrent que B_w est facteur direct de $\mathbb{D}(B)$ avec multiplicité 1, et que $\mathbb{D}(f) : \mathbb{D}(B) \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathsf{B}_w)$ est une projection sur un tel facteur. La preuve de l'unicité de la décomposition en facteurs indécomposables dans une catégorie de Krull–Schmidt montre alors que la composée

$$\mathsf{B}_w \hookrightarrow B \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(B) \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathsf{B}_w)$$

est un isomorphisme, ce qui implique que la restriction considérée est non dégénérée. □

Si la conjecture de Soergel est vérifiée pour w (c'est-à-dire si $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_w) = \underline{H}_w$) alors (4) et (6) montrent que

$$\dim_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_w, \mathbb{D}(\mathsf{B}_w))\big) = 1.$$

On en déduit que, sous cette hypothèse, il existe une *unique* forme invariante non nulle sur B_w à scalaire près. D'après nos remarques précédentes, elle est symétrique et non dégénérée.

On peut vérifier par un calcul explicite (voir [EW1, Lemma 3.10]) que si $w \in W$ et si $\underline{w}$ est une expression réduite pour w, pour tout $c \in \mathsf{BS}(\underline{w})^{-\ell(w)}$ non nul le scalaire $\langle c, \rho^{\ell(w)} \cdot c \rangle_{\mathsf{BS}(\underline{w})}$ est strictement positif. Comme, pour toute inclusion scindée $\mathsf{B}_w \hookrightarrow \mathsf{BS}(\underline{w})$, la restriction $\mathsf{B}_w^{-\ell(w)} \to \mathsf{BS}(\underline{w})^{-\ell(w)}$ est un isomorphisme (voir la remarque 1.10(1)), on obtient finalement, sous l'hypothèse que la conjecture de Soergel est vérifiée pour w,

13. Cette terminologie est justifiée par l'analogie avec la preuve du Théorème de Décomposition par de Cataldo et Migliorini (voir le §0.3), où certaines formes d'intersection en homologie de Borel–Moore jouent un rôle crucial. Les formes $\langle -, - \rangle_{\mathsf{BS}(\underline{w})}$ peuvent être considérées comme des analogues algébriques de ces formes.

qu'il existe (à scalaire strictement positif près) une unique forme invariante $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$ sur B_w telle que $\langle c, \rho^{\ell(w)} \cdot c \rangle_{\mathsf{BS}(\underline{w})} > 0$ pour $c \in \mathsf{B}_w^{-\ell(w)}$ non nul, et que cette forme est symétrique et non dégénérée. On l'appellera également *forme d'intersection.* (Les énoncés considérés ci-dessous ne dépendent du choix de cette forme qu'à un scalaire positif près, de sorte qu'on peut la fixer de façon arbitraire.)

2.4. Énoncés

Si B est un bimodule de Soergel, on posera $\overline{B} := B \otimes_R \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est vu comme un R-module à gauche gradué de la façon standard. Si $\langle -, - \rangle_B$ est une forme invariante sur B, elle induit une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire graduée sur $\overline{B}$, qu'on notera de la même façon. Notons que, pour tout $x \in R^n$, le morphisme $x \cdot (-) : \overline{B} \to \overline{B}(n)$ est autoadjoint pour toute telle forme.

Les résultats principaux de [EW1] peuvent s'énoncer de la façon suivante.

Théorème 2.7. — *1. La conjecture* 1.11 *est vraie pour la représentation V, c'est-à-dire* $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_w) = \underline{H}_w$ *pour tout $w \in W$.*

2. Pour tout $w \in W$, la donnée de Lefschetz $(\overline{\mathsf{B}_w}, \rho \cdot (-))$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile.

3. Pour tout $w \in W$, la donnée de Hodge–Riemann $(\overline{\mathsf{B}_w}, \rho \cdot (-), \langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w})$ vérifie les relations de Hodge–Riemann.

Notons que, d'après le lemme 2.1, l'énoncé (3) du théorème 2.7 implique l'énoncé (2) ; cependant cette propriété joue un rôle crucial dans la preuve de l'énoncé (3) et mérite donc d'être énoncée explicitement. D'autre part, l'énoncé (1) est nécessaire pour fixer la forme $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$, et donc pour que l'énoncé (3) ait un sens.

Les trois propriétés énoncées dans le théorème 2.7 sont démontrées simultanément par Elias–Williamson, par récurrence sur la longueur de w. Pour expliquer cette preuve, on dira que *la conjecture de Soergel*, resp. *le théorème de Lefschetz difficile*, resp. *les relations de Hodge–Riemann, sont vérifiés en longueur* $\leq n$ si l'énoncé (1), resp. (2), resp. (3), du théorème 2.7 est vérifié pour tout $w \in W$ tel que $\ell(w) \leq n$.

La première étape de la preuve est le résultat suivant.

Proposition 2.8. — *Soit $n \geq 0$, et supposons que la conjecture de Soergel, le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge–Riemann sont vérifiés en longueur $\leq n$. Supposons d'autre part que pour tout $w \in W$ tel que $\ell(w) = n$ et tout $s \in S$ tel que $ws > w$ la donnée de Hodge–Riemann $(\overline{\mathsf{B}_w \mathsf{B}_s}, \rho \cdot (-), \langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w \mathsf{B}_s})$ vérifie les relations de Hodge–Riemann, où $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w \mathsf{B}_s}$ est définie comme au lemme* 2.5 *à partir des formes d'intersection sur B_w et B_s. Alors la conjecture de Soergel, le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge–Riemann sont vérifiés en longueur $\leq n+1$.*

Idée de preuve. — Soit $x \in W$ avec $\ell(x) = n+1$, et écrivons $x = ys$ avec $s \in S$ et $\ell(y) = n$. D'après une idée de Soergel (voir [S5, Lemma 7.1(2)]), puisque la conjecture 1.11 est vraie en longueur $\leq \ell(y)$, pour démontrer que $\mathrm{ch}_\Delta(\mathsf{B}_x) = \underline{H}_x$ il suffit de montrer que pour tout $z < x$ la forme bilinéaire sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y\mathsf{B}_s)$ définie par la composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y\mathsf{B}_s) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s, \mathsf{B}_z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_z) \overset{(4)}{=} \mathbb{R}$$

(où $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s, \mathsf{B}_z)$ est identifié à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y\mathsf{B}_s)$ via $f \mapsto f^*$, où l'adjoint est pris par rapport aux formes d'intersection sur B_z et $\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s$) est non dégénérée.

Elias–Williamson démontrent alors (voir [EW1, Theorem 4.1]) qu'il existe une injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y\mathsf{B}_s) \hookrightarrow \left(\overline{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s}\right)^{-\ell(z)}$$

dont l'image est contenue dans la partie primitive de $(\overline{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s})^{-\ell(z)}$ (c'est-à-dire le noyau de $\rho^{\ell(z)+1} \cdot (-)$) et qui est une isométrie à un scalaire positif près, où $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y\mathsf{B}_s)$ est muni de la forme bilinéaire considérée ci-dessus et $(\overline{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s})^{-\ell(z)}$ de la « forme de Lefschetz » $(x, y) \mapsto \langle \rho^{\ell(z)} x, y\rangle_{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s}$. Puisque la restriction d'une forme définie positive ou négative à un sous-espace est non dégénérée, les relations de Hodge–Riemann sur $\overline{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s}$ impliquent alors que notre forme sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y\mathsf{B}_s)$ est non dégénérée, ce qui implique la conjecture de Soergel pour l'élément x.

Puisque les relations de Hodge–Riemann sont vérifiées sur $\overline{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s}$, le théorème de Lefschetz difficile est vrai pour cet espace par le lemme 2.1. Ceci implique le théorème de Lefschetz difficile pour son sous-espace $\overline{\mathsf{B}_x}$. Les relations de Hodge–Riemann se transmettent également clairement de $\overline{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s}$ à $\overline{\mathsf{B}_x}$, puisque la restriction de $\langle -, -\rangle_{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s}$ à B_x coïncide avec $\langle -, -\rangle_{\mathsf{B}_x}$ à un scalaire strictement positif près (voir notamment le lemme 2.6) et puisque le degré minimal en lequel ces espaces sont non nuls est le même (à savoir $-n-1$), voir la remarque 1.10(1). □

La proposition 2.8 ramène la preuve du théorème 2.7 à la preuve des relations de Hodge–Riemann pour $\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}$ quand $ws > w$, sous l'hypothèse que la conjecture de Soergel, le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge–Riemann sont connus en longueur $\leq \ell(w)$. La preuve de cette propriété utilise une factorisation de l'opérateur de Lefschetz (c'est-à-dire la multiplication par ρ) construite à partir des complexes de Rouquier, comme expliqué dans le paragraphe suivant.

2.5. Complexes de Rouquier

Pour tout $s \in S$, on note F_s le complexe

$$\cdots \to 0 \to \mathsf{B}_s \xrightarrow{\mathsf{m}_s} R(1) \to 0 \to \cdots \quad \in C^{\mathrm{b}}(\mathscr{B}),$$

où B_s est en degré cohomologique 0 et le morphisme $\mathsf{m}_s : \mathsf{B}_s \to R(1)$ est défini par $r \otimes r' \mapsto rr'$. Pour tout mot $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_n)$ en S, on définit alors le complexe

$$F_{\underline{w}} := F_{s_1} \otimes_R \cdots \otimes_R F_{s_n}.$$

Pour éviter les confusions avec la $\mathbb{Z}$-graduation des bimodules, on notera ${}^nF_{\underline{w}}$ pour le terme en degré cohomologique n du complexe $F_{\underline{w}}$. La propriété cruciale de ces complexes (qu'on n'utilisera pas dans la preuve ci-dessous) est due à Rouquier (voir [R2, Proposition 9.4 et §9.3]) et affirme que, si $\underline{w}$ est une expression réduite, alors l'image de $F_{\underline{w}}$ dans la catégorie homotopique $K^{\mathrm{b}}(\mathscr{B})$ ne dépend que de l'image de $\underline{w}$ dans W, à isomorphisme canonique près.

Une propriété que nous utiliserons ci-dessous, et qui est beaucoup plus facile à vérifier (par exemple par récurrence sur la longueur), est que pour toute expression réduite $\underline{w}$ d'image w dans W on a

$$\mathsf{H}^i(F_{\underline{w}} \otimes_R \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}(-\ell(w)) & \text{si } i = 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

L'énoncé suivant joue un rôle crucial dans la preuve présentée au §2.6 [14]. Dans cet énoncé, on notera M pour le morphisme id_M.

Lemme 2.9. — *Soit $n \geq 1$. Supposons la conjecture de Soergel connue en longueur $\leq n$. Supposons de plus que pour tout $y \in W$ tel que $\ell(y) \leq n-2$ et tout $s \in S$ tel que $ys > y$, le triplet $(\overline{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s}, \rho \cdot (-), \langle -,- \rangle_{\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s})$ vérifie les relations de Hodge–Riemann [15] (où la forme invariante sur $\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s$ est celle fournie par le lemme 2.5 à partir des formes d'intersection sur B_y et B_s). Soit $w \in W$ de longueur n, et soit $\underline{w}$ une expression réduite pour w.*

Alors il existe un bimodule de Soergel D muni d'une forme invariante symétrique non dégénérée $\langle -,- \rangle_D$ et un morphisme $d : \mathsf{B}_w \to D(1)$ tels que :

1. *D est une somme directe de bimodules de la forme B_z avec $z < w$ (sans décalage) ;*
2. *le degré minimal en lequel D est non nul est $-n+1$, et D est concentré en degrés de la même parité que $-n+1$;*
3. *le triplet $(\overline{D}, \rho \cdot (-), \langle -,- \rangle_D)$ vérifie les relations de Hodge–Riemann ;*
4. *on a $d^* \circ d = \rho\mathsf{B}_w - \mathsf{B}_w w^{-1}(\rho)$, où l'adjoint est pris par rapport à la forme d'intersection sur B_w et la forme $\langle -,- \rangle_D$ sur D ;*
5. *il existe des inclusions scindées $\mathsf{B}_w \hookrightarrow {}^0F_{\underline{w}}$ et $D(1) \hookrightarrow {}^1F_{\underline{w}}$ telles que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{B}_w \arrow[r, "d"] \arrow[d] & D(1) \arrow[d] \\ {}^0F_{\underline{w}} \arrow[r, "{}^0d_{F_{\underline{w}}}"] & {}^1F_{\underline{w}}. \end{tikzcd}$$

14. Cet énoncé n'est pas utilisé sous cette forme dans la preuve originale de [EW1]. Il apparaît explicitement dans [W3, EW3] (où les hypothèses considérées ici sont connues d'après [EW1]), et permet de simplifier légèrement la preuve de [EW1], comme on le verra au §2.6.

15. Comme remarqué au §2.4, cette hypothèse entraîne que les relations de Hodge–Riemann sont connues en longueur $\leq n-1$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$ on a $w = s \in S$, et on peut choisir $D = R$ et $d = \sqrt{\langle \rho, \alpha_s^\vee \rangle}\mathsf{m}_s$. Ici l'adjoint de d est $\sqrt{\langle \rho, \alpha_s^\vee \rangle}\delta_s$, où le morphisme $\delta_s : R \to \mathsf{B}_s(1)$ est défini par

$$\delta_s(r) = r \cdot \frac{1}{2}(\alpha_s \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_s),$$

et il est facile de voir que

$$\rho\mathsf{B}_s - \mathsf{B}_s s(\rho) = \langle \rho, \alpha_s^\vee \rangle \delta_s \circ \mathsf{m}_s. \tag{8}$$

Supposons maintenant le résultat vérifié pour n, et vérifions-le pour $n+1$. Soient $w \in W$ de longueur n et $\underline{w}$ une expression réduite pour w, et soit $s \in S$ tel que $ws > w$. On considère l'expression réduite $\underline{w}s$ de ws. Soient D, $\langle -,- \rangle_D$ et $d : \mathsf{B}_w \to D(1)$ comme dans l'énoncé (pour l'élément w), et notons $a : \mathsf{B}_w \hookrightarrow {}^0F_{\underline{w}}$ et $b : D(1) \hookrightarrow {}^1F_{\underline{w}}$ des choix d'inclusions scindées telles que $b \circ d = {}^0d_{F_{\underline{w}}} \circ a$. Écrivons $D = D^\uparrow \oplus D^\downarrow$ où $D^\uparrow$, resp. $D^\downarrow$, est une somme d'objets de la forme B_z avec $zs > z$, resp. avec $zs < z$. Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(D^\uparrow, \mathbb{D}(D^\downarrow)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(D^\downarrow, \mathbb{D}(D^\uparrow)) = 0$ d'après (4) et nos hypothèses, cette décomposition est automatiquement orthogonale pour $\langle -,- \rangle_D$.

D'après (5) on a $\langle w^{-1}\rho, \alpha_s^\vee \rangle > 0$, de sorte qu'on peut définir le morphisme

$$f := \begin{pmatrix} \sqrt{\langle w^{-1}\rho, \alpha_s^\vee \rangle}\mathsf{B}_w\mathsf{m}_s \\ d\mathsf{B}_s \end{pmatrix} : \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \to \mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1).$$

Il est facile de vérifier que si on munit $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ de la forme $\langle -,- \rangle_{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}$ fournie par le lemme 2.5, et $\mathsf{B}_w \oplus D\mathsf{B}_s$ de la somme de la forme d'intersection de B_w et de la forme $\langle -,- \rangle_{D\mathsf{B}_s}$ fournie par le lemme 2.5, on a

$$f^* = \left(\sqrt{\langle w^{-1}\rho, \alpha_s^\vee \rangle}\mathsf{B}_w\delta_s \quad d^*\mathsf{B}_s\right),$$

de sorte qu'en utilisant une formule similaire à (8) on trouve que

$$f^* \circ f = \rho\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s - \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s(ws)^{-1}(\rho).$$

De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\mathsf{B}_s"'] & \mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1) \arrow[d, "\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\langle w^{-1}\rho,\alpha_s^\vee \rangle}}a(1) & 0 \\ 0 & b\mathsf{B}_s \end{pmatrix}"] \\ {}^0F_{\underline{w}s} = {}^0F_{\underline{w}}\mathsf{B}_s \arrow[r, "{}^0d_{F_{\underline{w}s}} = \begin{pmatrix} {}^0F_{\underline{w}s}\mathsf{m}_s \\ {}^0d_{F_{\underline{w}}}\mathsf{B}_s \end{pmatrix}"] & {}^1F_{\underline{w}s} = {}^0F_{\underline{w}}(1) \oplus {}^1F_{\underline{w}}\mathsf{B}_s. \end{tikzcd} \tag{9}$$

Le bimodule gradué B_{ws} est un facteur direct de $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ d'après le Lemme 1.7(2). La conjecture de Soergel en longueur $\leq n+1$ implique qu'on a $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \cong \mathsf{B}_{ws} \oplus E$, où E est une somme de termes de la forme B_z (sans décalage), et que de plus une telle décomposition est automatiquement orthogonale pour la forme $\langle -,- \rangle_{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}$ (voir notamment (1), (4) et (6)). On peut supposer que la restriction de cette forme à B_{ws} est $\langle -,- \rangle_{\mathsf{B}_{ws}}$, et alors l'adjoint de l'inclusion $\mathsf{B}_{ws} \hookrightarrow \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ est la projection $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \twoheadrightarrow \mathsf{B}_{ws}$ orthogonale à E. Ainsi, si $g : \mathsf{B}_{ws} \to \mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1)$ est la composée de f et de cette inclusion, on a

$$g^* \circ g = \rho\mathsf{B}_{ws} - \mathsf{B}_{ws}(ws)^{-1}(\rho), \tag{10}$$

et un analogue du diagramme commutatif (9). Pour conclure, il nous reste maintenant à « simplifier » le terme $\mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1)$ de sorte qu'il satisfasse les conditions de l'énoncé.

La commutativité de (9), le fait que ${}^1 d_{F_{\underline{ws}}} \circ {}^0 d_{F_{\underline{ws}}} = 0$ et l'injectivité de b impliquent que la composée de g avec le morphisme

$$\mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} d(1) & D\mathsf{m}_s(1) \\ 0 & {}^1 d_{F_{\underline{w}}} \circ (b\mathsf{B}_s) \end{pmatrix}} D(2) \oplus {}^2 F_{\underline{w}} \mathsf{B}_s \tag{11}$$

est nulle. Le bimodule $D\mathsf{B}_s$ se décompose en une somme orthogonale $D^{\uparrow}\mathsf{B}_s \oplus D^{\downarrow}\mathsf{B}_s$. Ici on a $D^{\downarrow}\mathsf{B}_s \cong D^{\downarrow}(-1) \oplus D^{\downarrow}(1)$ d'après le lemme 1.7(1), et cette décomposition peut être choisie de telle sorte que la composée $D^{\downarrow}(1) \hookrightarrow D^{\downarrow}\mathsf{B}_s \xrightarrow{D^{\downarrow}\mathsf{m}_s} D^{\downarrow}(1)$ est l'identité (voir la preuve de [EW1, Lemma 6.5]). Ainsi il existe des facteurs directs de $\mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1)$ et $D(2) \oplus {}^2 F_{\underline{w}} \mathsf{B}_s$ qui s'identifient à $D^{\downarrow}(2)$, et tels que le facteur de l'application considérée dans (11) sur ces termes s'identifie à $\mathrm{id}_{D^{\downarrow}(2)}$. Ceci implique que l'application g s'écrit comme la composée [16] de son facteur $h : \mathsf{B}_{ws} \to \mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1) \oplus D^{\downarrow}$ par le morphisme $\mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1) \oplus D^{\downarrow} \to \big(\mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1) \oplus D^{\downarrow}\big) \oplus D^{\downarrow}(2)$ donné par $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ -\gamma \end{smallmatrix}\right)$, où γ est la composée de l'inclusion $\mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1) \oplus D^{\downarrow} \hookrightarrow \mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1)$, suivie de (11), puis de la projection sur $D^{\downarrow}(2)$. On remplace alors g par h, et on obtient un diagramme similaire à (9) (où le terme en haut à droite est maintenant $\mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1) \oplus D^{\downarrow}$, et où la flèche de droite a été modifiée de la façon appropriée).

Maintenant, on remarque que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_{ws}, D^{\downarrow}) = 0$ d'après (4), de sorte qu'on doit avoir $h(\mathsf{B}_{ws}) \subset \mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1)$, et qu'on peut donc considérer h comme un morphisme $\mathsf{B}_{ws} \to \mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1)$. On a alors

$$h^* \circ h = \rho \mathsf{B}_{ws} - \mathsf{B}_{ws}(ws)^{-1}(\rho);$$

en effet, cela découle de (10) et du fait que la composante de g donnée par un morphisme $\mathsf{B}_{ws} \to D^{\downarrow}$ est nulle et que la composante de g^* donnée par un morphisme $D^{\downarrow}(2) \to \mathsf{B}_{ws}(2)$ également (pour la même raison que ci-dessus).

Pour conclure, il reste à voir que notre bimodule $\mathsf{B}_w \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s$ vérifie les conditions (1)–(3). Pour (1), cela découle de la conjecture de Soergel en longueur $\leq n$ et (1), qui montrent que $D^{\uparrow}\mathsf{B}_s$ est une somme d'objets B_z avec $z < ws$. La condition (2) est claire puisque le degré minimal en lequel B_w, resp. $D^{\uparrow}$, est non nul est $-n$, resp. $\geq -n+1$. En ce qui concerne (3), pour le facteur B_w cela découle de nos hypothèses (voir la note (15)). Pour $D^{\uparrow}\mathsf{B}_s$, on remarque qu'on a une décomposition orthogonale

$$D^{\uparrow} = \bigoplus_{\substack{\ell(y) \leq n-1 \\ \ell(y) \equiv -n+1 \pmod 2 \\ ys > y}} V_y \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{B}_y$$

16. Cet argument est un cas particulier du procédé d'*élimination gaussienne* qui permet, dans un complexe, d'éliminer un facteur direct de la forme $M \xrightarrow{\mathrm{id}} M$ sans changer le complexe à homotopie près.

où chaque B_y est muni de sa forme d'intersection et $V_y := \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_y, D^{\uparrow})$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique $(-1)^{\frac{-n+1+\ell(y)}{2}}$-définie. Donc la propriété voulue découle de nos hypothèses sur les bimodules $\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s$. □

Remarque 2.10. — Dans [EW1] les auteurs prouvent des résultats plus forts sur les complexes $F_{\underline{w}}$ (mais qui ne sont pas nécessaires à la preuve du théorème 2.7). Ils démontrent notamment que pour tout $w \in W$ et toute expression réduite $\underline{w}$ pour w, si la conjecture de Soergel est connue pour tous les éléments $y \leq w$, il existe un facteur direct $F'_{\underline{w}} \subset F_{\underline{w}}$ tel que l'inclusion est un isomorphisme dans $K^{\mathrm{b}}(\mathscr{B})$, et tel que pour tout i, ${}^{i}F'_{\underline{w}}$ est une somme d'objets de la forme $\mathsf{B}_z(i)$ avec $z \in W$; voir [EW1, Theorem 6.9]. En utilisant cela et le théorème 2.7, on peut démontrer que si on écrit $H_w = \sum_y g_{y,w} \cdot \underline{H}_y$ avec $g_{y,w} \in \mathbb{Z}[\mathsf{v}, \mathsf{v}^{-1}]$, alors $(-1)^{\ell(w)-\ell(y)} g_{y,w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathsf{v}]$ pour tous $y, w \in W$ (voir [EW1, Remark 6.10]).

Cette propriété a été étendue à un cadre « tordu » par Gobet [Go] pour démontrer une conjecture combinatoire de Dyer.

2.6. Preuve du théorème 2.7

La preuve du théorème 2.7 va se faire par récurrence sur $\ell(w)$. Elle nécessite encore un ingrédient : la déformation. En fait, pour $w \in W$, $s \in S$ et $\zeta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on considère « l'opérateur de Lefschetz déformé »

$$L_\zeta^{w,s} := (\rho \cdot (-))\mathsf{B}_s + \mathsf{B}_w(\zeta\rho \cdot (-)) : \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \to \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s(2).$$

On notera de même le morphisme induit de $\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}$ vers $\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}(2)$.

Des calculs explicites et relativement élémentaires montrent les résultats suivants (voir [EW1, Theorem 5.1] pour (1) et [EW1, Theorem 6.19] pour (2)).

Proposition 2.11. — *1. Soient $w \in W$ et $s \in S$. Supposons la conjecture de Soergel et les relations de Hodge–Riemann vérifiées pour w. Alors le triplet $(\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}, L_\zeta^{w,s}, \langle -,- \rangle_{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s})$ vérifie les relations de Hodge–Riemann si $\zeta \gg 0$.*

2. Supposons que $\zeta > 0$, et soient $w \in W$ et $s \in S$. Si $ws < w$ et si le théorème de Leftschetz difficile est vérifié pour w, alors $(\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}, L_\zeta^{w,s})$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile.

On peut maintenant donner la preuve du théorème 2.7. En fait on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que :

1. la conjecture de Soergel, le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge–Riemann sont vrais en longueur $\leq n$;
2. pour tout $\zeta \geq 0$, tout $w \in W$ et tout $s \in S$ tels que $ws > w$ et $\ell(ws) \leq n$, le triplet $(\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}, L_\zeta^{w,s}, \langle -,- \rangle_{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s})$ vérifie les relations de Hodge–Riemann (où, comme d'habitude, la forme $\langle -,- \rangle_{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}$ est celle fournie par le lemme 2.5 à partir des formes d'intersection sur B_w et B_s).

Ces propriétés sont évidentes si $n \in \{0, 1\}$. On les suppose donc vérifiées pour un $n \geq 1$. D'après la proposition 2.8, pour démontrer (1) en longueur $n + 1$ il suffit de vérifier que pour tout $w \in W$ tel que $\ell(w) = n$ et tout $s \in S$ tel que $ws > w$ la donnée de Hodge–Riemann $(\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}, \rho \cdot (-), \langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s})$ vérifie les relations de Hodge–Riemann. Puisque $\rho\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s = L_0^{w,s}$, ceci est un cas particulier de la propriété (2) au rang $n + 1$. Et pour démontrer cette propriété, d'après le corollaire 2.3 et la proposition 2.11(1), il suffit de vérifier que le couple $(\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s}, L_\zeta^{w,s})$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile pour tout $\zeta \geq 0$.

Soient donc $w \in W$ de longueur n, $s \in S$ tel que $ws > w$, et $\zeta \geq 0$. Considérons tout d'abord le cas $\zeta = 0$. Nos hypothèses permettent d'appliquer le lemme 2.9 à w : soient D, $\langle -, - \rangle_D$ et $d : \mathsf{B}_w \to D(1)$ les données fournies par ce lemme. D'après (5) on a $\langle w^{-1}\rho, \alpha_s^\vee \rangle > 0$, ce qui permet de considérer le morphisme

$$d' := \begin{pmatrix} \sqrt{\langle w^{-1}\rho, \alpha_s^\vee \rangle}\mathsf{B}_w\mathsf{m}_s \\ d\mathsf{B}_s \end{pmatrix} : \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \to \mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1)$$

(comme dans la preuve du lemme 2.9). Ce morphisme est compatible avec la différentielle en degré 0 d'un complexe de Rouquier associé à ws (au même sens que dans le lemme 2.9), de sorte que (7) implique que $\overline{d'} := d' \otimes_R \mathbb{R}$ est injectif en degrés $\leq n$. On a également, pour les formes bilinéaires appropriées,

$$(d')^* \circ d' = \rho\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s - \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s(ws)^{-1}(\rho). \tag{12}$$

Comme dans la preuve du lemme 2.9, on a une décomposition canonique et orthogonale $D = D^\uparrow \oplus D^\downarrow$ où les facteurs directs de $D^\uparrow$, resp. $D^\downarrow$, sont de la forme B_z avec $zs > z$, resp. $zs < z$. On notera $\langle -, - \rangle_{D^\uparrow}$ et $\langle -, - \rangle_{D^\downarrow}$ les restrictions de $\langle -, - \rangle_D$ à ces facteurs. On a également une décomposition non canonique et non orthogonale $D^\downarrow\mathsf{B}_s \cong D^\downarrow(1) \oplus D^\downarrow(-1)$ (voir le lemme 1.7(1)), qu'on peut choisir de telle sorte que la composée $D^\downarrow(1) \hookrightarrow D^\downarrow\mathsf{B}_s \xrightarrow{D^\downarrow\mathsf{m}_s} D^\downarrow(1)$ est l'identité. Dans la suite on fixe une telle décomposition. Notons que

$$\langle x, y \rangle_{D^\downarrow\mathsf{B}_s} = 0 \quad \text{pour } x, y \in D^\downarrow(1) \tag{13}$$

(où la forme $\langle -, - \rangle_{D^\downarrow\mathsf{B}_s}$ est celle fournie par le lemme 2.5). En effet, la forme invariante $\langle -, - \rangle_{D^\downarrow\mathsf{B}_s}$ définit un morphisme

$$D^\downarrow(1) \oplus D^\downarrow(-1) = D^\downarrow\mathsf{B}_s \to \mathbb{D}(D^\downarrow\mathsf{B}_s) = \mathbb{D}(D^\downarrow(1) \oplus D^\downarrow(-1)) \cong D^\downarrow(-1) \oplus D^\downarrow(1)$$

(où on a fixé un isomorphisme $\mathbb{D}(D^\downarrow) \cong D^\downarrow$). Le facteur de ce morphisme de $D^\downarrow(1)$ vers $\mathbb{D}(D^\downarrow(1)) \cong D^\downarrow(-1)$ doit être nul par (4), ce qui se traduit plus concrètement par (13).

Une fois ces considérations établies, on peut considérer d' comme un morphisme de $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ vers $\mathsf{B}_w(1) \oplus D^\uparrow\mathsf{B}_s(1) \oplus D^\downarrow(2) \oplus D^\downarrow$. On notera $d' = d'_1 + d'_2 + d'_3 + d'_4$ avec d'_j un morphisme de $\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s$ vers le j-ième terme de cette décomposition, pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, et on pose $\overline{d'_j} := d'_j \otimes_R \mathbb{R}$.

Soit maintenant $i \geq 0$, et montrons que $(L_0^{w,s})^{\circ i} : (\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s})^{-i} \to (\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s})^{i}$ est un isomorphisme ou, de façon équivalente, est injective. Soit $x \in (\overline{\mathsf{B}_w\mathsf{B}_s})^{-i}$. Si $\overline{d'_4}(x) \neq 0$, alors du théorème de Lefschetz difficile pour $D^{\downarrow}$ (qui est connu par récurrence) on déduit que $\rho^i \cdot \overline{d'_4}(x) \neq 0$, donc que $(L_0^{w,s})^{\circ i}(x) \neq 0$.

On pose maintenant $E := \overline{\mathsf{B}_w} \oplus \overline{D^{\uparrow}\mathsf{B}_s}$, $E' := \ker(\overline{d'_4})$, et on note $\varphi := \overline{d'_1} + \overline{d'_2} : E' \to E(1)$. Nous allons vérifier que ces données satisfont les conditions du lemme 2.4, ce qui achèvera la preuve du cas $\zeta = 0$. En effet :

— E vérifie les relations de Hodge–Riemann grâce à nos hypothèses de récurrence, comme dans la preuve du lemme 2.9 ;
— par le même argument « d'élimination gaussienne » que dans la preuve du lemme 2.9, on peut construire un diagramme commutatif similaire à (9) dans lequel la première ligne est $d'_1 \oplus d'_2 \oplus d'_4 : \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \to \mathsf{B}_w(1) \oplus D^{\uparrow}\mathsf{B}_s(1) \oplus D^{\downarrow}$; comme pour $\overline{d'}$ cela implique que $\overline{d'_1} \oplus \overline{d'_2} \oplus \overline{d'_4}$ est injectif en degrés $\leq n$ (donc a fortiori en degrés ≤ -1), puis que φ possède également cette propriété ;
— φ commute aux opérateurs de Lefschetz car cette application est obtenue à partir d'un morphisme de bimodules ;
— pour $x, y \in E'$, on a

$$\begin{aligned}\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_E &= \langle \overline{d'_1}(x), \overline{d'_1}(y) \rangle_{\mathsf{B}_w} + \langle \overline{d'_2}(x), \overline{d'_2}(y) \rangle_{D^{\uparrow}\mathsf{B}_s} \\ &\overset{(13)}{=} \langle \overline{d'}(x), \overline{d'}(y) \rangle_{\mathsf{B}_w \oplus D\mathsf{B}_s} \overset{(12)}{=} \langle x, L_0^{w,s}(y) \rangle_{E'}.\end{aligned}$$

La preuve dans le cas $\zeta > 0$ est basée sur les mêmes idées, mais dans ce cas on ne peut pas utiliser la décomposition $D^{\downarrow}\mathsf{B}_s \cong D^{\downarrow}(1) \oplus D^{\downarrow}(-1)$ car elle n'est pas compatible avec l'opérateur de Lefschetz déformé. On considère encore le morphisme $d : \mathsf{B}_w \to D(1)$ fourni par le lemme 2.9, et on pose

$$f := \begin{pmatrix} \sqrt{\langle w^{-1}\rho, \alpha_s^{\vee} \rangle + \zeta \langle \rho, \alpha_s^{\vee} \rangle} \mathsf{B}_w \mathsf{m}_s \\ d\mathsf{B}_s \end{pmatrix} : \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s \to \mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1).$$

On peut alors vérifier que

$$f^* \circ f = L_\zeta^{w,s} - \mathsf{B}_w\mathsf{B}_s(sw^{-1}(\rho) + \zeta s(\rho))$$

(où les formes invariantes sont choisies comme dans le lemme 2.9) et que, si L est l'opérateur sur $\mathsf{B}_w(1) \oplus D\mathsf{B}_s(1)$ donné par $\rho\mathsf{B}_w(1)$ sur $\mathsf{B}_w(1)$ et par $\rho D\mathsf{B}_s(1) + \zeta D\rho\mathsf{B}_s(1)$ sur $D\mathsf{B}_s(1)$, on a $\overline{f} \circ L_\zeta^{w,s} = L \circ \overline{f}$ où $\overline{f} := f \otimes_R \mathbb{R}$. On conclut encore une fois en utilisant le lemme 2.4. (Pour vérifier les relations de Hodge–Riemann sur $D\mathsf{B}_s$, on utilise les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 2.9 pour se ramener au cas d'un bimodule $\mathsf{B}_y\mathsf{B}_s$. Dans ce cas, si $ys > y$ on utilise l'hypothèse de récurrence. Et si $ys < y$ on utilise les deux énoncés de la proposition 2.11 et le corollaire 2.3.)

3. APPLICATIONS EN COMBINATOIRE ET THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

3.1. Positivité des polynômes de Kazhdan–Lusztig

Soit (W, S) un système de Coxeter. La première application des résultats de [EW1] est l'énoncé suivant, qui avait été conjecturé par Kazhdan–Lusztig dans [KL, commentaire précédant la définition 1.2]. (Le fait que la conjecture 1.11 implique ces énoncés avait déjà été remarqué dans [S5].)

THÉORÈME 3.1. — *1. Pour tous $w, y \in W$, on a $h_{y,w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathsf{v}]$.*

2. Pour tous $x, y, z \in W$, on a $\mu^z_{x,y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathsf{v}, \mathsf{v}^{-1}]$.

Démonstration. — D'après la proposition 1.1 il existe une représentation V de W qui vérifie les conditions de la Partie 2. Alors (1) découle de la conjecture 1.11 et de la définition de ch_Δ. Le point (2) découle également directement de la conjecture 1.11 et du fait que l'isomorphisme du théorème 1.4 respecte la structure d'algèbre. □

3.2. Preuve algébrique de la conjecture de Kazhdan–Lusztig

Pour toutes les notions considérées dans cette sous-partie, on renvoie à [Hu]. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple complexe, soit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Borel, et soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartan. Soient W le groupe de Weyl associé, et $S \subset W$ le sous-ensemble des réflexions simples, de sorte que (W, S) est un système de Coxeter (voir le §1.1). Si $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \subset \mathfrak{h}$ est le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les coracines, alors la conjecture de Soergel est connue pour l'action de W sur $(\mathfrak{h}_\mathbb{R})^*$ par le théorème 2.7. On peut facilement en déduire cette conjecture pour l'action de W sur $\mathfrak{h}^*$, voir par exemple [S5, Bemerkung 6.15]. On notera $w_0 \in W$ l'unique élément de plus grande longueur.

Considérons la catégorie $\mathcal{O}$ de Bernstein–Gelfand–Gelfand associée, et notons $\mathcal{O}_0$ son bloc de 0, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine constituée des modules sur lesquels l'annulateur du module trivial $\mathbb{C}$ dans le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ agit de façon nilpotente.

Notons ρ la demi-somme des racines positives de $\mathfrak{g}$ déterminées par $\mathfrak{b}$ et, pour tout $w \in W$, par M_w le module de Verma de plus haut poids $w^{-1}(\rho) - \rho$ et par L_w son unique quotient simple. Ces objets appartiennent à $\mathcal{O}_0$, et $\{\mathsf{L}_w : w \in W\}$ est un système de représentants des classes d'isomorphisme d'objets simples dans $\mathcal{O}_0$. Il est bien connu que la catégorie $\mathcal{O}_0$ a assez d'objets projectifs, et on notera P la couverture projective de $\mathsf{L}_{w_0} = \mathsf{M}_{w_0}$.

La deuxième application principale des résultats de [EW1] est une preuve algébrique du résultat suivant, qui avait été conjecturé par Kazhdan–Lusztig dans [KL, Conjecture 1.5] (17) et démontré en utilisant des méthodes géométriques par Brylinski–Kashiwara [BK] et Beĭlinson–Bernstein [BB] indépendamment.

Théorème 3.2. — *Pour tous $y, w \in W$, la multiplicité de L_w comme facteur de composition de M_y est $h_{y,w}(1)$.*

Dans le reste de ce paragraphe, on donne un aperçu de cette preuve (inspiré de la partie « algébrique » de [S1], mais légèrement différente (18)). Notons C le quotient de $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h})$ par l'idéal engendré par les éléments homogènes W-invariants de degré strictement positif (19). La première étape consiste à construire un isomorphisme d'algèbres canonique

$$C \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_0}(P, P) \ ; \tag{14}$$

voir [S1, Endomorphismensatz 7] pour la preuve originale de cet énoncé (due à Soergel et basée sur des idées de « déformation » de la catégorie $\mathcal{O}$) et [Be, §4] pour une preuve plus simple due à Bernstein. Une fois ce fait établi, on peut considérer le foncteur

$$\mathbb{V} : \mathcal{O}_0 \to C - \mathrm{Mod}, \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_0}(P, M).$$

Lemme 3.3. — *Pour tous $M, N \in \mathcal{O}_0$ projectifs, le foncteur $\mathbb{V}$ induit une injection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_0}(M, N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}(M), \mathbb{V}(N)).$$

Démonstration. — Puisque N est projectif, son socle est une somme directe de copies de L_{w_0} (voir [Hu, Corollary 4.8]). En particulier, tout sous-module non nul de N admet L_{w_0} comme facteur de composition, et n'est donc pas annulé par $\mathbb{V}$. Il s'ensuit que si $f : M \to N$ est non nul alors $\mathbb{V}(f)$ est non nul, ce qui prouve l'injectivité voulue. □

On introduit ensuite, pour tout $s \in S$, le foncteur de « croisement de mur »

$$\vartheta_s : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$$

donné par une composée $T^0_\mu T^\mu_0$ où μ est un caractère entier de $\mathfrak{h}$ dans l'adhérence de la chambre de Weyl dominante et qui appartient à l'hyperplan orthogonal à la racine associée à s et passant par $-\rho$ mais à aucun autre hyperplan de ce type (voir par exemple [Hu, §7.15]). On peut alors construire un isomorphisme de foncteurs

$$\mathbb{V} \circ \vartheta_s \cong R \otimes_{R^s} \mathbb{V}$$

en considérant un analogue « singulier » de l'isomorphisme (14) (voir par exemple [Be, p. 422]) et sa compatibilité avec (14) via le foncteur de translation (voir par exemple [S3,

17. La normalisation des modules M_w et L_w dans [KL] est différente de celle adoptée ici. Pour comparer le théorème 3.2 à [KL, Conjecture 1.5] il faut remarquer que $h_{y,w} = h_{y^{-1},w^{-1}} = h_{w_0 y w_0, w_0 w w_0}$ pour tous $y, w \in W$.

18. Cette simplification de la preuve est rendue possible par les résultats de [S5], qui n'étaient pas disponibles au moment où [S1] a été publié.

19. Dans [S1], Soergel appelle cette algèbre *l'algèbre coinvariante* de W. Comme il l'a remarqué plus tard, bien qu'il se soit imposé dans la littérature, ce nom ne semble pas opportun dans la mesure où il ne respecte pas l'usage habituel du mot « coinvariant ».

Theorem 8]) puis des arguments généraux, voir [S3, Theorem 10]. Puisque les objets projectifs de $\mathcal{O}_0$ se déduisent de M_e (dont l'image par $\mathbb{V}$ est le module trivial $\mathbb{C}$) en appliquant les foncteurs ϑ_s et en prenant des facteurs directs, on en déduit que la restriction de $\mathbb{V}$ aux objets projectifs prend ses valeurs dans les modules de Soergel (voir le §1.7), puis en comparant les dimensions d'espaces de morphismes (voir notamment (2) et la proposition 1.13) que cette restriction est pleinement fidèle et envoie la couverture projective P_w de L_w sur $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{C}$.

Si on note $\mathrm{Proj}(\mathcal{O}_0)$ la catégorie des objets projectifs dans $\mathcal{O}_0$ et $\mathscr{B}_0$ la catégorie des modules de Soergel (non gradués) on obtient alors un diagramme commutatif d'isomorphismes

$$\begin{tikzcd} {[\mathrm{Proj}(\mathcal{O}_0)]} \arrow[rr, "{[\mathbb{V}]}", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim", "{[M]\mapsto\sum_w (M:\mathsf{M}_w)\cdot w}"'] & & {[\mathscr{B}_0]} \arrow[dl, "\sim"] \\ & \mathbb{Z}[W] & \end{tikzcd}$$

où la flèche de droite est induite par l'isomorphisme du théorème 1.4. (Dans la flèche de gauche, on note $(M : \mathsf{M}_w)$ la multiplicité de M_w dans une filtration standard de M ; voir [Hu, Theorem 3.10].) D'après la conjecture 1.11, la flèche de droite envoie la classe de $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{C}$ sur $\sum_y h_{y,w}(1) \cdot y$, ce qui montre que $(\mathsf{P}_w : \mathsf{M}_y) = h_{y,w}(1)$. On conclut en utilisant la formule de réciprocité, voir par exemple [Hu, §3.11].

4. VARIANTES : LE CAS LOCAL ET LE CAS RELATIF

Les résultats présentés en Partie 2 forment la théorie de Hodge « globale » des bimodules de Soergel. Dans [W3] et [EW3], les auteurs développent des versions « locale » et « relative » de cette théorie, et en déduisent des applications en combinatoire et en théorie des représentations.

Dans cette partie on se place sous les mêmes hypothèses que dans la Partie 2.

4.1. Cas local

Dans cette sous-partie, on suppose de plus qu'il existe un élément $\rho^\vee \in V$ tel que pour $w \in W$ et $s \in S$ on a

$$\langle w(\rho^\vee), \alpha_s \rangle > 0 \quad \Leftrightarrow \quad sw > w.$$

(Cette hypothèse est satisfaite dans les deux exemples de la proposition 1.1.) Pour $w \in W$ et B dans $\mathscr{B}$, on note $\Gamma^w(B) := B \otimes_{R \otimes_{\mathbb{R}} R} \mathcal{O}(\mathrm{Gr}(w))$. On note $\Gamma_w(-)$ pour $\Gamma_{\{w\}}(-)$, et on considère la composée

$$i_w^B : \Gamma_w(B) \hookrightarrow B \twoheadrightarrow \Gamma^w(B),$$

qu'on verra comme un morphisme de R-modules gradués à gauche. Il n'est pas très difficile de voir que si Q est la localisation de R en tous les éléments de la forme $y(\alpha_s)$ pour $s \in S$ et $y \in W$, alors $Q \otimes_R i_w^B$ est un isomorphisme. En particulier, si on fixe une indéterminée z (de degré 2) et si on considère $\mathbb{R}[z]$ comme un R-module gradué via $\xi \mapsto \langle \xi, \rho^\vee \rangle \cdot z$ pour $\xi \in V^*$, alors l'application

$$\mathbb{R}[z] \otimes_R i_w^B : \mathbb{R}[z] \otimes_R \Gamma_w(B) \to \mathbb{R}[z] \otimes_R \Gamma^w(B)$$

est injective. On note

$$H_{x,y} := \operatorname{coker}(\mathbb{R}[z] \otimes_R i_x^{\mathsf{B}_y})(-1).$$

Le premier résultat important de [W3] (conjecturé par Soergel, voir [S5, Bemerkung 7.2], et motivé par « l'exemple fondamental » de Bernstein–Lunts [BL, Chapter 14]) est que ces modules vérifient une version du théorème de Leftschetz difficile, comme suit.

Théorème 4.1. — *Pour tout $i \geq 0$, la multiplication par z^i induit un isomorphisme $(H_{x,y})^{-i} \xrightarrow{\sim} (H_{x,y})^i$.*

L'intérêt principal de ce résultat est qu'il permet de donner une preuve algébrique de la conjecture de Jantzen concernant la « filtration de Jantzen » des modules de Verma. (Voir [Hu, §8.12] pour une discussion de cette conjecture, et [W3, §§1.4–1.5] pour une discussion du lien entre le théorème 4.1 et cette conjecture, qui repose sur des travaux de Soergel [S6] et Kübel [K1, K2].)

La preuve du théorème 4.1 repose sur le même genre d'arguments que celle de [EW1]. Elle démontre simultanément une version des relations de Hodge–Riemann, qu'on explique maintenant. Les mêmes considérations que dans la Partie 2 montrent qu'il existe une unique forme $\mathbb{R}$-bilinéaire graduée symétrique non dégénérée $\langle -,- \rangle'_{\mathsf{B}_y} : \mathsf{B}_y \times \mathsf{B}_y \to R$ qui vérifie $\langle ra, b \rangle'_{\mathsf{B}_y} = \langle a, rb \rangle'_{\mathsf{B}_y} = r\langle a, b \rangle'_{\mathsf{B}_y}$ et $\langle ar, b \rangle'_{\mathsf{B}_y} = \langle a, br \rangle'_{\mathsf{B}_y}$ pour tous $a, b \in \mathsf{B}_y$ et $r \in R$. En restreignant cette forme à $\Gamma_x(\mathsf{B}_y)$, puis en tensorisant par $\mathbb{R}[z]$, et enfin en identifiant $\mathbb{R}[z, z^{-1}] \otimes_R \Gamma_x(\mathsf{B}_y)$ à $\mathbb{R}[z, z^{-1}] \otimes_R \Gamma^x(\mathsf{B}_y)$ via $\mathbb{R}[z, z^{-1}] \otimes_R i_x^{\mathsf{B}_y}$, on obtient une forme bilinéaire

$$\langle -,- \rangle_y^x : (\mathbb{R}[z] \otimes_R \Gamma^x(\mathsf{B}_y)) \times (\mathbb{R}[z] \otimes_R \Gamma^x(\mathsf{B}_y)) \to \mathbb{R}[z, z^{-1}].$$

Pour $i \geq 0$, on définit la *partie primitive* $P^{-i} \subset (\mathbb{R}[z] \otimes_R \Gamma^x(\mathsf{B}_y))^{-i}$ comme l'orthogonal (pour $\langle -,- \rangle_y^x$) du sous-module de $\mathbb{R}[z] \otimes_R \Gamma^x(\mathsf{B}_y)$ engendré par les éléments de degré $< -i$. La version « locale » des relations de Hodge–Riemann démontrée dans [W3] est la suivante.

Théorème 4.2. — *Pour tout $i > 0$, la forme bilinéaire symétrique $(-,-)^i : P^{-i} \times P^{-i} \to \mathbb{R}$ définie par $(a,b)^i := z^i \langle a, b \rangle_y^x$ est $(-1)^{\ell(x) + \frac{-i-\min}{2}}$-définie, où* min *est le degré minimal en lequel $\mathbb{R}[z] \otimes_R \Gamma^x(\mathsf{B}_y)$ est non nul.*

4.2. Cas relatif

Maintenant que la conjecture 1.11 est connue, les formules (4) s'appliquent pour tous $x, y \in W$. On dira qu'un objet B de $\mathscr{B}$ est *pervers* [20] s'il est une somme directe d'objets B_x (sans décalage). Dans ce cas, comme déjà utilisé dans la preuve du lemme 2.9, les

20. Cette terminologie est bien sûr motivée par le cas des systèmes de Coxeter cristallographiques présenté au §1.6 : dans ce cas les bimodules pervers correspondent aux faisceaux pervers dans $\widetilde{\mathscr{B}}$.

propriétés (4) montrent que si on pose $V_x := \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_x, B)$ il existe un isomorphisme *canonique*

$$\bigoplus_{x \in W} V_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{B}_x \xrightarrow{\sim} B.$$

De plus, tout objet B de $\mathscr{B}$ admet une filtration exhaustive canonique (et fonctorielle)

$$\cdots \subset \tau_{\leq i} B \subset \tau_{\leq i+1} B \subset \cdots$$

par des inclusions scindées telles que $\big(\tau_{\leq i}B/\tau_{\leq i-1}B\big)(i)$ est pervers pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On pose alors

$$H^i(B) := \big(\tau_{\leq i}B/\tau_{\leq i-1}B\big)(i), \qquad H^i_z(B) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, H^i(B)).$$

Tout morphisme $f : B \to B'(j)$ induit des morphismes $H^i(f) : H^i(B) \to H^{i+j}(B')$, qui sont « encodés » par des morphismes d'espaces vectoriels $H^i_z(f) : H^i_z(B) \to H^{i+j}_z(B')$. D'autre part, si B est dans $\mathscr{B}$ et si $\langle -, - \rangle_B$ est une forme invariante sur B, les propriétés (4) montrent que cette forme induit un accouplement non dégénéré $H^i(B) \times H^{-i}(B) \to R$. Une fois fixées des formes d'intersection sur chaque B_x, cet accouplement est « encodé » par des accouplements $H^i_z(B) \times H^{-i}_z(B) \to \mathbb{R}$, qu'on notera encore $\langle -, - \rangle_B$.

Le résultat principal de [EW3] s'énonce de la façon suivante.

Théorème 4.3. — *Soient $x, y, z \in W$. L'opérateur $L : H^{\bullet}_z(\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y) \to H^{\bullet+2}_z(\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y)$ induit par le morphisme $\mathsf{B}_x\rho\mathsf{B}_y : \mathsf{B}_x\mathsf{B}_y \to \mathsf{B}_x\mathsf{B}_y(2)$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile, c'est-à-dire que pour tout $i \geq 0$ il induit un isomorphisme*

$$L^{\circ i} : H^{-i}_z(\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y) \xrightarrow{\sim} H^i_z(\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y).$$

De plus, ces données vérifient les relations de Hodge–Riemann au sens où la restriction de la forme bilinéaire symétrique sur $H^{-i}_z(\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y)$ définie par $(x, y) \mapsto \langle x, L^i y\rangle_{\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y}$ est $(-1)^{\frac{1}{2}(\ell(x)+\ell(y)-\ell(z)-i)}$-définie. (Ici, la forme $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y}$ est celle obtenue par le lemme 2.5 *à partir des formes d'intersection sur B_x et B_y.)*

La preuve procède encore par récurrence (sur $\ell(x) + \ell(y)$, puis sur $\ell(y)$ à $\ell(x) + \ell(y)$ fixé) en utilisant les morphismes du lemme 2.9. Elle nécessite de considérer également des opérateurs de la forme

$$a \cdot \mathsf{B}_x\rho\mathsf{B}_s\mathsf{B}_y + b \cdot \mathsf{B}_x\mathsf{B}_s\rho\mathsf{B}_y : \mathsf{B}_x\mathsf{B}_s\mathsf{B}_y \to \mathsf{B}_x\mathsf{B}_s\mathsf{B}_y(2)$$

où $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, y \in W$ et $s \in S$, dont les auteurs montrent qu'ils vérifient encore des versions appropriées du théorème de Leftschetz difficile et des relations de Hodge–Riemann.

La première application du théorème 4.3 considérée dans [EW3] est de nature combinatoire. Par définition, les coefficients $\mu^z_{x,y}$ considérés au §1.1 vérifient

$$\mu^z_{x,y} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim\big(H^i_z(\mathsf{B}_x\mathsf{B}_y)\big) \cdot \mathsf{v}^{-i}.$$

On déduit donc du théorème 4.3 le résultat suivant, qui était une conjecture « de folklore » dans la combinatoire de Kazhdan–Lusztig appelée « unimodalité des constantes de structure » ; voir par exemple [dC].

COROLLAIRE 4.4. — *Si pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ on pose*

$$[m] = \frac{\mathsf{v}^m - \mathsf{v}^{-m}}{\mathsf{v} - \mathsf{v}^{-1}} = \mathsf{v}^{-m+1} + \mathsf{v}^{-m+3} + \cdots + \mathsf{v}^{m-3} + \mathsf{v}^{m-1},$$

alors pour tous $x, y, z \in W$ on a

$$\mu_{x,y}^z \in \bigoplus_{m \geq 1} \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot [m].$$

Une autre application du théorème 4.3 est proposée dans [EW3]. Elle concerne certaines catégories monoïdales associées aux cellules bilatères dans W définies par Lusztig (voir [Lu] pour la définition en toute généralité [(21)], qui repose sur la conjecture 1.11, et pour des références à la définition initiale). Le théorème 4.3 permet de montrer que ces catégories sont rigides et pivotales ; voir [EW3, §5.2] pour plus de détails.

RÉFÉRENCES

[BB] A. BEĬLINSON, J. BERNSTEIN, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), 15–18.

[Be] J. BERNSTEIN, *Trace in categories*, dans *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, 417–423, Progr. Math. 92, Birkhäuser Boston, 1990.

[BL] J. BERNSTEIN, V. LUNTS, *Equivariant sheaves and functors*, Lecture Notes in Math. 1578, Springer-Verlag, 1994.

[BY] R. BEZRUKAVNIKOV, Z. YUN, *On Koszul duality for Kac–Moody groups*, Represent. Theory **17** (2013), 1–98.

[Bo] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1337, Hermann, 1968. Réimpression Springer, 2007.

21. La définition de cette catégorie est expliquée dans [Lu] sous certaines hypothèses techniques. Cependant, Elias–Williamson remarquent dans [EW3] que la définition a un sens, et produit une catégorie monoïdale, même quand ces hypothèses ne sont pas connues.

[BK] J.-L. BRYLINSKI, M. KASHIWARA, *Kazhdan–Lusztig conjecture and holonomic systems*, Invent. Math. **64** (1981), 387–410.

[dCM] M. DE CATALDO, L. MIGLIORINI, *The decomposition theorem, perverse sheaves and the topology of algebraic maps*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **46** (2009), 535–633.

[dC] F. DU CLOUX, *Positivity results for the Hecke algebras of noncrystallographic finite Coxeter groups*, J. Algebra **303** (2006), 731–741.

[Do] C. DODD, *Equivariant coherent sheaves, Soergel bimodules, and categorification of affine Hecke algebras*, prépublication `arXiv:1108.4028`.

[EW1] B. ELIAS, G. WILLIAMSON, *The Hodge theory of Soergel bimodules*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), 1089–1136.

[EW2] B. ELIAS, G. WILLIAMSON, *Kazhdan–Lusztig conjectures and shadows of Hodge theory*, in *Arbeitstagung Bonn 2013*, 105–126, Progr. Math. 319, Birkhäuser/Springer, 2016.

[EW3] B. ELIAS, G. WILLIAMSON, *Relative hard Lefschetz for Soergel bimodules*, prépublication `arXiv:1607.03271`.

[Fi] P. FIEBIG, *The combinatorics of Coxeter categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 4211–4233.

[Go] T. GOBET, *Twisted filtrations of Soergel bimodules and linear Rouquier complexes*, J. Algebra **484** (2017), 275–309.

[GG] R. GORDON, E. GREEN, *Graded Artin algebras*, J. Algebra **76** (1982), 111–137.

[Hä] M. HÄRTERICH, *Kazhdan–Lusztig-Basen, unzerlegbare Bimoduln und die Topologie der Fahnenmannigfaltigkeit einer Kac–Moody-Gruppe*, thèse de doctorat, disponible sur `https://freidok.uni-freiburg.de/data/18`.

[Hu] J. E. HUMPHREYS, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Mathematics 94, Amer. Math. Soc., 2008.

[KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), 165–184.

[Kh] M. KHOVANOV, *Triply-graded link homology and Hochschild homology of Soergel bimodules*, Internat. J. Math. **18** (2007), 869–885.

[K1] J. KÜBEL, *From Jantzen to Andersen filtration via tilting equivalence*, Math. Scand. **110** (2012), 161–180.

[K2] J. KÜBEL, *Tilting modules in category $\mathcal{O}$ and sheaves on moment graphs*, J. Algebra **371** (2012), 559–576.

[Ku] S. KUMAR, *Kac–Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Progr. Math. 204, Birkhäuser, 2002.

[Li] N. LIBEDINSKY, *Sur la catégorie des bimodules de Soergel*, J. Algebra **320** (2008), 2675–2694.

[Lu] G. LUSZTIG, *Truncated convolution of character sheaves*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) **10** (2015), 1–72.

[Ri] S. RICHE, *Geometric Representation Theory in positive characteristic*, thèse d'habilitation, disponible sur `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01431526`.

[RW] S. RICHE, G. WILLIAMSON, *Tilting modules and the p-canonical basis*, prépublication `arXiv:1512.08296`, à paraître dans Astérisque.

[R1] R. ROUQUIER, *Categorification of the braid groups*, prépublication `arXiv:math/0409593`, publiée ultérieurement dans [R2].

[R2] R. ROUQUIER, *Categorification of* $\mathfrak{sl}_2$ *and braid groups*, in *Trends in representation theory of algebras and related topics*, 137–167, Contemp. Math. 406, Amer. Math. Soc., 2006.

[S1] W. SOERGEL, *Kategorie* $\mathcal{O}$*, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 421–445.

[S2] W. SOERGEL, *The combinatorics of Harish–Chandra bimodules*, J. reine angew. Math. **429** (1992), 49–74.

[S3] W. SOERGEL, *Kazhdan–Lusztig polynomials and a combinatoric[s] for tilting modules*, Represent. Theory **1** (1997), 83–114.

[S4] W. SOERGEL, *Langlands' philosophy and Koszul duality*, in *Algebra—representation theory (Constanta, 2000)*, 379–414, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. 28, Kluwer Acad. Publ., 2001.

[S5] W. SOERGEL, *Kazhdan–Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), 501–525.

[S6] W. SOERGEL, *Andersen filtration and hard Lefschetz*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), 2066–2089.

[Sp] T. A. SPRINGER, *Quelques applications de la cohomologie d'intersection*, Séminaire Bourbaki (1981/1982), Exp. 589, Astérisque **92–93** (1982), 249–273.

[Ti] J. TITS, *Groupes associés aux algèbres de Kac–Moody*, Séminaire Bourbaki (1988/1989), Exp. 700, Astérisque **177–178** (1989), 7–31.

[WW] B. WEBSTER, G. WILLIAMSON, *A geometric model for Hochschild homology of Soergel bimodules*, Geom. Topol. **12** (2008), 1243–1263.

[W1] G. WILLIAMSON, *Singular Soergel bimodules*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2011** (2011), 4555–4632.

[W2] G. WILLIAMSON, *Schubert calculus and torsion explosion*, avec un appendice en collaboration avec A. Kontorovich et P. McNamara, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), 1023–1046.

[W3] G. WILLIAMSON, *Local Hodge theory of Soergel bimodules*, Acta Math. **217** (2016), 341–404.

[W4] G. WILLIAMSON, *The Hodge theory of the Decomposition Theorem (after de Cataldo and Migliorini)*, Séminaire Bourbaki (2015/2016), Exp. 1115, Astérisque **390** (2017), 335–367.

[W5] G. WILLIAMSON, *The Hodge theory of the Hecke category*, prépublication `arXiv:1610.06246`, à paraître dans les actes de l'ECM 2016.

Simon RICHE

Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal
UMR CNRS 6620
Université Clermont Auvergne
Campus Universitaire des Cézeaux
3, place Vasarely
TSA 60026 – CS 60026
F–63178 Aubière Cedex
E-mail : `simon.riche@uca.fr`