Séminaire BOURBAKI Juin 2017
69ème année, 2016–2017, n$^{\text{o}}$ 1133

# DENSITÉ MAXIMALE DES EMPILEMENTS DE SPHÈRES EN DIMENSIONS 8 ET 24

[d'après Maryna S. Viazovska *et al.*]

par **Joseph OESTERLÉ**

*En mémoire de mon collègue et ami Alexey Zykin*

Un *empilement de sphères* d'un espace euclidien E est un ensemble de boules fermées de E, toutes de même rayon, d'intérieurs mutuellement disjoints. Notons A leur réunion. On appelle *densité de l'empilement* la limite supérieure, lorsque R tend vers $+\infty$, de $\mathrm{vol}(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}(0,\mathrm{R}))/\mathrm{vol}(\mathrm{B}(0,\mathrm{R}))$. Elle est invariante par similitudes affines.

L'empilement est dit *périodique* s'il est invariant par translation par les éléments d'un réseau L de E. Sa densité est alors $b\mathrm{N}/\mathrm{V}$, où N est le nombre de boules de l'empilement modulo L, $b$ leur volume commun et V le volume de E modulo L. La densité maximale des empilements de sphères de E est égale à celle des empilements de sphères périodiques.

Considérons en effet un empilement de sphères de densité $\delta$ et soit $\varepsilon$ un nombre réel $> 0$. Notons A la réunion des boules de cet empilement. Il existe des hypercubes C de côté arbitrairement grand tels que $\mathrm{vol}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}) > (\delta-\varepsilon)\mathrm{vol}(\mathrm{C})$. Si C est assez grand, le volume de la réunion des boules de l'empilement incluses dans C est alors supérieur à $(\delta - 2\varepsilon)\mathrm{vol}(\mathrm{C})$. On peut construire un empilement de sphères périodique de densité supérieure à $\delta - 2\varepsilon$ en pavant E par des translatés de C muni de ces boules.

On associe à tout réseau L de E l'empilement de sphères $(\mathrm{B}(u,r))_{u\in\mathrm{L}}$, où $2r$ est la norme minimale des éléments de $\mathrm{L} - \{0\}$. Il existe des dimensions, 10 par exemple, pour lesquelles la densité maximale des empilements de sphères semble strictement supérieure à celle des empilements de sphères associés à des réseaux.

Déterminer la densité maximale des empilements de sphères dans un espace euclidien de dimension $d$ donnée est un problème redoutablement difficile. Lorsque $d = 1$, cette densité maximale est bien évidemment 1. Lorsque $d = 2$, elle est égale à $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ : c'est la densité de l'empilement de sphères associé à un réseau hexagonal. Une première démonstration de ce résultat a été publiée par A. Thue en 1910 ([8]), et Fejes Tóth en a donné une autre plus simple en 1943 ([3]).

En 1610, J. Kepler avait affirmé que la densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 est celle de l'empilement associé au réseau dit *cubique à faces entrées*, qui est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Cette assertion ne fut démontrée qu'en 1998, par T. Hales en collaboration avec son étudiant S. Ferguson. La longueur et la complexité de la preuve étaient telles qu'il était difficile à quiconque d'en contrôler tous les détails. Elle fut intégralement publiée en 2006 ([4] et [7]). Fort heureusement, on dispose maintenant d'une preuve formelle de ce théorème (tout comme d'ailleurs du théorème de Feit-Thompson et du théorème des quatre couleurs), dans laquelle chaque étape est validée par un ordinateur à partir des seuls axiomes de la théorie des ensembles ([5], [6]).

Antérieurement aux travaux de Maryna Viazovska présentés dans cet exposé, la densité maximale des empilements de sphères n'avait été déterminée en aucune dimension $\geqslant 4$. La densité maximale des empilements de sphères associés à des réseaux était par contre déjà connue en dimensions $\leqslant 8$ et 24.

En 2003, H. Cohn et N. Elkies développèrent une nouvelle technique d'optimisation linéaire pour majorer la densité des empilements de sphères ([2]). Ainsi, ils démontrèrent que si $f : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ est une fonction non nulle convenable (par exemple dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathrm{E})$), négative pour $\|x\| \geqslant 2$ et à transformée de Fourier $\hat{f}$ positive, tout empilement de sphères de E est de densité au plus $bf(0)/\hat{f}(0)$, où $b$ est le volume de la boule unité de E (voir détails au § 1).

Ils obtinrent ainsi des majorations de la densité des empilements de sphères meilleures que celles précédemment connues dans de nombreuses dimensions, en particulier toutes celles comprises entre 4 et 36. Les dimensions 8 et 24 étaient à cet égard remarquables, puisque les majorations obtenues dans ces cas n'excédaient que de très peu (moins de $0,0001\%$ en dimension 8 et de $0,071\%$ en dimension 24) les densités des empilements associés aux réseaux de type $\mathrm{E}_8$ et de Leech respectivement (voir § 2 pour la définition de ces réseaux).

H. Cohn et N. Elkies conjecturèrent alors l'existence de fonctions $f$ permettant de démontrer que ces empilements réalisent la densité maximale en ces deux dimensions, et aussi que ce sont les seuls parmi les empilements périodiques, à similitude affine près. Ils précisèrent les propriétés attendues de $f$. En mars 2016, Maryna S. Viazovska parvint à construire une telle fonction dans le cas de la dimension 8 à l'aide de transformées de Laplace de fonctions issues des mondes modulaire et quasi-modulaire ([9]). Très peu de temps après, en collaboration avec d'autres mathématiciens (H. Cohn, A. Kumar, S. Miller et D. Radchenko), elle parvint à faire de même en dimension 24 ([1]). En résultèrent les théorèmes suivants :

Théorème 1. — *La densité maximale des empilements de sphères dans un espace euclidien de dimension* 8 *est celle des empilements associés aux réseaux de type* $\mathrm{E}_8$. *Ces empilements sont les seuls, à similitude affine près, qui soient périodiques et de densité maximale.*

Théorème 2. — *La densité maximale des empilements de sphères dans un espace euclidien de dimension* 24 *est celle des empilements associés aux réseaux de Leech. Ces empilements sont les seuls, à similitude affine près, qui soient périodiques et de densité maximale.*

## §1. Les majorations de H. Cohn et N. Elkies

### 1. Réseaux d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien. Notons $d$ sa dimension, $(x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$ son produit scalaire et $x \mapsto \|x\| = \langle x|x\rangle^{1/2}$ sa norme. L'application linéaire qui à $y \in \mathrm{E}$ associe le caractère unitaire $x \mapsto e^{2\pi i\langle x|y\rangle}$ définit un isomorphisme du groupe additif de E sur son dual de Pontryagin, par lequel on identifie ces deux groupes. Munissons E de son unique mesure de Haar autoduale, notée $dx$. Elle s'identifie à la mesure de Lebesgue lorsqu'on identifie E à $\mathbf{R}^d$ par choix d'une base orthonormale.

Soit L un réseau de E, c'est-à-dire un sous-groupe discret de rang $d$ sur $\mathbf{Z}$. On appelle *covolume* de L et on note covol(L) le volume de E/L pour le quotient de la mesure de Haar $dx$ par la mesure de comptage. Autrement dit, c'est le volume de tout domaine fondamental mesurable de E modulo L.

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de L sur $\mathbf{Z}$. Le covolume de L est la valeur absolue du déterminant de $(e_1, \ldots, e_d)$ dans une base orthonormale de E. C'est aussi la racine carrée du *discriminant* de L, c'est-à-dire du déterminant de la matrice de Gram $(\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$.

Le réseau de E orthogonal de L pour la dualité de Pontryagin se compose des $v \in \mathrm{E}$ tels que $\langle v|u\rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $u \in \mathrm{L}$. Il s'identifie canoniquement au dual du $\mathbf{Z}$-module L. C'est pourquoi on le note $\mathrm{L}^*$. On a la relation $\mathrm{covol}(\mathrm{L})\mathrm{covol}(\mathrm{L}^*) = 1$.

### 2. Formule d'inversion de Fourier

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ une fonction intégrable. Sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f} : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ définie par $\hat{f}(y) = \int_{\mathrm{E}} f(x)e^{2\pi i\langle x|y\rangle}dx$. Elle est continue. Si $\hat{f}$ est elle-même intégrable sur E, sa transformée de Fourier est continue et égale presque partout à la fonction $x \mapsto f(-x)$ (formule d'inversion de Fourier).

### 3. Fonctions admissibles

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\alpha > d$ tel que $|f(x)| = \mathrm{O}(\|x\|^{-\alpha})$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Alors $f$ est intégrable et, pour tout réseau L de E, la famille de fonctions $(f(x + u))_{u\in \mathrm{L}}$ est normalement sommable dans toute partie compacte de E. Si de plus on a $|\hat{f}(x)| = \mathrm{O}(\|x\|^{-\alpha})$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, on a la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{u\in \mathrm{L}} f(x + u) = \frac{1}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})} \sum_{v\in \mathrm{L}^*} e^{-2\pi i\langle x|v\rangle} \hat{f}(v). \tag{1}$$

Pour simplifier, nous appellerons *admissibles* les fonctions $f : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ ayant ces propriétés.

## 4. Majorations de Cohn et Elkies

THÉORÈME 3. — *Soient* E *un espace euclidien de dimension* $d$*,* $f : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ *une fonction admissible réelle et* $r$ *un nombre réel* $> 0$*. Supposons que :*

*a) on a* $f(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $\|x\| \geqslant 2r$ *;*

*b) la fonction* $\hat{f}$ *est réelle positive et on a* $\hat{f}(0) > 0$*.*

*Tout empilement de sphères de* E *est alors de densité au plus* $br^d \frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$*, où* $b = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ *est le volume de la boule unité de* E*.*

Il suffit de démontrer cela lorsque l'empilement considéré est périodique, *i.e.* invariant par translations par un réseau L de E, et que ses boules sont de rayon $r$. Soit alors A un système de représentants des centres des boules modulo L. La densité de l'empilement considéré est $br^d\,\mathrm{Card}(\mathrm{A})/\mathrm{covol}(\mathrm{L})$. Comme $f$ est admissible, on a pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$\sum_{u\in\mathrm{L}} f(x+u) = \frac{1}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})} \sum_{v\in\mathrm{L}^*} e^{-2\pi i\langle x|v\rangle} \hat{f}(v). \tag{2}$$

On en déduit que

$$\sum_{(a,a')\in\mathrm{A}^2} \sum_{u\in\mathrm{L}} f(a'-a+u) = \frac{1}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})} \sum_{v\in\mathrm{L}^*} |\sum_{a\in\mathrm{A}} e^{2\pi i\langle a|v\rangle}|^2 \hat{f}(v). \tag{3}$$

L'hypothèse $a$) implique que tous les termes $f(a'-a+u)$ intervenant dans le membre de gauche sont négatifs, sauf ceux pour lesquels $a = a'$ et $u = 0$. Le membre de gauche est donc majoré par $\mathrm{Card}(\mathrm{A})f(0)$. L'hypothèse $b$) implique que le membre de droite est minoré par le terme correspondant à $v = 0$, c'est-à-dire par $\frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})^2}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})}\hat{f}(0)$. On a donc $\mathrm{Card}(\mathrm{A})/\mathrm{covol}(\mathrm{L}) \leqslant \frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$, d'où le théorème.

*Remarques.* — 1) Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ une fonction admissible qui possède les propriétés $a$) et $b$) du théorème 3. La fonction $g$, qui à $x \in \mathrm{E}$ associe la valeur moyenne de $f$ sur la sphère $\mathrm{S}(0, \|x\|)$, est alors aussi admissible et possède ces mêmes propriétés. De plus on a $g(0) = f(0)$ et $\hat{g}(0) = \hat{f}(0)$. On peut donc dans le théorème 3 se restreindre à ne considérer que des fonctions $f$ *radiales*, *i.e.* pour lesquelles $f(x)$ ne dépend que de $\|x\|$.

2) Nous avons énoncé le théorème 3 en y incluant un rayon $r$ pour la commodité des applications. En fait, on peut se ramener au cas où $r = 1$ en remplaçant $f$ par la fonction $x \mapsto f(rx)$, dont la transformée de Fourier est $x \mapsto r^{-d}\hat{f}(x/r)$.

L'examen des cas d'égalité dans la démonstration précédente fournit l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit* $f$ *une fonction possédant les propriétés énoncées dans le th. 3,* L *un réseau de* E*, et* $\big(\mathrm{B}(s,r)\big)_{s\in\mathrm{S}}$ *un empilement de sphères de rayon* $r$ *invariant par translations par* L*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*a) L'empilement de sphères considéré a pour densité* $br^d \frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$*.*

*b) On a* $\mathrm{Card}(\mathrm{S}/\mathrm{L})/\mathrm{covol}(\mathrm{L}) = f(0)/\hat{f}(0)$*.*

*c) On a* $f(s-t) = 0$ *pour tous* $s$*,* $t$ *dans* S *tels que* $s \neq t$*, et* $\hat{f}(v) = 0$ *pour tout* $v \in \mathrm{L}^* - \{0\}$ *tel que* $\sum_{a\in\mathrm{S}/\mathrm{L}} e^{2\pi i\langle a,v\rangle} \neq 0$*.*

*Lorsqu'elles sont satisfaites, l'empilement de sphères considéré est de densité maximale.*

*Remarque* 3. — Lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{L}$ dans la prop. 1, ce qui sous-entend que $\|u\| \geqslant 2r$ pour $u \in \mathrm{L} - \{0\}$, les conditions *b*) et *c*) se simplifient en :

*b'*) On a $\hat{f}(0) = \mathrm{covol}(\mathrm{L}) f(0)$.

*c'*) On a $f(u) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{L} - \{0\}$ et $\hat{f}(v) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{L}^* - \{0\}$.

Elles impliquent que l'empilement de sphères considéré est de densité maximale, et en particulier que la norme minimale des vecteurs non nuls de L est $2r$.

## §2. Réseaux de type $\mathrm{E}_8$ et réseaux de Leech

### 1. Définitions

Soit E un espace euclidien de dimension $d$. Un réseau L de E est dit *entier* si les produits scalaires de ses éléments sont des entiers relatifs. Il est dit *pair* si $\langle u, u\rangle$ est un entier pair pour tout $u \in \mathrm{L}$. Un réseau pair est entier.

Un réseau de E est dit *unimodulaire* si son discriminant est 1, ou ce qui revient au même si son covolume dans E est 1. Pour qu'un réseau L de E soit entier et unimodulaire, il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{L}^* = \mathrm{L}$.

*Exemple.* — Soit $k$ un entier naturel. Dans $\mathbf{R}^{8k}$, muni de son produit scalaire usuel, le réseau formé des vecteurs dont les coordonnées appartiennent soit toutes à $\mathbf{Z}$, soit toutes à $\frac{1}{2} + \mathbf{Z}$, et ont pour somme un entier pair, est un réseau unimodulaire pair noté $\Gamma_{8k}$.

Il n'existe dans E des réseaux unimodulaires pairs que lorsque $d$ est multiple de 8. Le groupe orthogonal $\mathbf{O}(\mathrm{E})$ opère sur l'ensemble de ces réseaux, et il n'y a qu'un nombre fini d'orbites pour cette action. On a, lorsque $d = 8k$ avec $k \geqslant 1$, la formule de masse de Minkowski-Siegel

$$\sum |\operatorname{Aut}(\mathrm{L})|^{-1} = 2^{1-8k} \frac{\mathrm{B}_{4k}}{(4k)!} \prod_{j=1}^{4k-1} \mathrm{B}_{2j}\,, \tag{4}$$

où L parcourt un système de représentants de ces orbites, $\operatorname{Aut}(\mathrm{L})$ désigne le stabilisateur de L dans $\mathbf{O}(\mathrm{E})$, et $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite des nombres de Bernoulli, définie par la série génératrice $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n \frac{t^n}{n!}$.

### 2. Réseaux de type $\mathrm{E}_8$

Dans un espace euclidien E de dimension 8, tout réseau unimodulaire pair L est isométrique à $\Gamma_8$. Il possède exactement 240 vecteurs $u$ tels que $\langle u|u\rangle = 2$. Ces vecteurs forment un système de racines de type $\mathrm{E}_8$ et engendrent L. C'est pourquoi L est appelé un *réseau de type* $\mathrm{E}_8$.

L'empilement de sphères associé à un réseau de type $\mathrm{E}_8$ est formé de boules de rayon $2^{-1/2}$. Sa densité est donc $2^{-4} b_8$, où $b_8 = \frac{\pi^4}{4!}$ est le volume de la boule unité de E.

*Remarques.* — 1) Soit L un réseau de E de type $\mathrm{E}_8$. Le groupe $\operatorname{Aut}(\mathrm{L})$ s'identifie au groupe de Weyl du système de racines formé par les vecteurs minimaux de L. Son ordre est $2^{14}.3^5.5^2.7 = 696\,729\,600$. L'unicité de L modulo $\mathbf{O}(\mathrm{E})$ s'en déduit par la formule de masse.

2) La série thêta de L, $z \mapsto \sum_{u\in \mathrm{L}} e^{\pi i \langle u|u\rangle z}$, est une forme modulaire de poids 4 pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, de terme constant 1. C'est donc la série d'Eisenstein de poids 4. On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre de vecteurs $u \in \mathrm{L}$ tels que $\langle u|u\rangle = 2n$ est $240\sigma_3(n)$, où $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$.

3) La formule de masse permet de démontrer que, dans $\mathbf{R}^{16}$, il n'existe à isométrie près que deux réseaux unimodulaires pairs : $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$ et $\Gamma_{16}$.

## 3. Réseaux de Leech

Dans un espace euclidien E de dimension 24, il existe 24 réseaux unimodulaires pairs à isométrie près, classifiés par H. Niemeyer en 1973. L'un d'eux est particulièrement remarquable : c'est le seul qui ne contient aucun vecteur $v$ tel que $\langle v, v\rangle = 2$. Il a été découvert par J. Leech en 1967 et est pour cette raison appelé *réseau de Leech*. (Il semble que E. Witt l'avait déjà découvert en 1940, mais sans rien en publier.)

L'empilement de sphères associé à un réseau de Leech est formé de boules de rayon 1. Sa densité est donc égale à $b_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!}$, le volume de la boule unité de E.

Il existe des constructions diverses de réseaux de Leech, et il n'est souvent guère aisé d'expliciter une isométrie entre divers réseaux ainsi obtenus. Voici une construction, qui repose sur la notion de $p$-voisin de Kneser d'un réseau. Soient E un espace euclidien, $\Lambda$ un réseau entier unimodulaire de E et $p$ un nombre premier. Munissons le $\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$-espace vectoriel $\Lambda/p\Lambda$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée déduite de $(u, v) \mapsto \langle u|v\rangle$ par réduction modulo $p$ et choisissons une droite isotrope D de $\Lambda/p\Lambda$. Il existe $u \in \Lambda$ dont la réduction $\bar{u}$ modulo $p$ engendre D et tel que $\langle u|u\rangle$ soit multiple de $p^2$. Alors $\mathrm{L} = \Lambda' + \mathbf{Z}\frac{u}{p}$, où $\Lambda'$ est l'ensemble des $v \in \Lambda$ tels que $\bar{v}$ soit orthogonal à D, est un réseau unimodulaire de E, appelé un *$p$-voisin de Kneser de* $\Lambda$. Il ne dépend que de $\Lambda$ et D, et non du choix de $u$. Il est pair si $\Lambda$ est pair et $p \neq 2$. Lorsque $\Lambda$ est le réseau $\Gamma_{24}$ de $\mathbf{R}^{24}$, que $p = 47$ et que D est la droite (isotrope) de $\Lambda/p\Lambda$ engendrée par la réduction modulo $p$ de $(0, 1, \ldots, 23)$, L est un réseau de Leech.

*Remarques.* — 1) Soit L un réseau de Leech. Le groupe Aut(L) a été étudié par J. Conway en 1968. C'est un groupe parfait noté $\mathrm{Co}_0$ dont le centre est $\mathrm{Z} = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. Son ordre est $2^{22}.3^9.5^4.7^2.11.13.23 = 8\,315\,553\,613\,086\,720\,000$. Le groupe quotient G/Z, noté $\mathrm{Co}_1$, est simple ; c'est le plus grand des trois groupes simples sporadiques construits par Conway.

2) La série thêta de L, $z \mapsto \sum_{u\in \mathrm{L}} e^{\pi i \langle u|u\rangle z}$, est une forme modulaire de poids 12 pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, de terme constant 1 et dont le développement de Fourier n'a pas de terme de degré 1 en $q = e^{2\pi i z}$. Elle est donc égale à $\mathrm{E}_{12} - \frac{65520}{691}\Delta$, où $\mathrm{E}_{12} = 1 - \frac{24}{\mathrm{B}_{12}} \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{11}(n) q^n$ est la série d'Eisenstein de poids 12 et $\Delta$ la forme modulaire parabolique $q \prod_{n\geqslant 1}(1 - q^n)^{24}$. On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre de vecteurs $u \in \mathrm{L}$ tels que $\langle u|u\rangle = 2n$ est $\frac{65520}{691}(\sigma_{11}(n) - \tau(n))$, où $\tau$ est la fonction de Ramanujan. En particulier, L a 196560 vecteurs $u$ minimaux, *i.e.* tels que $\langle u|u\rangle = 4$.

## 4. Stratégie de démonstration des théorèmes 1 et 2

Les résultats du § 1, n° 4 peuvent être précisés dans le cas des réseaux unimodulaires pairs comme suit :

Proposition 2. — *Soit* L *un réseau unimodulaire pair dans un espace euclidien* E. *Notons* $\mathrm{N_L}$ *l'ensemble des normes de vecteurs non nuls de* L *et* $2r$ *la plus petite d'entre elles. Supposons qu'il existe une fonction admissible* $f : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ *telle que :*

*a) pour* $\|x\| \geqslant 2r$, *on a* $f(x) \leqslant 0$, *avec égalité si et seulement si* $\|x\| \in \mathrm{N_L}$ *;*

*b) la fonction* $\hat{f}$ *est réelle positive, on a* $\hat{f}(x) = 0$ *si* $\|x\| \in \mathrm{N_L}$ *et* $\hat{f}(0) > 0$.

*Alors l'empilement de sphères associé à* L *est de densité maximale, on a* $\hat{f}(0) = f(0)$, *et tout empilement de sphères dans* E *périodique et de densité maximale est l'image par une similitude affine de celui associé à un réseau unimodulaire pair* L′ *tel que* $\mathrm{N}_{\mathrm{L}'} \subset \mathrm{N}_{\mathrm{L}}$.

Puisque L est unimodulaire, son covolume est 1. Les conditions $a$) et $b$) ci-dessus impliquent, d'après la remarque 3 du § 1, n° 4 que l'empilement de sphères associé à L est de densité maximale et que $\hat{f}(0) = f(0)$.

Démontrons qu'inversement, tout empilement de sphères dans E, périodique et de densité maximale, satisfait la dernière assertion. Nous pouvons supposer que ses boules sont de rayon $r$ et que 0 appartient à l'ensemble S de leurs centres. Soit $\Lambda$ un réseau de E tel que S soit stable par translation par les éléments de $\Lambda$. D'après la prop. 1 du § 1, n° 4, on a $\mathrm{Card}(\mathrm{S}/\Lambda) = \mathrm{covol}(\Lambda)$ et $f(s-t) = 0$ pour $s \neq t$ dans S. On a donc $\|s-t\| \in \mathrm{N}_{\mathrm{L}}$ pour $s \neq t$ dans S d'après $a$). Pour tout couple $(s,t)$ de points de S, $\|s-t\|^2$ est donc un entier pair ; c'est le cas en particulier de $\|s-0\|^2$ et $\|t-0\|^2$, donc le produit scalaire $\langle s|t\rangle$ est entier. Notons L′ le sous-groupe de E engendré par S. On a $\langle u|v\rangle \in \mathbf{Z}$ pour $u, v$ dans L′. Comme $\|u\|^2$ est entier pour tout $u \in \mathrm{L}'$, L′ est un sous-groupe discret de E. Comme l'empilement dont nous sommes partis est de densité maximale, S n'est pas contenu dans un hyperplan de E, et L′ est un réseau de E. Nous savons déjà qu'il est entier. Comme il est engendré par S et que $\|s\|^2$ est un entier pair pour $s \in \mathrm{S}$, le réseau L′ est pair. Le discriminant de L′ est un entier, donc on a $\mathrm{covol}(\mathrm{L}') \geqslant 1$. On a

$$\mathrm{Card}(\mathrm{S}/\Lambda) \leqslant \mathrm{Card}(\mathrm{L}'/\Lambda) = \mathrm{covol}(\Lambda)/\mathrm{covol}(\mathrm{L}') \leqslant \mathrm{covol}(\Lambda)\,.$$

Comme $\mathrm{Card}(\mathrm{S}/\Lambda) = \mathrm{covol}(\Lambda)$, les inégalités précédentes sont des égalités. En particulier, le covolume de L′ est 1, donc L′ est unimodulaire, et on a $\mathrm{S} = \mathrm{L}'$, ce qui implique, puisque l'empilement initial était de densité maximale, que c'est celui associé à L′. Enfin, nous avons vu au cours de la démonstration que pour tout $s \neq 0$ dans S, on a $\|s-0\| \in \mathrm{N}_{\mathrm{L}}$, donc on a $\mathrm{N}_{\mathrm{L}'} \subset \mathrm{N}_{\mathrm{L}}$.

Pour démontrer le théorème 1 (resp. le théorème 2), il suffit donc de trouver une fonction $f$ satisfaisant les conditions de la prop. 2 pour un réseau de type $\mathrm{E}_8$ dans un espace euclidien E de dimension 8 (resp. pour un réseau de Leech dans un espace euclidien E de dimension 24). Notons que si $f$ est une telle fonction, la fonction radiale $g$ qui à $x \in \mathrm{E}$ associe la valeur moyenne de $f$ sur la sphère $\mathrm{S}(0, \|x\|)$ en est une autre. Cela conduit à rechercher $f$ sous la forme $x \mapsto p(\|x\|^2)$ et $\hat{f}$ sous la forme $q(\|x\|^2)$, où $p$ et $q$ sont des fonctions continues de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$. Pour la commodité du lecteur et les références ultérieures, nous recensons ci-dessous les conditions requises de $p$ et $q$ pour que $f$ satisfasse celles de la prop. 2.

*Cas de la dimension* 8

Les fonctions continues $p$ et $q$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ doivent être telles que :

$a$) il existe $\alpha > 4$ tel que $p(u) = o(u^{-\alpha})$ et $q(u) = o(u^{-\alpha})$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$.

$b$) si E est un espace euclidien de dimension 8, la fonction $x \mapsto p(\|x\|^2)$ de E dans $\mathbf{R}$ a pour transformée de Fourier la fonction $x \mapsto q(\|x\|^2)$ ;

*c*) pour $u \geqslant 2$, on a $p(u) \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si $u$ est entier et pair ;

*d*) la fonction $q$ est positive, on a $q(u) = 0$ pour tout entier pair $u \geqslant 2$, et $q(0) > 0$.

*Remarque* 1. — Si de telles fonctions $p$ et $q$ existent, on doit avoir $p(0) = q(0)$ d'après la prop. 2. Si en outre elles sont dérivables, on doit avoir $p'(u) = 0$ pour tout entier pair $u \geqslant 4$ d'après *c*), et $q'(u) = 0$ pour tout entier pair $u \geqslant 2$ d'après *d*).

*Cas de la dimension* 24

Les fonctions continues $p$ et $q$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ doivent être telles que :

*a*) il existe $\alpha > 12$ tel que $p(u) = o(u^{-\alpha})$ et $q(u) = o(u^{-\alpha})$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$.

*b*) si E est un espace euclidien de dimension 24, la fonction $x \mapsto p(\|x\|^2)$ de E dans $\mathbf{R}$ a pour transformée de Fourier la fonction $x \mapsto q(\|x\|^2)$ ;

*c*) pour $u \geqslant 4$, on a $p(u) \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si $u$ est entier et pair ;

*d*) la fonction $q$ est positive, on a $q(u) = 0$ pour tout entier pair $u \geqslant 4$, et $q(0) > 0$.

*Remarque*. — Si de telles fonctions $p$ et $q$ existent, on doit avoir $p(0) = q(0)$ d'après la prop. 2. Si en outre elles sont dérivables, on doit avoir $p'(u) = 0$ pour tout entier pair $u \geqslant 6$ d'après *c*), et $q'(u) = 0$ pour tout entier pair $u \geqslant 4$ d'après *d*).

## §3. Formes quasi-modulaires et transformation de Laplace

### 1. Formes modulaires

Notons $\mathfrak{H}$ le demi-plan de Poincaré $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Soit $k$ un entier relatif pair. Nous appellerons *forme modulaire* (resp. *faiblement modulaire*) de poids $k$ pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ une fonction $f$, holomorphe dans $\mathfrak{H}$, telle que

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{5}$$

pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $z \in \mathfrak{H}$, et qui est holomorphe (resp. méromorphe) à l'infini.

La relation (5) implique que $f$ est périodique de période 1. Elle est donc la somme dans $\mathfrak{H}$ d'une série de Fourier $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(f) q^n$, où $q = e^{2\pi i z}$. La condition d'holomorphie (resp. de méromorphie) à l'infini signifie que $a_n(f)$ est nul pour $n < 0$ (resp. pour $n$ assez petit). Si $f \neq 0$, on note $v_\infty(f)$ et on appelle *ordre de $f$ à l'infini* le plus petit entier $n$ tel que $a_n(f) \neq 0$. On pose $v_\infty(0) = +\infty$.

L'espace vectoriel $\mathrm{M}_k$ des formes modulaires de poids $k$ est de dimension finie. Il est nul si $k < 0$. On appelle *anneau des formes modulaires* l'anneau gradué $\mathrm{M} = \bigoplus \mathrm{M}_k$. Les séries d'Eisenstein $\mathrm{E}_4$ et $\mathrm{E}_6$ définies dans $\mathfrak{H}$ par

$$\mathrm{E}_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n, \tag{6}$$

$$\mathrm{E}_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n, \tag{7}$$

où $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, sont des formes modulaires de poids 4 et 6 respectivement. Elles sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}$ et M n'est autre que l'anneau $\mathbf{C}[\mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]$.

On a $\mathrm{E}_4^3 - \mathrm{E}_6^2 = 1728\Delta$, où le *discriminant modulaire* $\Delta$ est défini par

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}. \tag{8}$$

C'est une fonction modulaire de poids 12 qui ne s'annule en aucun point de $\mathfrak{H}$. L'anneau gradué des formes faiblement modulaires n'est autre que $\mathbf{C}[\mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6][\frac{1}{\Delta}]$.

*Exemple.* — La fonction $j = \frac{\mathrm{E}_4^3}{\Delta}$ est une forme faiblement modulaire de poids 0, appelée *l'invariant modulaire*. Son ordre à l'infini est $-1$. La fonction $e^j$, bien que satisfaisant la relation (5) pour $k=0$, n'est pas une forme faiblement modulaire selon notre définition, car elle n'est pas méromorphe à l'infini.

## 2. La fonction $\mathrm{E}_2$

Notons D l'opérateur différentiel $q\frac{d}{dq} = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}$. La fonction $\mathrm{E}_2 = \frac{\mathrm{D}\Delta}{\Delta}$ est somme dans $\mathfrak{H}$ de la série convergente

$$\mathrm{E}_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n. \tag{9}$$

Elle n'est pas modulaire, mais satisfait pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}_2\mathbf{Z}$ la relation

$$(cz+d)^{-2}\mathrm{E}_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{E}_2(z) + \frac{12c}{2\pi i(cz+d)}. \tag{10}$$

*Remarque.* — La relation (10) peut aussi s'exprimer en disant que la fonction non holomorphe $\widetilde{\mathrm{E}}_2$, définie dans $\mathfrak{H}$ par $\widetilde{\mathrm{E}}_2(z) = \mathrm{E}_2(z) - \frac{3}{\pi \operatorname{Im} z}$, satisfait la relation de modularité

$$\widetilde{\mathrm{E}}_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2\, \widetilde{\mathrm{E}}_2(z).$$

## 3. Formes quasi-modulaires

Les fonctions $\mathrm{E}_2$, $\mathrm{E}_4$, $\mathrm{E}_6$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}$. On appelle *formes quasi-modulaires* pour $\mathbf{SL}_2(\mathrm{Z})$ les éléments de l'anneau $\mathbf{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]$. Celui-ci est gradué par le poids, en convenant que $\mathrm{E}_k$ est de poids $k$ pour $k \in \{2,4,6\}$, et l'opérateur différentiel $\mathrm{D} = q\frac{d}{dq}$ définit une dérivation de degré 2 de cet anneau puisque l'on a

$$\mathrm{DE}_2 = \frac{1}{12}(\mathrm{E}_2^2 - \mathrm{E}_4), \qquad \mathrm{DE}_4 = \frac{1}{3}(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6), \qquad \mathrm{DE}_6 = \frac{1}{2}(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4^2). \tag{11}$$

Nous appellerons *formes faiblement quasi-modulaires* les éléments de l'anneau gradué $\mathbf{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6][\frac{1}{\Delta}]$. Une telle forme $\varphi$ est une fonction dans $\mathfrak{H}$ périodique de période 1, elle a un développement de Fourier $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(\varphi)q^n$ dont les coefficients sont nuls pour $n$ assez petit, et son ordre à l'infini $v_\infty(\varphi)$ est défini comme au n° 1.

*Exemple.* — La fonction $\varphi = \frac{(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6)^2}{\Delta}$ est une forme faiblement quasi-modulaire de poids 0. Bien que l'on ait $v_\infty(\varphi) = 1$, elle n'est pas quasi-modulaire.

Toute forme faiblement quasi-modulaire $\varphi$ peut être considérée comme un polynôme en $\mathrm{E}_2$, à coefficients dans l'anneau $\mathbf{C}[\mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6][\frac{1}{\Delta}]$. Le degré $r$ de ce polynôme est appelé *la profondeur* de $\varphi$. Si l'on substitue dans ce polynôme $\mathrm{E}_2 + \mathrm{T}$ à $\mathrm{E}_2$, où T est une indéterminée, on obtient un polynôme en T

$$\varphi_0 + \varphi_1 \mathrm{T} + \ldots + \varphi_r \mathrm{T}^r \tag{12}$$

où $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_j$ est une forme faiblement quasi-modulaire de profondeur $r - j$ pour $0 \leqslant j \leqslant r$. Lorsque $\varphi$ est de poids $k$, $\varphi_j$ est de poids $k - 2j$.

*Remarques.* — 1) Lorsqu'on considère $\varphi$ comme un polynôme en $\mathrm{E}_2$ à coefficients dans l'anneau $\mathbf{C}[\mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6][\frac{1}{\Delta}]$, on a $\varphi_j = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \varphi}{(\partial E_2)^j}$.

2) Pour que $\varphi$ soit une forme quasi-modulaire, *i.e.* appartienne à l'anneau $\mathbf{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]$, il faut et il suffit que l'on ait $v_\infty(\varphi_j) \geqslant 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant r$.

3) Les opérateurs D et $\frac{\partial}{\partial \mathrm{E}_2}$ sont des dérivations de l'anneau $\mathbf{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]$, de degré 2 et $-2$ respectivement. Leur crochet $[\frac{\partial}{\partial \mathrm{E}_2}, \mathrm{D}] = \frac{\partial}{\partial \mathrm{E}_2} \circ \mathrm{D} - \mathrm{D} \circ \frac{\partial}{\partial \mathrm{E}_2}$ est la dérivation qui applique $\varphi$ sur $\frac{k}{12}\varphi$ lorsque $\varphi$ est de poids $k$. Il suffit en effet de vérifier cela lorsque $\varphi$ est l'une des formes $\mathrm{E}_2$, $\mathrm{E}_4$, $\mathrm{E}_6$, et cela résulte alors de la formule (11).

4) L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ opère par dérivations sur les anneaux $\mathbf{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]$ et $\mathbf{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6][\frac{1}{\Delta}]$ comme suit : les éléments $\mathrm{X}_+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathrm{X}_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{H} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ de la base canonique de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ opèrent par D, par $12\frac{\partial}{\partial \mathrm{E}_2}$ et par « multiplication par le poids » respectivement.

5) Toute forme quasi-modulaire (resp. faiblement quasi-modulaire) de profondeur $r$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{j=0}^{r} \mathrm{D}^{r-j} f_j$, où les $f_j$ sont des formes modulaires (resp. faiblement modulaires).

6) Si $f$ est une forme faiblement modulaire de poids $k$, on a $\frac{\partial}{\partial \mathrm{E}_2}(\mathrm{D}^r f) = \frac{r(k+r-1)}{12} \mathrm{D}^{r-1} f$ pour tout $r \geqslant 1$.

Lorsque $\varphi$ est de poids $k$, on déduit de (10) que, pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}_2\mathbf{Z}$,

$$(cz+d)^{-k} \varphi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{12c}{2\pi i(cz+d)}\right)^j \varphi_j(z). \tag{13}$$

*Remarque* 7. — Compte tenu de la remarque du n° 2, cette relation peut aussi s'exprimer en disant que la fonction non holomorphe $\tilde{\varphi}$ définie dans $\mathfrak{H}$ par $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{j=0}^{r} (-\frac{3}{\pi \operatorname{Im} z})^j \varphi_j(z)$ satisfait la relation de modularité $\tilde{\varphi}(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k \tilde{\varphi}(z)$.

## 4. Transformées de Laplace

Dans ce numéro, $\varphi$ désignera une forme faiblement quasi-modulaire pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, de poids un entier relatif pair $k$ et de profondeur 2. Nous supposons que $v_\infty(\varphi) \geqslant 1$, ce qui implique que $|\varphi(z)| = \mathrm{O}(e^{-2\pi \operatorname{Im} z})$ lorsque $\operatorname{Im} z$ tend vers $+\infty$. Notons $m_\varphi$ le plus petit entier naturel tel que $\Delta^{m_\varphi}\varphi$ soit quasi-modulaire, *i.e.* appartienne à $\mathbf{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]$. Nous allons étudier la fonction $\mathrm{A}_\varphi$ définie par

$$\mathrm{A}_\varphi(u) = -4i \sin^2\left(\frac{\pi u}{2}\right) \int_{i0}^{i\infty} \varphi_{\mathrm{S}}(z) e^{\pi i z u} dz, \tag{14}$$

où $\varphi_{\mathrm{S}}(z) = z^{2-k}\varphi(-z^{-1})$ et $\int_{i0}^{i\infty}$ signifie que l'intégrale est prise sur la demi-droite $i\mathbf{R}_+$ orientée suivant les ordonnées croissantes.

*a) Domaine de convergence*

On a par hypothèse $|\varphi(it^{-1})| = \mathrm{O}(e^{-2\pi/t})$ lorsque $t$ tend vers 0. Au voisinage de 0, l'intégrale dans (14) est donc normalement convergente sur tout compact de $\mathbf{C}$. Pour étudier son comportement en $+\infty$, introduisons les formes quasi-modulaires $\varphi_j = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j\varphi}{(\partial \mathrm{E}_2)^j}$ pour $j \in \{0,1,2\}$ (n° 3, remarque 1) et utilisons le cas particulier suivant de la formule (13) :

$$\varphi_{\mathrm{S}}(z) = z^2\varphi_0(z) + \frac{6}{\pi i} z\varphi_1(z) + \left(\frac{6}{\pi i}\right)^2 \varphi_2(z). \tag{15}$$

Comme $\Delta^{m_\varphi}\varphi$ est quasi-modulaire, il en est de même des $\Delta^{m_\varphi}\varphi_j$, et l'on a donc $|\varphi_j(z)| = \mathrm{O}(e^{2\pi m_\varphi \operatorname{Im} z})$ lorsque $\operatorname{Im} z$ tend vers $+\infty$. Ainsi, l'intégrale dans (14) est normalement convergente dans toute partie compacte du demi-plan $\{u \in \mathbf{C} | \operatorname{Re}(u) > 2m_\varphi\}$, et la fonction $\mathrm{A}_\varphi$ définie par (14) est holomorphe dans ce demi-plan.

*b) Prolongement holomorphe*

Nous savons déjà que $|\varphi_0(z)| = \mathrm{O}(e^{-2\pi \operatorname{Im} z})$ lorsque $\operatorname{Im} z$ tend vers $+\infty$. Par ailleurs, pour $j \in \{1,2\}$, le fait que $\Delta^{m_\varphi}\varphi_j$ soit quasi-modulaire implique que l'on peut écrire

$$\varphi_j(z) = \sum_{n=0}^{m_\varphi} a_{-n}(\varphi_j) e^{-2\pi i n z} + \varphi_j^\bullet(z) \tag{16}$$

avec $|\varphi_j^\bullet(z)| = \mathrm{O}(e^{-2\pi \operatorname{Im} z})$ lorsque $\operatorname{Im} z$ tend vers $+\infty$. En insérant ces expressions dans (15), puis dans (14), et en explicitant les intégrales des termes polaires, on obtient, pour $\operatorname{Re}(u) > 2m_\varphi$, la relation

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_\varphi(u) = & \frac{24}{\pi^3}\sin^2(\frac{\pi u}{2}) \sum_{n=0}^{m_\varphi} \left( \frac{a_{-n}(\varphi_1)}{(u-2n)^2} - \frac{6a_{-n}(\varphi_2)}{(u-2n)} \right) \\ & - 4i \sin^2(\frac{\pi u}{2}) \int_{i0}^{i\infty} \left( z^2\varphi_0(z) + \frac{6}{\pi i} z\varphi_1^\bullet(z)(z) + \left(\frac{6}{\pi i}\right)^2 \varphi_2^\bullet(z) \right) e^{\pi i z u} dz. \end{aligned} \tag{17}$$

Elle fournit un prolongement holomorphe de $\mathrm{A}_\varphi$ au demi-plan $\{u \in \mathbf{C} | \operatorname{Re} u > -2\}$.

*c) Réalité*

Si les coefficients de Fourier de $\varphi$ sont réels, la fonction $\mathrm{A}_\varphi$ est réelle sur la demi-droite réelle $]2m_\varphi, +\infty[$, et donc sur $]-2, +\infty[$ par prolongement analytique.

*d) Comportement aux entiers pairs positifs*

Soit $n$ un entier $\geqslant 0$. On lit sur la formule (17) les résultats suivants sur le comportement de $\mathrm{A}_\varphi$ au point $2n$ :

— si $a_{-n}(\varphi_1) = a_{-n}(\varphi_2) = 0$, $\mathrm{A}_\varphi$ a un zéro au moins double au point $2n$ ;

— si $a_{-n}(\varphi_1) = 0$ et $a_{-n}(\varphi_2) \neq 0$, $\mathrm{A}_\varphi$ a un zéro simple au point $2n$, et sa dérivée en ce point est $-\frac{36}{\pi} a_{-n}(\varphi_2)$ ;

— si $a_{-n}(\varphi_1) \neq 0$, $\mathrm{A}_\varphi$ ne s'annule pas au point $2n$ et sa valeur en ce point est $\frac{6}{\pi} a_{-n}(\varphi_1)$.

*e) Décroissance rapide à l'infini*

Choisissons deux nombres réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $0 < \alpha < 2$ et $\beta > 2m_\varphi$. L'étude faite du comportement de $\varphi_{\mathrm{S}}(it)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$ montre qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $|\varphi_{\mathrm{S}}(it)| \leqslant \mathrm{C}e^{\pi(\beta t - \frac{\alpha}{t})}$ pour tout $t > 0$. Lorsque $\mathrm{Re}(u) > \beta$, on a donc

$$\left| \int_{i0}^{i\infty} \varphi_{\mathrm{S}}(z) e^{\pi i z u} dz \right| \leqslant \mathrm{C} \int_0^\infty e^{-\pi(\frac{\alpha}{t} + (\mathrm{Re}\, u - \beta)t)} dt \tag{18}$$

Lorsque $\mathrm{Re}(u) > \beta + 1$, on peut minorer $\frac{\alpha}{t} + t(\mathrm{Re}\, u - \beta - 1)$ par $2\sqrt{\alpha(\mathrm{Re}\, u - \beta - 1)}$ et on obtient ainsi

$$\left| \int_{i0}^{i\infty} \varphi_{\mathrm{S}}(z) e^{\pi i z u} dz \right| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\pi} e^{-2\pi\sqrt{\alpha(\mathrm{Re}\, u - \beta - 1)}}. \tag{19}$$

Il s'ensuit que dans toute bande horizontale (dans laquelle $\mathrm{Im}\, u$ est bornée), on a $|\mathrm{A}_\varphi(u)| = \mathrm{O}(e^{-2\pi\sqrt{\alpha(\mathrm{Re}\, u - \beta - 1)}})$ lorsque $\mathrm{Re}\, u$ tend vers $+\infty$. Comme $\mathrm{A}_\varphi$ est holomorphe, le même résultat vaut aussi pour ses dérivées itérées. En particulier, sur $]-2, +\infty[$, $\mathrm{A}_\varphi$ et ses dérivées itérées sont à décroissance rapide en $+\infty$.

*f) Une nouvelle expression de* $\mathrm{A}_\varphi$

Lorsque $\mathrm{Re}(u) > 2m_\varphi$, $\mathrm{A}_\varphi(u)/i$ peut se récrire

$$\int_{i0}^{i\infty} \varphi_{\mathrm{S}}(z)(e^{\pi i(z+1)u} - 2e^{\pi i z u} + e^{\pi i (z-1)u}) dz \tag{20}$$

ou encore

$$\int_{1+i0}^{1+i\infty} \varphi_{\mathrm{S}}(z-1) e^{\pi i z u} dz - 2\int_{i0}^{i\infty} \varphi_{\mathrm{S}}(z) e^{\pi i z u} dz + \int_{-1+i0}^{-1+i\infty} \varphi_{\mathrm{S}}(z+1) e^{\pi i z u} dz \cdot \tag{21}$$

Il résulte de la formule (15) que l'on a $|\varphi_{\mathrm{S}}(z))| = \mathrm{O}(|z|^2 e^{2\pi m_\varphi \mathrm{Im}\, z})$ lorsque $\mathrm{Im}\, z$ tend vers l'infini. Comme $\mathrm{Re}(u) > 2m_\varphi$, nous pouvons remplacer le chemin d'intégration de la première intégrale par le quart de cercle unité reliant 1 à $i$ suivi de la demi-droite verticale $i[1, +\infty[$. Nous noterons simplement $\int_1^i$ et $\int_i^\infty$ les intégrales correspondantes. On scinde de même les deux autres intégrales en passant par le point $i$. On regroupe ensuite les trois intégrales sur $i[1, +\infty[$ en remarquant que, d'après la formule (15), on a

$$\varphi_{\mathrm{S}}(z-1) - 2\varphi_{\mathrm{S}}(z) + \varphi_{\mathrm{S}}(z+1) = 2\varphi(z). \tag{22}$$

On obtient ainsi, pour $\mathrm{Re}(u) > 2m_\varphi$,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_\varphi(u)/i = &\int_1^i \varphi_{\mathrm{S}}(z-1) e^{\pi i z u} dz - 2\int_0^i \varphi_{\mathrm{S}}(z) e^{\pi i z u} dz \\ &+ \int_{-1}^i \varphi_{\mathrm{S}}(z+1) e^{\pi i z u} dz + 2\int_i^\infty \varphi(z) e^{\pi i z u} dz \cdot \end{aligned} \tag{23}$$

Comme $|\varphi(z)| = \mathrm{O}(e^{-2\pi \mathrm{Im}\, z})$ lorsque $\mathrm{Im}\, z$ tend vers $+\infty$, ces quatre intégrales sont normalement convergentes sur tout compact du demi-plan $\{u \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}(u) > -2\}$. La formule (23) fournit donc une nouvelle expression du prolongement analytique de $\mathrm{A}_\varphi$ à ce demi-plan.

*g) Construction de fonctions de Schwartz radiales*

Notons E un espace euclidien. Il résulte de *b*) et *e*) que la fonction radiale

$$a_\varphi : x \mapsto \mathrm{A}_\varphi(\|x\|^2)$$

de E dans $\mathbf{C}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathrm{E})$, *i.e.* est une fonction de classe $\mathrm{C}^\infty$ dont les dérivées itérées sont toutes de décroissance rapide à l'infini. Elle est radiale, *i.e.* ne dépend que de la distance à l'origine.

Théorème 4. — *Si la dimension $d$ de* E *est égale à $8-2k$, la transformée de Fourier $\widehat{a}_\varphi$ de $a_\varphi$ est égale à $(-1)^{k/2}a_\varphi$.*

On a d'après la formule (23)

$$\begin{aligned} a_\varphi(x)/i = &\int_1^i \varphi_{\mathrm{S}}(z-1)e^{\pi i z\|x\|^2}dz - 2\int_0^i \varphi_{\mathrm{S}}(z)e^{\pi i z\|x\|^2}dz \\ &+ \int_{-1}^i \varphi_{\mathrm{S}}(z+1)e^{\pi i z\|x\|^2}dz + 2\int_i^\infty \varphi(z)e^{\pi i z\|x\|^2}dz\,\cdot \end{aligned} \tag{24}$$

La transformée de Fourier de cette expression, évaluée en un point $y$ de E fait intervenir quatre intégrales doubles, toutes absolument convergentes : cela résulte de ce que, pour tout $z \in \mathfrak{H}$,

$$\int_{\mathrm{E}} \left| e^{\pi i z\|x\|^2} e^{2\pi i\langle x|y\rangle} \right| dx = \int_{\mathrm{E}} e^{-\pi\,\mathrm{Im}(z)\|x\|^2}dx = (\mathrm{Im}\, z)^{-d/2}$$

et de ce que $|\varphi(z)| = \mathrm{O}(e^{-2\pi\,\mathrm{Im}\, z})$ lorsque $\mathrm{Im}\, z$ tend vers $+\infty$. On peut donc permuter l'ordre d'intégration. Or, pour tout $z \in \mathfrak{H}$, la transformée de Fourier de $e^{\pi i z\|x\|^2}$ est $(\frac{z}{i})^{-d/2}e^{-\frac{\pi i}{z}\|x\|^2}$, et l'on a $(\frac{z}{i})^{-d/2} = (-1)^{k/2}z^{k-4}$. On a par suite

$$\begin{aligned} (-1)^{k/2}\,\widehat{a}_\varphi(x)/i = &\int_1^i z^{k-2}\varphi_{\mathrm{S}}(z-1)e^{-\frac{\pi i}{z}\|x\|^2}\frac{dz}{z^2} - 2\int_0^i z^{k-2}\varphi_{\mathrm{S}}(z)e^{-\frac{\pi i}{z}\|x\|^2}\frac{dz}{z^2} \\ &+\int_{-1}^i z^{k-2}\varphi_{\mathrm{S}}(z+1)e^{-\frac{\pi i}{z}\|x\|^2}\frac{dz}{z^2} + 2\int_i^\infty z^{k-2}\varphi(z)e^{-\frac{\pi i}{z}\|x\|^2}\frac{dz}{z^2}\,\cdot \end{aligned} \tag{25}$$

En effectuant le changement de variable $z \mapsto -\frac{1}{z}$ dans la première intégrale, on obtient $\int_{-1}^i z^{2-k}\varphi_{\mathrm{S}}(-\frac{z+1}{z})e^{\pi i z u}dz$. Or on a

$$z^{2-k}\varphi_{\mathrm{S}}\Big(-\frac{z+1}{z}\Big) = (z+1)^{2-k}\varphi\Big(\frac{z}{z+1}\Big) = (z+1)^{2-k}\varphi\Big(-\frac{1}{z+1}\Big) = \varphi_{\mathrm{S}}(z+1). \tag{26}$$

Le premier des quatre termes de (25) est donc égal au troisième de (24). De même les deuxième, troisième et quatrième termes de (25) sont respectivement égaux aux quatrième, premier et deuxième termes de (24), d'où le théorème.

## §4. Formes modulaires de niveau 2 et transformation de Laplace

### 1. Le groupe $\Gamma(2)$

L'homomorphisme canonique $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est surjectif. On note $\Gamma(2)$ son noyau. C'est un sous-groupe distingué d'indice 6 de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

### 2. La courbe modulaire $\mathrm{X}(2)$

Le groupe $\Gamma(2)$ opère dans $\mathfrak{H}$ par homographies. Cette opération est propre et libre. La surface de Riemann $\mathrm{Y}(2) = \Gamma(2)\backslash\mathfrak{H}$ est isomorphe à une droite projective privée de trois points. On note $\mathrm{X}(2)$ la surface de Riemann compacte obtenue par adjonction des *pointes*, *i.e.* des trois éléments $\Gamma(2)\infty$, $\Gamma(2)0$, $\Gamma(2)1$ de $\Gamma(2)\backslash\mathbf{P}_1(\mathbf{Q})$.

Il existe un unique isomorphisme de $\mathrm{X}(2)$ sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ qui applique ces trois pointes sur 0, 1, $\infty$ respectivement. Sa restriction à $\mathrm{Y}(2)$ provient par passage au quotient d'une fonction holomorphe $\lambda : \mathfrak{H} \to \mathbf{C}$, invariante par $\Gamma(2)$. On a $\lambda(-\frac{1}{z}) = 1 - \lambda(z)$ et $\lambda(z+1) = \frac{\lambda(z)}{\lambda(z)-1}$.

La normalisation de l'isomorphisme précédent est liée à des considérations de nature modulaire : pour tout $z \in \mathfrak{H}$, $\lambda(z)$ est l'unique nombre complexe tel que la courbe elliptique $\mathbf{C}/\mathrm{L}_z$, où $\mathrm{L}_z = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}z$, munie des points d'ordre 2 que sont $\frac{z}{2} + \mathrm{L}_z$ et $\frac{1}{2} + \mathrm{L}_z$, soit isomorphe à la courbe elliptique dont un modèle de Weierstrass affine est $y^2 = x(x-1)(x-\lambda(z))$, munie des points d'ordre 2 de coordonnées $(0,0)$ et $(1,0)$ dans ce modèle (voir n° 4, remarque 5).

### 3. Formes modulaires pour $\Gamma(2)$

Soit $k$ un entier relatif pair. Pour toute fonction complexe $f$ dans $\mathfrak{H}$ et toute matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, notons $f_{|_k\gamma}$ la fonction complexe $z \mapsto (cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d})$ dans $\mathfrak{H}$. On a $(f_{|_k\gamma})_{|_k\gamma'} = f_{|_k\gamma\gamma'}$ pour $\gamma, \gamma' \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

On appelle *forme modulaire* (resp. *forme faiblement modulaire*) de poids $k$ pour $\Gamma(2)$ une fonction $f$, holomorphe dans $\mathfrak{H}$, telle que $f_{|_k\gamma} = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma(2)$, et qui est holomorphe (resp. méromorphe) aux pointes au sens indiqué ci-après.

La relation $f_{|_k\gamma} = f$ appliquée à la matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ implique que $f$ est périodique de période 2. Elle est donc la somme dans $\mathfrak{H}$ d'une série de Fourier de la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{n/2}(f) q^{n/2}$, où $q^{1/2} = e^{\pi i z}$. On dit que $f$ est *holomorphe* (resp. *méromorphe*) *en* $\infty$ si $a_n$ est nul pour $n < 0$ (resp. pour $n$ assez petit). On dit que $f$ est *holomorphe* (resp. *méromorphe*) aux pointes si $f_{|_k\gamma}$ est holomorphe (resp. méromorphe) en $\infty$ pour toute matrice $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ ; il suffit de vérifier cela pour trois matrices $\gamma$ qui appliquent $\infty$ sur 0, 1 et $\infty$ respectivement.

*Exemple.* — L'anneau des formes faiblement modulaires de poids 0 pour $\Gamma(2)$ n'est autre que $\mathbf{C}[\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}]$.

*Remarque.* — Si $f$ est une *forme modulaire* (resp. *faiblement modulaire*) de poids $k$ pour $\Gamma(2)$, il en est de même de $f_{|_k\gamma}$ pour tout $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, puisque $\Gamma(2)$ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

L'espace vectoriel $\mathrm{M}_k(\Gamma(2))$ des formes modulaires de poids $k$ pour $\Gamma(2)$ est nul si $k < 0$ et de dimension $1 + \frac{k}{2}$ si l'entier pair $k$ est positif. Cela peut se déduire du théorème de Riemann-Roch (élémentaire dans notre cas, puisque $\mathrm{X}(2)$ est de genre 0).

## 4. Fonctions thêta et formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma(2)$

Considérons les fonctions thêta définies par :

$$\theta_{00}(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{\pi i n^2 z},\qquad \theta_{01}(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n e^{\pi i n^2 z},\qquad \theta_{10}(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{\pi i (n+\frac{1}{2})^2 z}. \tag{27}$$

Elles satisfont les relations

$$\begin{aligned} \theta_{00}(z+1)&=\theta_{01}(z), & \theta_{00}(-1/z)&=(z/i)^{1/2}\theta_{00}(z),\\ \theta_{01}(z+1)&=\theta_{00}(z), & \theta_{01}(-1/z)&=(z/i)^{1/2}\theta_{10}(z),\\ \theta_{10}(z+1)&=e^{i\pi/4}\theta_{10}(z), & \theta_{10}(-1/z)&=(z/i)^{1/2}\theta_{01}(z), \end{aligned} \tag{28}$$

les premières étant évidentes et les secondes se déduisant des formules sommatoires de Poisson. On en déduit, en posant $\mathrm{T}=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{S}=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ que

$$\begin{aligned} (\theta_{00}^4)_{|_2\mathrm{T}}&=\theta_{01}^4, & (\theta_{00}^4)_{|_2\mathrm{S}}&=-\theta_{00}^4,\\ (\theta_{01}^4)_{|_2\mathrm{T}}&=\theta_{00}^4, & (\theta_{01}^4)_{|_2\mathrm{S}}&=-\theta_{10}^4,\\ (\theta_{10}^4)_{|_2\mathrm{T}}&=-\theta_{10}^4, & (\theta_{10}^4)_{|_2\mathrm{S}}&=-\theta_{01}^4, \end{aligned} \tag{29}$$

et par suite que $\theta_{00}^4$, $\theta_{01}^4$ et $\theta_{10}^4$ sont des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma(2)$.

Comme l'espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\Gamma(2))$ est de dimension 2 sur $\mathbf{C}$, les fonctions $\theta_{00}^4$, $\theta_{01}^4$ et $\theta_{10}^4$ doivent être $\mathbf{C}$-linéairement dépendantes. On a en fait *l'identité de Jacobi*

$$\theta_{01}^4+\theta_{10}^4=\theta_{00}^4. \tag{30}$$

Pour la démontrer, il suffit d'observer que $\theta_{00}^4=1+8q^{1/2}+\mathrm{o}(q^{1/2})$, $\theta_{01}^4=1-8q^{1/2}+\mathrm{o}(q^{1/2})$, $\theta_{10}^4=16q^{1/2}+\mathrm{o}(q^{1/2})$. (C'est là un des charmes du monde modulaire : des identités merveilleuses entre séries formelles se démontrent en les vérifiant sur un petit nombre de coefficients.)

*Remarques.* — 1) Les formes modulaires $\theta_{00}^4$, $\theta_{01}^4$ et $\theta_{10}^4$ ne s'annulent en aucun point de $\mathfrak{H}$ et ont un seul zéro, simple, aux pointes $\Gamma(2)1$, $\Gamma(2)0$ et $\Gamma(2)\infty$ respectivement.

2) Les formes modulaires $\theta_{00}^4$, $\theta_{01}^4$ et $\theta_{10}^4$ peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction $\mathrm{E}_2$ introduite au § 3, n° 2 : on a

$$\theta_{00}^4(z)=\frac{4\mathrm{E}_2(2z)-\mathrm{E}_2(\frac{z}{2})}{3},\qquad \theta_{01}^4(z)=\frac{4\mathrm{E}_2(2z)-\mathrm{E}_2(\frac{z+1}{2})}{3},\qquad \theta_{10}^4(z)=\frac{\mathrm{E}_2(\frac{z+1}{2})-\mathrm{E}_2(\frac{z}{2})}{3}.$$

En effet, les seconds membres de ces égalités satisfont d'après *loc.cit.* les mêmes relations (29) que les premiers, donc sont des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma(2)$, et leurs développements limités à $o(q^{1/2})$ près coïncident avec ceux des premiers membres. On en déduit que

$$\theta_{00}^4(z)=1+8\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1'(n)q^{n/2},\qquad \theta_{01}^4(z)=1+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sigma_1'(n)q^{n/2},\qquad \theta_{10}^4(z)=16\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{ impair}}}\sigma_1(n)q^{n/2},$$

où $\sigma_1'(n)$ est la somme des diviseurs de $n$ non multiples de 4.

3) On a $\lambda=\theta_{10}^4/\theta_{00}^4$. En effet, les fonctions méromorphes sur $\mathrm{X}(2)$ définies par ces deux formes faiblement modulaires de poids 0 ont toutes deux pour diviseur $(\Gamma(2)\infty)-(\Gamma(2)1)$ et elles prennent la valeur 1 en la pointe $\Gamma(2)0$. On en déduit que l'on a $\lambda(z)=16q^{1/2}-128q+\mathrm{o}(q)$.

4) Notons D l'opérateur différentiel $q\frac{d}{dq}$. On a $\frac{\mathrm{D}\lambda}{\lambda}=\frac{1}{2}\theta_{01}^4$. En effet les deux membres sont des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma(2)$, et leurs développements limités à $o(q^{1/2})$ près coïncident. On a de même $\frac{\mathrm{D}\lambda}{1-\lambda}=\frac{1}{2}\theta_{10}^4$.

5) On démontre, en utilisant la remarque 2, que la fonction $\wp$ de Weierstrass associée au réseau $\mathrm{L}_z = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}z$ prend aux points de 2-torsion de la courbe elliptique $\mathbf{C}/\mathrm{L}_z$ les valeurs

$$\wp(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{3}(\theta_{00}^4(z) + \theta_{01}^4(z)), \quad \wp(\frac{z}{2}) = -\frac{\pi^2}{3}(\theta_{00}^4(z) + \theta_{10}^4(z)), \quad \wp(\frac{z+1}{2}) = \frac{\pi^2}{3}(\theta_{10}^4(z) - \theta_{01}^4(z)).$$

On a donc

$$\wp(\frac{1}{2}) - \wp(\frac{z}{2}) = \pi^2\theta_{00}^4(z), \qquad \wp(\frac{1}{2}) - \wp(\frac{z+1}{2}) = \pi^2\theta_{01}^4(z), \qquad \wp(\frac{z+1}{2}) - \wp(\frac{z}{2}) = \pi^2\theta_{10}^4(z),$$

et par suite $\lambda(z) = \frac{\wp(\frac{z+1}{2})-\wp(\frac{z}{2})}{\wp(\frac{1}{2})-\wp(\frac{z}{2})}$, ce qui justifie l'interprétation modulaire de $\lambda$ donnée à la fin du n° 2.

## 5. L'anneau des formes modulaires pour $\Gamma(2)$

Les fonctions $\theta_{01}^4$ et $\theta_{10}^4$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}$. L'anneau gradué des formes modulaires pour $\Gamma(2)$ n'est autre que $\mathbf{C}[\theta_{01}^4, \theta_{10}^4] = \mathbf{C}[\frac{\mathrm{D}\lambda}{\lambda}, \frac{\mathrm{D}\lambda}{1-\lambda}]$.

L'application $\mathrm{P} \mapsto \frac{\mathrm{P}(\lambda)(\mathrm{D}\lambda)^k}{\lambda^k(1-\lambda)^k}$ est donc un isomorphisme de l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des polynômes dans $\mathbf{C}[\mathrm{T}]$ de degré $\leqslant k$ sur celui des formes modulaires de poids $2k$ pour $\Gamma(2)$.

*Exemples.* — On a

$$\mathrm{E}_4 = \frac{1}{2}(\theta_{00}^8 + \theta_{01}^8 + \theta_{01}^8) = \theta_{01}^8 + \theta_{01}^4\theta_{10}^4 + \theta_{10}^8 = \frac{4(\lambda^2-\lambda+1)(\mathrm{D}\lambda)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2},$$

$$\mathrm{E}_6 = \frac{1}{2}(\theta_{01}^4 - \theta_{10}^4)(\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4)(\theta_{00}^4 + \theta_{10}^4)$$

$$= \theta_{01}^{12} + \frac{3}{2}\theta_{01}^8\theta_{10}^4 - \frac{3}{2}\theta_{01}^4\theta_{10}^8 - \theta_{10}^{12} = \frac{4(\lambda+1)(\lambda-2)(2\lambda-1)(\mathrm{D}\lambda)^3}{\lambda^3(1-\lambda)^3},$$

$$\Delta = \frac{1}{2^8}\theta_{00}^8\theta_{01}^8\theta_{01}^8 = \frac{1}{2^8}(\theta_{01}^{16}\theta_{01}^8 + 2\theta_{01}^{12}\theta_{01}^{12} + \theta_{01}^8\theta_{01}^{16}) = \frac{(\mathrm{D}\lambda)^6}{4\lambda^4(1-\lambda)^4},$$

$$j = \frac{2^5(\theta_{00}^8 + \theta_{01}^8 + \theta_{01}^8)^3}{\theta_{00}^8\theta_{01}^8\theta_{01}^8} = \frac{2^8(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

L'anneau gradué des formes faiblement modulaires pour $\Gamma(2)$ est $\mathbf{C}[\theta_{01}^4, \theta_{10}^4][\frac{1}{\Delta}] = \mathbf{C}[\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \mathrm{D}\lambda, \frac{1}{\mathrm{D}\lambda}]$.

## 6. Transformées de Laplace

Dans ce numéro, $\psi$ désignera une forme faiblement modulaire pour $\Gamma(2)$, de poids un entier relatif pair $k$, telle que

$$\psi(z) = \psi_{\mathrm{S}}(z) - \psi_{\mathrm{S}}(z+1) \tag{31}$$

pour $z \in \mathfrak{H}$, où $\psi_{\mathrm{S}}$ est la fonction $\psi_{|_k\mathrm{S}} : z \mapsto z^{-k}\psi(-\frac{1}{z})$. Comme $\psi_{\mathrm{S}}$ est périodique de période 2, la relation (31) implique que

$$\psi(z+1) = -\psi(z) \tag{32}$$

pour $z \in \mathfrak{H}$. Par conséquent, le développement de Fourier de $\psi$ est de la forme

$$\psi(z) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z} \\ n \text{ impair}}} a_{n/2}(\psi)q^{n/2}. \tag{33}$$

Nous supposerons que les coefficients $a_{n/2}(\psi)$ sont nuls pour $n < 0$, ce qui implique d'une part que $|\psi(z)| = \mathrm{O}(e^{-\pi \operatorname{Im} z})$ lorsque $\operatorname{Im} z$ tend vers $+\infty$, d'autre part d'après (31) que la partie polaire du développement de Fourier de $\psi_{\mathrm{S}}$ ne fait intervenir que des puissances entières de $q$. Notons $m_\psi$ le plus petit entier naturel tel que $\Delta^{m_\psi}\psi$ soit une forme modulaire pour $\Gamma(2)$. Alors $\Delta^{m_\psi}\psi_{\mathrm{S}}$ en est une aussi, et on a

$$\psi_{\mathrm{S}} = \sum_{n=0}^{m_\psi} a_{-n}(\psi_{\mathrm{S}})q^{-n} + \psi_{\mathrm{S}}^{\bullet}(z) \tag{34}$$

où $|\psi_{\mathrm{S}}^{\bullet}(z)| = \mathrm{O}(e^{-\pi \operatorname{Im} z})$ lorsque $\operatorname{Im} z$ tend vers $+\infty$.

Nous allons étudier la fonction $\mathrm{B}_\psi$ définie par

$$\mathrm{B}_\psi(u) = -4i\sin^2(\frac{\pi u}{2})\int_{i0}^{i\infty} \psi_{\mathrm{S}}(z)e^{\pi i z u}dz. \tag{35}$$

*a) Domaine de convergence*

On a $|\psi_{\mathrm{S}}(it)| = \mathrm{O}(t^{-k}e^{-\pi/t})$ lorsque $t$ tend vers 0 et $|\psi_{\mathrm{S}}(it)| = \mathrm{O}(e^{2\pi m_\psi t})$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. L'intégrale dans (35) est donc normalement convergente dans toute partie compacte du demi-plan $\{u \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} u > 2m_\psi\}$, et la fonction $\mathrm{B}_\psi$ définie par (35) est holomorphe dans ce demi-plan.

*b) Prolongement holomorphe*

Comme au § 3, n° 4, *b*), on voit que l'on a, pour $\operatorname{Re} u > 2m_\psi$,

$$\mathrm{B}_\psi(u) = \frac{4}{\pi}\sin^2(\frac{\pi u}{2})\sum_{n=0}^{m_\psi}\frac{a_{-n}(\psi_{\mathrm{S}})}{u-2n} - 4i\sin^2(\frac{\pi u}{2})\int_{i0}^{i\infty}\psi_{\mathrm{S}}^{\bullet}(z)e^{\pi i z u}dz \tag{36}$$

et que cette expression définit un prolongement holomorphe de $\mathrm{B}_\psi$ au demi-plan des $u \in \mathbf{C}$ tels que $\operatorname{Re} u > -1$.

*c) Réalité*

Comme au § 3, n° 4, *c*), on voit que, si les coefficients de Fourier de $\psi$ sont tous réels, la restriction de $\mathrm{B}_\psi$ à la demi-droite réelle $]-1,+\infty[$ est à valeurs réelles.

*d) Comportement aux entiers pairs positifs*

Soit $n$ un entier $\geqslant 0$. On lit sur la formule (36) que la fonction $\mathrm{B}_\psi$ s'annule au point $2n$ et que sa dérivée y est égale à $\pi a_{-n}(\psi_{\mathrm{S}})$. Ainsi $\mathrm{B}_\psi$ a en ce point un zéro au moins double si $a_{-n}(\psi_{\mathrm{S}}) = 0$.

*e) Décroissance rapide à l'infini*

On démontre comme au §3, n° 4, *e*) que, sur $]-1,+\infty[$, $\mathrm{B}_\psi$ et ses dérivées itérées sont à décroissance rapide en $+\infty$.

*f) Une nouvelle expression de* $\mathrm{B}_\psi$

Il résulte de (31) et (32) que l'on a

$$\psi_{\mathrm{S}}(z-1) - 2\psi_{\mathrm{S}}(z) + \psi_{\mathrm{S}}(z+1) = -2\psi(z). \tag{37}$$

Comme au §3, nº 4, $f$), on en déduit que l'on a, pour $\mathrm{Re}\, u > 2m_\psi$,

$$(38)\qquad \begin{aligned} \mathrm{B}_\psi(u)/i = &\int_1^i \psi_{\mathrm{S}}(z-1)e^{\pi i z u}dz - 2\int_0^i \psi_{\mathrm{S}}(z)e^{\pi i z u}dz \\ &+ \int_{-1}^i \psi_{\mathrm{S}}(z+1)e^{\pi i z u}dz - 2\int_i^\infty \psi(z)e^{\pi i z u}dz \end{aligned}$$

et que cette formule fournit une nouvelle expression du prolongement holomorphe de $\mathrm{B}_\psi$ au demi-plan $\{u \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, u > -1\}$.

*g) Construction de fonctions de Schwartz radiales*

Notons E un espace euclidien. Il résulte de $b$) et $e$) que la fonction radiale

$$b_\psi : x \mapsto \mathrm{B}_\psi(\|x\|^2)$$

de E dans $\mathbf{C}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathrm{E})$. Comme au §3, nº 4, $g$), on démontre que :

Théorème 5. — *Si la dimension $d$ de* E *est égale à $4-2k$, la transformée de Fourier $\widehat{b}_\psi$ de $b_\psi$ est égale à $(-1)^{k/2}b_\psi$.*

## §5. Construction des fonctions $p$ et $q$

Dans ce paragraphe, nous allons construire des fonctions $p$ et $q$ possédant les propriétés énoncées à la fin du § 2, nº 4. Cela complétera la démonstration des théorèmes 1 et 2. Elles seront les restrictions à $\mathbf{R}_+$ de $\mathrm{A}_\varphi + \mathrm{B}_\psi$ et de $\mathrm{A}_\varphi - \mathrm{B}_\psi$ respectivement, où :

– $\varphi$ est une forme faiblement quasi-modulaire pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, à coefficients de Fourier réels, satisfaisant les hypothèses énoncées au début du § 3, nº 4 : elle est de profondeur 2 et ses coefficients de Fourier d'indices $\leqslant 0$ sont nuls.

– $\psi$ est une forme faiblement modulaire pour $\Gamma(2)$, à coefficients de Fourier réels, satisfaisant les hypothèses énoncées au début du § 4, nº 6 : on a $\psi(z) = \psi_{\mathrm{S}}(z) - \psi_{\mathrm{S}}(z+1)$ et les coefficients de Fourier d'indices $\leqslant 0$ de $\psi$ sont nuls.

Ceci assure que les fonctions $p$ et $q$ sont réelles et analytiques dans $\mathbf{R}_+$, qu'elles et leurs dérivées itérées sont à décroissance rapide en $+\infty$, et que $p(0) = q(0) = \mathrm{A}_\varphi(0)$ puisque $\mathrm{B}_\psi(0) = 0$ d'après le § 4, nº 6, $d$).

### 1. Choix de $\varphi$ et $\psi$ : le cas de la dimension 8

Nous souhaitons que $\varphi$ soit de poids 0 et $\psi$ de poids $-2$, de manière à assurer que, si E est un espace euclidien de dimension 8, les fonctions de Schwartz $x \mapsto \mathrm{A}_\varphi(\|x\|^2)$ et $x \mapsto \mathrm{B}_\psi(\|x\|^2)$ sur E soient respectivement égale et opposée à leurs transformées de Fourier (th. 4 et th. 5), et donc que $x \mapsto q(\|x\|^2)$ soit la transformée de Fourier de $x \mapsto p(\|x\|^2)$.

Nous souhaitons que $m_\varphi \leqslant 1$ et $m_\psi \leqslant 1$, c'est-à-dire que $\varphi\Delta$ soit une forme quasi-modulaire pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $\psi\Delta$ une forme modulaire pour $\Gamma(2)$ de manière à assurer que les fonctions $p$ et $q$, données dans l'intervalle $]2,+\infty[$ par les formules

$$p(u) = -4\sin^2\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty t^2(\varphi+\psi)(\frac{i}{t})e^{-\pi t u}dt, \tag{39}$$

$$q(u) = 4\sin^2\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty t^2(\psi-\varphi)(\frac{i}{t})e^{-\pi t u}dt, \tag{40}$$

aient un zéro au moins double en chaque entier pair $\geqslant 4$.

Notons $\varphi_1$ la forme faiblement quasi-modulaire $\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{E}_2}$. Nous souhaitons que l'on ait $a_{-1}(\varphi_1) = 0$ et $a_0(\varphi_1) > 0$. La première condition assure que $\mathrm{A}_\varphi(2) = 0$, et donc que $p(2) = q(2) = 0$ puisque $\mathrm{B}_\psi(2) = 0$. La seconde assure que $q(0) > 0$, puisque l'on a $q(0) = \mathrm{A}_\varphi(0) = \frac{6}{\pi}a_0(\varphi_1)$.

Notons $\varphi_2$ la forme faiblement quasi-modulaire $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial \mathrm{E}_2)^2}$ et posons $\psi_{\mathrm{S}} = \psi_{|_{-2}\mathrm{S}}$. Nous souhaitons que $a_{-1}(\psi_{\mathrm{S}}) + \frac{36}{\pi^2}a_{-1}(\varphi_2) = 0$. En effet, cette condition exprime que les dérivées de $\mathrm{A}_\varphi$ et de $\mathrm{B}_\psi$ en 2 sont égales, c'est-à-dire que $q'(2) = 0$. Elle implique aussi, lorsque les conditions précédentes sont satisfaites, que l'on a $|t^2(\psi-\varphi)(\frac{i}{t})| = \mathrm{O}(t)$ lorsque $t$ tend vers l'infini, et par suite que la formule (40) reste valable pour tout $u > 0$.

On constate qu'il existe un unique couple $(\varphi,\psi)$, à un scalaire multiplicatif $> 0$ près, satisfaisant simultanément tous les souhaits exprimés ci-dessus. On en obtient un par exemple en prenant

$$\varphi = \frac{(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6)^2}{\Delta}, \tag{41}$$

auquel cas $\varphi_1 = \frac{2\mathrm{E}_4(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4-\mathrm{E}_6)}{\Delta}$, $\varphi_2 = \frac{\mathrm{E}_4^2}{\Delta}$, $a_0(\varphi_1) = 1440$, $a_{-1}(\varphi_2) = 1$, puis en prenant

$$\psi = \alpha\,\frac{\theta_{10}^{12}(5\theta_{01}^8 + 5\theta_{01}^4\theta_{10}^4 + 2\theta_{10}^8)}{\Delta}, \tag{42}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$ est choisi de sorte que $a_{-1}(\psi_{\mathrm{S}}) + \frac{36}{\pi^2}a_{-1}(\varphi_2) = 0$. Comme

$$\psi_{\mathrm{S}} = -\alpha\frac{\theta_{01}^{12}(5\theta_{10}^8 + 5\theta_{01}^4\theta_{10}^4 + 2\theta_{01}^8)}{\Delta}, \tag{43}$$

on a $a_{-1}(\psi_{\mathrm{S}}) = -2\alpha$, et par suite $\alpha = \frac{18}{\pi^2}$.

Ces fonctions $\varphi$ et $\psi$ sont clairement positives sur la demi-droite $i]0,+\infty[$. La formule (39) montre que, pour $u > 2$, on a $p(u) \leqslant 0$ avec égalité si et seulement si $u$ est entier et pair. La seule propriété requise au § 2, $n^{\mathrm{o}}$ 4 qu'il reste à vérifier est la positivité de $q$. Elle résulte du lemme suivant, puisque la formule (40) est valable pour tout $u > 0$ :

*Lemme. — On a $\varphi(it) \leqslant \psi(it)$ pour tout $t > 0$.*

Ce lemme est démontré par M. Viazovska au moyen d'une étude numérique du comportement de ces fonctions d'une part sur $[0,1]$, d'autre part sur $[1,+\infty]$. Cette étude nécessite des calculs sur ordinateur. Il serait agréable d'en avoir une démonstration plus conceptuelle.

## 2. Choix de $\varphi$ et $\psi$ : le cas de la dimension 24

Pour des raisons entièrement similaires aux précédentes, nous souhaitons cette fois que les conditions suivantes soient satisfaites : $\varphi$ est de poids $-8$, $\psi$ est de poids $-10$, on a $m_\varphi \leqslant 2$, $m_\psi \leqslant 2$, $a_{-2}(\varphi_1) = 0$, $a_0(\varphi_1) > 0$ et $a_{-2}(\psi_{\mathrm{S}}) + \frac{36}{\pi^2} a_{-2}(\varphi_2) = 0$.

À nouveau, ces conditions déterminent $(\varphi, \psi)$ à un scalaire multiplicatif $> 0$ près. On peut prendre

$$\varphi = \frac{49\mathrm{E}_4(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6)^2 - 25(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4^2)^2}{\Delta^2}, \tag{44}$$

auquel cas on a $\varphi_1 = \frac{98\mathrm{E}_4^2(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6) - 50\mathrm{E}_6(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4^2)}{\Delta^2}$, $\varphi_2 = \frac{49\mathrm{E}_4^3 - 25\mathrm{E}_6^2}{\Delta^2}$, $a_0(\varphi_1) = 18869760$, $a_{-2}(\varphi_2) = 24$, et on doit prendre alors

$$\psi = \alpha\, \frac{\theta_{10}^{20}(7\theta_{01}^8 + 7\theta_{01}^4\theta_{10}^4 + 2\theta_{10}^8)}{\Delta^2}\,, \tag{45}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$ est choisi de sorte que $a_{-2}(\psi_{\mathrm{S}}) + \frac{36}{\pi^2} a_{-2}(\varphi_2) = 0$. Comme

$$\psi_{\mathrm{S}} = -\alpha \frac{\theta_{01}^{20}(7\theta_{10}^8 + 7\theta_{01}^4\theta_{10}^4 + 2\theta_{01}^8)}{\Delta^2}\,, \tag{46}$$

on a $a_{-2}(\psi_{\mathrm{S}}) = -2\alpha$, et par suite $\alpha = \frac{432}{\pi^2}$.

Ces choix étant faits, les fonctions $p$ et $q$ s'annulent en tous les entiers pairs $\geqslant 4$ et elles sont données dans l'intervalle $]4, +\infty[$ par les formules

$$p(u) = -4\sin^2\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty t^{10}(\varphi + \psi)(\frac{i}{t})e^{-\pi t u}dt, \tag{47}$$

$$q(u) = 4\sin^2\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty t^{10}(\psi - \varphi)(\frac{i}{t})e^{-\pi t u}dt, \tag{48}$$

et comme au n° 1, on montre que la formule (48) reste valable sur $]2, +\infty[$.

La positivité de la fonction $\psi$ sur $i]0, +\infty[$ se lit sur la formule (45). Celle de $\varphi$ n'est pas évidente sur la formule (44), mais elle résulte du lemme suivant, dans lequel nous notons $f$ le numérateur $49\mathrm{E}_4(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6)^2 - 25(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4^2)^2$ de $\varphi$ :

*Lemme. — On a* $\frac{13}{12} f = \mathrm{D}^2(49\mathrm{E}_4^3 - 25\mathrm{E}_6^2) - 60480\Delta_{16}$*, où* D *est l'opérateur différentiel* $q\frac{d}{dq}$ *et* $\Delta_{16}$ *l'unique forme modulaire parabolique normalisée de poids* 16 *pour* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$*. Les coefficients du développement de Fourier de* $f$ *sont positifs.*

Remarquons que $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{E}_2} = 98\mathrm{E}_4^2(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6) - 50\mathrm{E}_6(\mathrm{E}_2\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4^2) = \mathrm{D}(98\mathrm{E}_4^3 - 50\mathrm{E}_6^2)$ d'après la formule (11) et que $\frac{\partial}{\partial \mathrm{E}_2}\mathrm{D}^2(49\mathrm{E}_4^3 - 25\mathrm{E}_6^2) = \frac{13}{12}\mathrm{D}(98\mathrm{E}_4^3 - 50\mathrm{E}_6^2)$ d'après la remarque 6 du § 3, n° 3. Il s'ensuit que $\mathrm{D}^2(49\mathrm{E}_4^3 - 25\mathrm{E}_6^2) - \frac{13}{12} f$ est une forme modulaire de poids 16. Comme son terme constant est nul et que le coefficient de $q$ dans son développement de Fourier est 60480, elle est égale à $60480\Delta_{16}$.

On a $49\mathrm{E}_4^3 - 25\mathrm{E}_6^2 = 24\mathrm{E}_{12} + \frac{40219200}{691}\Delta$, où $\mathrm{E}_{12} = 1 + \frac{65520}{691}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)q^n$ est la série d'Eisenstein de poids 12. Par suite :

$$\frac{13}{12}f = \frac{60480}{691}\sum_{n=1}^{\infty}(26\,n^2\sigma_{11}(n) + 665\,n^2\tau(n) - 691a_n(\Delta_{16}))q^n.$$

Les coefficients $a_n(f)$ du développement de Fourier de $f$ sont nuls pour $n \leqslant 2$, puisque l'on a $\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6 = 720q + \mathrm{o}(q)$ et $\mathrm{E}_2\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4^2 = -1008q + \mathrm{o}(q)$. Ils sont strictement positifs pour $n \geqslant 3$ en vertu des inégalités

$$\sigma_{11}(n) \geqslant n^{11}, \qquad |\tau(n)| \leqslant \sigma_0(n)n^{11/2} \leqslant n^{13/2}, \qquad |a_n(\Delta_{16})| \leqslant \sigma_0(n)n^{15/2} \leqslant n^{17/2},$$

et du fait que $26n^{13} > (665+691)n^{17/2}$ pour $n \geqslant 3$.

*Remarque.* — Nous avons utilisé par commodité les majorations de $|\tau(n)|$ et de $|a_n(\Delta_{16})|$ issues de la conjecture de Ramanujan-Petersson démontrée par Deligne, mais des majorations élémentaires suffiraient à obtenir la même conclusion.

De la positivité de $\varphi$ et $\psi$ sur $i]0,+\infty[$, on déduit que, pour $u > 4$, on a $p(u) \leqslant 0$ avec égalité si et seulement $u$ est entier et pair. Toutes les propriétés requises au § $2, n^{\mathrm{o}}\,4$ de $p$ et $q$ sont ainsi satisfaites, sauf la positivité de $q$ qu'il reste à vérifier. À nouveau, cette vérification a été faite par ordinateur, avec une petite complication supplémentaire par rapport au cas précédent, liée au fait que cette fois la formule (48) n'est valable que pour $u > 2$ et qu'il convient d'utiliser une autre formule pour l'étude de $q$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

## RÉFÉRENCES


[1] H. COHN, A. KUMAR, S. MILLER, D. RADCHENKO & M. VIAZOVSKA – *The sphere packing problem in dimension* 24, Annals of Math. **185** (2017), 1017-1033.

[2] H. COHN & N. ELKIES – *New upper bounds on sphere packings* I, Annals of Math. **157** (2003), 689-714.

[3] L. FEJES TÓTH – *Über die dichteste Kugellagerung*, Math. Z. **48** (1943), 676-684.

[4] T. HALES – *A proof of the Kepler conjecture*, Annals of Math. **162** (2005), 1065-1185.

[5] T. HALES *et al.* – *A formal proof of the Kepler conjecture*, arXiv :1501.02155, soumis le 9 Janvier 2015.

[6] T. HALES – *Developments in formal proofs*, Séminaire Bourbaki 2013/2014, exposé 1086, Astérisque 367-368 (1015), 387-410.

[7] T. HALES & S. FERGUSON – *The Kepler conjecture*, Discrete and Computational Geometry. **36**(1) (2006), 1-269.

[8] A. THUE – *Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene*, Norske Vid. Selsk. Skr. **1** (1910), 1-9.

[9] M. VIAZOVSKA – *The sphere packing problem in dimension* 8, Annals of Math. **185** (2017), 991-1015.

**Joseph OESTERLÉ**

Université Pierre et Marie Curie
IMJ-PRG, UMR 7586 du CNRS
4, place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
*E-mail*: `joseph.oesterle@imj-prg.fr`