

**LE FLOT BINORMAL, L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER
ET LES TOURBILLONS FILAMENTAIRES**
[d'après Valeria Banica et Luis Vega]

par Evelyne MIOT

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter un ensemble de travaux de V. Banica et L. Vega [BV08, BV09, BV12, BV13, BV13-a, BV15] à propos de l'équation du flot par courbure binormale. Cette équation, issue de la mécanique des fluides, décrit l'évolution des tourbillons filamenteux – écoulements de fluides pour lesquels le tourbillon se concentre le long d'une courbe de l'espace. Il existe une famille remarquable de solutions auto-similaires de ce flot, qui développent une singularité ponctuelle à temps égal à zéro. Ce sont les questions *d'existence et de stabilité* de cette dynamique singulière qui constituent le cœur des résultats expliqués ici. L'approche repose de façon essentielle sur le lien qui unit le flot binormal et l'équation de Schrödinger.

1. LE FLOT PAR COURBURE BINORMALE

1.1. Une brève présentation

L'objet d'étude de cet exposé est l'équation du flot par courbure binormale ⁽¹⁾

$$(B) \quad \partial_t \chi = \partial_x \chi \wedge \partial_{xx} \chi.$$

Ici, $\chi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, x) \mapsto \chi(t, x)$ désigne une courbe paramétrée par la longueur d'arc $x \in \mathbb{R}$ au temps $t \in \mathbb{R}_+$. L'équation (B) est un modèle asymptotique régissant l'évolution des tourbillons filamenteux – écoulements de fluides où le tourbillon se concentre pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$ le long d'une courbe de l'espace. Il a été obtenu de façon formelle, à partir des équations de la mécanique des fluides, par Da Rios [DR1906], puis redécouvert par Arms et Hama [AH65]. On mentionne également l'article récent de Jerrard et Seis [JS16] pour une dérivation rigoureuse sous des hypothèses plus faibles de concentration du tourbillon. Bien que certaines des caractéristiques physiques des filaments ne soient pas retrouvées au travers de ce modèle, l'équation (B) présente des propriétés mathématiques riches et permet de prédire certaines dynamiques singulières, notamment celles des solutions auto-similaires.

1. Dans toute cette note, ∂_y désigne la dérivée partielle $\partial/\partial y$ par rapport à y et ∂_{yy} la dérivée partielle d'ordre deux $\partial^2/\partial y^2$.

En notant $c(t, \cdot)$ la courbure, $\tau(t, \cdot)$ la torsion, et $(T(t, \cdot), n(t, \cdot), b(t, \cdot))$ le repère de Serret-Frenet associés à la courbe $\chi(t, \cdot)$ ⁽²⁾, de sorte que $T(t, \cdot) = \partial_x \chi(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$, on remarque que $\partial_x \chi \wedge \partial_{xx} \chi = T \wedge \partial_x T = cT \wedge n$. Ainsi, (B) admet une forme plus condensée qui explique son appellation :

$$\partial_t \chi = cb.$$

Par ailleurs, en dérivant chacun des termes de (B) par rapport à x , on obtient une équation pour le vecteur tangent uniquement, nommée équation pour les applications de Schrödinger⁽³⁾

$$(1) \quad \partial_t T = T \wedge \partial_{xx} T.$$

1.2. Quelques résultats d'existence de solutions

Le flot binormal admet plusieurs solutions explicites et simples :

- *les droites de \mathbb{R}^3 (qui forment des solutions stationnaires) ;*
- *les courbes qui forment des cercles se propageant en translation uniforme dans la direction perpendiculaire à celle du cercle, à vitesse égale à l'inverse du rayon du cercle ;*
- *les courbes qui forment des hélices.*

Il s'agit dans ces exemples de solutions régulières ; il existe aussi une théorie pour des solutions non nécessairement deux fois dérivables. Par exemple, on peut donner une formulation de (B) au sens des distributions pour des courbes appartenant à $L^\infty(H^{3/2})$. De plus, d'après le paragraphe précédent, les problèmes de Cauchy pour (B) et pour (1) peuvent se traiter en parallèle. Ceci permet d'obtenir le caractère globalement bien posé dans $L^\infty(H^3)$ pour (B), par combinaison des articles de Ding et Wang [DW01] et Chang, Shatah et Uhlenbeck [CSU00] ou d'après Nahmod, Shatah, Vega et Zeng [NSVZ06]. Plus récemment, Jerrard et Smets [JS12] (voir aussi [S13]) ont établi des résultats de stabilité pour (B) et (1) dans des espaces de régularité plus faible.

L'évolution de courbes trop singulières pour entrer dans le cadre précédent a été considérée par différents auteurs. Jerrard et Smets [JS15] ont introduit une formulation faible permettant de traiter des filaments avec des auto-intersections. Le cas de filaments en forme de polygones réguliers, comportant donc plusieurs singularités de type « coin », a été étudié par De la Hoz et Vega [DLHV15] grâce à des techniques algébriques. Ceci fait également l'objet d'un travail en cours de Banica et Vega [BV16]. Des simulations numériques pour la dynamique de ces filaments polygonaux ont également été réalisées par Smets [S13].

Enfin, les filaments qui forment des courbes régulières sauf en un point (t, x) en lequel le filament forme un coin, ainsi que leurs perturbations, constituent l'objet central des travaux de V. Banica et L. Vega et bénéficieront d'un traitement à part dans la suite de cet exposé.

2. Voir (4) ci-après pour un rappel de la définition précise.

3. Schrödinger map equation, dans la terminologie anglo-saxonne.

1.3. Les solutions auto-similaires

Comme mentionné plus haut, des solutions remarquables de (B) sont données par des courbes auto-similaires. On les recherche sous la forme suivante :

$$(2) \quad \chi(t, x) = \sqrt{t}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

où G est une fonction lisse définie sur \mathbb{R} . En effet, la variable auto-similaire x/\sqrt{t} est la seule compatible avec les échelles de l'équation. De telles solutions sont régulières à $t > 0$ et développent une singularité à $t = 0$. Celle-ci est nécessairement de « type coin à l'origine », au sens que $\chi(0, x)$ est la réunion de deux demi-droites formant un angle non nul à $x = 0$:

$$(3) \quad \chi(0, x) = A_+x\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) + A_-x\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x),$$

avec A_+ et A_- deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^3 . Les filaments de la forme (2) apparaissent dans différents contextes en physique, et leur comportement est illustré par les figures 1 et 2 : dans les fluides, comme expliqué précédemment, dans les superfluides [S85, LI02, LI03] et en ferromagnétisme [LD81, LRT76, B88].

D'un point de vue mathématique, des calculs simples, connus depuis longtemps, permettent de voir que les solutions auto-similaires (2) forment une famille à un paramètre a , dont la courbure et la torsion en (t, x) valent a/\sqrt{t} et $x/2t$ respectivement (voir l'annexe 1 de [GRV03]).

L'analyse approfondie de telles solutions, comportant une description précise de leur comportement au voisinage de la singularité, a été réalisée par Gutiérrez, Rivas et Vega [GRV03]. Nous donnons ici une version partielle de leur principal résultat.

THÉORÈME 1.1 (Existence et description des solutions auto-similaires, [GRV03])

Soient A_+ et A_- deux vecteurs de \mathbb{R}^3 non colinéaires. Soit $a > 0$ déterminé par la formule $\sin\left(\widehat{(A_+, A_-)}\right)/2 = e^{-\frac{\pi a^2}{2}}$.

Il existe une unique solution, notée χ_a , à l'équation (B) de la forme (2) sur $\mathbb{R}_+^ \times \mathbb{R}$, où G est de classe C^∞ , et qui se comporte comme (3) à $t = 0$ au sens que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \chi_a(t, x) - A_+x\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) - A_-x\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x) \right| \leq a\sqrt{t}.$$

De plus, pour $t > 0$, la courbure de la courbe $\chi_a(t, \cdot)$ est constante, égale à a/\sqrt{t} , et sa torsion au point x est égale à $x/2t$.

Enfin, il existe deux vecteurs B_+ et B_- de \mathbb{C}^3 , qui sont orthogonaux à A_+ et A_- respectivement, tels que

$$B_\pm = \lim_{t \rightarrow 0} (n + ib)(t, x) e^{i\frac{x^2}{4t}} e^{ia^2 \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)}, \quad \text{pour } \pm x > 0.$$

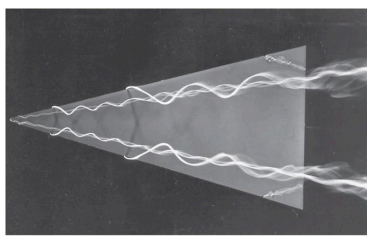


FIGURE 1. Tourbillons filamentaires dans un fluide rencontrant un obstacle triangulaire de type aile delta, H. Werlé, ONERA 1963.

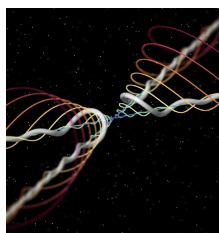


FIGURE 2. Tourbillons filamentaires après une reconnexion de lignes de tourbillon quantique dans du hélium superfluide, E. Fonda et al., Proc. Nat. Acad. Sci. (2014), 4707-4710.

Mentionnons qu’une étude semblable a été menée récemment par Gutiérrez et De Laire [GDL15] pour une version dissipative de l’équation (1), l’équation de Landau-Lifshitz-Gilbert régissant l’évolution de matériaux ferromagnétiques avec aimantation $T \in \mathbb{S}^2$:

$$\partial_t T = T \wedge \partial_{xx} T - \alpha T \wedge (T \wedge \partial_{xx} T),$$

où $\alpha > 0$. Dans ce cadre, les solutions auto-similaires de [GDL15] développent le même type de singularité coin à $t = 0$ et leur torsion a la même expression que dans le théorème 1.1 précédent. Toutefois le caractère dissipatif se retrouve au niveau de la courbure, donnée par $c(t, x) = ae^{-\frac{\alpha x^2}{4t}} / \sqrt{t}$.

2. STABILITÉ ET EXISTENCE AUTOUR DE LA DYNAMIQUE SINGULIÈRE : ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

Le programme des articles [BV08, BV09, BV12, BV13] vise à analyser les problématiques de stabilité et d’existence autour de la solution auto-similaire χ_a décrite au théorème 1.1. Plus précisément, la notion de stabilité qui a motivé ces travaux est celle de la stabilité de la *formation de la singularité de type coin* à $t = 0$. En partant d’un filament proche – en un sens à définir – de $\chi_a(1)$ et en le laissant évoluer par le flot par courbure binormale, y a-t-il encore formation d’un coin à $t = 0$? Le cas échéant, quelles en sont les principales caractéristiques géométriques? Des réponses abouties

dans ce sens sont apportées par [BV15] à l'aide du panel de résultats des articles précédents [BV08, BV09, BV12, BV13]. Nous en donnons ici des formulations simplifiées. Le premier d'entre eux ⁽⁴⁾ concerne la *stabilité de la formation de la singularité* à $t = 0$.

THÉORÈME 2.1 (Stabilité de la formation de la singularité coin, [BV15])

Soit $a > 0$. Soit χ_{in} une courbe appartenant à $C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ qui est proche de $\chi_a(1)$ dans un sens défini au paragraphe 4 (voir (19)) ci-après. Il existe une unique solution $\chi \in C([0, 1], \text{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)) \cap C((0, 1], C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3))$ à l'équation (B) telle que $\chi(1) = \chi_{\text{in}}$. De plus, cette solution vérifie les propriétés suivantes.

- Il existe une courbe $\chi_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}^3)$ telle que $\chi(t, \cdot)$ converge vers χ_0 et $T(t, \cdot)$ vers $T_0 = \partial_x \chi_0$ lorsque t tend vers zéro au sens suivant : il existe $C_1 > 0$ et pour tout $\alpha < 1/6$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon, \alpha) > 0$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\chi(t, x) - \chi_0(x)| \leq C_1 \sqrt{t}, \quad \sup_{|x| \geq \varepsilon} |T(t, x) - T_0(x)| \leq C(\varepsilon, \alpha) t^\alpha.$$

- Il existe $T_\pm^\infty \in \mathbb{S}^2$, $N_\pm^\infty \in \mathbb{C}^3$ et $C_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, 1]} |T(t, x) - T_\pm^\infty| &\leq \frac{C_2}{\sqrt{|x|}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \\ \sup_{t \in (0, 1]} \left| (n + ib)(t, x) e^{\frac{ix^2}{4t}} e^{ia^2 \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)} - N_\pm^\infty \right| &\leq \frac{C_2}{\sqrt{|x|}}, \quad \forall \pm x > 0. \end{aligned}$$

- À translation et rotation près, la courbe χ exhibe en $(t, x) = (0, 0)$ une singularité de même structure que celle de χ_a , au sens que ⁽⁵⁾

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} T_0(x) = A_\pm, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \lim_{t \rightarrow 0} \left((n + ib)(t, x) e^{i \int_0^x \tau(t, y) dy} e^{ia^2 \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)} \right) = B_\pm.$$

Le résultat suivant permet d'étendre la solution au-delà de la formation de la singularité pour des temps strictement négatifs :

THÉORÈME 2.2 (Continuation de la solution après le temps de singularité, [BV15])

Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 2.1, il existe une courbe

$$\tilde{\chi} \in C([-1, 1], \text{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)) \cap C([-1, 1] \setminus \{0\}, C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3))$$

telle que $\tilde{\chi} = \chi$ sur $(0, 1] \times \mathbb{R}$ et qui vérifie l'équation par courbure binormale sur $[-1, 0) \times \mathbb{R} \cup (0, 1] \times \mathbb{R}$. Cette solution est unique parmi les courbes de telle régularité et telles que $\tilde{\chi}(-1)$ est une perturbation de $\chi_a(1)$ au sens du paragraphe 4.

De plus, le vecteur tangent $\tilde{T}(t, x) = \partial_x \tilde{\chi}(t, x)$ vérifie les propriétés et estimations du théorème 2.1, en remplaçant t par $|t|$.

4. L'ordre que nous choisissons ici est différent de celui de [BV15], pour des raisons de présentation.

5. On rappelle que $\tau(t, y)$ désigne la torsion de $\chi(t, \cdot)$ en y .

Remarque 2.3. — Il est possible de formuler l'équation (B) dans un sens faible pour le vecteur tangent sur tout l'ensemble $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ (voir (19) dans [BV15]), en remarquant que $\tilde{T} \wedge \partial_{xx} \tilde{T} = \partial_x(\tilde{T} \wedge \partial_x \tilde{T})$ et que $\tilde{T} \wedge \partial_x \tilde{T}$ est une mesure de Radon ; plus exactement, $\tilde{T} \wedge \partial_x \tilde{T} - \delta_{(t,x)=(0,0)} \in L^1([-1, 1] \times \mathbb{R})$.

Comme étape suivante se pose la question naturelle du caractère bien posé de (B) avec donnée initiale singulière de même nature que les prototypes de tourbillons donnés par (2).

THÉORÈME 2.4 (Le problème aux données initiales singulières)

Soit χ_0 une courbe appartenant à $C^4(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3)$ et qui est singulière en $x = 0$ au sens suivant : il existe deux vecteurs non colinéaires A_+ et A_- tels que

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \partial_x \chi_0(x) = A_\pm.$$

Soit $a > 0$ défini par $\sin\left(\widehat{(A_+, A_-)}\right)/2 = e^{-\pi a^2/2}$. On suppose que la courbure c de χ_0 , définie sur $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, vérifie :

$$(1 + |x|^4)c \in L^2((0, +\infty)), \quad (1 + |x|^4)c \in L^2((-\infty, 0)),$$

et que c vérifie des hypothèses de petitesse par rapport à a : il existe $0 < \gamma < 1/2$ et il existe $C(a) > 0$ tel que

$$\sup_{x \in (0, 1]} |x|^\gamma c(x) + \sup_{x \in [-1, 0)} |x|^\gamma c(x) \leq C(a).$$

Alors il existe une unique courbe

$$\chi \in C([-1, 1], \text{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)) \cap C([-1, 1] \setminus \{0\}, C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3))$$

solution régulière de (B) sur $[-1, 0) \times \mathbb{R} \cup (0, 1] \times \mathbb{R}$, qui vérifie les propriétés des théorèmes 2.1 et 2.2 avec cette courbe χ_0 .

Remarque 2.5. — Le théorème 2.4 autorise bien les prototypes de filaments avec un coin, à savoir les $\chi_0 = \chi_a(0)$ donnés par (3) pour tout $a > 0$. En effet, la courbure est alors nulle pour $x \neq 0$. Il permet de considérer également des perturbations (en termes de la courbure) de ces filaments à coin.

Remarque 2.6. — La notion de proximité entre courbes mise en jeu aux théorèmes 2.1 et 2.4 est définie de façon locale, au voisinage de la singularité, et s'appuie sur la correspondance avec l'équation de Schrödinger décrite ci-dessous. Elle ne signifie pas nécessairement une proximité géométrique en tout point.

3. VERS L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

3.1. Transformation de Hasimoto, une correspondance formelle

Nous introduisons à présent une nouvelle écriture de l'équation du flot par courbure binormale qui fait appel à une transformation due à Hasimoto [H72]. Dans ce paragraphe, toutes les fonctions en jeu sont supposées assez régulières pour que les calculs puissent être effectués. Rappelons que (T, n, b) désigne le repère de Serret-Frenet associé à la courbe, et notons c et τ la courbure et la torsion, définies par les formules de Frenet

$$(4) \quad \partial_x \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Hasimoto démontre alors que si la courbure ne s'annule pas, la fonction suivante, appelée *fonction filament*

$$(5) \quad \psi(t, x) = c(t, x) \exp \left(i \int_0^x \tau(t, y) dy \right),$$

vérifie l'équation de Schrödinger non linéaire cubique

$$(S) \quad i\partial_t \psi + \partial_{xx} \psi + \frac{\psi}{2} (|\psi|^2 - A(t)) = 0,$$

où $A(t)$ est définie explicitement en fonction de $c(t, 0)$ et $\tau(t, 0)$. Plus exactement, on a

$$A(t) = \left(2 \frac{\partial_{xx} c^2 - c\tau^2}{c} + c^2 \right) (t, 0).$$

Notons ici qu'en posant

$$\Psi(t, \cdot) = \psi(t, \cdot) \exp \left(\frac{i}{2} \int_0^t A(s) ds \right)$$

on est ramené à l'équation de Schrödinger cubique classique

$$(6) \quad i\partial_t \Psi + \partial_{xx} \Psi + \frac{1}{2} \Psi |\Psi|^2 = 0.$$

L'idée de preuve dans [H72] consiste à utiliser les équations de Frenet en différentiant deux fois le vecteur normal *complexe*

$$(7) \quad N(t, x) = (n + ib)(t, x) \exp \left(i \int_0^x \tau(t, y) dy \right),$$

puis en identifiant les dérivées partielles $\partial_{tx} N$ et $\partial_{xt} N$. Ainsi que l'a remarqué Koiso [K95], il est possible de s'affranchir de l'hypothèse de non-annulation de la courbure en considérant, au lieu du repère de Serret-Frenet, un repère orthonormal parallèle $(T(t, \cdot), e_1(t, \cdot), e_2(t, \cdot))$ qui vérifie

$$(8) \quad \partial_x \begin{pmatrix} T \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} (t, \cdot) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} (t, \cdot);$$

alors $\psi(t, \cdot) = \alpha(t, \cdot) + i\beta(t, \cdot)$ est solution de l'équation (S) pour une certaine autre fonction $A(t)$. On renvoie le lecteur à l'annexe A de l'article de revue [P06] pour le détail des calculs.

L'opération réciproque, qui consiste à retrouver le flot par courbure binormale depuis l'équation de Schrödinger, s'effectue formellement de la façon suivante (voir par exemple la section 2 dans [BV13]). Soit ψ une solution suffisamment régulière de (S). Soient

$$\alpha = \operatorname{Re} \psi, \quad \beta = \operatorname{Im} \psi.$$

Un repère orthonormé initial $(T, e_1, e_2)(0, 0)$ étant fixé, on détermine d'abord $(T, e_1, e_2)(t, 0)$ pour tout $t \geq 0$ via le système

$$(9) \quad \partial_t \begin{pmatrix} T \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} (t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \beta & \partial_x \alpha \\ \partial_x \beta & 0 & -\frac{1}{2}(|\psi|^2 - A(t)) \\ -\partial_x \alpha & \frac{1}{2}(|\psi|^2 - A(t)) & 0 \end{pmatrix} (t, 0).$$

Puis, on cherche $(T, e_1, e_2)(t, \cdot)$ comme l'unique solution correspondante de (8). En posant

$$N = e_1 + ie_2$$

et en utilisant le fait que ψ satisfait (S), on vérifie d'une part que

$$(10) \quad \begin{cases} \partial_x T = \operatorname{Re}(\bar{\psi}N), & \partial_x N = -\psi T \\ \partial_t T = \operatorname{Im}(\bar{\psi}N), & \partial_t N = -i\partial_x T - \frac{i}{2}(|\psi|^2 - A(t))N, \end{cases}$$

et d'autre part que

$$\partial_t T = T \wedge \partial_{xx} T.$$

Le système (10) interviendra au paragraphe 5.2 dans la preuve du théorème 2.1.

Finalement, il suffit de fixer $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et un point $M_0 \in \mathbb{R}^3$, puis de définir $\chi(t, x)$ par la formule

$$(11) \quad \chi(t, x) = M_0 + \int_{x_0}^x T(t, y) dy + \int_{t_0}^t (T \wedge \partial_x T)(s, x_0) ds$$

qui est alors bien une solution du flot par courbure binormale tel que $\chi(t_0, x_0) = M_0$.

Remarque 3.1 ([BV13]). — Les quantités définies ci-dessus sont liées par les formules (lorsque ψ ne s'annule pas)

$$c = |\psi|, \quad \tau = \operatorname{Im} \left(\frac{\partial_x \psi}{\psi} \right),$$

$$N(t, x) = (e_1 + ie_2)(t, x) = (n + ib)(t, x) \exp \left(i \int_0^x \tau(t, y) dy \right).$$

3.2. D'autres connections avec l'équation de Schrödinger

Il existe un autre passage célèbre entre le domaine de la mécanique des fluides et celui des équations de Schrödinger, mis en lumière par Madelung [M27]. La transformation de Madelung associe à une solution ψ de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$(12) \quad i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi + \psi(1 - |\psi|^2) = 0, \quad \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad d \in \{2, 3\}$$

une densité $\rho = |\psi|^2$ et un vecteur $v = \nabla \arg(\psi)$. Alors les variables ρ et v satisfont à un système de type Euler compressible avec pression quantique, appelé *forme hydrodynamique* de (12)

$$(13) \quad \begin{cases} \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \\ \partial_tv + (v \cdot \nabla)v + \nabla(1 - \rho) = \nabla \left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}} \right). \end{cases}$$

On pourra consulter l'article de revue de Carles, Danchin et Saut [CDS12] pour davantage de détails à ce sujet. Ainsi, la transformation de Hasimoto peut être vue comme la transformation inverse à celle de Madelung, en posant $\rho = c^2$ et $v = 2\tau$.

Lorsque le module $|\psi|$ de la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii est proche de un, la forme hydrodynamique (13) s'identifie à l'équation d'Euler incompressible. Or, c'est de cette dernière que provient le flot par courbure binormale dans les fluides comportant des filaments. Il est en fait conjecturé que le flot binormal est un modèle limite pertinent dans certains régimes asymptotiques de l'équation de Gross-Pitaevskii ⁽⁶⁾. Ceci a été établi rigoureusement, pour le cas du cercle en translation uniforme, par Jerrard [J02].

Enfin, mentionnons l'apparition de *systèmes* d'équations de Schrödinger non linéaires régissant l'interaction de plusieurs filaments tourbillonnaires. Lorsque ces derniers sont supposés être de petites perturbations de N filaments droits et tous parallèles au même axe, leurs positions peuvent être décrites à l'aide de fonctions $\Psi_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui évoluent selon un modèle obtenu par Klein, Majda and Damodaran [KMD95] :

$$i\partial_t\Psi_j + \Gamma_j\partial_{xx}\Psi_j + \sum_{k \neq j} \Gamma_k \frac{\Psi_j - \Psi_k}{|\Psi_j - \Psi_k|^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq N,$$

où les $\Gamma_j \in \mathbb{R}$ sont les circulations des filaments. Notons que ce système se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires (système des tourbillons ponctuels) pour des filaments droits c'est-à-dire lorsque $\Psi_j(t, x) = \Psi_j(t)$.

6. Après changement d'échelle en temps et en espace.

3.3. Fonctions filaments des solutions particulières

En calculant les courbures et torsions des solutions particulières énumérées précédemment, nous pouvons donner les formules explicites des fonctions filament correspondantes :

- pour les lignes droites, la courbure c est identiquement nulle, donc $\psi \equiv 0$, $A \equiv 0$;
- pour les anneaux en translation uniforme, la courbure $c = c_0$ est constante, la torsion τ est identiquement nulle, donc $\psi(t, x) = \psi_0$ est constante et $A(t) = A_0 = c_0^2$;
- pour les hélices, $c = c_0$ et $\tau = \tau_0$ sont constantes, donc $\psi(t, x) = c_0 \exp(i\tau_0 x)$ et $A(t) = -2\tau_0^2 + c_0^2$;
- venons-en aux solutions auto-similaires. Pour χ_a définie au théorème 1.1, nous avons vu que $c_a(t, x) = a/\sqrt{t}$ et $\tau_a(t, x) = x/2t$. Donc

$$(14) \quad \psi_a(t, x) = \frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{ix^2}{4t}\right),$$

de sorte que $A(t) = a^2/t$ et ψ_a est solution de l'équation

$$(15) \quad i\partial_t \psi + \partial_{xx} \psi + \frac{\psi}{2} \left(|\psi|^2 - \frac{a^2}{t} \right) = 0.$$

Dans le formalisme de Hasimoto, les singularités de type coin pour le filament se traduisent par une masse de Dirac pour la fonction filament. Plus précisément, la fonction filament du filament constitué de deux demi-droites de directions A_- et A_+ , c'est-à-dire la limite $\chi_a(0, x)$ de $\chi_a(t, x)$ lorsque t tend vers zéro, est la mesure de Dirac

$$\psi_a(0, x) = a\delta_{x=0}.$$

De façon réciproque, la procédure présentée plus haut permet de construire, à partir de solutions explicites pour (S), de nouvelles solutions explicites mais plus complexes pour l'équation (B). C'est le cas par exemple de la solution en forme de filament avec propagation de solitons trouvée dans [H72] :

$$\psi(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\cosh(x - 2Nt)} \exp(-iN^2 t + iNx), \quad A(t) = -1, \quad \text{où } N \in \mathbb{R}.$$

4. FORMULATION DES PROBLÈMES DE STABILITÉ ET D'EXISTENCE AUTOUR DE LA DYNAMIQUE SINGULIÈRE

La clé des démonstrations des théorèmes 2.1, 2.2 et 2.4 tient dans la reformulation systématique des problématiques envisagées en termes de fonction filament et d'équation de Schrödinger. La difficulté majeure réside dans le fait que l'on considère des données – initiales ou finales, selon le point de vue – de type mesure de Dirac, qui n'appartiennent pas aux espaces de résolution usuels pour l'équation de Schrödinger non linéaire : pour tout $s \geq 0$, le problème de Cauchy est globalement bien posé dans H^s (voir les articles [GV79, CW90]) et mal posé lorsque $s < 0$ [KPV01]. Plus exactement, le problème est

mal posé lorsque la donnée initiale est la mesure de Dirac $a\delta_0$: sinon, l'unique solution serait $e^{ia^2 \ln t} \psi_a(t, x)$ qui n'a pas de limite en $t = 0$.

La *transformation pseudo-conforme* est un moyen d'ôter la mesure de Dirac dans la donnée initiale $\psi_a(0, x)$ et de se ramener à l'étude de la solution lorsque t tend vers l'infini. Elle consiste à poser, pour une solution ψ de (15),

$$(16) \quad \psi(t, x) = \mathcal{T}v(t, x) = \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \bar{v} \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right).$$

Alors la fonction v est solution de

$$(17) \quad i\partial_t v + \partial_{xx} v + \frac{v}{2t} (|v|^2 - a^2) = 0.$$

De plus, lorsque $\psi = \psi_a$, on a $v = a$.

Finalement, le problème de stabilité pour les solutions χ du flot par courbure bi-normale, autour des solutions auto-similaires χ_a au voisinage de la formation de la singularité, c'est-à-dire lorsque t tend vers zéro, peut ainsi se reformuler en les termes suivants. *Analyser le comportement des solutions de (17) de la forme $v = a + u$ lorsque t tend vers l'infini, lorsque la perturbation u appartient à un espace fonctionnel approprié, à une « petite norme » dans cet espace – au moins initialement, c'est-à-dire à $t = 1$ –, et vérifie l'équation*

$$(18) \quad i\partial_t u + \partial_{xx} u + \frac{a + u}{2t} (|a + u|^2 - a^2) = 0,$$

complétée éventuellement de la donnée initiale $u(1) = u_{\text{in}}$. Dans ce dernier cas, la fonction filament de la courbe correspondante χ_{in} à $t = 1$ est donnée par

$$(19) \quad \psi_{\text{in}}(x) = \psi(1, x) = ae^{i\frac{x^2}{4}} + u_{\text{in}}e^{i\frac{x^2}{4}}.$$

On convient de dire que la courbe χ_{in} est proche de $\chi_a(1)$ si u_{in} , ainsi que ses quatre premières dérivées, sont assez petites dans un espace fonctionnel approprié, défini dans (21) ci-dessous.

L'analyse de (18) comporte plusieurs volets, étudiés dans les différents articles [BV08, BV09, BV12, BV13, BV15] que nous rapportons ci-dessous. Les propriétés dites de « scattering »⁽⁷⁾ – opérateurs d'ondes, complétude asymptotique – liées au caractère dispersif de l'équation jouent un rôle central dans la démonstration du théorème 2.4, comme nous l'expliquerons au paragraphe 5.3 ci-après.

• *L'existence globale d'une solution de (18) dans $C([1, +\infty), H^1)$, pour toute donnée initiale $u_{\text{in}} \in H^1$, est établie dans [BV08]. Ce résultat repose sur l'énergie associée à (17),*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v|^2 dx + \frac{1}{4t} \int_{\mathbb{R}} (|v|^2 - a^2)^2 dx,$$

7. Diffusion en français, mais ce terme est davantage utilisé en anglais.

qui vérifie l'estimation de décroissance

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{4t^2} \int_{\mathbb{R}} (|v|^2 - a^2)^2 dx \leq 0.$$

• *La construction d'opérateurs d'ondes* fait l'objet de [BV09] sous des hypothèses de petitesse de a . Plus précisément, si $s \in \mathbb{N}$, soit u_+ petit dans l'espace $\dot{H}^{-2} \cap H^s \cap W^{s,1}$. Alors il existe une unique solution $u \in C([1, +\infty), H^s)$ de (18) telle que pour tout $1 \leq k \leq s$,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 1} \sqrt{t} \left\| u(t) - e^{ia^2 \ln \sqrt{t}} e^{i(t-1)\partial_{xx}} u_+ \right\|_{L^2} \\ & + \sup_{t \geq 1} t \left\| u(t) - e^{ia^2 \ln \sqrt{t}} e^{i(t-1)\partial_{xx}} u_+ \right\|_{\dot{H}^k} \leq C(a, u_+). \end{aligned}$$

On appelle u_+ *état final*. On parle de phénomène *longue portée* car la solution ainsi construite se comporte de façon asymptotique comme la solution de l'équation linéarisée de (18) avec donnée initiale u_+ à un facteur $e^{ia^2 \ln \sqrt{t}}$ près.

En particulier, ceci signifie que la fonction filament $\psi(t, x)$ se comporte comme

$$(20) \quad \frac{a}{\sqrt{t}} e^{i\frac{x^2}{4t}} + \frac{e^{ia^2 \ln \sqrt{t}} \widehat{u}_+}{\sqrt{4\pi i}} \left(-\frac{x}{2} \right)$$

lorsque t tend vers zéro. Nous verrons plus loin qu'en dépit de cette divergence, la courbe $\chi(t, x)$, ainsi que ses vecteurs tangent et normal, ont quant à eux une limite lorsque t tend vers zéro.

• *La complétude asymptotique* est établie dans [BV12] au sens suivant. Pour un certain $0 < \gamma < 1/2$, les auteurs introduisent l'espace

$$(21) \quad X^\gamma = \left\{ f \in L^2 \mid \xi \mapsto |\xi|^\gamma \widehat{f}(\xi) \in L^\infty([-1, 1]) \right\}.$$

Soit $s \in \mathbb{N}$ et soit u_{in} tel que $\partial_x^k u_{\text{in}}$ soit petit dans X^γ , pour tout $0 \leq k \leq s$. Alors il existe une unique solution globale u de (18) telle que $u(1) = u_{\text{in}}$ et $\partial_x^k u \in L^\infty((1, +\infty), X^\gamma) \cap L^4((1, +\infty), L^\infty)$. De plus, il existe $u_+ \in H^s$, avec $\partial_x^k u_+ \in X^\gamma$, tel que

$$\sup_{t \geq 1} t^\alpha \left\| u(t) - e^{ia^2 \ln \sqrt{t}} e^{i(t-1)\partial_{xx}} u_+ \right\|_{H^s} \leq C(a, u_{\text{in}}, \alpha),$$

pour tout $\alpha < 1/2 - \gamma$. En termes géométriques, ce résultat implique que *toute courbe* χ_{in} qui est proche de la courbe χ_a – au sens où la perturbation u_{in} a une norme petite dans X^γ , ainsi que ses dérivées – donne lieu à une solution régulière à $t > 0$ du flot par courbure binormale et qui développe une singularité de type coin à $t = 0$. Il s'agit là d'un premier résultat important de stabilité de la formation de la singularité, dont les caractéristiques géométriques ne sont à ce stade pas encore totalement précisées.

• *L'existence d'opérateurs d'ondes* est à nouveau étudiée dans [BV12], dans lequel les hypothèses d'appartenance à \dot{H}^{-2} et de petitesse de a de [BV09] sont levées. Il y est établi que si u_+ est tel que $\partial_x^k u_+$ est petit dans X^γ pour $0 \leq k \leq s$, il existe une unique

solution globale u de (18) telle que $\partial_x^k u \in L^\infty((1, +\infty), X^\gamma) \cap L^4((1, +\infty), L^\infty)$ et qui vérifie

$$\sup_{t \geq 1} t^\alpha \left\| u(t) - e^{ia^2 \ln \sqrt{t}} e^{i(t-1)\partial_{xx}} u_+ \right\|_{H^s} \leq C(a, u_+, \alpha),$$

pour tout $\alpha < 1/2 - \gamma$.

- Une description géométrique poussée de la formation de la singularité est fournie dans [BV13, Theorem 1.1]. Sous des hypothèses supplémentaires pour la perturbation u_{in} (appartenance à des espaces de Sobolev à poids), le comportement de la solution du flot binormal χ , construite à partir de la courbe χ_{in} dont la fonction filament à $t = 1$ est donnée par (19), est décrit de façon quantitative via des estimations pour les vecteurs tangent T et normal complexe N semblables à celles du théorème 2.1. En particulier, on retrouve la formation du même coin que pour χ_a à $t = 0$, pour toute perturbation initiale de $\chi_a(1)$. Ceci démontre donc que *la dynamique singulière des solutions auto-similaires χ_a est stable*.

5. ESQUISSES DE PREUVE

Le but de cette section est d’apporter des éléments de preuve des différents résultats présentés plus haut.

5.1. Scattering pour (18)

Ce paragraphe est dédié à la construction d’opérateurs d’ondes pour (18) : étant donné un certain profil asymptotique w , il s’agit de construire une solution u globale qui en est proche lorsque t tend vers l’infini. La stratégie usuelle, pour les équations de type Schrödinger non linéaires, consiste à chercher *un point fixe à l’infini*, autrement dit un point fixe u pour l’application résultant de la formule de Duhamel

$$(22) \quad u \mapsto w - i \int_t^{+\infty} e^{i(t-s)\partial_{xx}} \left(\frac{a+u}{2s} (|a+u|^2 - a^2) - (i\partial_t w + \partial_{xx} w)(s) \right) ds.$$

Si l’on cherche comme profil asymptotique une solution de l’équation de Schrödinger linéaire

$$w(t) = e^{it\partial_{xx}} u_+,$$

les termes *linéaires* du terme source – qui sont les plus délicats à contrôler – dans l’intégrale du membre de droite se comportent, lorsque t tend vers l’infini, comme

$$F_1(t, e^{it\partial_{xx}} u_+) = a^2 \int_t^{+\infty} e^{i(t-s)\partial_{xx}} \left(\frac{e^{is\partial_{xx}} u_+}{2s} \right) ds,$$

$$F_2(t, e^{it\partial_{xx}} u_+) = a^2 \int_t^{+\infty} e^{i(t-s)\partial_{xx}} \left(\frac{\overline{e^{is\partial_{xx}} u_+}}{2s} \right) ds.$$

À l'inverse du second terme, le premier terme linéaire F_1 est a priori source de difficultés, puisque dépourvu d'oscillations :

$$\int_t^{+\infty} \left\| e^{i(t-s)\partial_{xx}} \left(\frac{e^{is\partial_{xx}} u_+}{2s} \right) \right\|_{H^s} ds = \|u_+\|_{H^s} \int_t^{+\infty} \frac{1}{2s} ds = +\infty.$$

Ceci suggère de considérer le cas longue portée, en remplaçant u par $ue^{-ia^2 \ln \sqrt{t}}$, ce qui ramène à l'équation

$$(23) \quad i\partial_t u + \partial_{xx} u + \frac{a^2}{2t^{1+ia^2}} \bar{u} = F(t, u).$$

Ici, F est une fonction non linéaire en u qui n'implique que des termes cubiques et quadratiques. L'analyse des propriétés de scattering comporte dans un premier temps l'étude de l'équation linéaire correspondante

$$(24) \quad i\partial_t u + \partial_{xx} u + \frac{a^2}{2t^{1+ia^2}} \bar{u} = 0.$$

• **Premières estimations pour l'équation linéaire (24)**

On commence par des estimations établies dans [BV12, Lemme 2.1, Lemme 2.2], puis améliorées dans [BV13, Lemma 6.1], concernant la croissance des modes de Fourier pour l'équation linéaire.

LEMME 5.1. — *Soit u une solution de (24). Pour tout $\delta > 0$, il existe $C(\delta)$ tel que*

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(t, \xi)| &\leq C(\delta)t^\delta (|\widehat{u}(1, \xi)| + |\widehat{u}(1, -\xi)|), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 1, \\ |\widehat{u}(t, \xi)| &\leq \left(1 + \frac{C(\delta)}{|\xi|^\delta}\right) (|\widehat{u}(1, \xi)| + |\widehat{u}(1, -\xi)|), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \forall t \geq 1. \end{aligned}$$

PREUVE (esquisse) — La transformée de Fourier de (24) donne

$$i\partial_t \widehat{u}(t, \xi) - \xi^2 \widehat{u}(t, \xi) + \frac{a^2}{t^{1+ia^2}} \widehat{u}(t, \xi) = i\partial_t \widehat{u}(t, \xi) - \xi^2 \widehat{u}(t, \xi) + \frac{a^2}{t^{1+ia^2}} \overline{\widehat{u}(t, -\xi)} = 0.$$

En multipliant par $\overline{\widehat{u}(t, \xi)}$, puis en prenant la partie imaginaire, cela mène à

$$\frac{1}{2} \partial_t |\widehat{u}(t, \xi)|^2 = -a^2 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{t^{1+ia^2}} \overline{\widehat{u}(t, -\xi)} \widehat{u}(t, \xi) \right).$$

Ainsi,

$$(25) \quad \partial_t |\widehat{u}(t, \xi)| \leq \frac{a^2}{t} |\widehat{u}(t, -\xi)|,$$

et il en va de même en remplaçant ξ par $-\xi$. D'où, en appliquant le lemme de Gronwall à la fonction $t \mapsto |\widehat{u}(t, \xi)| + |\widehat{u}(t, -\xi)|$,

$$|\widehat{u}(t, \xi)| \leq t^{a^2} (|\widehat{u}(1, \xi)| + |\widehat{u}(1, -\xi)|).$$

Le fait qu'il soit possible d'obtenir une croissance polynomiale en t indépendante de a est démontré dans [BV13, Lemma 6.1], à l'aide de calculs de nature très technique portant sur les quantités $\widehat{\operatorname{Re} u}$ et $\widehat{\operatorname{Im} u}$. Nous les omettons ici.

Dans l'optique d'établir la propriété de complétude asymptotique, on déduit du lemme 5.1 une estimation pour le terme de Duhamel $F_2(t, u)$ correspondant à la *partie oscillante* du linéarisé de (18). Définissons, pour $t_2 \geq t_1 \geq 1$,

$$A_{t_1, t_2}(\xi) = \mathcal{F} \left(e^{-it_1 \partial_{xx}} F_2(t_1, u) - e^{-it_2 \partial_{xx}} F_2(t_2, u) \right) (\xi) = a^2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-i(t-s)\xi^2} \frac{\overline{\hat{u}(s, -\xi)}}{s^{1+ia^2}} ds.$$

Le lemme 2.5 dans [BV12] stipule alors que

LEMME 5.2. — *Soit u une solution de (24). Pour tout $\delta > 0$, il existe $C(\delta)$ tel que pour $\xi \neq 0$,*

$$|A_{t_1, t_2}(\xi)| \leq C(\delta) (1 + |\xi|^{-\delta}) \frac{|\widehat{u}(1, \xi)| + |\widehat{u}(1, -\xi)|}{t_1 \xi^2}.$$

PREUVE (esquisse) — Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} A_{t_1, t_2}(\xi) &= \frac{e^{it_2 \xi^2} \overline{\hat{u}(t_2, -\xi)}}{i \xi^2 t_2^{1+ia^2}} - \frac{e^{it_1 \xi^2} \overline{\hat{u}(t_1, -\xi)}}{i \xi^2 t_1^{1+ia^2}} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{is \xi^2}}{i \xi^2} \left(\frac{\partial_s \overline{\hat{u}(s, -\xi)}}{s^{1+ia^2}} - (1 + ia^2) \frac{\overline{\hat{u}(s, -\xi)}}{s^{2+ia^2}} \right) ds. \end{aligned}$$

D'après (25) et la seconde estimation du lemme 5.1, ceci implique que

$$|A_{t_1, t_2}(\xi)| \leq C \left(1 + \frac{C(\delta)}{|\xi|^\delta} \right) \frac{|\widehat{u}(1, \xi)| + |\widehat{u}(1, -\xi)|}{\xi^2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{s^2} \right)$$

et la conclusion s'ensuit.

• Scattering pour l'équation linéaire

L'estimation du lemme 5.2 suggère un traitement séparé des basses fréquences $|\xi| \leq 1$ et hautes fréquences $|\xi| \geq 1$. Ceci explique l'introduction de l'espace X^γ dans (21) ainsi que de son pendant pour les fonctions dépendant du temps

$$Y^\gamma = \left\{ f \in L^\infty([1, +\infty), L^2) \mid \|f\|_{Y^\gamma} = \sup_{t \geq 1} \left(\|f(t)\|_{L^2} + t^{-\gamma} \left\| |\xi|^\gamma \hat{f}(t, \xi) \right\|_{L^\infty([-1, 1])} \right) < +\infty \right\}.$$

Soit $u_{\text{in}} \in X^\gamma$. Nous savons déjà qu'il existe une solution globale unique u de (24) dans l'espace $C([1, +\infty), L^2)$ telle que $u(1) = u_{\text{in}}$. D'une part, la première estimation du lemme 5.1, avec $\delta = \gamma$, implique que

$$t^{-\gamma} \left\| |\xi|^\gamma \hat{u}(t, \xi) \right\|_{L^\infty([-1, 1])} \leq C(\gamma) \left\| |\xi|^\gamma \hat{u}(1) \right\|_{L^\infty([-1, 1])} \leq C(\gamma) \|u_{\text{in}}\|_{X^\gamma}.$$

D'autre part, d'après la seconde estimation de ce même lemme, en rappelant que $\gamma < 1/2$,

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(t)\|_{L^2} &= \|\hat{u}(t)\|_{L^2([-1, 1])} + \|\hat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])} \\ &\leq C(\gamma) \left\| |\xi|^{-\gamma} \right\|_{L^2([-1, 1])} \left\| |\xi|^\gamma \hat{u}(1) \right\|_{L^\infty([-1, 1])} + 2 \|\hat{u}(1)\|_{L^2} \leq C(\gamma) \|u_{\text{in}}\|_{X^\gamma}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $u \in Y^\gamma$ et que

$$(26) \quad \|u\|_{Y^\gamma} \leq C(\gamma) \|u_{\text{in}}\|_{X^\gamma}.$$

On en vient ensuite à la propriété de complétude asymptotique, équivalente au fait que $e^{-it\partial_{xx}}u(t)$ admet une limite lorsque t tend vers l'infini, soit encore à

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow +\infty} \|e^{-it_2\partial_{xx}}u(t_2) - e^{-it_1\partial_{xx}}u(t_1)\| = 0,$$

où la norme $\|\cdot\|$ désigne la norme L^2 ou H^s . D'après la formule de Duhamel, u est donnée par

$$u(t) = e^{it\partial_{xx}}u_+ - ia^2 \int_t^{+\infty} \frac{e^{i(t-s)\partial_{xx}}\bar{u}(s)}{2s^{1+ia^2}} ds,$$

et il s'ensuit que la transformée de Fourier de $e^{-it_2\partial_{xx}}u(t_2) - e^{-it_1\partial_{xx}}u(t_1)$ est précisément A_{t_1, t_2} .

En vertu du lemme 5.2, on a d'une part

$$\|A_{t_1, t_2}\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])} \leq C \frac{\|\widehat{u}(1)\|_{L^2}}{t_1} \leq C \frac{\|u_{\text{in}}\|_{X^\gamma}}{t_1}$$

et d'autre part

$$\|A_{t_1, t_2}\|_{L^2(1/t_1 \leq \xi^2 \leq 1)} \leq \frac{\|\|\xi\|^\gamma \widehat{u}(1)\|_{L^\infty([-1, 1])}}{t_1} \|\|\xi\|^{-2-\gamma-\delta}\|_{L^2(1/t_1 \leq \xi^2 \leq 1)} \leq C \frac{\|u_{\text{in}}\|_{X^\gamma}}{t_1^{1/4-(\gamma+\delta)/2}}.$$

Les autres régions $1/t_2 \leq \xi^2 \leq 1/t_1$ et $\xi^2 \leq 1/t_2$ sont traitées par des découpages judicieux utilisant à nouveau les estimations des lemmes 5.1 et 5.2. Finalement, on obtient effectivement que

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \|A_{t_1, t_2}\|_{L^2} = 0,$$

et la complétude asymptotique – ainsi que les taux de convergence énoncés plus haut – en découlent. On renvoie au paragraphe 2 de [BV12] pour les détails.

• Scattering pour l'équation non linéaire (23)

Afin d'établir les propriétés de scattering pour l'équation non linéaire, on considère cette dernière comme une *perturbation de l'équation linéaire* en cherchant la solution sous la forme

$$u(t) = S(t, 1)u_{\text{in}} + \int_1^t S(t, s)F(s, u(s)) ds,$$

où $S(t, t_0)f$ désigne la solution de (24) issue de f à $t = t_0$. Cette analyse est effectuée au paragraphe 3 de [BV12] à l'aide des estimations précédentes pour $S(t, 1)$. En particulier, le corollaire 3.3 établit que si $\partial_x^k \bar{u}$ est de petite norme dans X^γ pour $0 \leq k \leq s$, alors la solution u vérifie l'estimation analogue à (26) dans le cas linéaire pour $s = 0$:

$$(27) \quad \sum_{k=0}^s \|\partial_x^k u\|_{Y^\gamma \cap L^4([1, +\infty), L^\infty)} \leq C(a) \sum_{k=0}^s \|\partial_x^k u_{\text{in}}\|_{X^\gamma}.$$

5.2. Comportement asymptotique des vecteurs tangent et normal : preuve du théorème 2.1

Soit χ_{in} une courbe de \mathbb{R}^3 comme dans le théorème 2.1, c'est-à-dire telle que la fonction filament associée vérifie (19) pour une fonction u_{in} telle que $\partial_x^k u_{\text{in}}$ soit assez petite dans X^γ pour tout $0 \leq k \leq 4$. D'après ce qui précède, il existe une solution globale $u \in Y^\gamma$ correspondante, et il existe $u_+ \in X^\gamma$ tel que u soit proche de $e^{ia^2 \ln \sqrt{t}} e^{it\partial_{xx}} u_+(x)$ lorsque t tend vers l'infini. Soit $v = a + u$, puis définissons ψ pour $t \in (0, 1]$ par la transformation pseudo-conforme (16), soit par

$$(28) \quad \psi(t, x) = \frac{e^{i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} (a + \bar{u}) \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right).$$

Enfin, construisons des vecteurs tangent et normal en résolvant le système (10) pour $t \in (0, 1]$ avec comme donnée initiale $(T, N)(1, 0) = (e_1, e_2 + ie_3)$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de \mathbb{R}^3 . Puis, posons $M_0 = 0$ et définissons $\chi(t, \cdot)$ pour $t \in (0, 1]$ par la formule (11); ainsi, on a $\chi(0, 0) = 0$.

• Comportement asymptotique de $T(t, \cdot)$ et $N(t, \cdot)$

Le but de ce paragraphe est d'obtenir les estimations du théorème 2.1 pour $T(t, x)$ et $N(t, x)$ lorsque $t \in (0, 1]$ est fixé et $|x|$ tend vers l'infini. En intégrant le système (10) par rapport à x , avec ψ donné par (28), on a par intégration par parties

$$\begin{aligned} & T(t, x_2) - T(t, x_1) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-i\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{t}} (a + u) \left(\frac{1}{t}, \frac{y}{t} \right) N(t, y) dy \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(2i\sqrt{t} \int_{x_1}^{x_2} \partial_y \left(e^{-i\frac{y^2}{4t}} \right) \frac{a + u \left(\frac{1}{t}, \frac{y}{t} \right)}{y} N(t, y) dy \right) \\ &= -\operatorname{Re} \left(2i\sqrt{t} \int_{x_1}^{x_2} e^{-i\frac{y^2}{4t}} \frac{1}{t} \partial_y u \left(\frac{1}{t}, \frac{y}{t} \right) \frac{N(t, y)}{y} dy \right) - \operatorname{Re} \left(2it \int_{x_1}^{x_2} \bar{\psi}(t, y) \frac{-N(t, y)}{y^2} dy \right) \\ &\quad - \operatorname{Re} \left(2it \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{\psi}(t, y)}{y} \partial_y N(t, y) dy \right) - \operatorname{Im} \left(2t \frac{\bar{\psi}(t, x_2)}{x_2} \right) + \operatorname{Im} \left(2t \frac{\bar{\psi}(t, x_1)}{x_1} \right). \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau (10) pour N , on obtient

$$\begin{aligned} & T(t, x_2) - T(t, x_1) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{2}{\sqrt{t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-i\frac{y^2}{4t}} \partial_y u \left(\frac{1}{t}, \frac{y}{t} \right) \frac{N(t, y)}{y} dy \right) + \operatorname{Im} \left(2t \int_{x_1}^{x_2} \bar{\psi}(t, y) \frac{-N(t, y)}{y^2} dy \right) \\ &\quad - \operatorname{Im} \left(2t \frac{\bar{\psi}(t, x_2)}{x_2} \right) + \operatorname{Im} \left(2t \frac{\bar{\psi}(t, x_1)}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Puisque $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, on a $\|\psi\|_{L^\infty} \leq C(a + \|u(1/t)\|_{H^1})/\sqrt{t}$, ainsi

$$\left| T(t, x_2) - T(t, x_1) - \operatorname{Im} \left(\frac{2}{\sqrt{t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-i\frac{y^2}{4t}} \partial_y u \left(\frac{1}{t}, \frac{y}{t} \right) \frac{N(t, y)}{y} dy \right) \right| \leq C \frac{\sqrt{t}}{x_1} (a + \|u(1/t)\|_{H^1}).$$

Puisque $\partial_x u(1/t) \in L^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz implique que

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} e^{-i\frac{y^2}{4t}} \partial_y u \left(\frac{1}{t}, \frac{y}{t} \right) \frac{N(t, y)}{y} dy \right| \leq \frac{C \|\partial_x u(1/t)\|_{L^2}}{\sqrt{|x_1|}}.$$

En faisant tendre x_2 vers l'infini, on obtient donc l'existence de vecteurs $T_+^\infty(t)$ et $T_-^\infty(t)$ qui vérifient les estimations du théorème 2.1. Le fait qu'ils s'avèrent indépendant de t est démontré au paragraphe 3.2 de [BV13]. Les comportements asymptotiques pour N sont déterminés au paragraphe 3 de [BV13] par des arguments similaires.

• **Comportement de $T(\cdot, x)$ et de $N(\cdot, x)$ pour $x \neq 0$ lorsque t tend vers zéro**

L'existence de $T_0 \in L^\infty$ tel que $T(t, x)$ converge vers $T_0(x)$ pour $x \neq 0$ selon les estimations du théorème 2.1 fait l'objet de [BV15, Proposition 3.6] (voir aussi [BV13-a, Par. 3.2.2]). Dans [BV13, Par. 4], il est également établi que

$$(29) \quad |T(t, x) - T_0(x)| \leq C(\|D^k u\|_{X^\gamma}) P\left(\frac{\sqrt{t}}{|x|}\right),$$

où $P(z)$ est une combinaison linéaire de z^k , $1 \leq k \leq 4$.

De plus, le comportement du repère parallèle (N, T) peut être précisé. Posons

$$\tilde{N}(t, x) = N(t, x) \exp(ia^2 \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)).$$

Alors d'après [BV15, Par. 3.2], il existe une limite de $\tilde{N}(t, x)$ lorsque t tend vers zéro, et de plus, à rotation près :

$$(30) \quad \begin{cases} \tilde{N}_0(x) = N^\infty + \int_x^\infty \widehat{u}_+ \left(\frac{y}{2}\right) e^{ia^2 \ln|y|} T_0(y) dy, \\ T_0(x) = T^\infty - \operatorname{Re} \left(\int_x^\infty \widehat{u}_+ \left(\frac{y}{2}\right) e^{-ia^2 \ln|y|} \widehat{N}_0(y) dy \right), \quad \forall x > 0, \end{cases}$$

et les formules analogues ont lieu pour $x < 0$. Ces égalités sont basées sur le résultat de complétude asymptotique décrit par (20).

• **Comportement de χ lorsque t tend vers zéro**

Rappelons que $c(t) = |\psi(t)|$, donc $\|c(t)\|_{L^\infty} \leq C(\|Du\|_{X^\gamma})/\sqrt{t}$. Puisque $\partial_t \chi = cb$, ceci implique que $\chi(t)$ a bien une limite χ_0 lorsque t tend vers zéro, et de plus

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\chi(t, x) - \chi_0(x)| \leq \int_0^t \|c(s)\|_{L^\infty} ds \leq C(\|Du\|_{X^\gamma})\sqrt{t}.$$

• **Formation de l'angle de T_0**

On ébauche la preuve du dernier point du théorème 2.1, à savoir la formation de l'angle à $t = 0$ et $x = 0$. On renvoie à la démonstration de la proposition 5.1 dans [BV13] pour les détails. Puisque $u \in L^4([1, +\infty), L^\infty)$ (voir (27)), il existe une suite (t_n) qui tend vers zéro telle que $\|u(1/t_n)\|_{L^\infty}$ tend vers zéro. Introduisons les fonctions d'une variable

$$T_n(x) = T(t_n, \sqrt{t_n}x), \quad N_n(x) = N(t_n, \sqrt{t_n}x), \quad x \neq 0,$$

où t_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. On se focalise ainsi sur la limite en $(0, 0)$ selon une direction bien particulière. En insérant l'expression (28) dans le système (10), on a

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= \sqrt{t_n} \operatorname{Re} \left(\bar{\psi}(t_n, \sqrt{t_n}x) N_n(x) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(a e^{i\frac{x^2}{4}} N_n(x) \right) + \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{x^2}{4}} u \left(\frac{1}{t_n}, \frac{x}{\sqrt{t_n}} \right) N_n(x) \right), \\ N'_n(x) &= -\sqrt{t_n} \psi(t_n, \sqrt{t_n}x) T_n(x) = -a e^{i\frac{x^2}{4}} T_n(x) - e^{i\frac{x^2}{4}} u \left(\frac{1}{t_n}, \frac{x}{\sqrt{t_n}} \right) T_n(x). \end{aligned}$$

Comme $|T_n(x)| = 1$ et $|N_n(x)| = 2$, le théorème d'Ascoli-Arzelà assure l'existence d'une sous-suite telle que $(T_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(N_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur les compacts de \mathbb{R}^* vers une solution (T_*, N_*) du système

$$\begin{cases} T'_*(x) = \operatorname{Re} \left(a e^{i\frac{x^2}{4}} N_*(x) \right) \\ N'_*(x) = -a e^{i\frac{x^2}{4}} T_*(x), \quad \text{pour } x \neq 0. \end{cases}$$

Ainsi, $\left(T_*(x), \operatorname{Re} \left(e^{-i\frac{x^2}{4}} N_*(x) \right), \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{x^2}{4}} N_*(x) \right) \right)$ est le repère de Serret-Frenet d'une courbe dont la courbure et la torsion sont données par a et $x/2$ respectivement pour $x \neq 0$. D'une part, l'étude réalisée par [GRV03] pour un tel système implique qu'à rotation et translation près, on a le comportement asymptotique lorsque x tend vers l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T_*(x) = A_{\pm};$$

D'autre part, on a pour $x \neq 0$

$$T_*(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (T(t_n, \sqrt{t_n}x) - T_0(\sqrt{t_n}x)) + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_0(\sqrt{t_n}x),$$

où

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T(t_n, \sqrt{t_n}x) - T_0(\sqrt{t_n}x)| \leq \frac{C}{|x|}$$

d'après (29). Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} T_0(x) = A_{\pm}.$$

5.3. Preuve du théorème 2.4

Considérons la solution auto-similaire χ_a du théorème 1.1, dont l'asymptotique en $t = 0$ est le filament (3) dont l'angle est donné par celui de χ_0 , c'est-à-dire par les directions des vecteurs A_+ et A_- . Par ailleurs, les vecteurs B_{\pm} désignent les limites des vecteurs normaux complexes :

$$B_{\pm} = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{N}(t, x).$$

L'argument central de [BV15] consiste à considérer la courbe χ_0 comme un *état final* pour une courbe construite par le théorème 2.1 comme perturbation de χ_a , à partir

d'une solution globale u de l'équation (18). L'état final u_+ vérifie nécessairement le système (30). Ceci amène à raisonner selon les étapes décrites brièvement ci-dessous.

- **Construction de l'état final**

Dans un premier temps, on trouve une solution (\tilde{N}_0, g) aux systèmes suivants :

$$(31) \quad \begin{cases} \partial_x T_0(x) = -\operatorname{Re} \left(g(x) \tilde{N}_0(x) \right) \\ \partial_x \tilde{N}_0(x) = -\bar{g}(x) T_0(x), \quad \forall x > 0, \\ (\tilde{N}_0, T_0)(0) = (B_+, A_+) \end{cases}$$

et

$$(32) \quad \begin{cases} \partial_x T_0(x) = -\operatorname{Re} \left(g(x) \tilde{N}_0(x) \right) \\ \partial_x \tilde{N}_0(x) = -\bar{g}(x) T_0(x), \quad \forall x < 0, \\ (\tilde{N}_0, T_0)(0) = (B_-, A_-). \end{cases}$$

D'après la remarque 3.1 et la caractérisation (8) du repère parallèle, il s'ensuit que $|g(x)| = c(x)$ est précisément la courbure de χ_0 . En accord avec (30), définissons

$$(33) \quad u_+(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(g(2 \cdot) |2 \cdot|^{ia^2} \right).$$

- **Construction d'une solution globale**

Au vu des hypothèses pour c , la fonction u_+ appartient à l'espace X^γ pour $0 < \gamma < 1/2$ et ses quatre premières dérivées y sont assez petites par rapport à a . Ainsi, d'après l'existence d'opérateurs d'ondes de [BV12], il existe une solution globale u de l'équation (18) qui admet u_+ comme état final. De cette solution u sur $[1, +\infty)$ découle une fonction filament ψ sur $(0, 1]$ qui elle-même donne lieu à une solution χ du flot binormal selon le procédé décrit plus haut (voir (11)).

- **Donnée initiale retrouvée**

Finalement, il ne reste plus qu'à vérifier que χ a bien χ_0 comme donnée initiale. Les arguments de la preuve du théorème 2.1 appliqués à χ impliquent l'existence d'une trace (T^0, \tilde{N}^0) pour le repère parallèle associé à $\chi(t, \cdot)$ lorsque t tend vers zéro. En outre, il existe d'après [BV13, Par. 5] une rotation, notée R , telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} RT^0(x) = A_\pm, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} R\tilde{N}^0(x) = B_\pm.$$

De plus, $(RT^0, R\tilde{N}^0)$ vérifie le système (30). Donc, par définition de u_+ et de g , $(RT^0, R\tilde{N}^0)$ vérifie les mêmes systèmes (31)-(32) que (T_0, \tilde{N}_0) . Il s'ensuit que $(RT^0, R\tilde{N}^0) = (T_0, \tilde{N}_0)$, puis que la courbe $R\chi$ satisfait aux conclusions du théorème 2.4.

5.4. Preuve du théorème 2.2

Celle-ci est détaillée au paragraphe 3.4 de l'article [BV15] et repose sur des arguments géométriques d'une part, et sur le fait que l'équation (B) est réversible en ce sens que $(t, x) \mapsto \chi(-t, -x)$ est également une solution lorsque χ l'est. Dès lors, le théorème 2.4 permet de trouver une solution unique pour $t \in (0, 1]$ avec donnée initiale $\chi_0^* : x \mapsto \chi_0(-x)$, notée χ^* . Puis, la courbe paramétrée définie par $\tilde{\chi} : (t, x) \mapsto \chi^*(-t, -x)$ pour $t \in [-1, 0)$ et par $\chi(t, x)$ pour $t \in (0, 1]$ convient.

RÉFÉRENCES

- [AH65] R.-J. ARMS et F.-R. HAMA – *Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring*, Phys. Fluides (1965), 553.
- [BV08] V. BANICA et L. VEGA – *On the Dirac delta as initial condition for nonlinear Schrödinger equations*, Ann. I. H. Poincaré, An. Non. Lin. **25** (2008), 697–711.
- [BV09] V. BANICA et L. VEGA – *On the stability of a singular vortex dynamics*, Comm. Math. Phys. **286** (2009), 593–627.
- [BV12] V. BANICA et L. VEGA – *Scattering for 1D cubic NLS and singular vortex dynamics*, J. Eur. Math. Soc. **14** (2012), 209–253.
- [BV13] V. BANICA et L. VEGA – *Stability of the self-similar dynamics of a vortex filament*, Arch. Ration. Mech. Anal. **210** (2013), 673–712.
- [BV13-a] V. BANICA et L. VEGA – *Evolution by the vortex filament equation of curves with a corner*, Journées Équations aux dérivées partielles, Biarritz 2013, Exp. No. 1, 18 p.
- [BV15] V. BANICA et L. VEGA – *The initial value problem for the binormal flow with rough data*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **48** (2015), 1421–1453.
- [BV16] V. BANICA et L. VEGA – Communication personnelle, 2016.
- [B88] T.F. BUTTKE – *A numerical study of superfluid turbulence in the self-induction approximation*, J. Comput. Phys. **76(2)** (1988), 301–326.
- [CDS12] R. CARLES, R. DANCHIN et J.-C. SAUT – *Madelung, Gross-Pitaevskii and Korteweg*, Nonlinearity **25** (2012), no. 10, 2843–2873.
- [CW90] T. CAZENAVE et F.-B. WEISSLER – *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation*, Non. Anal. TMA **14** (1990), 807–836.
- [CSU00] N.H. CHANG, J. SHATAH et K. UHLENBECK – *Schrödinger maps*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), no. 5, 590–602.
- [DR1906] L.-S. DA RIOS – *On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape*, Rend. Circ. Mat. Palermo **22** (1906), 117.

- [DW01] W. DING et Y. WANG – *Local Schrödinger flow into Kähler manifolds*, Sci. China Ser. A **44** (2001), no. 11, 1446–1464.
- [DLHV15] F. DE LA HOZ et L. VEGA – *Vortex filament equation for a regular polygon*, prépublication, 2013.
- [GV79] J. GINIBRE et G. VELO – *On a class of nonlinear Schrödinger equations. II Scattering theory, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 33–71.
- [GRV03] S. GUTTIÉRREZ, J. RIVAS et L. VEGA – *Formation of singularities and self-similar vortex motion under the localized induction approximation*, Comm. Part. Diff. Eq. **28** (2003), 927–968.
- [GDL15] S. GUTTIÉRREZ et A. de LAIRE – *Self-similar solutions of the one-dimensional Landau-Lifshitz-Gilbert equation*, Nonlinearity **28(5)** (2015), 1307–1350.
- [H72] H. HASIMOTO – *A soliton in a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), 477–485.
- [J02] R.-L. JERRARD – *Vortex filament dynamics for Gross-Pitaevsky type equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **15** (2002), 733–768.
- [JS16] R.-L. JERRARD et C. Seis – *On the vortex filament conjecture for Euler flows*, prépublication, 2016.
- [JS12] R.-L. JERRARD et D. SMETS – *On Schrödinger maps from T^1 to S^2* , Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **45** (2012), 637–680.
- [JS15] R.-L. JERRARD et D. SMETS – *On the motion of a curve by its binormal curvature*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 6, 1487–1515.
- [KPV01] C. KENIG, G. PONCE et L. VEGA – *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*, Duke Math. J. **106** (2001), 617–633.
- [KMD95] R. KLEIN, A. MAJDA et K. DAMODARAN – *Simplified equations for the interaction of nearly parallel vortex filaments*, J. Fluid Mech. **288** (1995), 201–248.
- [K95] N. KOISO – *Vortex filament equation and semilinear Schrödinger equation*, Nonlinear waves (Sapporo, 1995), 231–236.
- [LD81] M. LAKSHMANAN et M. DANIEL – *On the evolution of higher dimensional Heisenberg continuum spin systems*, Physics A **107** (1981), 533–552.
- [LRT76] M. LAKSHMANAN, T.W. RUIJGROK et C.J. THOMPSON – *On the dynamics of a continuum spin system*, Physics A **84** (1976), 577–590.
- [LI02] T. LIPNIACKI – *Quasi-static solutions for quantum vortex motion under the localized induction approximation*, J. Fluid Mech. **477** (2002), 321–337.
- [LI03] T. LIPNIACKI – *Shape-preserving solutions for quantum vortex motion*, Phys. Fluids **15(6)**, 2003.
- [M27] E. MADELUNG – *Quanten theorie in Hydrodynamischer Form*, Zeit. F. Physik **40** (1927), 322.

- [NSVZ06] A. NAHMOD, J. SHATAH, L. VEGA et C. ZENG – *Schrödinger maps and their associated frame systems*, Int. Math. Res. Not. IMRN **21** (2007), 29 pp.
- [P06] G. PONCE – *On the stability of nearly parallel vortex filaments*, J. Dynam. Differential Equations **18** (2006), 551–575.
- [S85] K. W. SCHWARTZ – *Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He : Line-line and line-boundary interactions*, Phys. Rev B **31** (1985), 5782–5804.
- [S13] D. SMETS – *A stability estimate and numerical curiosities related to the flow of a curve by its binormal curvature*, Notes de l'exposé au workshop “RIMS” *Progress in Variational Problems*, Kyoto, 2012.

Evelyne MIOT

Institut Fourier

Université Grenoble-Alpes

UMR 5582 du CNRS

F-38402 Saint Martin d'Hères

E-mail : evelyne.miot@univ-grenoble-alpes.fr