Séminaire BOURBAKI Janvier 2016
68ème année, 2015-2016, n^o 1109

PROGRÈS RÉCENTS DANS LA THÉORIE DE LANGLANDS GÉOMÉTRIQUE

par **Dennis GAITSGORY**

1. INTRODUCTION

Dans cet exposé on fixe une courbe algébrique X (supposée lisse, connexe et complète) et un groupe réductif G au-dessus d'un corps de base k.

Quand on parlera de relations avec la théorie de Langlands classique (c'est-à-dire la théorie de fonctions automorphes), on prendra $k = \mathbb{F}_q$. Quand on parlera de la théorie de Langlands géométrique *catégorique*, on supposera que k est de caractéristique 0.

1.1. La perspective historique

Ce que l'on appelle aujourd'hui la *théorie de Langlands géométrique* a ses origines dans les idées de quatre personnes : A. Beilinson, P. Deligne, V. Drinfeld et G. Laumon.

1.1.1. — La première observation a été faite par Deligne. Il a remarqué que l'on peut démontrer l'existence du Grössencharakter correspondant à un caractère non ramifié du groupe de Galois d'un corps de fonctions en utilisant des méthodes algébro-géométriques. Voici son idée :

On peut interpréter un Grössencharakter (non ramifié) du corps global correspondant à X comme une fonction sur l'ensemble (ou plutôt, le groupoïde) des $\mathbb{F}_q$-points du champ de Picard de X (noté $\mathrm{Pic}(X)$). La construction de cette fonction à partir d'un caractère galoisien σ procède en les deux étapes suivantes.

La première étape associe à σ un faisceau ℓ-adique sur $\mathrm{Pic}(X)$, que l'on va noter $\mathcal{F}_\sigma$. La deuxième étape associe à $\mathcal{F}_\sigma$ une fonction sur $(\mathrm{Pic}(X))(\mathbb{F}_q)$ en utilisant la correspondance faisceaux$\to$fonctions de Grothendieck, c'est-à-dire en prenant les traces de Frobenius.

La construction de $\mathcal{F}_\sigma$ est de nature géométrique. On interprète σ comme un système local (ℓ-adique) de rang 1 sur X, que l'on note E_σ. À la donnée de E_σ et un entier $d \geq 0$, on associe la *puissance symétrique* de E_σ, notée $E_\sigma^{(d)}$, qui est un système local (ℓ-adique) de rang 1 sur le schéma $X^{(d)}$ paramétrisant les diviseurs effectifs sur X de degré d. (Le faisceau $E_\sigma^{(d)}$ est naturel du point de vue de la théorie des nombres : la fonction correspondant à $E_\sigma^{(d)}$ est la fonction construite à partir de σ sur l'ensemble des diviseurs effectifs.)

Puis on considère l'application d'Abel-Jacobi

$$X^{(d)} \to \mathrm{Pic}(X)$$

et notre but est de démontrer qu'il existe un faisceau ℓ-adique $\mathcal{F}_\sigma$ sur $\mathrm{Pic}(X)$, tel que, si on le tire en arrière sur $X^{(d)}$, on obtient $E_\sigma^{(d)}$. Il est facile de voir qu'il suffit de démontrer l'existence de $\mathcal{F}_\sigma$ sur les composants connexes $\mathrm{Pic}^d(X)$ de $\mathrm{Pic}(X)$ pour d grand (c'est-à-dire $d \geq d_0$ pour un entier d_0 fixé).

L'observation principale est que, pour $d > 2g-2$ (où g est le genre de X), l'application $X^{(d)} \to \mathrm{Pic}^d(X)$ est une fibration lisse dont les fibres sont simplement-connexes. Ce fait garantit l'existence (et l'unicité) de la descente de $E_\sigma^{(d)}$ sur $\mathrm{Pic}^d(X)$.

1.1.2. — Après le cas où σ est de rang 1 expliqué ci-dessus, Drinfeld a publié son article [Dr] où il considère le cas d'une représentation galoisienne σ de rang 2, à laquelle on veut associer une fonction automorphe cuspidale non ramifiée pour le groupe GL_2.

La stratégie générale de la construction de Drinfeld coïncide avec celle de Deligne : on interprète l'espace automorphe non ramifié comme le groupoïde des $\mathbb{F}_q$-points de l'espace des modules $\mathrm{Bun}_2 := \mathrm{Bun}_{GL_2}$ classifiant les fibrés vectoriels de rang 2 sur X. Drinfeld cherche à associer à σ un faisceau ℓ-adique $\mathcal{F}_\sigma$ sur Bun_2, et ensuite obtenir sa fonction automorphe en prenant les traces de Frobenius.

La différence principale entre le cas de Drinfeld et celui de Deligne (qui correspond au groupe $\mathbb{G}_m = GL_1$) est que la construction de $\mathcal{F}_\sigma$ à partir de E_σ est énormément plus compliquée. L'acteur intermédiaire, la puissance symétrique $E_\sigma^{(d)}$, est maintenant interprété comme un faisceau ℓ-adique qui tient compte des coefficients de *Whittaker* (en d'autres termes, de Fourier) de $\mathcal{F}_\sigma$. Donc notre but est de reconstruire un objet automorphe à partir de ces coefficients de Fourier. Finalement, on réalise cela en utilisant le même agrument géométrique : le fait que les fibres d'une certaine application sont simplement-connexes.

1.1.3. — Après l'article de Drinfeld est paru celui Laumon, [Lau1], qui a proposé une extension conjecturale de la construction de Drinfeld du cas de GL_2 au cas de GL_n pour n quelconque. À notre connaissance, c'est dans le titre de l'article de Laumon qu'est apparue pour la première fois l'expression « Langlands géométrique ».

Tandis que le but déclaré de l'article de Drinfeld était de construire une *fonction automorphe*, l'article de Laumon avait comme conséquence un changement de cet objectif : la communauté des mathématiciens commençait à s'intéresser aux *faisceaux automorphes* (c'est-à-dire aux faisceaux ℓ-adiques sur $\mathrm{Bun}_n(X)$), comme à des objets qui méritent en eux-mêmes une étude indépendante.

Suite à la publication de l'article de Laumon, il est devenu progressivement clair que l'on devrait essayer d'aborder le cas de $\mathrm{Bun}_G(X)$ pour un groupe réductif quelconque, même s'il n'était pas évident de savoir comment on pouvait le faire (car le modèle de Whittaker ne marche pas aussi bien en dehors du cas de $G = GL_n$).

1.1.4. — Le changement suivant de paradigme est intervenu dans le travail de Beilinson et Drinfeld, [BD]. Ils ont considéré l'espace des modules $\mathrm{Bun}_G(X)$ au-dessus d'un corps de base de caractéristique 0, et au lieu des faisceaux ℓ-adiques, ils ont proposé de considérer un autre cadre faisceautique – la catégorie des D-modules.

Quand on travaille avec la catégorie des D-modules, une nouvelle méthode pour construire des objets est disponible : on peut définir un D-module par *générateurs et relations.* Une version raffinée du principe des « générateurs et relations » est le *foncteur de localisation*, qui avait été inventé dans [BB] comme un lien entre les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et les D-modules sur l'espace des drapeaux du groupe G. Dans le cas de $\mathrm{Bun}_G(X)$, on construit des D-modules automorphes à partir de représentations de l'algèbre de Lie Kac-Moody correspondant à $\mathfrak{g}$ (cette dernière est l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales d'un G-fibré sur un disque épointé).

1.1.5. — Dans un développement indépendant, dans l'article [Lau2], Laumon a montré que si on prend G égal à un tore T, une version généralisée de la transformation de Fourier-Mukaï identifie la catégorie (dérivée) des D-modules sur $\mathrm{Bun}_T(X)$ avec la catégorie (dérivée) des faisceaux quasi cohérents sur le champ $\mathrm{LocSys}_{\check{T}}(X)$ classifiant les *systèmes locaux au sens de de Rham* sur X par rapport à $\check{T}$, où ce dernier est le tore dual de T au sens de Langlands.

Autrement dit, ce deuxième article de Laumon étend la correspondance de Langlands *point-par-point* (c'est-à-dire, la construction de $\mathcal{F}_\sigma$ correspondant à un système local σ fixé) à un énoncé concernant la famille universelle des systèmes locaux.

1.1.6. — Finalement, en combinant l'équivalence des catégories pour un tore mentionnée ci-dessus avec tous les travaux précédents, Beilinson et Drinfeld ont proposé l'idée de *l'équivalence de Langlands géométrique catégorique* pour un G quelconque.

Grossièrement, cette dernière doit être une équivalence entre la catégorie (dérivée) $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ des D-modules sur $\mathrm{Bun}_G(X)$ et la catégorie (dérivée) $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ des faisceaux quasi cohérents sur $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$.

Une telle équivalence est ce que Beilinson et Drinfeld ont appelé le *best hope* (« le rêve le plus optimiste »), mais ils ne l'ont jamais formulée explicitement, car il était déjà connu à l'époque que cette équivalence ne peut pas exister « telle quelle » (la raison pour cela sera indiquée dans la section 3.1.2).

1.2. La perspective contemporaine

La théorie de Langlands géométrique consiste aujourd'hui en un certain ensemble de méta-problèmes, dont on va décrire quelques-uns ci-dessous. L'ordre dans lequel nous les présenterons sera un reflet (selon notre perception) du développement historique (et du niveau croissant de la complexité technique) plutôt que de la façon dont on aurait présenté une théorie mathématique complète (par exemple, à notre avis, le cas de la théorie de Langlands géométrique *quantique*, que nous allons à peine mentionner, est plus fondamental que le cas classique, c'est-à-dire non quantique).

Nous n'allons considérer que la théorie de Langlands géométrique *catégorique* ; en particulier, nous allons supposer que le corps de base est de caractéristique 0, et du côté automorphe, nous allons travailler avec des D-modules plutôt qu'avec des faisceaux ℓ-adiques.

Avant de démarrer, faisons la remarque que toutes les conjectures et méta-conjectures que nous allons mentionner ci-dessous sont des théorèmes quand le groupe G est un tore, grâce aux diverses généralisations de la transformation de Deligne-Fourier-Mukaï-Laumon.

1.2.1. — Tout d'abord on a la *théorie de Langlands géométrique globale non ramifiée catégorique* (1). Cette théorie est une tentative pour formuler et démontrer le *best hope* de Beilinson et Drinfeld mentionné ci-dessus. Autrement dit, on voudrait trouver une catégorie qui soit un cousin proche (ou un jumeau identique) de $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ et qui soit équivalente à un cousin proche de $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$.

C'est l'aspect de la théorie de Langlands géométrique qui est le plus développé. On va le décrire dans les sections 2 et 3.

1.2.2. — Puis on a la théorie de Langlands géométrique *locale ramifiée.* Contrairement au cas global, dans la version locale on s'intéresse à une équivalence de *2-catégories.* Pendant une période assez longue on ne savait même pas quel devait être l'analogue du *best hope* dans cette situation : il n'était pas clair de déterminer la 2-catégorie à considérer du côté galoisien. Cependant, une percée a été récemment accomplie par S. Raskin dans [Ras]. On la discutera dans la section 4.

Il convient de remarquer ici que le cas de la ramification modérée de la théorie locale avait été traité par R. Bezrukavnikov dans [Bez] avant que le programme général soit formulé.

1.2.3. — Le troisième aspect est la théorie globale ramifiée. Le cas où la ramification est modérée n'a pas été développé en détail. Cependant, l'état courant des connaissances devrait permettre de l'amener au même statut que le cas non ramifié.

Le cas ramifié général est complètement ouvert, et il faut surmonter des difficultés formidables avant de commencer les recherches dans ce domaine. L'une de ces difficultés est que l'on ne sait pas si la catégorie du côté automorphe, c'est-à-dire la catégorie (dérivée) des D-modules sur l'espace des modules $\mathrm{Bun}_G(X)^{k\cdot x}$ classifiant les G-fibrés sur X *munis d'une structure de niveau* $k \geq 1$ *en un point* x, est compactement engendrée (2).

1.2.4. — Finalement, les trois aspects mentionnés ci-dessus (global non ramifié, local ramifié et global ramifié) admettent des versions *quantiques.* Le paramètre quantique dans la *théorie de Langlands géométrique quantique* est une forme bilinéaire symétrique

1. Dorénavant, on laissera tomber l'adjectif « catégorique » parce que tout sera catégorique.
2. Si on regarde la littérature, dans la plupart des énoncés démontrant une équivalence de deux catégories DG/triangulées, les catégories en question sont compactement engendrées. La raison pour cela est que l'on n'a pas de bonne méthode pour faire des calculs en dehors de ce cas-là.

W-invariante non dégénérée sur la sous-algèbre de Lie de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, dont l'inverse est une donnée de la même sorte pour $\check{\mathfrak{g}}$.

Au risque de faire une proclamation controversée, l'auteur voudrait avouer qu'il en est venu à regarder la version quantique comme une raison ultime pour que « quelque chose comme la théorie de Langlands ait lieu », tandis que la théorie de Langlands géométrique usuelle est sa dégénération (quand le paramètre quantique tend vers 0), et la théorie classique (c'est-à-dire la théorie des fonctions automorphes) est une sorte de phénomène résiduel.

Nous ne parlerons guère du cas quantique dans cet exposé ; le lecteur peut se reporter à [Ga2], où le rêve de la théorie de Langlands géométrique quantique est décrit. Ici nous n'allons mentionner que les deux faits suivants :

Le premier est que la théorie quantique rétablit la symétrie entre G et $\check{G}$: au lieu d'avoir un côté galoisien et un côté automorphe, les deux côtés sont automorphes, mais chacun est *tordu* (= déformé) à l'aide du paramètre quantique.

Le deuxième est que le principe directeur dans la théorie quantique est la devise « Whittaker est dual à Kac-Moody ». Cette devise est frappante parce que le mot « Whittaker » a un sens classique (c'est-à-dire dans la théorie des fonctions automorphes), tandis que le mot « Kac-Moody » n'en a pas.

1.3. Notations et terminologie

1.3.1. — La conjecture de Langlands géométrique globale non ramifiée peut être formulée comme une équivalence de deux catégories triangulées. Cependant, si on veut comprendre les détails de la démonstration proposée, on est obligé de travailler avec les *catégories supérieures*, plus précisément ici avec les *catégories DG k*-linéaires. Voir [GR1, Sect. 10] pour la définition de ces dernières.

Pour les lecteurs qui ne sont pas familiers de la théorie des catégories supérieures, nous proposons l'approche suivante. Pour la première lecture, faites comme s'il n'y avait pas de différence entre catégories supérieures et catégories usuelles. Pour la deuxième lecture, faites comme si vous saviez déjà ce qu'est une catégorie supérieure et soyez attentifs à la terminologie usuelle (pour un sommaire de la syntaxe des catégories supérieures se reporter à [Lu, Sect. 1], ou à [GR1, Sect. 1] pour une perspective un peu différente). Et pour la troisième lecture... apprenez cette théorie.

1.3.2. — Une autre « mauvaise nouvelle » est que, pour travailler du côté galoisien de la théorie de Langlands géométrique, on ne peut pas rester dans le cadre de la géométrie algébrique classique, mais on doit se plonger dans le monde de DAG, la géométrie algébrique dérivée. Par exemple, le champ $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ a une structure dérivée non triviale quand $G = T$ est un tore. Un sommaire des concepts de base de DAG se trouve dans [GR2].

Dans la suite, les termes « schéma » ou « champ algébrique » renverront à la notion dérivée correspondante.

1.3.3. — À un schéma ou champ algébrique Y on peut associer la catégorie DG notée $\mathrm{QCoh}(Y)$; par un léger abus de terminologie on va l'appeler *la catégorie (dérivée) des faisceaux quasi cohérents sur*[(3)] Y. Voir [GR3] pour la définition. Nous remarquons, cependant, que la définition de $\mathrm{QCoh}(Y)$ est beaucoup plus générale : elle a un sens pour un *préchamp* Y arbitraire[(4)].

1.3.4. — Si Y est un schéma/champ algébrique/préchamp *de type fini* sur k, on lui associe la catégorie DG notée $\mathrm{D}(Y)$; par un léger abus de terminologie on va l'appeler *la catégorie (dérivée) des D-modules sur*[(5)] Y. Voir [GR4] pour la définition.

La bonne nouvelle est que, quand on parle de $\mathrm{D}(Y)$, la structure dérivée sur Y ne joue aucun rôle. Donc du côté automorphe de la théorie de Langlands géométrique, on peut rester dans le cadre de la géométrie algébrique classique.

1.3.5. — Chaque fois que l'on parlera de foncteurs entre des catégories (dérivées) de faisceaux/D-modules sur divers espaces (notamment, les foncteurs d'image directe et inverse avec ! ou *), cela signifiera toujours les foncteurs dérivés correspondants. Les catégories abéliennes n'apparaîtront pas, sauf mention explicite du contraire.

1.3.6. — Pour les parties de cet exposé dont le but est de donner une motivation (par exemple, des analogies avec la situation dans la théorie de Langlands classique), on va supposer que le lecteur connaît les concepts de base de la théorie des nombres (adèles, ramification, éléments de Frobenius, etc.)

Remerciements.— L'orateur/auteur voudrait exprimer sa reconnaissance à D. Arinkin, A. Beilinson, J. Bernstein, V. Drinfeld, E. Frenkel, D. Kazhdan, S. Raskin and E. Witten, qui, par les discussions qu'il a eues avec eux, ont formé sa perception de la théorie de Langlands.

L'auteur est très reconnaissant à L. Lafforgue qui a lu une première version de cet exposé et corrigé des centaines de fautes de français.

2. L'ACTION DE HECKE

La correspondance de Langlands classique, et historiquement aussi la géométrique, étaient caractérisées par la relation entre le spectre des opérateurs de Hecke du côté automorphe et des données galoisiennes de l'autre côté. On commencera par décrire cet aspect de la théorie.

3. Quand Y est un schéma ou un champ algébrique raisonnable *classique* (c'est-à-dire non dérivé), cette catégorie *est* la catégorie dérivée de son cœur par rapport à une t-structure naturelle.

4. Dans ce cadre plus général, $\mathrm{QCoh}(Y)$ n'est pas du tout la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, même si Y est un préchamp classique.

5. Si Y est un schéma, $\mathrm{D}(Y)$ est la catégorie dérivée de son cœur, mais cela n'est plus vrai pour les champs algébriques.

2.1. L'action de Hecke sur les fonctions automorphes

Soit $\mathcal{K}$ le corps des fonctions rationnelles sur notre courbe X ; soit $\mathbb{A}$ son anneau d'adèles et $\mathbb{O} \subset \mathbb{A}$ le sous-anneau des adèles entiers. Pour un point fermé $x \in X$, on note $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{K}_x$ l'anneau et le corps locaux correspondants.

2.1.1. — Par définition, *l'espace automorphe* est le quotient $G(\mathcal{A})/G(\mathcal{K})$. Il est muni de l'action du groupe $G(\mathcal{A})$ par les translations à gauche. L'espace automorphe *non ramifié* est l'ensemble (ou plutôt, le groupoïde)

$$G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathcal{K}).$$

Notre objet d'étude est l'espace des fonctions automorphes non ramifiées à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell$, c'est-à-dire l'espace des fonctions sur $G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathcal{K})$, ou, ce qui revient au même, l'espace des fonctions $G(\mathbb{O})$-invariantes sur $G(\mathcal{A})/G(\mathcal{K})$. On le note $\mathrm{Autom}(X)$.

2.1.2. — Puisque le sous-groupe $G(\mathbb{O}) \subset G(\mathbb{A})$ n'est pas normal, le groupe $G(\mathbb{A})$ n'agit pas sur $\mathrm{Autom}(X)$. En revanche, l'action de $G(\mathbb{A})$ sur $G(\mathbb{A})/G(\mathcal{K})$ induit une action sur $\mathrm{Autom}(X)$ de *l'algèbre de Hecke sphérique*, notée $\mathbb{H}(G)_X$. Par définition, en tant qu'espace vectoriel, $\mathbb{H}(G)_X$ consiste en les fonctions à support compact sur $G(\mathbb{A})$ qui sont $G(\mathbb{O})$-invariantes des deux côtés. Cet espace vectoriel est muni d'une structure d'algèbre associative grâce à l'opération de *convolution*.

La donnée d'une action de $\mathbb{H}(G)_X$ est équivalente à celle d'une famille d'actions (commutant entre elles) des algèbres de Hecke locales $\mathbb{H}(G)_x$ pour chaque $x \in X$, où $\mathbb{H}(G)_x$ est l'algèbre (par rapport à la convolution) des fonctions à support compact sur $G(\mathcal{K}_x)$ qui sont $G(\mathcal{O}_x)$-invariantes des deux côtés.

On s'intéresse au spectre de $\mathbb{H}(G)_X$ (c'est-à-dire au spectre commun des algèbres $\mathbb{H}(G)_x$) agissant sur $\mathrm{Autom}(X)$.

2.1.3. — Fixons $x \in X$. C'est un fait fondamental que l'algèbre associative $\mathbb{H}(G)_x$ est en fait *commutative*. De plus, on peut la décrire très explicitement :

L'isomorphisme de *Satake classique* dit que $\mathbb{H}(G)_x$ peut être canoniquement identifiée avec l'algèbre des fonctions invariantes par conjugaison sur le groupe algébrique réductif $\check{G}$ au-dessus du corps $\mathbb{Q}_\ell$, à savoir le dual de G au sens de Langlands.

2.1.4. — L'isomorphisme de Satake permet de donner une formulation de la *correspondance de Langlands* :

Étant donnés une représentation non ramifiée σ du groupe de Galois de $\mathcal{K}$ vers $\check{G}$ (définie à conjugaison près) et un vecteur propre $f \in \mathrm{Autom}(X)$ pour les actions des algèbres $\mathbb{H}(G)_x$, on dit que f *correspond* à σ si, pour chaque $x \in X$, le caractère par lequel $\mathbb{H}(G)_x$ agit sur f est donné, en termes de l'isomorphisme de Satake, par évaluation des fonctions sur $\check{G}$ sur la classe de conjugaison de l'image de Frob_x par σ.

La notation Frob_x désigne l'élément de Frobenius en x, qui est une classe de conjugaison bien définie dans le quotient non ramifié du groupe de Galois de $\mathcal{K}$.

2.1.5. — Un résultat récent de V. Lafforgue [VLaf] (à savoir la direction

$$\text{Automorphe} \Rightarrow \text{Galois}$$

dans la correspondance de Langlands classique pour un corps global de caractéristique positive) dit que pour chaque vecteur propre f (supposé cuspidal) il *existe* une représentation σ correspondant à f.

Dans le cas où $G = GL_n$, cet énoncé d'existence peut être renforcé jusqu'à un énoncé de bijection, grâce au travail de L. Lafforgue [LLaf].

2.2. L'action de Hecke géométrique

Considérons maintenant l'action de Hecke dans le contexte géométrique, où au lieu des fonctions sur l'espace automorphe, on considère la catégorie dérivée $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ (définie d'une manière appropriée) des faisceaux ℓ-adiques/D-modules sur le champ automorphe $\mathrm{Bun}_G(X)$.

2.2.1. — Le point de départ est *l'équivalence de Satake géométrique* de Lusztig-Drinfeld-Ginzburg-Mirković-Vilonen (nommés dans l'ordre historique plutôt qu'alphabétique) qui dit que, pour chaque point $x \in X$, la catégorie monoïdale $\mathrm{Rep}(\check{G})$ des représentations algébriques de $\check{G}$ agit sur la catégorie $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$.

Ainsi on obtient les *foncteurs de Hecke*

$$\mathrm{H}_{V,x} : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)), \quad x \in X,\ V \in \mathrm{Rep}(\check{G}).$$

Cette action est l'analogue géométrique de l'action de $\mathbb{H}(G)_x$ sur $\mathrm{Autom}(X)$, combinée avec l'isomorphisme de Satake classique (voir section 2.1.3).

Cependant, dans la situation géométrique on peut faire beaucoup plus : on peut faire « bouger » le point x sur la courbe X. De cette façon, pour chaque $V \in \mathrm{Rep}(\check{G})$ on obtient un foncteur de Hecke

$$\mathrm{H}_V : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X).$$

2.2.2. — Mais en fait, on peut faire encore plus que cela. Prenons une paire d'objets $V_1, V_2 \in \mathrm{Rep}(\check{G})$. On peur leur associer un foncteur

$$\mathrm{H}_{V_1,V_2} : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X \times X),$$

qui est isomorphe à la composition

$$\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \xrightarrow{\mathrm{H}_{V_1}} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X) \xrightarrow{\mathrm{H}_{V_2}} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X \times X)$$

et *aussi* à la composition

$$\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \xrightarrow{\mathrm{H}_{V_2}} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X) \xrightarrow{\mathrm{H}_{V_1}} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X \times X),$$

à la permutation des facteurs dans $X \times X$ près.

La propriété clef de ce foncteur est que sa composition avec le foncteur de restriction à la diagonale

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{Bun}_G(X)} \times \mathrm{diag}_X)^! : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X \times X) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X)$$

s'identifie avec le foncteur $\mathrm{H}_{V_1\otimes V_2}$.

2.2.3. — Maintenant on va reformuler cela d'une façon plus générale et abstraite. Soit I un ensemble fini non vide, et soit V_I un ensemble d'objets de $\mathrm{Rep}(\check{G})$ paramétrisé par I :

$$i \in I \quad \rightsquigarrow \quad V_i \in \mathrm{Rep}(\check{G}).$$

À cette donnée on associe un foncteur

$$\mathrm{H}_{V_I} : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X^I).$$

Quand $I = \{1\}$, on retrouve le foncteur H_V.

L'application

$$I \mapsto \mathrm{H}_{V_I}$$

est compatible avec l'opération de réunion disjointe d'ensembles finis : pour $I = I_1 \sqcup I_2$, le foncteur H_{V_I} s'identifie avec

$$\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \xrightarrow{\mathrm{H}_{V_{I_1}}} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)\times X^{I_1}) \xrightarrow{\mathrm{H}_{V_{I_2}}} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)\times X^{I_1}\times X^{I_2}) \simeq \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)\times X^I).$$

2.2.4. — Soit $\phi : I \twoheadrightarrow J$ une surjection d'ensembles finis. Étant donné $V_I : I \to \mathrm{Rep}(\check{G})$ on peut produire $\phi(V_I) =: V_J$ par

$$V_j = \bigotimes_{i\in\phi^{-1}(j)} V_i. \tag{1}$$

Notons diag_ϕ l'application de diagonale $X^J \to X^I$ correspondant à ϕ. Alors la composition

$$\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \xrightarrow{\mathrm{H}_{V_I}} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X^I) \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathrm{Bun}_G(X)} \times \mathrm{diag}_\phi)^!} \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X^J)$$

s'identifie avec H_{V_J}.

2.2.5. — Maintenant on va effectuer une dernière manipulation. Soit $\mathcal{M}_I$ un objet de $\mathrm{D}(X^I)$. On définit un *endo-foncteur* $\mathrm{H}_{V_I,\mathcal{M}_I}$ of $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ comme le composé de H_{V_I} suivi par le foncteur

$$\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X) \times X^I) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)), \quad \mathcal{F} \mapsto (\mathrm{pr}_{\mathrm{Bun}_G(X)})_!(\mathcal{F} \overset{!}{\otimes} (\mathrm{pr}_{X^I})^!(\mathcal{M}_I)).$$

Ici on désigne par $\mathrm{pr}_{\mathrm{Bun}_G(X)}$ et pr_{X^I} les deux projections

$$\mathrm{Bun}_G(X) \leftarrow \mathrm{Bun}_G(X) \times X^I \to X^I,$$

et par $\overset{!}{\otimes}$ le !-produit tensoriel des faisceaux/D-modules (la version-! de l'image inverse par le morphisme de diagonale du produit tensoriel externe $\boxtimes$).

2.2.6. — Pour $I = I_1 \sqcup I_2$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2 \in \mathrm{D}(X^I) \simeq \mathrm{D}(X^{I_1} \times X^{I_2})$ on a

$$\mathrm{H}_{V_I,\mathcal{M}_I} \simeq \mathrm{H}_{V_{I_1},\mathcal{M}_{I_1}} \circ \mathrm{H}_{V_{I_2},\mathcal{M}_{I_2}} \simeq \mathrm{H}_{V_{I_2},\mathcal{M}_{I_2}} \circ \mathrm{H}_{V_{I_1},\mathcal{M}_{I_1}} .$$

Pour $\phi : I \twoheadrightarrow J$ et $\mathcal{M}_J \in \mathrm{D}(X^J)$ on a

$$\mathrm{H}_{V_I,(\mathrm{diag}_\phi)_!(\mathcal{M}_J)} \simeq \mathrm{H}_{V_J,\mathcal{M}_J} .$$

2.2.7. — Maintenant, la collection de tous les triplets $(I, V_I, \mathcal{M}_I)$ peut être recollée en une catégorie [(6)], en imposant la famille des relations suivantes :

$$(I, V_I, \mathcal{M}_I) \simeq (J, V_J, \mathcal{M}_J)$$

chaque fois que l'on a

$$\phi : I \twoheadrightarrow J, \quad \mathcal{M}_I = (\mathrm{diag}_\phi)_!(\mathcal{M}_J), \quad V_J = \phi(V_I).$$

On va noter cette catégorie $\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$ (voir la [Ga3, Sect. 4.2] pour une autre approche de la définition de $\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$).

L'opération de réunion disjointe d'ensembles finis induit sur $\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$ la structure d'une catégorie symétrique monoïdale (sans élément unité).

2.2.8. — On peut résumer toute la discussion précédente en disant que l'action de Hecke géométrique consiste en une action de la catégorie monoïdale $\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$ sur $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$.

2.3. La décomposition spectrale

Dans cette section on supposera que la caractéristique de k est égale à 0, et $\mathrm{D}(-)$ désignera la catégorie dérivée des D-modules.

Considérons le champ $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ des $\check{G}$-systèmes locaux au sens de de Rham sur X. Nous allons expliquer un analogue dans la théorie géométrique du théorème de V. Lafforgue mentionné dans la section 2.1.5, dont le sens heuristique est que le spectre commun des opérateurs de Hecke agissant sur $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ est contenu dans $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$.

2.3.1. — Pour commencer, fixons un point $x \in X$ et un object $V \in \mathrm{Rep}(\check{G})$. À ces données on associe un faisceau cohérent (en fait, un fibré vectoriel) sur $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$, noté $\mathrm{Ev}_{V,x}$:

La fibre de $\mathrm{Ev}_{V,x}$ en un point $\sigma \in \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ est $(V^\sigma)_x$, où V^σ est le système local (= D-module lisse) associé à la $\check{G}$-représentation V et au $\check{G}$-système local σ, et $(-)_x$ signifie l'opération de prendre la !-fibre en x.

Plus généralement, étant donnés un ensemble fini I et V_I comme dans la section 2.2.3, on peut leur associer un objet Ev_{V_I}, qui est un faisceau quasi cohérent sur $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X) \times X^I$, *muni d'une connexion le long* de X^I.

Donc si on se donne de plus un objet $\mathcal{M}_I \in \mathrm{D}(X^I)$, on peut produire un objet

$$\mathrm{Ev}_{V_I, \mathcal{M}_I} \in \mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \tag{2}$$

en prenant l'image directe au sens de de Rham de $\mathrm{Ev}_{V_I} \otimes (\mathrm{pr}_{X^I})^!(\mathcal{M}_I)$ le long de la projection

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)} : \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X) \times X^I \to \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X).$$

L'application

$$(I, V_I, \mathcal{M}_I) \mapsto \mathrm{Ev}_{V_I, \mathcal{M}_I}$$

6. Comme toujours, « une catégorie » signifie « une catégorie DG ».

définit un foncteur symétrique monoïdal

(3) $$\mathrm{Ev} : \mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X)) \to \mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)).$$

On a le résultat suivant :

Proposition 2.1 (D.G et J. Lurie, non publié). — *Le foncteur* Ev *admet un adjoint à droite qui est* pleinement fidèle*.*

En d'autres termes, la proposition ci-dessus dit que $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ est une *localisation* (c'est-à-dire un quotient au sens de Verdier) de $\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$ par rapport à une sous-catégorie pleine qui est de plus un idéal monoïdal.

2.3.2. — Selon la proposition 2.1, si une action de la catégorie monoïdale $\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$ sur une catégorie $\mathbf{C}$ se factorise en une action de $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ sur $\mathbf{C}$, cette factorisation est unique. De plus, elle existe si et seulement si les objets appartenant à
$$\ker(\mathrm{Ev}) \subset \mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$$
agissent sur $\mathbf{C}$ par 0.

2.3.3. — Nous sommes finalement prêts à formuler un théorème (c'est [Ga3, Théorème 4.5.2]) sur la décomposition spectrale de $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ par rapport de l'action $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$.

Rappelons-nous l'action de $\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$ sur $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ de la section 2.2.8.

Théorème 2.2 (V. Drinfeld, D.G.). — *L'action de*
$$\ker(\mathrm{Ev}) \subset \mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$$
sur $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ *s'annule.*

Selon la section 2.3.2, on déduit du théorème 2.2 une action canonique de la catégorie monoïdale $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ sur $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$, telle que les objets $\mathrm{Ev}_{V_I,\mathcal{M}_I}$ (voir (2)) agissent comme les endo-foncteurs $\mathrm{H}_{V_I,\mathcal{M}_I}$.

On appelle cette action « la décomposition spectrale de $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ selon $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ ».

2.4. Le lien avec la « conjecture d'évanescence » de [FGV]

Dans l'article [FGV] une conjecture avait été proposée (dont le contexte faisceautique peut être celui des D-modules ou des faisceaux ℓ-adiques), et il était démontré que cette conjecture implique que le programme de Laumon mentionné dans la section 1.1.3 peut être réalisé (toujours pour le groupe G égal à GL_n). Cette conjecture a été démontrée dans [Ga1].

Dans cette section nous allons expliquer que, dans le contexte des D-modules, la conjecture d'évanescence de [FGV] est un cas particulier du théorème 2.2.

2.4.1. — Soit G égal à GL_n. Nous considérons le champ $\mathrm{Bun}_n(X) := \mathrm{Bun}_{GL_n}$. Pour un entier positif ou nul d, soit $\mathrm{Mod}_{n,d}(X)$ le champ qui classifie les triplets

$$(\mathcal{M}, \mathcal{M}', \alpha),$$

où $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ sont deux fibrés vectoriels de rang n sur X, et α est une injection $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$ *en tant que faisceaux cohérents* telle que le quotient $\mathcal{M}'/\mathcal{M}$ (qui est, *a priori*, un faisceau de torsion sur X) ait la longueur d.

On a les projections

$$\mathrm{Bun}_n(X) \xleftarrow{\overleftarrow{h}} \mathrm{Mod}_{n,d}(X) \xrightarrow{\overrightarrow{h}} \mathrm{Bun}_n(X)$$

où $\overleftarrow{h}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', \alpha) = \mathcal{M}$ et $\overleftarrow{h}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', \alpha) = \mathcal{M}'$.

Soit

$$\mathring{\mathrm{Mod}}_{n,d}(X) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Mod}_{n,d}(X)$$

le sous-champ ouvert correspondant à la condition que le quotient $\mathcal{M}'/\mathcal{M}$ soit *semi-simple régulier* (c'est-à-dire une somme directe de faisceaux gratte-ciels concentrés en d points différents de X).

On a la projection

$$\mathring{\mathrm{Mod}}_{n,d}(X) \overset{s}{\to} \mathring{X}^{(d)}$$

de support des quotients $\mathcal{M}'/\mathcal{M}$, où $\mathring{X}^{(d)} \subset X^{(d)}$ est le sous-schéma ouvert des diviseurs sans multiplicité.

2.4.2. — Soit E un système local sur X (de rang fini arbitraire). On forme sa puissance symétrique $E^{(d)}$, dont la restriction à $\mathring{X}^{(d)}$ est un système local de rang $\mathrm{rk}(E) \cdot d$. Considérons l'objet

$$\mathfrak{L}_{E,d} \in \mathrm{Mod}_{n,d}(X),$$

(à savoir, le faisceau de Laumon) défini par

$$\mathfrak{L}_{E,d} := j_{!*}(s^*(E^{(d)})),$$

où $j_{!*}$ est l'opération de prolongement intermédiaire à la Goresky-MacPherson (appliquée au système local $s^*(E^{(d)})$ sur $\mathring{\mathrm{Mod}}_{n,d}(X)$).

On définit le *foncteur de moyennisation*

$$\mathrm{Av}_{E,d} : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_n(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_n(X)), \quad \mathrm{Av}_{E,d}(\mathcal{F}) := \overrightarrow{h}_!(\overleftarrow{h}^!(\mathcal{F}) \overset{!}{\otimes} \mathfrak{L}_{E,d}).$$

La conjecture d'évanescence de [FGV] (qui est le théorème principal de [Ga1]) dit :

Théorème 2.3. — *Supposons que E est irréductible de rang $> n$ et que*

$$d > (2g-2) \cdot n \cdot \mathrm{rk}(E).$$

Alors $\mathrm{Av}_{E,d} = 0$.

2.4.3. — Reprenons le cas où k est de caractéristique 0, et $\mathrm{D}(-)$ désigne la catégorie dérivée des D-modules. Nous allons voir que le théorème 2.3 est un tout petit cas particulier du théorème 2.2.

En effet, il est facile de vérifier que le foncteur $\mathrm{Av}_{E,d}$ est donné par l'action d'un objet particulier $\mathcal{A}_{E,d} \in \mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X))$. L'objet correspondant

$$\mathrm{Ev}(\mathcal{A}_{E,d}) \in \mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$$

peut être exprimé de la manière suivante :

On se rappelle que, pour $G = GL_n$, on a $\check{G} = GL_n$. La fibre de $\mathrm{Ev}(\mathcal{A}_{E,d})$ en $\sigma \in \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ est donnée par

$$H(X^{(d)}, (E \otimes E_\sigma)^{(d)}),$$

où E_σ est le système local de rang n correspondant à σ.

Maintenant, pour déduire le théorème 2.3 du théorème 2.2, nous remarquons que la cohomologie dans la formule ci-dessus s'identifie avec

$$\mathrm{Sym}^d(H(X, E \otimes E_\sigma)),$$

et cette dernière s'annule pour tout σ sous les hypothèses sur E et d spécifiées dans le théorème.

2.4.4. — Remarquons aussi que, dans le cas où $k = \mathbb{F}_q$, le théorème 2.3 dit quelque chose de non trivial (mais déjà connu, grâce à la correspondance de Langlands qui avait été établie) sur l'action des opérateurs de Hecke classiques sur $\mathrm{Autom}(X)$. En termes concrets, il dit que, si f est un vecteur propre commun des algèbres de Hecke $\mathbb{H}(G)_x$ avec les caractères

$$(\lambda_{x,1}, ..., \lambda_{x,n}/\text{permutation}),$$

alors la fonction L de Rankin-Selberg

$$L(E, f, t) = \prod_x \frac{1}{1 - t^{\deg_x} \cdot (\lambda_{x,1} + ... + \lambda_{x,n}) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_x, E_x)}$$

est un polynôme de degré $\leq (2g-2) \cdot n \cdot \mathrm{rk}(E)$.

3. THÉORIE DE LANGLANDS GÉOMÉTRIQUE GLOBALE NON RAMIFIÉE

Dans cette section, on supposera que le corps de base k est de caractéristique 0.

3.1. Pourquoi le *best hope* ne tient pas ?

3.1.1. — La théorie de Langlands géométrique globale non ramifiée cherche à comparer les catégories $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ et $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ l'une à l'autre. On sait déjà, grâce au théorème 2.2, que $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$, et tant que catégorie monoïdale, agit sur $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$. Donc la donnée d'un foncteur $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$-linéaire

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$$

revient au choix d'un objet dans $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$.

Selon l'analogie avec la théorie classique, l'objet dans $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ que nous voudrions choisir pour *l'équivalence de Langlands géométrique* que l'on cherche à construire est le *premier coefficient de Whittaker*[7]. Ainsi on obtient un foncteur

$$\mathbb{L}_G : \mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)). \tag{4}$$

3.1.2. — Quand $G = T$ est un tore, le foncteur $\mathbb{L}_G$ introduit ci-dessus est la transformation de Fourier-Mukaï étudiée par Laumon. En particulier, il est une équivalence.

Cependant, le foncteur $\mathbb{L}_G$ ne peut pas être une équivalence si G est non abélien. La raison est que la catégorie $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ contient des objets qui sont dégénérés au sens de Whittaker. Par exemple, le D-module *constant* sur $\mathrm{Bun}_G(X))$ l'est.

Remarque 3.1. — Un autre point de vue sur le mécanisme qui fait que la catégorie $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ ne peut pas être équivalente à $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ est déjà présent dans la théorie classique des fonctions automorphes :

Il est connu que les représentations automorphes sont paramétrisées non pas seulement par les paramètres de Langlands (c'est-à-dire par les représentations galoisiennes) mais par les paramètres d'Arthur, où ces derniers sont les classes de conjugaison de paires (σ, A), constituées d'une représentation σ du groupe de Galois de X vers $\check{G}$, et d'un élément nilpotent A de l'algèbre de Lie de $\check{G}$ qui commute avec σ.

3.2. Comment peut-on faire marcher le *best hope* ?

Dans [AG1] une idée était proposée pour modifier le *best hope* de telle façon qu'il ait une chance d'être vrai.

Cette modification consiste en un remplacement du côté galoisien, c'est-à-dire de la catégorie $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$, par un cousin très proche, en laissant le côté automorphe intact. Cette procédure de modification est appelée dans [FG, Sect. 22] la *renormalisation* et se réalise dans un cadre d'algèbre homologique : elle a à voir avec le fait que la catégorie $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ est de dimension cohomologique infinie.

7. Il est noté par $\mathrm{Poinc}(\mathcal{W}_{\mathrm{vac}})$ dans [Ga3, Sect. 5.7.4].

3.2.1. — Pour l'expliquer considérons l'exemple suivant. Soit A l'algèbre graduée différentielle $k[\epsilon]$, où ϵ est un générateur libre de degré -1 dont le différentiel est 0 (par conséquent, le différentiel sur A tout entière est en fait égal à 0).

Considérons la catégorie (dérivée) A-mod des A-modules. Puis sa sous-catégorie pleine

$$A\text{-mod}^{\mathrm{parf}} \subset A\text{-mod}$$

qui consiste en les *complexes parfaits*, c'est-à-dire en les complexes qui peuvent être obtenus par un processus fini à partir de l'objet $A \in A$-mod en formant des cônes, sommes directes et facteurs directs.

On peut aussi considérer la sous-catégorie pleine $A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}} \subset A$-mod qui consiste en les objets dont la cohomologie est concentrée dans un nombre fini de degrés et de dimension finie au-dessus de k.

Puisque $A \in A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}$, on a l'inclusion

$$A\text{-mod}^{\mathrm{parf}} \subset A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}},$$

mais cette inclusion n'est pas une égalité. En fait, le quotient au sens de Verdier

$$A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}/A\text{-mod}^{\mathrm{parf}}$$

est équivalent à la catégorie $B\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}$, où $B = k[\eta, \eta^{-1}]$, $\deg(\eta) = 2$.

Remarque 3.2. — Un phénomène parallèle dans la théorie des représentations des groupes finis avec coefficients de torsion donne lieu à la notion de *cohomologie de Tate*.

3.2.2. — Plus généralement, soit V un espace vectoriel de dimension finie, et considérons l'algèbre graduée différentielle $A := \mathrm{Sym}(V[1])$. Comme ci-dessus on considère les catégories

$$A\text{-mod}^{\mathrm{parf}} \subset A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}.$$

On observe que, à chaque sous-ensemble conique et Zariski-fermé $\mathcal{N} \subset V$ on peut associer une sous-catégorie pleine

$$A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}_{\mathcal{N}} \subset A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}},$$

de telle sorte que :

$$\begin{cases} A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}_{\mathcal{N}} = A\text{-mod}^{\mathrm{parf}} \text{ si } \mathcal{N} = 0, \\ A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}_{\mathcal{N}} = A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}} \text{ si } \mathcal{N} = V. \end{cases}$$

3.2.3. — Plus généralement encore, soit Y un schéma (ou champ algébrique) qui est localement une *intersection complète*. À un tel Y on associe un autre schéma/champ (voir [AG1, Sect. 2.3]) noté $\mathrm{Sing}(Y)$, dont les k-points sont les paires (y, ξ), où y est un k-point de Y, et ξ est un élément de l'espace vectoriel $H^{-1}(T^*_y(Y))$, où $T^*_y(Y)$ est *l'espace cotangent dérivé* en y, c'est-à-dire la fibre du complexe cotangent [8] de Y en y.

8. On se rappelle qu'un schéma est localement une intersection complète si et seulement si $H^{-i}(T^*_y(Y)) = 0$ pour tous y et $i > 1$.

Soit $\mathrm{Coh}(Y)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{QCoh}(Y)$ qui consiste en les objets dont les faisceaux de cohomologie non nuls sont concentrés dans un nombre fini de degrés et sont cohérents en tant que faisceaux sur Y. Dans [AG1, Sect. 4] la construction suivante est effectuée : à chaque sous-ensemble conique et Zariski-fermé $\mathcal{N} \subset \mathrm{Sing}(Y)$ on associe une sous-catégorie pleine

$$\mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y) \subset \mathrm{Coh}(Y).$$

On a :

$$\begin{cases} \mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y) = \mathrm{Parf}(Y) \text{ si } \mathcal{N} = \{\bigcup_{y \in Y} (y, 0)\}, \\ \mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y) = \mathrm{Coh}(Y) \text{ si } \mathcal{N} = \mathrm{Sing}(Y), \end{cases}$$

où $\mathrm{Parf}(Y) \subset \mathrm{Coh}(Y)$ est la sous-catégorie pleine des objets parfaits (les objets qui, localement sur Y, peuvent être représentés par un complexe de longueur finie dont les termes sont des faisceaux libres de rang fini).

3.2.4. — L'élargissement

$$\mathrm{Parf}(Y) \rightsquigarrow \mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y)$$

est la modification que l'on va effectuer du côté galoisien de la théorie de Langlands géométrique globale non ramifiée. Cependant, il y a encore un point de différence :

Pour un certain nombre de raisons, il est plus commode de travailler avec des catégories qui sont grosses (le terme technique est : *co-complètes et compactement engendrées*), c'est-à-dire avec des catégories qui admettent des sommes directes arbitraires (et sont engendrées par un ensemble de leurs objets compacts). La donnée d'une telle catégorie est équivalente à la donnée de la sous-catégorie pleine de ses objets compacts (dans le cas de $\mathrm{QCoh}(Y)$, la sous-catégorie des objets compacts est exactement $\mathrm{Parf}(Y)$), qui est une petite catégorie. La procédure inverse (récupérer une grosse catégorie à partir d'une petite) s'appelle le foncteur d'*ind-complétion*, voir [GR1, Sect. 7.2].

La grosse catégorie correspondant à $\mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y)$ est notée $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y)$. L'inclusion $\mathrm{Parf}(Y) \subset \mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y)$ s'étend en un foncteur pleinement fidèle

$$\mathrm{QCoh}(Y) \hookrightarrow \mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y),$$

qui admet un adjoint à droite, donné par ind-extension du plongement tautologique

$$\mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Coh}(Y) \hookrightarrow \mathrm{QCoh}(Y).$$

3.2.5. — Pour tout $\mathcal{N}$, la catégorie $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y)$ est munie d'une t-structure [9], et le foncteur

$$\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y) \to \mathrm{QCoh}(Y) \tag{5}$$

(l'adjoint à droite au plongement tautologique) est t-exact. De plus, le foncteur (5) induit une *équivalence entre les deux catégories correspondant aux objets bornés à gauche* :

$$\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y)^+ \to \mathrm{QCoh}(Y)^+,$$

9. C'est l'une des raisons pour lesquelles on préfère travailler avec la catégorie grosse $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y)$ plutôt qu'avec la catégorie petite $\mathrm{Coh}_{\mathcal{N}}(Y)$.

voir [AG1, Sect. 4.4].

Donc la différence entre $\mathrm{QCoh}(Y)$ et $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y)$ « est localisée en $-\infty$ ». Remarquons qu'il n'y a pas de contradiction : la t-structure sur $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(Y)$ est non separée, c'est-à-dire qu'il y a des objets qui sont non nuls mais dont toute la cohomologie est ègale à 0.

3.3. Retour à $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$

La modification du côté galoisien proposée dans [AG1] est de la forme

$$\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)),$$

pour un sous-ensemble conique Zariski-fermé particulier $\mathcal{N} \subset \mathrm{Sing}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$.

3.3.1. — Pour expliquer ce qu'est $\mathcal{N}$ il faut d'abord décrire explicitement le champ $\mathrm{Sing}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$. De la définition du complexe cotangent (voir [AG1, Sect. 10.4.6]), on obtient que $\mathrm{Sing}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ est le champ des modules des paires (σ, A), où $\sigma \in \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ et A est une section globale *horizontale* du système local associé à la représentation co-adjointe de $\check{G}$.

En choisissant une forme invariante par conjugaison sur $\check{\mathfrak{g}}$, on peut penser à A comme à une section du système local associé à la représentation adjointe de $\check{G}$. On prend pour

$$\mathcal{N} \subset \mathrm{Sing}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$$

le *cône nilpotent global*, c'est-à-dire l'ensemble des paires (σ, A) pour lesquelles A est nilpotent en tant que section du système local d'algèbres de Lie $\check{\mathfrak{g}}_\sigma$ (ou, ce qui est équivalent, la valeur de A dans la fibre de $\check{\mathfrak{g}}_\sigma$ dans un/tout point de X est nilpotent).

3.3.2. — Ainsi, la catégorie que l'on propose pour le côté galoisien de la théorie de Langlands géométrique globale non ramifiée est $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ pour le choix de $\mathcal{N}$ expliqué ci-dessus.

On remarque que lorsque $G = T$ est un tore, le cône nilpotent est égal à 0. Par conséquent, dans ce cas,

$$\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{T}}(X)) = \mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{T}}(X)),$$

c'est-à-dire le côté galoisien est le même que dans le *best hope* (ce qui devait être le cas puisque le *best hope* originel est réalisé par la transformation de Fourier-Mukaï généralisée de Laumon).

Cependant, cette modification est non triviale si G est non abélien. Le point le plus singulier de $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ est celui correspondant au système local trivial. C'est autour de ce point que la différence entre $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ et la catégorie $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ initiale est la plus grande.

Considérons maintenant le sous-champ ouvert

$$\mathrm{LocSys}^{\mathrm{irred}}_{\check{G}}(X) \subset \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$$

qui consiste en les systèmes locaux irréductibles. Il est facile de voir que l'inclusion

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}^{\mathrm{irred}}_{\check{G}}(X)) \subset \mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}^{\mathrm{irred}}_{\check{G}}(X))$$

est une égalité. Ainsi, la modification n'a aucun effet sur la partie irréductible [10].

3.3.3. — En définitive, la version de la conjecture de Langlands géométrique globale non ramifiée que l'on propose s'exprime ainsi :

CONJECTURE 3.3. — *Il existe une équivalence de catégories canonique*

$$\mathbb{L}_G : \mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)).$$

Cependant, l'énoncé de la conjecture ci-dessus est trop faible, parce que l'on n'a pas précisé les conditions que $\mathbb{L}_G$ doit satisfaire. L'article [Ga3] contient une liste des conditions de compatibilité qui doivent fixer $\mathbb{L}_G$ d'une manière unique.

Remarque 3.4. — On peut regarder la conjecture 3.3 comme une façon de restaurer les paramètres d'Arthur (par opposition aux paramètres de Langlands) qui étaient oubliés dans le *best hope* originel. En effet, la différence entre les paramètres d'Arthur et ceux de Langlands apparaît comme l'ensemble d'obstructions pour un objet de $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ à être *tempéré*.

Remarque 3.5. — Rappelons-nous que dans la section 3.2.5 on a écrit que la différence entre les catégories $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ et $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ « est localisée en $-\infty$ » par rapport à leur t-structures. D'un autre côté, le défaut du foncteur (4) à être une équivalence est apparent déjà pour les catégories bornées correspondantes : le D-module constant sur $\mathrm{Bun}_G(X)$ n'est pas contenu dans l'image de $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$. Cette « contradiction » s'explique par le fait que le foncteur $\mathbb{L}_G$ de la conjecture 3.3 est de dimension cohomologique infinie.

3.4. Qu'est-ce qui est connu ?

Une esquisse de démonstration de la conjecture 3.3 a été proposée dans [Ga3]. Ici on va résumer ses idées principales et commenter son statut. Cette démonstration consiste en plusieurs étapes.

3.4.1. — Du côté automorphe on considère la catégorie $\mathrm{Whit}^{\mathrm{ext}}_{G,G}(X)$ (que l'on appelle *la catégorie de Whittaker étendue*), voir [Ga3, Sect. 8.2]) et le foncteur des coefficients de Whittaker

$$\mathrm{coeff}^{\mathrm{ext}}_{G,G} : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)) \to \mathrm{Whit}^{\mathrm{ext}}_{G,G}(X). \tag{6}$$

Dans [Ga3] il est conjecturé que ce foncteur $\mathrm{coeff}^{\mathrm{ext}}_{G,G}$ est pleinement fidèle (voir [Ga3, Conj. 8.2.9]). Cette conjecture a été demontrée pour $G = GL_n$ dans [Ber].

10. Ce fait pourrait éveiller des soupçons sur la validité de la forme proposée de la conjecture de Langlands géométrique pout les groupes différents de GL_n.

3.4.2. — On peut imaginer que la catégorie $\mathrm{Whit}^{\mathrm{ext}}_{G,G}(X)$ est fibrée au-dessus de l'espace $\mathfrak{ch}$ des caractères de $N(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $N(K)$, où pour chaque $\chi \in \mathfrak{ch}$ on considère la catégorie des D-modules sur $G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})$ qui se transforment selon χ par rapport à l'action de $N(\mathbb{A})$.

L'espace $\mathfrak{ch}$ se décompose suivant le degré de plus ou moins grande dégénérescence des caractères qu'il classifie. Autrement dit, il est réunion de sous-espaces localement fermés

$$\mathfrak{ch} = \bigsqcup_P \mathfrak{ch}^P,$$

où P parcourt l'ensemble partiellement ordonné des paraboliques standards de G. À chaque P correspond la catégorie $\mathrm{Whit}_{G,P}(X)$.

Par exemple, pour $P = G$, on obtient la catégorie de Whittaker usuelle, notée $\mathrm{Whit}_{G,G}(X)$, voir [Ga3, Sect. 5].

Pour $P = B$, la catégorie $\mathrm{Whit}_{G,B}(X)$ est la *catégorie de la série principale* de [Ga3, Sect. 6].

3.4.3. — Du côté galoisien on construit une catégorie notée $\mathrm{Glue}(\check{G})_{\mathrm{spec}}$ et un foncteur

$$\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \to \mathrm{Glue}(\check{G})_{\mathrm{spec}}. \tag{7}$$

Dans [AG2], il est démontré que le foncteur (7) est pleinement fidèle.

3.4.4. — La catégorie $\mathrm{Glue}(\check{G})_{\mathrm{spec}}$ est construite par *recollement* des catégories

$$\mathrm{QCoh}_{\mathrm{conn}\,/\,\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)}(\mathrm{LocSys}_{\check{P}}(X)), \tag{8}$$

où $\check{P}$ parcourt l'ensemble partiellement ordonné des paraboliques standard de $\check{G}$.

Dans la formule (8), $\mathrm{QCoh}_{\mathrm{conn}\,/\,\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)}(\mathrm{LocSys}_{\check{P}}(X))$ est la catégorie (dérivée) des faisceaux quasi cohérents sur $\mathrm{LocSys}_{\check{P}}(X)$, *munis d'une connexion* le long des fibres de la projection $\mathrm{LocSys}_{\check{P}}(X) \to \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$. Ces objets (comme les faisceaux munis d'une connexion le long des fibres d'un morphisme) doivent être compris au sens de la géométrie algébrique dérivée, voir [Ga3, Sect. 6.5].

Par exemple, pour $P = G$, on a

$$\mathrm{QCoh}_{\mathrm{conn}\,/\,\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)}(\mathrm{LocSys}_{\check{P}}(X)) = \mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)),$$

autrement dit, la catégorie en question est la catégorie usuelle (non modifiée) des faisceaux quasi cohérents sur $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$.

3.4.5. — En admettant la conjecture 3.3 pour *les sous-groupes de Lévi propres* de G et un certain nombre des résultats auxiliaires, on construit un foncteur *pleinement fidèle*

$$\mathrm{Glue}(\check{G})_{\mathrm{spec}} \to \mathrm{Whit}^{\mathrm{ext}}_{G,G}(X). \tag{9}$$

La construction du foncteur (9) avec toutes les propriétés désirées est complète dans le cas de $G = GL_2$, et le cas général n'est certainement plus qu'une question de temps.

3.4.6. — Le foncteur (9) est construit par recollement des foncteurs

$$\mathrm{QCoh}_{\mathrm{conn}\,/\,\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)}(\mathrm{LocSys}_{\check{P}}(X)) \to \mathrm{Whit}_{G,P}(X),$$

qui sont aussi pleinement fidèles.

Par exemple, pour $P = G$, le foncteur correspondant

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \to \mathrm{Whit}_G(X)$$

est le composé du foncteur

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \to \mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X)),$$

adjoint à gauche au foncteur Ev de (3), suivi de l'équivalence de Casselman-Shalika

$$\mathrm{Rep}(\check{G}, \mathrm{Ran}(X)) \simeq \mathrm{Whit}_G(X).$$

Ici, $\mathrm{Whit}_G(X)$ est une légère variante de $\mathrm{Whit}_{G,G}(X)$ qui a à voir avec le centre de G, voir [Ga3, Sect. 5.6.7].

3.4.7. — Admettons maintenant que le foncteur (6) est pleinement fidèle (ce qui est connu pour GL_n), et que le foncteur (9) muni des propriétés désirées existe. Voyons comment cela nous aide à nous approcher de la démonstration de la conjecture 3.3.

Considérons le composé des foncteurs (7) et (9), qui est un foncteur pleinement fidèle

$$\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)) \to \mathrm{Whit}^{\mathrm{ext}}_{G,G}(X). \tag{10}$$

Dans [Ga3, Sect. 10], on construit une collection d'objets $\mathcal{F}_\alpha \in \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ et une collection d'objets $\mathcal{M}_\alpha \in \mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ tels que pour tout α, l'image de $\mathcal{F}_\alpha$ par (6) est isomorphe à l'image de $\mathcal{M}_\alpha$ par (10).

De plus, on démontre que les objets $\mathcal{F}_\alpha$ *engendrent* $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$. Il est conjecturé (et établi pour $G = GL_n$) que les objets $\mathcal{M}_\alpha$ engendrent $\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$.

Cela implique que les images essentielles des foncteurs (6) et (10) dans $\mathrm{Whit}^{\mathrm{ext}}_{G,G}(X)$, étant engendrées par la même collection d'objets, coïncident. Ainsi on obtient l'équivalence $\mathbb{L}_G$ que l'on a cherchée.

Remarque 3.6. — Tandis que toutes les étapes précédentes dans la démonstration de la conjecture 3.3 étaient de nature géométrique (c'est-à-dire utilisaient les foncteurs faisceautiques standards quand on travaille du côté automorphe) et avaient des analogues dans la théorie classique des fonctions automorphes, la construction des objets $\mathcal{F}_\alpha$ et $\mathcal{M}_\alpha$ est de nature complètement différente et est fondée sur les idées de [BD] :

Du côté automorphe, les objets $\mathcal{F}_\alpha$ sont obtenus par le *foncteur de localisation* à partir de modules sur l'algèbre de Lie de Kac-Moody *au niveau critique*. Du côté galoisien, les objets $\mathcal{M}_\alpha$ sont obtenus comme des images directes par l'application vers $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ du schéma classifiant les $\check{G}$-*opers* sur X (voir [Ga3, Sect. 10]).

4. THÉORIE DE LANGLANDS GÉOMÉTRIQUE LOCALE

4.1. Quel est l'objet d'étude du côté automorphe ?

4.1.1. — Rappelons que, dans la théorie de Langlands classique globale, l'objet d'étude du côté de la théorie des représentations (= le côté automorphe) est l'espace des fonctions sur le quotient $G(\mathbb{A})/G(K)$, vu comme une représentation du groupe $G(\mathbb{A})$. Dans le cas non ramifié, l'objet d'étude est l'espace des fonctions sur $G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(K)$, vu comme un module sur l'algèbre de Hecke.

Par contre, l'objet d'étude du côté de la théorie des représentations dans la théorie de Langlands classique *locale* est la *catégorie* des représentations du groupe $G(\mathcal{K})$, où $\mathcal{K}$ est un corps local. Donc en passant du global au local on augmente le niveau catégorique dans la hiérarchie

$$\text{Éléments d'un ensemble} \to \text{Objets d'une catégorie} \to \text{Objets d'une 2-catégorie.}$$

Dans la théorie de Langlands géométrique globale dans le cas non ramifié, l'objet d'étude du côté de la théorie des représentations (= le côté automorphe) était la *catégorie* $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$, vue comme une catégorie munie d'une action des foncteurs de Hecke.

Donc par l'analogie ci-dessus, du côté de la théorie des représentations dans la théorie de Langlands géométrique *locale*, l'objet d'étude doit être une certaine *2-catégorie*, attachée au groupe G et au corps local $\mathcal{K} = k(\!(t)\!)$.

On stipule que la 2-catégorie en question est celle des *catégories munies d'une action de* $G(\mathcal{K})$. Expliquons maintenant ce que cela veut dire.

4.1.2. — Tout d'abord, par « catégorie » dans ce contexte, on entend une *catégorie DG k-linéaire* [11], définie comme dans [GR1, Sect. 10]. Un fait important est que la totalité de ces catégories et des foncteurs k-linéaires entre elles [12] a la structure d'une $(\infty, 2)$-catégorie, notée DGCat, qui est, de plus, munie d'une structure symétrique monoïdale, que l'on appelle le *produit tensoriel à la Lurie*.

Deuxièmement, quand on écrit $G(\mathcal{K})$, il s'agit d'un ind-schéma en groupes, qui est défini en tant que foncteur sur la catégorie des schémas affines par la formule

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A), G(\mathcal{K})) := \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A(\!(t)\!)), G).$$

Maintenant, il faut définir ce qu'est une action [13] de $G(\mathcal{K})$ sur une catégorie.

Cette notion a été développée dans [Ga4]. Cependant, on peut aussi donner la définition explicite suivante :

11. Toute nos catégories sont supposées co-complètes.
12. Tous nos foncteurs sont supposés *continus*, c'est-à-dire préservent les sommes directes infinies.
13. Du côté géométrique/automorphe de Langlands, quand on parle d'actions de groupes sur des catégories, il s'agit d'actions *fortes*, c'est-à-dire infinitésimalement triviales.

Selon [Ber], on a la catégorie bien définie $\mathrm{D}(G(\mathcal{K}))$ des D-modules sur $G(\mathcal{K})$; la structure de groupe sur G induit a une structure monoïdale sur $\mathrm{D}(G(\mathcal{K}))$. Autrement dit, $\mathrm{D}(G(\mathcal{K}))$ a une structure *d'algèbre associative* dans la catégorie monoïdale DGCat.

Par définition, une action de $G(\mathcal{K})$ sur une catégorie $\mathbf{C}$ est une structure de module sur l'algèbre associative ci-dessus, en tant qu'objet de DGCat. La totalité des catégories munies d'une action de $G(\mathcal{K})$ a la structure d'une $(\infty, 2)$-catégorie (voir [GR1, Sect. 8.3]) ; on va la noter $G(\mathcal{K})$- **mod**.

4.1.3. — Voici quelques exemples d'objets de $G(\mathcal{K})$- **mod** :

(i) Le premier exemple est $\mathbf{C} := \mathrm{D}(G(\mathcal{K}))$, munie d'une action sur elle-même par multiplication à gauche.

(ii) Pour un sous-groupe $H \subset G(\mathcal{K})$, on peut prendre $\mathbf{C} := \mathrm{D}(G(\mathcal{K})/H)$.

Comme cas particuliers de l'exemple (ii) ci-dessus, on peut prendre $H = G(\mathcal{O})$ ou $H = I$ (le sous-groupe d'Iwahori). Les catégories que l'on obtient de cette manière sont les catégories des D-modules sur la grassmannienne affine Gr_G et sur le schéma des drapeaux affine.

(iii) On peut prendre $\mathbf{C} = \widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$-mod, c'est-à-dire la catégorie des représentations de l'algèbre de Lie de Kac-Moody de niveau *entier* quelconque κ (voir [FG, Sect. 23] pour la définition) ; ici l'action de $G(\mathcal{K})$ provient de son action adjointe sur $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$.

(iv) On considère le champ $\mathrm{Bun}_G(X)^{\mathrm{level}_x}$ qui classifie les G-fibrés principaux sur la courbe X, munis d'une structure de niveau complète en x (c'est-à-dire d'une trivialisation de notre fibré sur le voisinage formel de x). On prend $\mathbf{C} := \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G(X)^{\mathrm{level}_x})$. C'est un objet de $G(\mathcal{K})$- **mod**, qui est l'objet d'étude de la théorie de Langlands géométrique globale *avec ramification arbitraire en* x.

4.2. L'objet d'étude du côté galoisien

4.2.1. — Rappelons que dans la théorie de Langlands globale non ramifiée l'objet d'étude était (une modification de) la catégorie dérivée des faisceaux quasi cohérents sur le champ $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ qui classifie les $\check{G}$-systèmes locaux sur la courbe X.

Selon l'analogie avec la théorie locale classique, l'objet d'étude du côté galoisien dans la *théorie locale géométrique* doit être une certaine 2-catégorie associée à l'espace $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ qui classifie les $\check{G}$-systèmes locaux sur le disque formel épointé $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$.

Nous allons expliquer ce qu'est l'espace $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$, et quelle est la 2-catégorie (en fait, la $(\infty, 2)$-catégorie) que l'on lui associe.

4.2.2. — Rappelons que, dans le cas global, la catégorie associée à $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$ de la façon la plus tautologique, c'est-à-dire $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$, n'était pas exactement la bonne du côté automorphe : il fallait introduire une correction qui avait à voir avec la différence entre complexes parfaits et complexes cohérents.

La $(\infty, 2)$-catégorie $\mathrm{ShvCat}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}))$ que nous allons définir ci-dessous est l'analogue de $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$. Elle reflétera la partie *tempérée* de $G(\mathcal{K})$- **mod**.

Une extension de $\mathrm{ShvCat}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}))$ qui tient compte de tous les paramètres d'Arthur locaux (et non pas seulement de ceux de Langlands) a été proposée récemment par D. Arinkin. On ne la discutera pas dans cet exposé.

4.3. Faisceaux de catégories

Afin de parler de faisceaux de catégories, il faut nous placer dans le cadre de la *géométrie algebrique dérivée*. Ainsi, dans la suite, chaque fois que l'on écrira « schéma affine », cela signifiera un schéma affine *dérivé* au-dessus de k. Par définition, la catégorie de ces derniers est la catégorie opposée à celle des algèbres graduées différentielles *connectives* (14) au-dessus de k, voir [GR2, Sect. 1.1].

4.3.1. — Pour un schéma affine S on considère la catégorie (symétrique) monoïdale $\mathrm{QCoh}(S)$. C'est une algèbre (commutative) dans la catégorie (symétrique) monoïdale DGCat.

On note $\mathrm{ShvCat}(S)$ la $(\infty, 2)$-catégorie $\mathrm{QCoh}(S)$-**mod** des $\mathrm{QCoh}(S)$-modules dans la catégorie (symétrique) monoïdale DGCat.

L'application

$$S \mapsto \mathrm{ShvCat}(S)$$

est un foncteur de $(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})^{\mathrm{op}}$ vers la ∞-catégorie des $(\infty, 2)$-catégories.

4.3.2. — Soit $\mathcal{Y}$ un *préchamp* arbitraire, c'est-à-dire un foncteur

$$(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Spc},$$

où Spc est la ∞-catégorie des *espaces* (15).

On définit la $(\infty, 2)$-catégorie $\mathrm{ShvCat}(\mathcal{Y})$ comme

$$\lim_{S \xrightarrow{y} \mathcal{Y}} \mathrm{ShvCat}(S),$$

où $S \xrightarrow{y} \mathcal{Y}$ parcourt la catégorie $((\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})_{/\mathcal{Y}})^{\mathrm{op}}$ et la limite est prise dans la ∞-catégorie des $(\infty, 2)$-catégories.

4.3.3. — En d'autres termes, on peut dire de manière informelle qu'un objet de $\mathrm{ShvCat}(\mathcal{Y})$ est une application

$$(S \xrightarrow{y} \mathcal{Y}) \in (\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})_{/\mathcal{Y}} \rightsquigarrow \mathbf{C}_{S,y} \in \mathrm{QCoh}(S)\text{-}\mathbf{mod}, \tag{11}$$

$$((S_1, y_1), (S_2, y_2), S_1 \xrightarrow{f} S_2, y_2 \circ f \sim y_1) \rightsquigarrow \mathrm{QCoh}(S_1) \underset{\mathrm{QCoh}(S_2)}{\otimes} \mathbf{C}_{S_2,y_2} \simeq \mathbf{C}_{S_1,y_1}.$$

Cette application doit satisfaire un système *homotopiquement cohérent* de compatibilités pour les compositions des morphismes.

On appelle un objet de $\mathrm{ShvCat}(\mathcal{Y})$ un « faisceau de catégories sur $\mathcal{Y}$ ».

14. Connectif = concentré dans les degrés cohomologiques négatifs ou nul.
15. Espace = ∞-groupoïde.

4.3.4. — Le premier exemple de faisceau de catégories sur $\mathcal{Y}$ est $\mathrm{QCoh}_{/\mathcal{Y}}$ (à ne pas confondre avec la *catégorie* $\mathrm{QCoh}(\mathcal{Y})$ dont on va parler ci-dessous) :

En termes de l'application (11), l'objet $\mathrm{QCoh}_{/\mathcal{Y}}$ associe

$$(S, y) \rightsquigarrow \mathrm{QCoh}(S) \in \mathrm{QCoh}(S)\text{-}\mathbf{mod}.$$

4.3.5. — Pour un préchamp $\mathcal{Y}$ on peut aussi considérer la catégorie (symétrique) monoïdale

$$\mathrm{QCoh}(\mathcal{Y}) := \lim_{S \xrightarrow{y} \mathcal{Y}} \mathrm{QCoh}(S). \tag{12}$$

C'est ce que l'on appelle la *catégorie (dérivée) des faisceaux quasi cohérents sur un préchamp.* (Dans le cas où $\mathcal{Y} = \mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X)$, c'est la catégorie $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ considérée dans les sections précédentes.)

En d'autres termes, on peut dire d'une manière informelle qu'un objet de $\mathrm{QCoh}(\mathcal{Y})$ est une application

$$(S \xrightarrow{y} \mathcal{Y}) \rightsquigarrow \mathcal{F}_{S,y} \in \mathrm{QCoh}(S), \tag{13}$$

$$((S_1, y_1), (S_2, y_2), S_1 \xrightarrow{f} S_2, y_2 \circ f \sim y_1) \rightsquigarrow f^*(\mathcal{F}_{S_2,y_2}) \simeq \mathcal{F}_{S_1,y_1}.$$

Cette application doit satisfaire un système *homotopiquement cohérent* de compatibilités pour les compositions des morphismes.

4.3.6. — Une autre définition possible de la $(\infty, 2)$-catégorie des faisceaux de catégories sur Y aurait été la $(\infty, 2)$-catégorie $\mathrm{QCoh}(\mathcal{Y})\text{-}\mathbf{mod}$.

Remarquons que si $\mathcal{Y}$ est (représentable par) un schéma affine S, on a une équivalence tautologique

$$\mathrm{QCoh}(S)\text{-}\mathbf{mod} \simeq \mathrm{ShvCat}(S).$$

4.3.7. — Pour un préchamp $\mathcal{Y}$ général les deux $(\infty, 2)$-catégories ci-dessus sont reliées par une paire de foncteurs adjoints :

$$\mathbf{Loc} : \mathrm{QCoh}(\mathcal{Y})\text{-}\mathbf{mod} \rightleftarrows \mathrm{ShvCat}(\mathcal{Y}) : \mathbf{\Gamma}. \tag{14}$$

En termes de l'application (11), le foncteur $\mathbf{\Gamma}$ envoie un faisceau de catégories sur

$$\lim_{S \xrightarrow{y} \mathcal{Y}} \mathbf{C}_{S,y} \in \mathrm{DGCat},$$

qui est munie d'une action naturelle de (12).

Le foncteur **Loc** envoie $\mathbf{C} \in \mathrm{QCoh}(\mathcal{Y})\text{-}\mathbf{mod}$ sur

$$(S, y) \rightsquigarrow \mathrm{QCoh}(S) \underset{\mathrm{QCoh}(\mathcal{Y})}{\otimes} \mathbf{C}.$$

On dira qu'un préchamp $\mathcal{Y}$ est *1-affine* si les foncteurs (14) sont des équivalences.

Tout schéma affine est tautologiquement 1-affine.

4.3.8. — Voici quelques exemples de préchamps qui sont (ou ne sont pas) 1-affines (ces exemples sont pris de [Ga4, Sect. 2]) :

(i) Tout espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé (en particulier, un schéma) est 1-affine.
(ii) Tout champ algébrique quasi-compact, dont le morphisme de diagonale est affine, est 1-affine.
(iii) Pour un groupe algébrique connexe G non trivial, le quotient $\mathrm{pt}/G(\mathcal{O})$ *n'est pas* 1-affine. (Il n'y a pas de contradiction avec l'exemple (ii), car l'hypothèse sur le type fini est violée.)
(iv) L'ind-schéma $\mathbb{A}^\infty = \operatorname{colim}_i \mathbb{A}^i$ *n'est pas* 1-affine.

En général, on peut dire que la dimension infinie est une obstruction à être 1-affine.

4.4. L'espace des systèmes locaux sur le disque formel épointé

4.4.1. — On va maintenant introduire l'espace $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$, qui est l'acteur géométrique principal du côté galoisien de la théorie de Langlands géométrique locale.

Le point de départ est l'espace des formes de connexion sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ à valeurs dans $\check{\mathfrak{g}}$, c'est-à-dire $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}$. C'est un ind-schéma (de type infini). Le choix d'une uniformisante dans $\mathcal{K}$ identifie $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}$ avec $\check{\mathfrak{g}}(\mathcal{K})$.

Le groupe $G(\mathcal{K})$ agit sur $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}$ par les *transformations de jauge.*

On définit $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ comme le *préchamp quotient* $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}/G(\mathcal{K})$.

4.4.2. — Comme il a déjà été mentionné dans la section 4.2.2, la $(\infty,2)$-catégorie

$$\mathrm{ShvCat}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}))$$

joue le même rôle vis-à-vis de $G(\mathcal{K})$- **mod** que $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(X))$ vis-à-vis de $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G)$.

En particulier, on s'attend à ce que :

(i) la $(\infty,2)$-catégorie $\mathrm{ShvCat}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}))$ (qui est munie d'une structure (symétrique) monoïdale naturelle) agisse sur $G(\mathcal{K})$- **mod** ;
(ii) $\mathrm{ShvCat}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}))$ soit équivalente à la sous-catégorie pleine de $G(\mathcal{K})$- **mod** constituée des objets tempérés.

4.4.3. — On propose la conjecture suivante :

Conjecture 4.1. — *Le préchamp* $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ *est 1-affine.*

Cette conjecture impliquerait que les deux candidats possibles pour la notion de catégorie au-dessus de $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$, à savoir

$$\mathrm{ShvCat}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})) \text{ et } \mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}))\text{-}\,\mathbf{mod},$$

sont équivalents.

La conjecture 4.1 est facile à démontrer dans le cas où G est un tore.

Remarque 4.2. — Nous voudrions souligner que l'énoncé de la conjecture 4.1 n'est pas du tout évident :

Le préchamp $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ est obtenu comme le quotient de $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}$ par $G(\mathcal{K})$. Or on remarque que l'ind-schéma $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}$ *n'est pas* 1-affine (car il contient l'exemple (iv) dans la section 4.3.8). De plus, la procédure qui consiste à prendre un quotient par un groupe de type infini a tendance à détruire la propriété d'être 1-affine (voir l'exemple (iii) dans la section 4.3.8).

Ainsi, par exemple, si au lieu de l'action de *jauge* de $G(\mathcal{K})$ sur $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}$ on prenait l'action adjointe, le quotient correspondant *ne serait pas* 1-affine.

Cependant, on entend que $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ arrive à être 1-affine : (a) l'ind-direction dans $\check{\mathfrak{g}} \otimes \omega_{\mathcal{K}}$ qui l'empêche d'être 1-affine est « avalée » par l'ind-direction dans $G(\mathcal{K})$, et (b) l'action de $G(\mathcal{O})$ est libre « modulo quelque chose de dimension finie », autrement dit, l'exemple (iii) de la section 4.3.8 n'est pas contenu dans notre situation. Donc $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ ne contient pas de phénomènes de dimension infinie qui l'empêcheraient d'être 1-affine. Néanmoins, $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ *n'est pas* localement de type fini (si G n'est pas abélien) !

4.4.4. — Le résultat partiel suivant vers la conjecture 4.1 a été démontré dans [Ras] :

Théorème 4.3 (S. Raskin). —

(a) *Le foncteur* **Loc** *pour* $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}})$ *est pleinement fidèle.*

(b) *La catégorie* $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}(\overset{\circ}{\mathcal{D}}))$ *est compactement engendrée.*

RÉFÉRENCES

[AG1] D. Arinkin et D. Gaitsgory, *Singular support of coherent sheaves and the geometric Langlands conjecture*, Selecta Math. N.S. **21** (2015), 1–199.

[AG2] D. Arinkin et D. Gaitsgory, *The category of singularities as a crystal and global Springer fibers*, arXiv : 1412.4394.

[BB] A. Beilinson et J. Bernstein, *Localisation de g-modules*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **292** (1981), 15–18.

[BD] A. Beilinson et V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*,
disponible à http ://math.uchicago.edu/ mitya/langlands.html.

[Ber] D. Beraldo, *On the extended Whittaker category*, arXiv : 1411.7982.

[Bez] R. Bezrukavnikov, *On two geometric realizations of the affine Hecke algebra*, arXiv :1209.0403.

[Dr] V. Drinfeld, *Two-dimensional l-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2)*, Amer. J. Math. **105** (1983), 85–114.

[FG] E. Frenkel et D. Gaitsgory, *D-modules on the affine flag variety and representations of affine Kac-Moody algebras*, J. Represent. Theory **13** (2009), 470–608.

[FGV] E. Frenkel, D. Gaitsgory et K. Vilonen, *On the geometric Langlands conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 367–417.

[Ga1] D. Gaitsgory, *On a vanishing conjecture appearing in the geometric Langlands correspondence*, Ann. of Math. (2) **160**, no. 2 (2004), 617–682.

[Ga2] D. Gaitsgory, *Quantum Langlands correspondence*, disponible à http ://www.math.harvard.edu/ gaitsgde/GL/.

[Ga3] D. Gaitsgory, *Outline of the proof of the geometric Langlands conjecture for GL(2)*, Astérisque **370** (2015), 1–112.

[Ga4] D. Gaitsgory, *Sheaves of categories and the notion of 1-affineness*, Contemporary Mathematics **643** (2015), 1–99.

[GR1] D. Gaitsgory et N. Rozenblyum, *A study in derived algebraic geometry, Chapter I.1*, disponible à http ://www.math.harvard.edu/∼gaitsgde/GL/.

[GR2] D. Gaitsgory et N. Rozenblyum, *A study in derived algebraic geometry, Chapter I.2*, disponible à http ://www.math.harvard.edu/∼gaitsgde/GL/.

[GR3] D. Gaitsgory et N. Rozenblyum, *A study in derived algebraic geometry, Chapter I.3*, disponible à http ://www.math.harvard.edu/∼gaitsgde/GL/.

[GR4] D. Gaitsgory and N. Rozenblyum, *A study in derived algebraic geometry, Chapter III.4*, disponible à http ://www.math.harvard.edu/∼gaitsgde/GL/.

[LLaf] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (1) (2002), 1–241.

[VLaf] V. Lafforgue, *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale*, arXiv :1209.5352.

[Lau1] G. Laumon, *Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions*, Duke Math. J. **54** (1987), 309–359.

[Lau2] G. Laumon, *Transformation de Fourier généralisée*, arXiv :alg-geom/9603004.

[Lu] J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Princeton Univ. Press (2009).

[MV] I. Mirković et K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. **166** (2007), 95–143.

[Ras] S. Raskin, *On the notion of spectral decomposition in local geometric Langlands*, arXiv :1511.01378

Dennis GAITSGORY

Harvard University
Department of Mathematics
One Oxford Street
Cambridge, MA 02138, U.S.A.
E-mail : gaitsgde@math.harvard.edu