Séminaire BOURBAKI Novembre 2014
67ème année, 2014-2015, n$^{\text{o}}$ 1091

PHÉNOMÈNE D'AMORTISSEMENT DANS LES ÉQUATIONS D'EULER [d'après J. Bedrossian et N. Masmoudi]

par **David GÉRARD–VARET**

INTRODUCTION

Ces notes ont pour but d'expliquer et de mettre en perspective l'article [BM], relatif aux équations d'Euler. Introduites par Leonhard Euler en 1755, ces équations modélisent la dynamique d'un fluide dont on néglige la compressibilité et la viscosité. Dans ce modèle, le fluide est associé à un continuum, décrit par une variable d'espace $\mathbf{x}$. Après normalisation de la masse volumique du fluide, elles peuvent s'écrire

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot v = 0, \tag{1}$$

avec $v = v(t, \mathbf{x})$ le champ de vitesses du fluide, et $p = p(t, \mathbf{x})$ la pression. Le symbole ∇ fait référence au gradient en $\mathbf{x}$,

$$v \cdot \nabla \;=\; v_1\partial_1 + ... + v_d\partial_d, \quad \operatorname{div} v = \partial_1 v_1 + ... + \partial_d v_d$$

où d désigne la dimension de l'espace considéré. La première équation dans (1) correspond à la conservation de la quantité de mouvement, tandis que la seconde traduit l'incompressibilité du fluide. Avec les équations de Navier-Stokes, prenant en compte la viscosité, les équations d'Euler constituent le socle théorique de la mécanique des fluides, et demeurent du point de vue de l'analyse mathématique une source intarissable de problèmes ([BT, Gi]). Nous nous intéresserons ici à sa version bidimensionnelle, qui correspond à des écoulements invariants dans une direction. Négligeant cette direction, on note $v = (v_x, v_y)$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ modélise le domaine fluide. Un choix naturel consiste à prendre pour $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. D'un point de vue mathématique, il est commode de considérer $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$, avec conditions de périodicité ou de décroissance à l'infini en x, y.

Dans ce contexte bidimensionnel, une quantité clé est le rotationnel du champ de vitesses, appelé *vorticité* : $\Omega = \operatorname{rot} v = \partial_x v_y - \partial_y v_x$. Un calcul montre que cette vorticité satisfait l'équation

$$\partial_t \Omega + v \cdot \nabla \Omega = 0. \tag{2}$$

Pour une solution v régulière de l'équation d'Euler, notant $\phi_{t,s}$ le flot associé à v, on obtient la relation

$$\Omega(t, \mathbf{x}) = \Omega(0, \phi_{0,t}(\mathbf{x}))$$

qui illustre le transport de la vorticité par le flot. On peut déduire de cette relation de nombreuses lois de conservation, dont celle des normes L^p de Ω. Ces contrôles de la vorticité, propres à la dimension 2, sont des outils fondamentaux dans l'analyse du *problème de Cauchy* sur $\mathbb{R}^2$. Ils permettent, pour des classes diverses de données initiales v_0, de construire des solutions v globales en temps. Nous renvoyons par exemple à [MB] pour des énoncés précis. Citons à titre d'exemple un résultat relatif à l'espace de Sobolev

$$H^s(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \int_{\mathbb{R}^2} \langle|\xi|\rangle^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,$$

où $s \geq 0$, ξ est la variable duale de $\mathbf{x}$, $|\xi|$ est sa norme euclidienne, et $\langle t\rangle = \sqrt{1+t^2}$.

Théorème 0.1. — *Soit $s > 2$, $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)^2$ tel que $\nabla \cdot v_0 = 0$. Le système* (1) *admet un unique couple solution (v, p) (à constante additive près pour p), satisfaisant*

$$v \in C(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^2)^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H^{s-1}(\mathbb{R}^2)^2),\ p \in C^0([0,T]; H^s_{loc}(\mathbb{R}^2)),$$

et la condition initiale $v|_{t=0} = v_0$.

Un résultat analogue est valable en remplaçant les conditions d'intégrabilité à l'infini par des conditions de périodicité, c'est-à-dire en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$: il suffit de remplacer dans la définition de H^s la transformée de Fourier continue par la transformée de Fourier discrète. On voit ainsi qu'en deux dimensions d'espace, la régularité de la donnée initiale est préservée. Il s'agit d'une question totalement ouverte en trois dimensions.

Au-delà de l'existence globale et de l'unicité des solutions, le problème de leur comportement en temps long est extrêmement ardu, du fait de la nature hamiltonienne des équations d'Euler. Parmi les diverses facettes de ce problème, la stabilité des équilibres (et le comportement asymptotique de leurs perturbations) occupe une place privilégiée et ancienne : leur étude mathématique remonte aux travaux fondateurs de Reynolds [Re], Kelvin [Ke] et Rayleigh [Ra] sur les *profils de cisaillement* : $v(x, y) = (V(y), 0)$. On vérifie immédiatement qu'il s'agit de solutions stationnaires de l'équation d'Euler. Se pose alors le problème de leur stabilité, linéarisée et non-linéaire. Nous renvoyons aux monographies [DR] et [SH] pour de plus amples développements. Dans la suite, nous nous concentrerons sur un profil de cisaillement particulier : le *flot de Couette*.

1. STABILITÉ LINÉAIRE DU FLOT DE COUETTE

Le flot de Couette, étudié expérimentalement par Maurice Couette dès 1885, est le profil de cisaillement linéaire : $v_c(x, y) = (y, 0)$.

L'objet de l'article [BM], et de cet exposé, est le comportement asymptotique des perturbations de cette solution. Pour l'étudier, on s'appuie sur la formulation (2) des équations d'Euler à l'aide de la vorticité. Notons que la vorticité du flot de Couette est identiquement égale à -1. Pour v et Ω des solutions de (1) et (2), les perturbations $u = v - (y, 0)$ et $\omega = \Omega + 1$ satisfont

$$\partial_t \omega + y\partial_x \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \tag{3}$$

Classiquement, on reconstruit u à partir de ω, *via* la *loi de Biot et Savart* : la contrainte $\nabla \cdot u = 0$ permet d'introduire une fonction de courant ψ telle que $u = \nabla^\perp \psi = \left(\begin{smallmatrix} -\partial_y \\ \partial_x \end{smallmatrix} \right) \psi$. L'équation $\operatorname{rot} u = \omega$ donne alors

$$\Delta \psi = \omega, \quad u = \nabla^\perp \Delta^{-1} \psi \tag{4}$$

sous réserve d'inversibilité du laplacien. Concrètement, on considérera dans la suite $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, et des fonctions ω suffisamment régulières et décroissantes en y pour que l'inversion ne pose pas de problème. Le choix du domaine $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ sera discuté au paragraphe 7.

Les premières études théoriques sur le flot de Couette sont l'œuvre de Rayleigh, Kelvin et Orr : on renvoie à [Ra2, Ke, Or], ainsi qu'à l'article plus récent [Ca]. Elles ont trait à la stabilité linéaire : on néglige les termes quadratiques en la perturbation, pour ne garder que *l'équation de transport libre*

$$\partial_t \omega + y\partial_x \omega = 0. \tag{5}$$

Une résolution explicite est évidemment possible. Pour une donnée initiale ω_0, $\omega(t, x, y) = \omega_0(x - ty, y)$. Cette égalité implique immédiatement la conservation de l'enstrophie : $\|\omega(t)\|_{L^2}^2 = \|\omega_0\|_{L^2}^2$. Si on lui applique la transformée de Fourier

$$\hat{f}(k, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) e^{-ikx} e^{-i\xi y} dx dy, \quad k \in \mathbb{Z}, \ \xi \in \mathbb{R},$$

on obtient $\hat{\omega}(t, k, \xi) = \hat{\omega}_0(k, \xi + kt)$. Pour $k \neq 0$, cette formule illustre le transfert d'enstrophie des basses fréquences vers les hautes fréquences en y quand t devient grand. Il conduit à la convergence faible suivante, par exemple dans L^2 : $\omega(t) \rightharpoonup \int \omega_0 dx$ quand t tend vers l'infini.

Considérons maintenant le comportement asymptotique de la vitesse. Les relations (4) donnent en Fourier

$$\hat{\psi}(t, k, \xi) = \frac{-\hat{\omega}_0(k, \xi + kt)}{k^2 + |\xi|^2}, \ \ \hat{u}_x(t, k, \xi) = \frac{i\xi\hat{\omega}_0(k, \xi + kt)}{k^2 + |\xi|^2}, \ \ \hat{u}_y(t, k, \xi) = \frac{-ik\hat{\omega}_0(k, \xi + kt)}{k^2 + |\xi|^2}. \tag{6}$$

Soit $P_{\neq 0}$ le projecteur sur les modes de Fourier en x non-nuls ($k \neq 0$). Un calcul facile donne alors l'estimation Sobolev

$$\|P_{\neq 0}\psi(t)\|_{L^2} \leq \frac{C}{\langle t^2 \rangle} \|\omega_0\|_{H^2}, \quad \|P_{\neq 0}u_x(t)\|_{L^2} \leq \frac{C}{\langle t \rangle} \|\omega_0\|_{H^2}, \quad \|P_{\neq 0}u_y(t)\|_{L^2} \leq \frac{C}{\langle t^2 \rangle} \|\omega_0\|_{H^2}, \tag{7}$$

avec $\langle a \rangle = \sqrt{1 + a^2}$ pour tout $a \geq 0$. *On observe donc un phénomène d'amortissement du champ de vitesses.* Cet amortissement s'applique aux modes de Fourier en x qui sont non-nuls. Le mode 0, c'est-à-dire la moyenne en x du champ, est stationnaire. Dit autrement, le champ de vitesses converge fortement dans L^2 vers le profil de cisaillement

$(\int_{\mathbb{T}} u_{0x}(x,y)dx, 0)$, qui correspond à la moyenne en x du champ de vitesses initial. Notons que cette moyenne n'a pas de composante verticale, du fait de la contrainte de divergence nulle.

Ce phénomène d'amortissement peut surprendre, au vu de la nature non-dissipative du système d'Euler. Il résulte de la combinaison de deux facteurs :

– Un transfert d'énergie (ici d'enstrophie) des basses vers les hautes fréquences.
– Un effet régularisant, qui amortit les hautes fréquences et conjugué au facteur précédent amortit la solution. Dans le cas de la vitesse du fluide, l'effet régularisant est l'inversion du laplacien présent dans la loi de Biot et Savart.

Cette décroissance de la vitesse évoque fortement le célèbre amortissement Landau de la physique des plasmas. Dans ce dernier contexte, l'équation modèle est celle de Vlasov-Poisson, que nous écrivons en une dimension d'espace :

$$\partial_t f + v\partial_x f - E\partial_v f = 0, \quad \partial_x E = -\int f dv + 1, \quad x \in \mathbb{T},\ v \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Dans ce modèle, $f(t,x,v)$ décrit la distribution statistique des électrons du plasma, fonction de la position x et de la vitesse v. La fonction $E = E(t,x)$ décrit le champ électrique du fluide. Oublions temporairement le $+1$ dans la seconde équation, qui correspond à la contrainte $\int f dx dv = 1$. Alors $f = 0$ est une solution, et le linéarisé autour de cette solution est de nouveau l'équation du transport libre : on a de nouveau un transfert des basses vers les hautes fréquences, dans la variable de vitesse v. Quant à l'effet régularisant, il apparaît au niveau de la densité du plasma $\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv$. L'intégrale en v amortit les oscillations, et aboutit à la décroissance du champ électrique $E = \partial_x^{-1} P_{\neq 0}\rho$ (toujours en négligeant le $+1$).

La décroissance, obtenue ici par une linéarisation abusive autour de $f = 0$, reste vraie lorsqu'on linéarise autour de vraies fonctions de distribution homogènes en espace : $f = f(v)$. Dans le cas de la distribution maxwellienne, c'est un résultat dû à Landau [La]. Ce résultat a été généralisé à une grande classe de distributions homogènes, vérifiant les critères de stabilité dits de Penrose : voir [Pe, MV]. Notons que la vitesse de décroissance de E dans Vlasov dépend de la régularité des données : elle est en particulier exponentielle pour des données analytiques, *a contrario* des estimations (7).

Au vu des résultats que nous venons de décrire se pose naturellement le problème du passage au non-linéaire : cet amortissement est-il préservé par la dynamique non-linéaire des équations (3) ou (8) ? Dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson, une réponse positive et très complète a été apportée par Mouhot et Villani, dans le remarquable (et remarqué !) article [MV]. L'objet du papier [BM] est d'apporter une réponse analogue dans le cadre de l'équation d'Euler : plus précisément, il s'agit de montrer que des estimations du type (7) sont encore vraies pour l'équation complète (3). Ce papier trouve évidemment sa motivation et certaines de ces inspirations dans les travaux de Mouhot et Villani. Néanmoins, le passage de Vlasov-Poisson à Euler est une source de difficultés considérables, nécessitant l'introduction de nouveaux outils. Ces outils ont *in fine* permis de revisiter très récemment et de manière simplifiée l'amortissement Landau non-linéaire, *cf.* [BMM]. Dans la suite, nous nous concentrerons donc presque exclusivement sur l'équation d'Euler.

Concluons cette analyse linéaire par une dernière remarque élémentaire : les résultats de stabilité ou d'amortissement énoncés dans L^2 ne sont pas vrais en régularité supérieure. Par exemple, les oscillations hautes fréquences, liées à la variable de Fourier $\xi + kt$, impliquent que $\|\omega(t)\|_{H^s} \approx t^s \|\omega_0\|_{L^2}$. Une façon naturelle d'affiner les résultats est de filtrer les oscillations, par le biais du changement de variable $z = x - yt$. En posant $(f, \phi, U)(t, z, y) = (\omega, \psi, u)(t, z + ty, y)$, on trouve $f(t) = \omega_0$ pour tout t, et pour tout $s \geq 0$,

$$(9) \qquad \langle t^2 \rangle \|P_{\neq 0}\phi(t)\|_{H^s} \; + \; \langle t \rangle \|P_{\neq 0} U_x(t)\|_{H^s} \; + \; \langle t^2 \rangle \|P_{\neq 0} U_y(t)\|_{H^s} \; \leq \; C_s \, \|f(t)\|_{H^{s+2}}.$$

2. RÉSONANCES

Inspirés par la remarque précédente, nous commençons par écrire l'équation (3) dans les variables $z = x - ty$ et y. En conservant les mêmes notations :

$$(10) \qquad \partial_t f + \nabla^\perp \phi \cdot \nabla f = 0,$$

où $\nabla = \nabla_{z,y}$. Oublions pour l'instant la moyenne en x de $\nabla^\perp \phi$, et considérons l'équation

$$(11) \qquad \partial_t f + P_{\neq 0} \nabla^\perp \phi \cdot \nabla f = 0.$$

Par cette simplification, le modèle se rapproche davantage de Vlasov, où le champ électrique $E = \partial_x \Phi$, Φ potentiel électrique, est de moyenne nulle en x.

En portant un regard naïf sur l'estimation (9), on peut être tenté de rapprocher (11) de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dF}{dt} = \frac{F^2}{1 + t^2},$$

de solution $F(t) = (\arctan(t) - \frac{1}{F(0)})^{-1}$. Cette équation explose en temps fini pour des grandes données initiales $F(0)$ ($F(0) > \frac{2}{\pi}$). En revanche, de petites perturbations initiales engendrent de petites perturbations à tout temps. Ce parallèle entre l'EDP et l'EDO serait justifié si l'on trouvait une norme $\| \cdot \|$ telle que

$$\frac{d\|f\|}{dt} \leq \frac{C}{1 + t^2} \|f\|^2.$$

Mais l'estimation (9) est de ce point de vue peu encourageante. En effet, la décroissance en t^{-2} coûte de la régularité : pour une norme H^s en ϕ, on a besoin d'une norme H^{s+2} en f. L'origine de cette perte de régularité est visible sur la formule (6), valable pour l'équation de transport : si (k, η) est la variable duale de (z, y) cette formule devient

$$(12) \qquad \hat{\phi}(t, k, \eta) = \frac{\hat{\omega}_0(k, \eta)}{k^2 + (\eta - kt)^2}.$$

Pour $\eta k > 0$, le mode (k, η) croît entre $t = 0$ et le temps *résonant* $t = \frac{\eta}{k}$, et est amplifié dans l'intervalle d'un facteur $\frac{\eta^2+k^2}{k^2}$, qui est très grand si $|\eta| \gg |k|$. Passé le temps résonant le mode décroît, et *in fine* tend vers 0 comme $O(t^{-2})$.

Pour comprendre l'impact de cette croissance transitoire sur le système non-linéaire (11), nous partons du système simplifié

$$\partial_t f = \partial_y P_{\neq 0}\phi \, \partial_z f_{reg} \tag{13}$$

où f_{reg} est une fonction *donnée*, de petite amplitude ε, supposée très régulière et décroissante en y. On reconnaît dans le membre de droite une partie du produit scalaire $P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi \cdot \nabla f_{reg}$, lui-même issu d'une semi-linéarisation de $P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi \cdot \nabla f$ autour de f_{reg}. Le passage en Fourier donne

$$\partial_t \hat{f}(t, k, \eta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq 0} \frac{\eta(k-l)}{l^2 + |\xi - lt|^2} \hat{f}(l, \xi) \hat{f}_{reg}(t, k-l, \eta-\xi) d\xi. \tag{14}$$

Si f_{reg} est très régulier, $\hat{f}_{reg}$ décroît très vite à l'infini. Les modes l proches de k vont donc jouer un rôle prépondérant. Nous simplifions encore le modèle, en ne gardant que le mode $l = k + 1$. Précisément, nous remplaçons $\hat{f}_{reg}$ par la masse de Dirac $\varepsilon\delta_{(-1,0)}$: nous obtenons

$$\partial_t \hat{f}(t, k, \eta) = \frac{\varepsilon\eta}{(k+1)^2(1 + |t - \frac{\eta}{k+1}|^2)} \hat{f}(t, k+1, \eta). \tag{15}$$

Se dessine alors une possible cascade d'amplifications. Pour $\eta > 0$, un mode $k_0 \gg 1$ force une amplification du mode $k_0 - 1$ au temps résonant $t = \frac{\eta}{k_0}$. Ce mode $k_0 - 1$ peut forcer à son tour une amplification du mode $k_0 - 2$ au temps résonant $t = \frac{\eta}{k_0 - 1}$, et ainsi de suite. Ce phénomène est l'analogue pour Euler du phénomène des *échos* pour Vlasov. Nous renvoyons à [Vi, chapitre 7] pour une excellente description de ce dernier.

Ces amplifications cumulées peuvent-elles faire perdre la décroissance observée linéairement ? Regardons de nouveau (15), après intégration en temps :

$$\hat{f}(t, k, \eta) = \hat{f}(0, k, \eta) + \int_0^t \frac{\varepsilon\eta}{(k+1)^2(1 + |s - \frac{\eta}{k+1}|)^2} \hat{f}(s, k+1, \eta) ds. \tag{16}$$

On prend $t = \frac{\eta}{k}$. On fait l'hypothèse que l'intégrale se concentre autour du temps résonant $s = \frac{\eta}{k+1}$, et on néglige l'amplitude initiale $\hat{f}(0, k, \eta)$, supposée petite devant $\hat{f}(t, k, \eta)$. On aboutit alors au modèle discret

$$\hat{f}\left(\frac{\eta}{k}, k, \eta\right) = \frac{\eta'}{(k+1)^2} \hat{f}\left(\frac{\eta}{k+1}, k+1, \eta\right), \quad \eta' = \varepsilon\eta. \tag{17}$$

Notons que le facteur d'amplification est très grand tant que $k \ll E(\sqrt{\eta'})$, E désignant la partie entière. Partant de $k = 1$, cette relation de récurrence aboutit à

$$\hat{f}(\eta, 1, \eta) = \left(\prod_{k=2}^{j} \frac{\eta'}{k^2}\right) \hat{f}\left(\frac{\eta}{j}, j, \eta\right).$$

Pour $j = E(\sqrt{\eta'})$, l'amplification cesse : on anticipe que $\hat{f}(t,j,\eta) \approx \hat{f}(0,j,\eta)$ pour $t \le \frac{\eta}{j}$. Par ce raisonnement (très approximatif !), on obtient

$$\hat{f}(\eta,1,\eta) \approx \left(\prod_{k=2}^{j} \frac{\eta'}{k^2}\right) \hat{f}(0,j,\eta) \approx \frac{(\eta')^{j-1}}{(j!)^2} \hat{f}(0,j,\eta)$$

toujours avec $j = E(\sqrt{\eta'}) = E(\sqrt{\varepsilon\eta})$. En appliquant la formule de Stirling, on trouve pour $\eta \gg \varepsilon^{-1}$:

$$\hat{f}(\eta,1,\eta) \approx \frac{e^{2\sqrt{\varepsilon\eta}}}{(\varepsilon\eta)^{3/2}} \hat{f}(0,E(\sqrt{\varepsilon\eta}),\eta). \tag{18}$$

Un résultat analogue s'applique aux modes de Fourier $k \neq 1$. Notons qu'au-delà du temps η, on s'attend à une variation modérée de $\hat{f}(t,k,\eta)$. En effet, les temps résonants $\frac{\eta}{k}$ sont concentrés dans l'intervalle $[0,\eta)$, et la contribution de l'intégrale de η à t au membre de droite de (16) est supposément faible.

3. ÉNONCÉ DU THÉORÈME D'AMORTISSEMENT

Bien que grossière et non-rigoureuse, l'analyse précédente permet de dégager un énoncé plausible d'amortissement non-linéaire. Deux points sont à intégrer. Le premier est la régularité des perturbations du flot de Couette à considérer. D'après l'équation (18), une perturbation de fréquence η en y pourrait être amplifiée par $e^{c\sqrt{\eta}}$ pour un $c > 0$. Pour obtenir la stabilité de f malgré cette amplification, il est naturel de partir de données $f|_{t=0} = \omega|_{t=0} = \omega_0$ dans un espace du type

$$G^{\lambda,s} = \left\{ \omega \in L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}), \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda(|k|+|\eta|)^s} |\hat{\omega}(k,\eta)|^2 d\eta < \infty \right\}$$

pour un $\lambda > 0$, *et pour un* $s > \frac{1}{2}$. Cet espace est constitué de fonctions Gevrey de classe $\frac{1}{s}$. La multiplication en Fourier par $e^{c\sqrt{\eta}}$ envoie $G^{\lambda,s}$ dans $G^{\lambda',s}$ pour tout $\lambda' < \lambda$.

Le second point est le traitement de la moyenne en x, c'est-à-dire le remplacement de (11) par (10). Ce point constitue une spécificité de l'équation d'Euler vis-à-vis de celle de Vlasov-Poisson. En effet, dans l'équation de Vlasov-Poisson, le champ électrique est de moyenne nulle. *A contrario*, on s'attend ici comme au paragraphe 1 à une convergence de u vers un profil de cisaillement $u_\infty(x,y) = (U_\infty(y),0)$ non-nul. En particulier, le champ de transport dans l'équation de Couette (3) ne devrait pas être asymptotiquement en temps $(y,0)$, mais plutôt $(y+U_\infty,0)$, avec un U_∞ à déterminer.

En tenant compte des contraintes mentionnées ci-dessus, J. Bedrossian et N. Masmoudi énoncent le théorème suivant :

Théorème 3.1 ([BM]). — *Soit* $1/2 < s \leq 1$, $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$. *Il existe* $\varepsilon_0 \leq 1/2$ *tel que : pour tout* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, *pour tout* ω_0 *vérifiant*

$$\int \omega_0 dxdy = 0, \quad \int |y\omega_0(x,y)|dxdy < \varepsilon, \quad \text{et } \|\omega_0\|_{G^{\lambda_0,s}} \leq \varepsilon^2,$$

il existe f_∞ *satisfaisant* $\int f_\infty dxdy = 0$, $\|f_\infty\|_{G^{\lambda_1,s}} \lesssim \varepsilon$ *et tel que*

$$\|\omega(t, x + ty + \Phi(t,y), y) - f_\infty(x,y)\|_{G^{\lambda_1,s}} \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\langle t\rangle} \tag{19}$$

où Φ *est donné explicitement par la formule*

$$\Phi(t,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} u_x(\tau,x,y)dxd\tau = U_\infty(y)t + O(\varepsilon^2)$$

avec $U_\infty = \partial_y \partial_{yy}^{-1} \int_{\mathbb{T}} f_\infty(x,y)dx$. *De plus, le champ de vitesses* u *satisfait*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u_x(t,x,\cdot)dx - U_\infty \right\|_{G^{\lambda_1,s}} &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\langle t^2\rangle}, \\ \left\| u_x(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u_x(t,x,\cdot)dx \right\|_{L^2} &\lesssim \frac{\varepsilon}{\langle t\rangle}, \\ \|u_y(t)\|_{L^2} &\lesssim \frac{\varepsilon}{\langle t^2\rangle}. \end{aligned} \tag{20}$$

Il s'agit du premier théorème d'amortissement non-linéaire relatif aux perturbations du flot de Couette. Avant d'expliquer les grandes lignes de la preuve, quelques remarques préliminaires s'imposent :

– Les résultats de stabilité et décroissance du théorème font apparaître la variable

$$z = x - ty - \Phi(t,y) = x - ty - \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} u_x(x,y)dx.$$

Ainsi, (19) s'écrit $\|f(t,\cdot) - f_\infty\|_{G^{\lambda_1,s}} \lesssim \frac{\varepsilon^2}{t}$, avec $f(t,z,y) = \omega(t, z + ty + \Phi(t,y), y)$. Cette variable z permet de filtrer les oscillations liées au transport. Le point important est la vitesse additionnelle $\Phi(t,y)/t$, qui converge asymptotiquement vers $U_\infty \neq 0$ comme discuté précédemment. Cette vitesse Φ dépend de la solution elle-même, ce qui rend l'analyse mathématique ardue. Cette difficulté sera abordée au paragraphe 6. On peut noter que les taux de convergence dans (20) sont les mêmes que dans le cas linéaire, *cf.* (7).

– La limite f_∞ de f fait intervenir en général toute l'histoire de l'écoulement (voir la formule (23) ci-dessous). Une limite analogue peut être obtenue pour $t \to -\infty$, avec $f_{-\infty} \neq f_\infty$ en général. Un comportement similaire est observé dans l'équation de Vlasov-Poisson, ainsi qu'en théorie du scattering [Ta]. Pour Vlasov-Poisson, nous renvoyons à la discussion détaillée menée dans [MV, page 185]. Il s'agit d'un effet purement non-linéaire : dans le cas de l'équation (5), $f_{-\infty} = f_\infty = \omega_0$. Ici, on a seulement $\|f - f_\infty\|_{G^{\lambda_1,s}} = O(\varepsilon^2)$.

– L'estimation de stabilité (19) est vérifiée pour tout $\lambda_1 < \lambda_0$, mais pas *a priori* pour $\lambda_1 = \lambda_0$. Cela vient de la possible perte de régularité générée par la cascade non-linéaire, avec facteur $e^{c\sqrt{\eta}}$. Par ailleurs, cette estimation de stabilité est à notre connaissance le premier résultat de stabilité pour Euler en norme élevée (ici Gevrey). Seuls des résultats de stabilité L^p de la vorticité étaient connus [MP, chapitre 3]. Dans le cas du flot de Couette, cette stabilité L^p est immédiate, car l'équation non-linéaire (3) est encore une équation de transport.

D'autres remarques, de nature moins technique, seront faites au dernier paragraphe.

4. CHOIX DE LA NORME

Cette section et les suivantes visent à décrire les grandes lignes de la preuve du théorème 3.1. Par souci de pédagogie, nous nous concentrerons d'abord sur l'équation simplifiée

$$\partial_t \omega + y\partial_x \omega + P_{\neq 0} \nabla^\perp \psi \cdot \nabla \omega = 0, \tag{21}$$

sans la moyenne en x de la vitesse. Nous réintégrerons cette moyenne au paragraphe 6. Pour cette équation (21), une version simplifiée du théorème est valable, dans laquelle $\Phi = 0$. Pour l'établir, on fait comme au paragraphe 2 le changement de variable $z = x - ty$, et on obtient l'équation (11).

L'enjeu est de propager uniformément en temps des bornes du type

$$\|f(t)\|_{G^{\lambda,s}} \leq C\varepsilon, \quad \|\phi(t)\|_{G^{\lambda,s}} \leq \frac{C\varepsilon}{\langle t^2 \rangle}, \tag{22}$$

pour $C = C(\lambda)$, $\lambda < \lambda_0$. Supposons temporairement que ces bornes soient satisfaites. On intègre alors en temps (11). La relation obtenue s'écrit schématiquement

$$f(t) = f(0) + \int_0^t Q(\phi(\tau), f(\tau)) d\tau.$$

Avec les bornes (22), on peut montrer que l'intégrale de droite converge dans $G^{\lambda',s}$ pour tout $\lambda' < \lambda$, en particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1$, et $\lambda' = \lambda_1$. On obtient alors la convergence de f vers

$$f_\infty = f(0) + \int_0^\infty Q(\phi(\tau), f(\tau)) d\tau \tag{23}$$

puis

$$\|f - f_\infty\|_{G^{\lambda_1,s}} \lesssim \int_t^\infty \frac{C^2\varepsilon^2}{\langle \tau^2 \rangle} d\tau \lesssim \frac{C'\varepsilon^2}{\langle t \rangle}. \tag{24}$$

Les autres inégalités sont obtenues de manière analogue.

La clé est donc l'obtention des bornes (22). Néanmoins, la norme $\|\cdot\|_{G^{\lambda,s}}$, λ fixé, n'est pas directement utilisable : on se heurte au problème de perte de régularité évoqué dans les paragraphes précédents. Pour faire face à ce problème, au moins deux approches sont envisageables. La première consiste à travailler *avec toute la famille de normes* $G^{\lambda,s}$, $\lambda_0 \geq \lambda \geq \lambda_1$. L'espoir est d'établir une estimation *a priori* du type

$$\|f\|_{G^{\lambda-\delta,s}} \leq C_\delta \|f\|^2_{G^{\lambda,s}}, \quad \forall\, \delta > 0,$$

avec une constante C_δ qui ne diverge pas trop vite quand δ tend vers 0. On peut ensuite combiner ce type d'estimation avec un schéma de Newton, dont la vitesse de convergence permet une perte de régularité finie malgré le nombre infini d'itérations. Une application fameuse de cette approche est la preuve du théorème KAM [Ar], voir aussi [Na]. Elle a aussi été utilisée avec succès par Mouhot et Villani pour l'amortissement Landau.

La deuxième approche, qui remonte au moins à l'article de Nirenberg [Ni], consiste à utiliser une norme dépendant du temps, typiquement :

$$\|f\|_{G^{\lambda(t),s}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda(t)(|k|+|\eta|)^s} |\hat{f}(k,\eta)|^2 d\eta$$

et considérer $\|f(t)\|_{G^{\lambda(t),s}}$ pour une fonction λ décroissante, avec $\lambda(0) = \lambda_0, \lambda(\infty) = \lambda_1$. Comme l'ont montré récemment Bedrossian, Masmoudi et Mouhot, l'amortissement Landau peut être établi avec ce type de norme [BMM].

Néanmoins, dans le cas de l'équation d'Euler, une telle norme ne semble pas assez fine. La raison essentielle est que les temps résonants $t = \frac{\eta}{k}$ dépendent de la fréquence η : une dépendance plus élaborée des normes en η paraît donc nécessaire. Concrètement, le but est de trouver un poids explicite $w_k(t,\eta)$ ayant une croissance similaire mais supérieure à la solution $\hat{f}(t,k,\eta)$. De cette façon, on peut espérer montrer qu'une norme du type

$$\|f\| = \left(\sum_k \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\hat{f}(t,k,\eta)}{w_k(t,\eta)} \right|^2 d\eta \right)^{1/2} \tag{25}$$

est décroissante, et donc stable.

Pour construire un tel poids, Bedrossian et Masmoudi s'appuient sur un *toy model*, similaire à ceux du paragraphe 2. Ils définissent d'abord, pour $\eta > 0$ fixé et tout $k \in \mathbb{N}_*$, les intervalles

$$I_{k,\eta} =]t_{k,\eta}, t_{k-1,\eta}[, \quad \text{avec} \quad t_{k,\eta} = \frac{\eta}{k} - \frac{\eta}{2k(k+1)}, \text{ pour } k = 1 \dots E(\sqrt{\eta}), \text{ et } t_{0,\eta} = 2\eta.$$

Ils introduisent ensuite deux fonctions $w_R(t,\eta)$ et $w_{NR}(t,\eta)$ qui satisfont *approximativement* le système suivant sur chaque $I_{k,\eta}$:

$$\begin{cases} \partial_t f_{NR} = \kappa \dfrac{\eta}{k^2 + |\eta - kt|^2} f_R \\ \partial_t f_R = \kappa \dfrac{k^2}{\eta} f_{NR}. \end{cases} \tag{26}$$

Notons que $I_{k,\eta}$ contient le *temps résonant* $t = \frac{\eta}{k}$. Le système (26) est très inspiré de (15), le facteur $\varepsilon \ll 1$ étant remplacé par un facteur κ d'ordre 1, afin de rendre la croissance de la solution supérieure. Plus précisément, l'idée qui sous-tend ce toy model est la suivante :

– la fonction f_R correspond sur $I_{k,\eta}$ au mode *résonant* $\hat{f}(t,k,\eta)$;
– la fonction f_{NR} correspond elle à l'un ou l'autre des modes *non-résonants* $\hat{f}(t,l,\eta)$, $l \neq k$. Ainsi, pour la première équation de (26), le mode non-résonant considéré est $l = k-1$: on reconnaît l'équation (15) dans laquelle on substitue k à $k+1$. Pour la seconde équation de (26), le mode non-résonant est $l = k+1$: il s'agit encore d'une variante de (15), où l'on a utilisé la majoration : $\frac{\eta}{(k+1)^2+|\eta-(k+1)t|^2} \lesssim \frac{k^2}{\eta}$, valable pour $t \in I_{k,\eta}$.

Nous renvoyons à [BM] pour une définition précise de $w_R(t,\eta)$ et $w_{NR}(t,\eta)$. Comme indiqué plus haut, il ne s'agit que de solutions approchées de (26), au sens où il existe $c, C > 0$ tels que pour tout t dans $[2\sqrt{\eta}, 2\eta]$

$$\left\{ \begin{aligned} c\left(\kappa \frac{\eta}{k^2+|\eta-kt|^2} w_R\right) \le \partial_t w_{NR} \le C\left(\kappa \frac{\eta}{k^2+|\eta-kt|^2} w_R\right) \\ c\left(\kappa \frac{k^2}{\eta} w_{NR}\right) \le \partial_t w_R \le C\left(\kappa \frac{k^2}{\eta} w_{NR}\right) \end{aligned} \right. \tag{27}$$

et également

$$\frac{c}{1+|t-\frac{\eta}{k}|} \le \frac{\partial_t w_{NR}(t,\eta)}{w_{NR}(t,\eta)} \le \frac{C}{1+|t-\frac{\eta}{k}|}, \quad \frac{c}{1+|t-\frac{\eta}{k}|} \le \frac{\partial_t w_R(t,\eta)}{w_R(t,\eta)} \le C\frac{1}{1+|t-\frac{\eta}{k}|} \tag{28}$$

(les temps $t_{E(\sqrt{\eta}),\eta} \le t \le 2\sqrt{\eta}$ nécessitent un traitement à part, mais il s'agit d'un point technique mineur). Les fonctions w_R et w_{NR} vérifient de plus

$$w_R(t_{0,\eta},\eta) = w_{NR}(t_{0,\eta},\eta) = 1, \quad w_R(t_{k,\eta},\eta) = w_{NR}(t_{k,\eta},\eta)\,\forall\, k = 1\ldots E(\sqrt{\eta}),$$

la dernière égalité étant rendue possible par le fait que les modes résonant et non-résonant dans (26) ont une amplification analogue sur chaque $I_{k,\eta}$.

Pour finir, le poids est défini par la formule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_k(t,\eta) = 1, & t \ge t_{0,\eta} = 2\eta, \\ w_k(t,\eta) = w_{NR}(t,\eta), & t \in [t_{E(\sqrt{\eta}),\eta}, 2\eta] \setminus I_{k,\eta}, \\ w_k(t,\eta) = w_R(t,\eta), & t \in I_{k,\eta}, \\ w_k(t,\eta) = w_k(t_{E(\sqrt{\eta}),\eta},\eta), & t < t_{E(\sqrt{\eta}),\eta}. \end{array} \right. \tag{29}$$

Notons que $w_k(t,\eta)$ est pris constant pour $t \le E(\sqrt{\eta})$, resp. $t \ge 2\eta$. On retrouve le seuil discuté de manière informelle au paragraphe 2, en dessous duquel, resp. au-dessus duquel la cascade non-linéaire n'opère plus. Notons aussi que comme w_R et w_{NR} coïncident aux extrémités des $I_{k,\eta}$, le poids ainsi construit est Lipschitz en temps. *Last but not least*, ce poids a comme attendu une croissance de type Gevrey 2 :

PROPOSITION 4.1. — *Il existe $\mu = \mu(\kappa) > 0$ tel que pour $\eta \to \infty$, $\frac{1}{w_k(0,\eta)} \sim \frac{1}{\eta^{\mu/8}} e^{\frac{\mu}{2}\sqrt{\eta}}$.*

Au vu de cette estimation, il est possible de définir une nouvelle norme sur les fonctions de $G^{\lambda,s}$:

$$(30)\qquad \begin{aligned} \|f\|^2_{\lambda(t),s,\sigma} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\int_{\mathbb{R}} \left|A_k(t,\eta)\hat f(k,\eta)\right|^2 d\eta, \\ A_k(t,\eta) &= e^{\lambda(t)(|k|+|\eta|)^s}\langle |k|+|\eta|\rangle^\sigma\left(\frac{e^{\mu\sqrt{\eta}}}{w_k(t,\eta)} + e^{\mu\sqrt{k}}\right). \end{aligned}$$

Le facteur $\langle |k|+|\eta|\rangle^\sigma$ correspond à une régularité Sobolev, et a un rôle technique : pour $\sigma > 1$, il confère à ces normes des propriétés de normes d'algèbre.

C'est avec ce type de norme qu'est propagée dans [BM] *une estimation de petitesse sur f.* Le poids $w_k(t,\eta)$ y joue évidemment un rôle fondamental. Pour comprendre la pertinence de ce poids, on peut considérer le modèle simplifié (15), et la norme simplifiée

$$\|f\| = \left(\sum_k \left|\frac{\hat f(k,\eta)}{w_k(t,\eta)}\right|^2\right)^{1/2}$$

dans laquelle η est un paramètre fixé. On a, en utilisant l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f(t)\|^2 &= -\sum_k \frac{\partial_t w_k(t,\eta)}{w_k(t,\eta)}\frac{|\hat f(t,k,\eta)|^2}{w_k(t,\eta)^2} \\ &\quad + \sum_k \frac{\varepsilon\eta}{(k+1)^2(1+|t-\frac{\eta}{k+1}|^2)}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)||\hat f(t,k,\eta)|}{w(t,k,\eta)^2}. \end{aligned}$$

La majoration de chaque terme dans la dernière somme se fait selon la position de t. Supposons $t \in [2\sqrt{\eta}, 2\eta]$, de sorte que (27) et (28) sont satisfaites, et supposons $k \in [|1, E(\sqrt{\eta})-1|]$. On a alors trois cas : i) $t \in I_{k+1,\eta}$; ii) $t \notin I_{k+1,\eta}, t \in I_{k,\eta}$; iii) $t \notin I_{k+1,\eta}, t \notin I_{k,\eta}$.

Considérons le cas $t \in I_{k+1,\eta}$, les deux autres pouvant être traités par des manipulations semblables. Dans ce cas, on a $w(t,k+1,\eta) = w_R(t,\eta)$, tandis $w(t,k,\eta) = w_{NR}(t,\eta)$. En particulier :

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon\eta}{(k+1)^2(1+|t-\frac{\eta}{k+1}|^2)}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)||\hat f(t,k,\eta)|}{w(t,k,\eta)^2} \\ &= \frac{\varepsilon\eta}{(k+1)^2(1+|t-\frac{\eta}{k+1}|^2)}\frac{w_R(t,\eta)}{w_{NR}(t,\eta)}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)|}{w(t,k+1,\eta)}\frac{|\hat f(t,k,\eta)|}{w(t,k,\eta)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{c\kappa}\frac{\partial_t w_{NR}}{w_{NR}}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)|}{w(t,k+1,\eta)}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)|}{w(t,k,\eta)} \\ &\le \frac{C^{1/2}\varepsilon}{c^{3/2}\kappa}\sqrt{\frac{\partial_t w_R}{w_R}}\sqrt{\frac{\partial_t w_{NR}}{w_{NR}}}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)|}{w(t,k+1,\eta)}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)|}{w(t,k,\eta)} \\ &= \frac{C^{1/2}\varepsilon}{c^{3/2}\kappa}\left(\sqrt{\frac{\partial_t w(t,k+1,\eta)}{w(t,k+1,\eta)}}\frac{|\hat f(t,k+1,\eta)|}{w(t,k+1,\eta)}\right)\left(\sqrt{\frac{\partial_t w(t,k,\eta)}{w(t,k,\eta)}}\frac{|\hat f(t,k,\eta)|}{w(t,k,\eta)}\right). \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne, resp. de la troisième à la quatrième ligne découle de (27), resp. (28). Finalement, en utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, puis par sommation sur k, on aboutit à une inégalité du type

$$\frac{d}{dt}\|f\|^2 \;\leq\; (-1+C_\kappa\varepsilon)\sum_k \frac{\partial_t w_k(t,\eta)}{w_k(t,\eta)}\frac{|\hat{f}(t,k,\eta)|^2}{w(t,k,\eta)^2}$$

pour un $C_\kappa > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit (et κ fixé d'ordre 1) on trouve donc comme espéré une décroissance de l'énergie. Le travail remarquable de [BM] consiste à montrer que pour la norme plus sophistiquée (30) et le modèle complet d'Euler, ce type d'inégalité est préservé.

5. UTILISATION DU PARAPRODUIT

Dans les derniers paragraphes, l'accent a été mis sur une possible cascade d'amplifications, et sur des modèles simplifiés du type (14). Ce modèle est issu d'une semi-linéarisation du terme non-linéaire autour d'une solution de référence f_{reg} :

$$P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi\cdot\nabla f \;\to\; P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi\cdot\nabla f_{reg}.$$

Suivant la terminologie introduite par Mouhot et Villani dans [MV], le terme à droite est dit terme de *réaction*. Notons qu'une vraie linéarisation donne

$$P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi\cdot\nabla f \;\to\; P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi\cdot\nabla f_{reg} \;+\; P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi_{reg}\cdot\nabla f,$$

avec le terme additionnel $P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi_{reg}\cdot\nabla f$ appelé *transport*. Celui-ci est plus facile à traiter que la réaction. On peut pour s'en convaincre regarder l'équation de transport

$$\partial_t f + P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi_{reg}\cdot\nabla f = 0.$$

Si f_{reg} est supposé très régulier, alors on a par la loi de Biot et Savart en variables z, y :

$$\|\nabla^\perp\phi_{ref}(t)\|_{H^s} \;\leq\; C_s\frac{\|f_{reg}\|_{H^{s+2}}}{\langle t^2\rangle} = O\left(\frac{1}{\langle t^2\rangle}\right)$$

pour tout s, *cf.* (9). Des estimations standard sur l'équation de transport donnent alors

$$\|f(t)\|_{H^s} \;\leq\; C_s\int_0^t \frac{\|f(\tau)\|_{H^s}}{\langle\tau^2\rangle}d\tau$$

pour tout s, ce qui donne de la stabilité par l'inégalité de Gronwall. Nous n'insisterons pas plus sur le traitement de ce terme.

Subsiste une question essentielle : comment faire le lien entre cette approximation linéaire et le vrai modèle non-linéaire ? Dans l'approche de Mouhot et Villani, la linéarisation est inhérente à leur schéma de Newton. Dans celle de Bedrossian et Masmoudi, l'alternative employée est la décomposition en paraproduits introduite par Bony [Bo]. Rappelons-en brièvement le principe. On considère une partition de l'unité C^∞ dans l'espace des fréquences : $1 = \sum_{N\in\mathbb{D}}\Psi_N(k,\eta)$, où $\mathbb{D} = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots, 2^j, \ldots\}$, $\Psi_{\frac{1}{2}}$ est à support dans $B(0,1)$ et, pour tout $N \geq 1$, Ψ_N est à support dans une couronne C^N

de petit et grand rayons $\frac{N}{2}$ et $\frac{3N}{2}$. *Via* multiplicateurs de Fourier, cette partition permet de décomposer toute fonction $F = F(z,y)$ selon

$$F = \sum_{N\in\mathbb{D}} F_N, \quad F_N = \Psi_N(D_z, D_y)F.$$

Si l'on note $F_{<N} = \sum_{k<N} F_k$, tout produit de fonctions FG peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} FG &= \sum_N F_N G_{<N/8} \; + \; \sum_N F_{<N/8} G_N \; + \sum_{N\in\mathbb{D}} \sum_{N/8\le N'\le 8N} F_N G_{N'} \\ &= T_G F \; + \; T_F G \; + \; R(F,G). \end{aligned}$$

Le premier terme est appelé *paraproduit de G par F*, le second paraproduit de F par G, le dernier terme étant un *reste*. Grossièrement, le paraproduit de G par F correspond au produit des basses fréquences de G par les hautes fréquences de F, et évoque une semi-linéarisation. L'utilisation du paraproduit comme alternative au schéma de Newton a d'ailleurs été discuté par Hörmander dans [Ho]. Dans le contexte de notre équation (11), on applique ce découpage au produit des fonctions (vectorielles) $F = P_{\neq 0}\nabla^\perp\phi$ et $G = \nabla f$. Concrètement, on tire un avantage crucial de la propriété qui suit : pour tout $s \in (0,1)$, il existe $c = c(s) \in (0,1)$ tel que

$$\begin{aligned} (31) \quad & e^{\lambda(|k|+|\eta|)^s} \left| \widehat{F_N}(l,\xi)\, \widehat{G_{<N/8}}(k-l,\eta-\xi) \right| \\ & \qquad \le C \, \left(e^{\lambda(|l|+|\xi|)^s} |\widehat{F_N}(l,\xi)| \right) \left(e^{c\lambda(|k-l|+|\eta-\xi|)^s} |\hat{G}(k-l,\eta-\xi)| \right). \end{aligned}$$

Cette propriété découle facilement de l'inégalité élémentaire suivante, valable là encore pour $s \in]0,1[$: si $x,y>0$ satisfont $|x-y| \le x/K$ pour $K > 1 + s^{\frac{1}{1-s}}$, alors il existe $c \in (0,1)$ tel que

$$|x^s - y^s| \; \le \; c\,|x-y|^s \quad (\text{prendre } c = \frac{s}{(K-1)^{1-s}}).$$

Nous renvoyons à [BM, Lemma A.2] pour une preuve. Les expressions dans (31) apparaissent naturellement quand on estime la norme Gevrey de classe $\frac{1}{s}$ d'un produit, le passage en Fourier donnant une convolution. Le point important au membre de droite est la présence du $c < 1$: pour une fonction G dans la classe $G^{\lambda,s}$, $e^{\lambda c|D_z,D_y|^s}G$ est très lisse, et permet d'oublier tout problème de régularité, comme dans la substitution formelle $f \to f_{reg}$ vue plus haut.

6. LE PROFIL DE CISAILLEMENT ASYMPTOTIQUE

Avant d'aborder les perspectives ouvertes par l'article [BM], nous devons revenir sur une difficulté négligée jusqu'ici : la moyenne en x du champ de vitesses. En effet, les idées présentées sur le système (11) ne s'appliquent pas au système complet (10) : $\nabla\phi - P_{\neq 0}\nabla\phi$ ne converge pas vers 0. C'est la raison du changement de variable opéré par

Bedrossian et Masmoudi dans le théorème 3.1. Pour revenir à un système plus proche de (11), ils introduisent les variables

$$z(t,x,y) = x - tv, \quad \text{et } v \;=\; v(t,y) = y + \frac{1}{2\pi t}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} u_x(\tau,x,y)dxd\tau$$

au lieu des variables $x - ty$ et y. Notons

$$\begin{aligned}
&[\partial_t v](t,v) = \partial_t v(t,y) = \frac{1}{2\pi t}\left(\int_{\mathbb{T}} u_x(t,x,y)dx - \frac{1}{t}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} u_x(\tau,x,y)dxd\tau\right)\\
&v'(t,v) = \partial_y v(t,y) = 1 - \frac{1}{2\pi t}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} \omega(\tau,x,y)dxd\tau \qquad (32)\\
&v''(t,v) = \partial_y^2 v(t,y) = -\frac{1}{2\pi t}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} \partial_y \omega(\tau,x,y)dxd\tau.
\end{aligned}$$

Posant $f(t,z,v) = \omega(t,x,y)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\partial_t f + u_{new}\cdot\nabla f = 0,\\
&u_{new} = (0,[\partial_t v]) + v' P_{\neq 0}\nabla^{\perp}\phi, \qquad (33)\\
&\partial_{zz}\phi + (v')^2(\partial_v - t\partial_z)^2\phi + v''(\partial_v - t\partial_z)\phi = f.
\end{aligned}$$

Parallèlement à l'asymptotique $f = f_\infty + O(\varepsilon^2/\langle t\rangle)$ (*cf.* (23)-(24)), on s'attend à ce que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u_x dx = U_\infty + O(\varepsilon^2/\langle t\rangle),$$

et de là à ce que $[\partial_t v] = O(\ln(t)/\langle t^2\rangle)$, et $u_{new} = O(\ln(t)/\langle t^2\rangle)$. En fait, comme l'indique la première équation de (20), la convergence de la moyenne de u_x vers U_∞ est même plus rapide qu'espéré, du fait de subtiles annulations : nous renvoyons à [BM, Appendice A.4] pour plus de détails.

On a donc formellement l'intégrabilité en temps de u_{new}, ce qui permet l'application des idées vues plus haut. Le prix à payer est le caractère très non-linéaire des équations (33). Il nécessite d'obtenir des bornes supplémentaires, notamment sur $[\partial_t v]$ et $[v']$. À cette fin, Bedrossian et Masmoudi écrivent des équations d'évolution supplémentaires (et redondantes aux précédentes), par exemple

$$\begin{aligned}
&\partial_t(t(v'-1)) \;+\; [\partial_t v]\partial_v v' = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f dx\\
&\partial_t[\partial_t v] + \frac{2}{t}[\partial_t v] + [\partial_t v]\partial_v[\partial_t v] = -\frac{v'}{2\pi t}\int_T \left(P_{\neq 0}\nabla^{\perp}\cdot\nabla\tilde{u}\right)dx,
\end{aligned} \qquad (34)$$

où $\tilde{u}(t,x,v) = u_x(t,x,y)$. C'est sur un système couplé du type (33)-(34) que se font les estimations d'énergie. Elles sont la source de nombreuses difficultés techniques.

Nous nous contenterons d'évoquer une de ces difficultés : la présence du terme v'' dans la troisième équation de (33). Du point de vue de sa régularité, ce terme ressemble

à une dérivée de f. De ce fait, une estimation directe de la fonction de courant donne seulement :
(35)

$$\|P_{\neq 0}\phi\|_{\lambda,s,\sigma-3} \lesssim \frac{\|\partial_{zz}\phi + (\partial_v - t\partial_z)^2 P_{\neq 0}\phi\|_{\lambda,s,\sigma-1}}{\langle t^2\rangle}, \quad \text{puis } \|P_{\neq 0}\phi\|_{\lambda,s,\sigma-3} \lesssim \frac{\|f\|_{\lambda,s,\sigma}}{\langle t^2\rangle}$$

avec perte de trois dérivées au lieu de deux (on rappelle que σ est l'indice de régularité Sobolev, voir (30)). Une telle borne est insuffisante pour propager les estimations de stabilité : le poid $w(t,k,\eta)$ ne permet pas de compenser cette dérivée supplémentaire. Pour surmonter cet obstacle, l'idée est la suivante. On remarque que le terme v'' apparaît à travers le produit $v''(\partial_v - t\partial_z)\phi$. Par ailleurs, la perte de dérivée est sensible aux hautes fréquences de v''. Si l'on applique la décomposition de Bony (en la variable v uniquement), le problème vient donc du paraproduit $T_{(\partial_v - t\partial_z)\phi}v''$, où *a contrario* on retrouve seulement les basses fréquences de $(\partial_v - t\partial_z)\phi$. Pour ces basses fréquences, l'estimation grossière (35) redevient pertinente, et permet de regagner des puissances de t. Plus précisément, cela permet de raffiner (35) par une estimation du type

$$\|P_{\neq 0}\phi\|_{\lambda,s,\sigma-3} \lesssim \frac{\|\langle \frac{\partial_v}{t\partial_z}\rangle f\|_{\lambda,s,\sigma-1}}{\langle t^2\rangle}, \tag{36}$$

qui se révèle suffisante.

7. QUESTIONS OUVERTES

Le travail mené dans [BM] soulève plusieurs questions, et offre ainsi de nouvelles pistes de recherche. Nous indiquons ici trois d'entre elles.

Une première question concerne l'extension du résultat de [BM] au système de Navier-Stokes bidimensionnel. Celui-ci se différencie du système d'Euler par la présence d'un terme de diffusion visqueuse $-\nu\Delta u$ au membre de gauche de l'équation (1). Pour ce modèle un peu plus réaliste, une étude a été menée tout récemment dans l'article [BMV]. Cet article montre que le phénomène d'amortissement de type Euler se produit encore, sur des temps d'ordre $\nu^{-1/3}$. Au-delà de ces temps, les perturbations subissent un amortissement exponentiel.

Une seconde question est l'influence du domaine sur l'amortissement. Par exemple, que se passe-t-il si l'on remplace $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^2$? L'analyse menée dans [BM] ne s'applique plus, car elle repose sur le caractère discret des temps résonants $t = \frac{\eta}{k}$. Pour une variable de Fourier k continue, on s'attend à une phénoménologie très différente. Ainsi, pour l'équation de Vlasov-Poisson et x dans $\mathbb{R}^d$, des phénomènes dispersifs se substituent à l'amortissement Landau [GS]. Par ailleurs, le domaine naturel de l'écoulement de Couette est un canal. Il serait donc naturel d'étudier le cas $\Omega = \mathbb{T}\times(0,1)$ avec condition de non-pénétration $u\cdot n = 0$ au bord $\partial\Omega$.

Une dernière question, tout à fait fondamentale, concerne la classe des perturbations qui sont amorties. Le théorème 3.1 s'applique à des données Gevrey. Le résultat reste-t-il vrai pour des données moins régulières ? La question est d'importance, car il est connu que le choix de l'espace fonctionnel change totalement les propriétés de stabilité de l'écoulement. Pour Euler, nous renvoyons à ce sujet aux articles [Ko, Li2]. Un autre exemple intéressant est celui de *l'écoulement de couche limite*, où un seuil de régularité Gevrey apparaît naturellement pour la stabilité ([GD, GM]). En toile de fond se pose le problème de la modélisation de perturbations réalistes. Est-il raisonnable de les représenter par des données Gevrey ? Ou au contraire, ces données sont-elles trop régulières ? La pertinence du théorème vis-à-vis d'applications en hydrodynamique en dépend.

Concrètement, pour Euler, on sait depuis un travail de Lin et Zheng [LZ] que l'amortissement nécessite un peu de régularité : dans l'espace de Sobolev H^s, $s < 5/2$, certaines perturbations en vitesse, arbitrairement proches du flot de Couette, ne décroissent plus. Un résultat analogue s'applique à Vlasov-Poisson, *cf.* [LZ2]. En particulier, pour $s = 0$, on peut avoir stabilité sans amortissement.

Que dire de H^s, $s > 5/2$? Cette question est étroitement liée à la possible cascade d'amplifications évoquée au paragraphe 2. Cette cascade se produit-elle vraiment ? Autrement dit, génère-t-elle une instabilité, et si oui dans quelle norme ? Notons à ce sujet que pour certains modèles de type Vlasov, cette cascade est absente, et l'amortissement Landau est vrai dans un cadre Sobolev [FR].

Cette recherche d'instabilité est d'autant plus importante qu'en pratique, l'écoulement de Couette est toujours instable ! C'est ce que les physiciens appellent *le paradoxe de Orr-Sommerfeld* [SH, Li]. Le mot *paradoxe* vient du contraste entre les observations expérimentales et la stabilité linéaire théorique du flot de Couette, vraie aussi bien pour le modèle d'Euler que pour le modèle de Navier-Stokes [Ro]. Ce contraste est également constaté pour d'autres écoulements, tels le flot de Poiseuille [SH]. Notons d'ailleurs que l'importance de la croissance transitoire dans la déstabilisation de ces écoulements est reconnue par les physiciens depuis de nombreuses années. Dans le cadre des équations de Navier-Stokes, cette croissance transitoire est souvent vue comme une conséquence du caractère non-autoadjoint de l'opérateur linéarisé, par exemple autour du flot de Couette, *cf.* [SH]. Ainsi, la somme de deux modes propres non-orthogonaux, chacun exponentiellement décroissant, peut croître algébriquement avant de décroître. Un autre point de vue sur ce phénomène linéaire repose sur le *pseudo-spectre*, voir à ce sujet [Tr, chapitre 20]. Déterminer si la cascade non-linéaire de ces amplifications transitoires est le mécanisme précis par lequel on aboutit à la déstabilisation est donc une question d'une grande importance pratique.

REMERCIEMENTS

L'auteur de ce texte exprime sa profonde gratitude à Pierre Germain, Daniel Han-Kwan, Nader Masmoudi et Frédéric Rousset, pour leur relecture attentive et leurs suggestions éclairées.

RÉFÉRENCES

[Ar] V. I. ARNOLD – *Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Uspekhi Mat. N. USSR **18** (1963), 13–40.

[BT] C. BARDOS, E. TITI – *Euler equations for an ideal incompressible fluid*, Uspekhi Mat. Nauk **62**, n° 3, (2007), 5–46.

[BM] J. BEDROSSIAN, N. MASMOUDI – *Inviscid damping and the asymptotic stability of planar shear flows in the 2D Euler equations*, arXiv :1306.5028 (2013).

[BM2] J. BEDROSSIAN, N. MASMOUDI – *Asymptotic stability for the Couette flow in the 2D Euler equations*, Applied Mathematics Research eXpress, Vol. **2014** n° 1 (2014), 157–175.

[BMM] J. BEDROSSIAN, N. MASMOUDI, C. MOUHOT – *Landau damping : paraproducts and Gevrey regularity*, arXiv :1311.2870 (2013).

[BMV] J. BEDROSSIAN, N. MASMOUDI, V. VICOL – *Enhanced dissipation and inviscid damping in the inviscid limit of the Navier-Stokes equations near the 2D Couette flow*, arXiv :1408.4754 (2014).

[Bo] J-M. BONY – *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires*, Ann. Sc. ENS **14** (1981), 209–246.

[BoM] F. BOUCHET, H. MORITA – *Large time behavior and asymptotic stability of the two-dimensional Euler and linearized Euler equations*, arXiv :0905.1551 (2010).

[Ca] K.M. CASE – *Stability of inviscid plane Couette flow*, Physics of Fluids **3**, n° 2 (1960), 143–148.

[DR] P.G. DRAZIN, W.H. REID – *Hydrodynamic stability*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[FR] E. FAOU, F. ROUSSET – *Landau damping in Sobolev spaces for the Vlasov-HMF model*, arXiv :1403.1668 (2014).

[Gi] J. GIBBON – *The three-dimensional Euler equations : Where do we stand ?*, Physica D **237** (2008), 1894–1904.

[GS] R. GLASSEY, J. SCHAEFFER – *On time decay rates in Landau damping*, Comm. Part. Diff. Eqns **20**, n° 3-4 (1995), 647–676.

[GD] D. GÉRARD-VARET, E. DORMY – *On the ill-posedness of the Prandtl equation*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), n° 2, 591–609.

[GM] D. GÉRARD-VARET, N. MASMOUDI – *Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity*, arXiv :1305.0221 (2013).

[Ho] L. HÖRMANDER – *The Nash-Moser theorem and paradifferential operators*, Analysis et cetera, pages 429–449, 1990.

[Ke] L. KELVIN – *Stability of fluid motion-rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates*, Philosophical Magazine **24**, n° 5 (1887), 188.

[Ko] H. KOCH – *Transport and instability for perfect fluids*, Math. Ann. **323** (2002), n° 3, 491–523.

[La] L. LANDAU – *On the vibrations of the electronic plasma*, J. Phys. USSR 10 (1946), 25. English translation in JETP 16, 574. Disponible sur http ://newton.physics.uiowa.edu/ ghowes/teach/phys225/readings/Landau46.pdf

[LZ] Z. LIN, C. ZENG – *Inviscid dynamical structures near Couette flow*, Arch. Ration. Mech. Anal. **200** (2011), n° 3, 1075–1097.

[LZ2] Z. LIN, C. ZENG – *Small BGK waves and nonlinear Landau damping*, Comm. Math. Phys. **306** (2011), n° 2, 291–331.

[Li] Z. LIN – *A resolution of the Sommerfeld paradox*, SIAM J. Math. Anal. **43** (2011), n° 4, 1923–1954.

[Li2] Z. LIN – *Some stability and instability criteria for ideal plane flows*, Comm. Math. Phys. **246** (2004), n° 1, 87–112.

[MB] A. MAJDA, A. BERTOZZI – *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[MP] C. MARCHIORO, M. PULVIRENTI – *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Applied Mathematical Sciences **96**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[MV] C. MOUHOT, C. VILLANI – *On Landau damping*, Acta Math. **207** (2011), n° 1, 29–201.

[Na] J. NASH – *The imbedding of Riemannian manifolds*, Ann. Math. **63** (1956), 20–63.

[Ni] L. NIRENBERG – *An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem*, J. Diff. Geom. **6** (1972), 561–576.

[Or] W. ORR – *The stability or instability of steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid, Part I : a perfect liquid*, Poceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical Sciences **27** (1907), 9–68.

[Pe] O. PENROSE – *Electrostatic instability of a non-Maxwellian plasma*, Phys. Fluids, **3** (1960), 258–265.

[Ra] L. RAYLEIGH – *On the stability, or instability, of certain fluid motions*, Proceedings of the London Math. Soc. S1-11, n° 1 (1880), 57.

[Ra2] L. RAYLEIGH – *On the question of the stability of the flow of liquids*, Phil. Mag. **34** (1892), 576.

[Re] O. REYNOLDS – *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels*, Philos. Trans. R. Soc. **174**, (1883) 935–82

[Ro] V.A. ROMANOV – *Stability of plane-parallel Couette flow*; English version, Functional Anal. Appl. 7 (1973), 137–146.

[SH] P. SCHMID, D. HENNINGSON – *Stability and transition in shear flows*, Applied Mathematical Sciences **142**, Springer-Verlag, New-York, 2001.

[Ta] T. TAO – *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics **106**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006

[Tr] L. N. TREFETHEN – *Spectra and pseudospectra. The behavior of nonnormal matrices and operators*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2005.

[Vi] C. VILLANI – *Landau damping*, Notes de cours (2010), disponibles sur http ://cedricvillani.org/for-mathematicians/surveys-books/.

David GÉRARD–VARET

Université Denis–Diderot Paris 7
Paris Diderot, UFR de Mathématiques
Bâtiment Sophie Germain, Bureau 724
F–75205 Paris Cedex 13
david.gerard-varet@imj-prg.fr