Séminaire BOURBAKI Mars 2014
66ème année, 2013-2014, n° 1081

CONSTRUCTION DE COURBES SUR LES SURFACES K3 [d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel, Charles, Li-Liedtke, Madapusi Pera, Maulik...]

par **Olivier BENOIST**

INTRODUCTION

On expose ici des résultats récents de construction de courbes sur les surfaces K3 : la preuve de la conjecture de Tate pour les surfaces K3 en caractéristique finie impaire (Théorème 2.1, d'après Maulik [Mau12], Charles [Cha13] et Madapusi Pera [MP13]), et la construction d'une infinité de courbes rationnelles sur de nombreuses surfaces K3 (Théorème 3.1, d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel [BHT11] et Li-Liedtke [LL12]).

La première partie de ce texte est consacrée à l'étude de l'application de Kuga-Satake, nécessaire à la preuve de la conjecture de Tate dans la deuxième partie. Finalement, la troisième partie exploite la conjecture de Tate pour construire des courbes rationnelles sur des surfaces K3. Les introductions de chacune de ces parties décrivent plus précisément leur contenu.

Nous rappelons ici des généralités sur les surfaces K3 en caractéristique finie, puis nous présentons les résultats mentionnés ci-dessus.

Définition 0.1. — *Une **surface K3** sur un corps k est une surface projective*[(1)] *lisse et géométriquement connexe X sur k telle que $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.*

Les classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X forment un groupe abélien libre de type fini $\mathrm{Pic}(X)$*. On note $\rho(X)$ son rang : c'est le **nombre de Picard** de X.*

0.1. Surfaces K3 complexes

Si X est une surface K3 complexe, l'injectivité de l'application classe de cycle en cohomologie de Betti $\mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ montre que $\rho(X) \leq b_2(X) = 22$. La théorie de Hodge implique que l'image de cette application est incluse dans $H^{1,1}(X)$, ce qui fournit l'inégalité plus forte $\rho(X) \leq 20$. Enfin, le théorème des classes $(1,1)$ de Lefschetz montre que $\mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$ est un isomorphisme, et permet de calculer $\rho(X)$ connaissant la structure de Hodge de X.

Le nombre de Picard peut prendre toutes les valeurs entre 1 et 20, et la théorie des déformations montre que, dans un espace des modules des surfaces K3 polarisées, le lieu où $\rho(X) \geq r$ est une réunion dénombrable de sous-variétés de dimension $20 - r$.

1. En particulier, quand $k = \mathbb{C}$, on ne considérera pas dans ce texte de surfaces K3 non algébriques.

0.2. Surfaces K3 de hauteur finie

Soit maintenant X une surface K3 sur un corps k algébriquement clos de caractéristique finie. Par injectivité de l'application classe de cycle en cohomologie ℓ-adique, on a toujours $\rho(X) \leq b_2(X) = 22$. Pour obtenir des obstructions à l'existence de fibrés en droites, analogues à celles obtenues sur $\mathbb{C}$ par théorie de Hodge, Artin et Mazur [AM77] ont introduit un nouvel invariant des surfaces K3. Ils considèrent le foncteur $T \mapsto \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X_T) \to \mathrm{Br}(X)]$ défini sur les k-schémas finis locaux. Ils montrent que ce foncteur est représentable par un groupe formel lisse de dimension 1 sur k : le **groupe de Brauer formel** $\widehat{\mathrm{Br}}(X)$. Comme ces groupes formels sont classifiés par leur hauteur [La55], on obtient un invariant $h(X) \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$: c'est la **hauteur** de X. Cet invariant varie semi-continûment supérieurement avec X.

Si X est une surface K3 de hauteur finie, Artin et Mazur [AM77] montrent que $\rho(X) \leq 22 - 2h(X)$. Ces surfaces K3 se comportent comme les surfaces K3 en caractéristique nulle : elles vérifient $\rho(X) \leq 20$ et, si l'on se restreint aux surfaces K3 de hauteur finie, le lieu dans un espace de modules de surfaces K3 polarisées où $\rho(X) \geq r$ est une réunion dénombrable de sous-variétés de dimension $20 - r$. Une surface K3 générale de cet espace de modules est de hauteur 1, et dite **ordinaire**.

0.3. Surfaces K3 supersingulières

Les surfaces K3 de hauteur infinie (i.e. telles que $\widehat{\mathrm{Br}}(X) \simeq \widehat{\mathbb{G}_a}$) sont dites **supersingulières** (ou **Artin-supersingulières**). Leur définition, de nature cohomologique, admet plusieurs formulations équivalentes :

Proposition 0.2. — *Les assertions (i) et (ii) sont équivalentes, et sont équivalentes à (iii) si $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ et ℓ est un nombre premier différent de p.*

(i) X est supersingulière.

(ii) Les pentes de $H^2_{\mathrm{cris}}(X/W(k))_{\mathbb{Q}}(1)$ sont toutes égales à 0.

(iii) L'endomorphisme de Frobenius de $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est d'ordre fini.

Preuve — L'équivalence des deux premiers énoncés est due à Artin et Mazur [AM77]. Si X est définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, Katz et Messing [KM74] montrent que les valeurs propres du Frobenius F_q agissant en cohomologie ℓ-adique et cristalline coïncident. Ces valeurs propres sont des unités ℓ-adiques par dualité de Poincaré, leurs valuations p-adiques sont les pentes de $H^2_{\mathrm{cris}}(X/W(k))_{\mathbb{Q}}(1)$, et leurs valeurs absolues complexes sont égales à 1 par les conjectures de Weil prouvées par Deligne [De72]. L'assertion (ii) est donc équivalente au fait que ce sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de module 1. Ceci équivaut au fait que ce sont des racines de l'unité, par un lemme de Kronecker, et à l'assertion (iii) car l'action du Frobenius sur $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est semi-simple [De81a, Corollaire 1.10]. □

Les propriétés des surfaces K3 supersingulières sont très différentes de celles des surfaces K3 complexes. On ne dispose pas d'obstruction supplémentaire à l'existence de fibrés en droites : Tate [Ta65] et Shioda [Sh79] ont donné des exemples de telles surfaces avec nombre de Picard 22 (dites **Shioda-supersingulières**). Artin a conjecturé que toutes les surfaces K3 supersingulières étaient Shioda-supersingulières, et on verra ci-dessous (corollaire 0.5 (ii)) que cette conjecture est vraie au moins en caractéristique impaire.

Les surfaces K3 supersingulières forment un sous-ensemble algébrique fermé de dimension 9 de l'espace de modules des surfaces K3 [Og01, Theorem 15].

0.4. La conjecture de Tate

La conjecture de Tate, qu'on peut énoncer sur tout corps de type fini, rend les mêmes services que le théorème des classes $(1,1)$ de Lefschetz, en calculant $\rho(X)$ à l'aide de données cohomologiques :

Conjecture 0.3. — *Soit X une surface K3 sur un corps k de type fini. Si ℓ est un nombre premier inversible dans k, et si $\bar{k}$ est une clôture séparable de k, l'application classe de cycle induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Faisant suite aux travaux classiques [ASD73], [Ny83], [NO85], des progrès récents de Maulik [Mau12], Charles [Cha13] et Madapusi Pera [MP13] ont permis d'obtenir :

Théorème 0.4. — *La conjecture 0.3 est vraie en caractéristique différente de* 2.

On renvoie à l'introduction de la deuxième partie de ce texte pour une discussion plus précise des contributions respectives de ces articles.

La conjecture 0.3 est un cas particulier d'une conjecture bien plus générale, due à Tate [Ta65] qui prédit l'existence de cycles algébriques en toute codimension sur toute variété projective lisse sur un corps de type fini. Très peu d'instances de cette conjecture sont connues. Si le cas des diviseurs sur les surfaces K3 est accessible, c'est grâce à leur lien avec les variétés abéliennes, fourni par la construction de Kuga-Satake. Pour cette raison, la première partie de ce texte est consacrée à l'étude de l'application de Kuga-Satake, et la deuxième partie à la preuve proprement dite du théorème 0.4.

0.5. Conséquences de la conjecture de Tate

La conjecture de Tate permet d'obtenir des informations sur le nombre de Picard $\rho(X)$. Dans le corollaire ci-dessous, (i) était déjà connu d'Artin [Ar74] en toute caractéristique, (ii) est la conjecture d'Artin mentionnée ci-dessus et l'argument de (iii), attribué à Swinnerton-Dyer, est [BHT11, Theorem 13].

Corollaire 0.5. — *Soit X une surface K3 sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p \geq 3$. Alors :*

(i) $\rho(X) \in \{1, \ldots, 20, 22\}$.

(ii) $\rho(X) = 22$ *si et seulement si X est supersingulière.*

(iii) Si X est définie sur un corps fini, $\rho(X)$ est pair.

Preuve — Si X n'est pas supersingulière, $\rho(X) \leq 22 - 2h(X) \leq 20$. Si X est supersingulière, choisissons-en une spécialisation Y définie sur un corps fini : Y est encore supersingulière. Par la proposition 0.2 (iii), on peut supposer que l'action de Galois sur $H^2_{\text{ét}}(Y_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est triviale, et le théorème 0.4 montre que $\rho(Y_{\overline{\mathbb{F}}_p}) = 22$. Par un théorème d'Artin [Ar74, Theorem 1.1], $\rho(X) = \rho(Y_{\overline{\mathbb{F}}_p}) = 22$. Nous avons montré (i) et (ii).

Supposons que X est définie sur un corps fini. Quitte à étendre les scalaires, on peut supposer que la seule valeur propre du Frobenius agissant sur $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ qui soit une racine de l'unité est 1. Par dualité de Poincaré, si α est une autre valeur propre, α^{-1} en est également une, avec même multiplicité. On en déduit que la multiplicité de la valeur propre 1 est paire, et le théorème 0.4 montre (iii). □

De nombreux énoncés sur les surfaces K3 supersingulières n'étaient auparavant connus que pour les surfaces K3 Shioda-supersingulières. On peut mentionner les travaux d'Ogus sur le théorème de Torelli cristallin ([Og79], [Og83]), et le théorème suivant de Rudakov et Shafarevich [RS86] :

Théorème 0.6. — *Une surface K3 supersingulière sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète de caractéristique ≥ 5 a potentiellement bonne réduction.*

Enfin, Lieblich, Maulik et Snowden [LMS11] ont récemment montré la conséquence suivante de la conjecture de Tate, analogue pour les surfaces K3 d'un théorème de Zarhin [Za77] pour les variétés abéliennes :

Théorème 0.7. — *Si k est fini de caractéristique ≥ 5, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de surfaces K3 sur k.*

0.6. Construction de courbes rationnelles sur les surfaces K3

Nous avons jusqu'ici discuté l'existence de classes de courbes sur les surfaces K3. On peut aussi chercher à démontrer l'existence de courbes particulières. Par exemple, une **courbe rationnelle** est une sous-variété intègre dont la normalisation est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. On conjecture :

Conjecture 0.8. — *Une surface K3 sur un corps algébriquement clos k contient une infinité de courbes rationnelles.*

Insistons sur le fait que cette conjecture est déjà intéressante quand $k = \mathbb{C}$. En utilisant de manière cruciale la conjecture de Tate pour les surfaces K3 sur les corps finis, et plus précisément le corollaire 0.5 (iii), Bogomolov, Hassett et Tschinkel [BHT11] et Li et Liedtke [LL12] y ont répondu positivement dans de nombreux cas :

Théorème 0.9. — *La conjecture 0.8 est vraie dans les deux cas suivants :*

(i) Si k est de caractéristique nulle et X n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

(ii) Si k est de caractéristique $\neq 2$ et $\rho(X)$ est impair.

La troisième partie de ce texte, indépendante des deux premières, est consacrée à la démonstration de ce théorème ; on renvoie à son introduction pour plus d'informations.

Remerciements. Je tiens particulièrement à remercier François Charles, à qui ce texte doit beaucoup, pour les innombrables discussions que nous avons eues sur les mathématiques abordées ici. Je suis aussi reconnaissant à Keerthi Madapusi Pera, qui a répondu avec précision à mes nombreuses questions sur ses travaux. Merci également à Javier Fresán, Daniel Huybrechts, Christian Liedtke et Gianluca Pacienza, qui ont relu des versions préliminaires de ce texte : leurs conseils ont beaucoup amélioré celui-ci.

1. L'APPLICATION DE KUGA-SATAKE

Kuga et Satake [KS67] ont associé à toute surface K3 complexe polarisée X une variété abélienne A : sa variété de Kuga-Satake. La construction, purement transcendente, consiste à munir l'algèbre de Clifford paire de $H^2_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{Z})$ d'une structure de Hodge polarisée de poids 1, qui correspond à une variété abélienne A.

Des travaux successifs de Deligne [De72], Ogus [Og84], André [An96] ont permis d'associer à une surface K3 sur tout corps une variété de Kuga-Satake, et d'étendre à d'autres théories cohomologiques (ℓ-adique, cristalline) les liens qui sont visibles, dans la définition transcendente, entre les cohomologies de Betti de X et de A. Ces techniques ont permis de nombreux progrès dans l'étude des surfaces K3 : le premier exemple en a été la preuve des conjectures de Weil pour les surfaces K3 [De72].

Les avancées sur la conjecture de Tate pour les surfaces K3, expliquées dans la partie suivante, s'inscrivent dans cette lignée. Elles utilisent de manière cruciale un résultat nouveau sur la construction de Kuga-Satake. On peut voir cette construction comme un avatar de l'application des périodes pour les surfaces K3 pour laquelle on dispose, en caractéristique nulle, d'un théorème de Torelli. Rizov [Ri10], Maulik [Mau12] et Madapusi Pera [MP13] ont étendu, avec une généralité croissante, ce théorème de Torelli en caractéristique mixte. C'est l'objectif principal de cette partie (théorème 1.4).

L'étude de l'application de Kuga-Satake en caractéristique mixte a été initiée par Rizov [Ri10]. Nous suivons ici de très près la présentation de Madapusi Pera [MP13], qui permet de travailler sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, et nous renvoyons à cet article pour plus de détails. Comme Charles [Cha13] et Madapusi Pera [MP13], nous utilisons une variante de la construction de Kuga-Satake classique, prenant en compte l'algèbre de Clifford toute entière, qui simplifie les relations cohomologiques entre X et A.

1.1. La construction de Kuga-Satake

Si X est une surface K3 polarisée, on note $P^2(X) := H^2_{\mathrm{prim}}(X)$ la cohomologie primitive de X, et on la munit de la forme quadratique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induite par la dualité de

Poincaré [2]. On utilisera des indices $\mathrm{B}, \mathrm{dR}, \text{ét}, \ell, \text{cris}$ pour indiquer la théorie cohomologique (Betti, de Rham, étale, ℓ-adique, cristalline) utilisée.

Soit X une surface K3 complexe polarisée, et soit $\omega = x + iy$ un générateur de $H^{2,0}(X)$ tel que $\langle \omega, \bar{\omega} \rangle = 2$. Munissons l'algèbre de Clifford réelle $\mathrm{Cl}(P^2_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{R}))$ d'une structure complexe en faisant agir $x \cdot y$ par multiplication à gauche. Alors $A := \mathrm{Cl}(P^2_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{R}))/\,\mathrm{Cl}(P^2_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{Z}))$ est un tore complexe. On montre ([KS67], [Hu, Chapter 4]) qu'il s'agit d'une variété abélienne : la **variété de Kuga-Satake** de X.

Les variétés X et A sont liées par un morphisme de structures de Hodge induit par la multiplication à gauche de $P^2_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{Z})$ sur $\mathrm{Cl}(P^2_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{Z}))$:

$$P^2_{\mathrm{B}}(X)(1) \hookrightarrow H^{\otimes(1,1)}_{\mathrm{B}}(A) := \mathrm{End}(H^1_{\mathrm{B}}(A)). \tag{1}$$

On note $L_{\mathrm{B}}(A) \subset H^{\otimes(1,1)}_{\mathrm{B}}(A)$ la sous-structure de Hodge image.

La relation (1) sera cruciale dans la suite : elle permettra d'établir un lien entre fibrés en droites sur X et endomorphismes de A (voir par exemple la proposition 2.3).

1.2. Espaces de modules de surfaces K3

Dans les paragraphes qui suivent, on explique comment effectuer cette construction en famille, sur d'autres bases que $\mathbb{C}$, et comment étendre la relation (1) à d'autres théories cohomologiques. Commençons par introduire les espaces de modules dont nous aurons besoin.

Fixons un entier $d \geq 1$, et notons $\mathfrak{M}_{2d}$ le champ de modules sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ des surfaces K3 munies d'une polarisation primitive de degré $2d$ [Ri06]. C'est un champ de Deligne-Mumford séparé de type fini sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. On considérera plutôt $\widetilde{\mathfrak{M}}_{2d}$ son revêtement double étale correspondant aux trivialisations isométriques du déterminant de la cohomologie primitive 2-adique [3] des surfaces K3.

Il résulte de [Og79, Proposition 2.2] que le lieu non lisse de $\widetilde{\mathfrak{M}}_{2d}$ est constitué de points isolés correspondant à des surfaces K3 supersingulières particulières, dites superspéciales. De tels points n'existent qu'en caractéristique p avec $p \mid d$ mais $p^2 \nmid d$. On note $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\mathrm{lisse}}_{2d}$ le complémentaire de ces points.

1.3. L'application des périodes

Notons L_d le réseau primitif [4] des surfaces K3 complexes munies d'une polarisation primitive de degré $2d$, $G_d := \mathrm{SO}(L_d)$, $G'_d := \mathrm{GSpin}(L_d)$, et $\Gamma_d \subset G_d(\mathbb{Z})$ et $K_d \subset G_d(\widehat{\mathbb{Z}})$ les sous-groupes agissant trivialement sur le discriminant $L^\vee_d/L_d$. Soit

$$\Omega := \{\omega \in \mathbb{P}(L_{d,\mathbb{C}}) | \langle \omega, \omega \rangle = 0, \langle \omega, \bar{\omega} \rangle > 0\} \simeq \mathrm{SO}(2,19)/\,\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(19)$$

2. De nombreux auteurs ([An96], [Ri10], [Mau12], [MP13]) utilisent l'opposé de cette forme quadratique.

3. Par [Sa12, Lemma 3.2], le nombre 2 ne joue pas ici un rôle particulier.

4. C'est le réseau explicite $E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus U^{\oplus 2} \oplus \langle -2d \rangle$, où U est le réseau hyperbolique de rang 2.

l'espace symétrique [5] associé au groupe de Lie $\mathrm{SO}(2,19)$. L'**application des périodes** [6] pour les surfaces K3 est une immersion ouverte $P_{\mathbb{C}} : \widetilde{\mathfrak{M}}_{2d,\mathbb{C}} \to \Omega/\Gamma_d$ induite par $X \mapsto H^{2,0}(X)$. On peut interpréter le domaine de périodes Ω/Γ_d comme le complexifié de la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_d := \mathrm{Sh}_{K_d}(G_{d,\mathbb{Q}}, \Omega)$.

La donnée de Shimura Ω se relève au groupe $G'_{d,\mathbb{Q}}$ [De72, 4.2]. On choisit comme niveau $K'_d \subset G'_d(\widehat{\mathbb{Z}})$ le sous-groupe de l'image réciproque de K_d dont la composante en 2 appartient à un sous-groupe compact ouvert assez petit de $G'_d(\mathbb{Q}_2)$. Un tel choix permet d'assurer que $\mathrm{Sh}'_d := \mathrm{Sh}_{K'_d}(G'_{d,\mathbb{Q}}, \Omega)$ est une variété quasi-projective. On obtient un morphisme fini étale de variétés de Shimura $\pi_{\mathbb{C}} : \mathrm{Sh}'_{d,\mathbb{C}} \to \mathrm{Sh}_{d,\mathbb{C}}$.

Enfin, faisons agir $G'_{d,\mathbb{Q}}$ sur l'algèbre de Clifford $H := \mathrm{Cl}(L_{d,\mathbb{Q}})$ par multiplication à gauche. Il est possible de munir (non canoniquement) H d'une forme symplectique ψ $\mathrm{Spin}(L_{d,\mathbb{Q}})$-invariante, de sorte que l'immersion $G'_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{GSp}(H,\psi)$ induise un morphisme fini et non ramifié de variétés de Shimura $\iota_{\mathbb{C}} : \mathrm{Sh}'_{d,\mathbb{C}} \to \mathrm{Ab}_{\mathbb{C}}$, où Ab est une variété de Shimura de type Siegel : un champ de modules de variétés abéliennes polarisées. L'**application de Kuga-Satake** $\iota_{\mathbb{C}}$ induit un schéma abélien sur $\mathrm{Sh}'_{d,\mathbb{C}}$.

Notant $\widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d,\mathbb{C}} := \widetilde{\mathfrak{M}}_{2d,\mathbb{C}} \times_{\mathrm{Sh}_{d,\mathbb{C}}} \mathrm{Sh}'_{d,\mathbb{C}}$, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d,\mathbb{C}} \arrow[r, "P'_{\mathbb{C}}"] \arrow[d] & \mathrm{Sh}'_{d,\mathbb{C}} \arrow[r, "\iota_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{C}}"] & \mathrm{Ab}_{\mathbb{C}} \\
\widetilde{\mathfrak{M}}_{2d,\mathbb{C}} \arrow[r, "P_{\mathbb{C}}"] & \mathrm{Sh}_{d,\mathbb{C}} .
\end{tikzcd}$$

Si $x \in \widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d}(\mathbb{C})$ relève une surface K3 complexe polarisée $[X] \in \mathfrak{M}_{2d}(\mathbb{C})$, la variété de Kuga-Satake de X construite au paragraphe 1.1 est la variété abélienne A correspondant à $\iota_{\mathbb{C}}(P'_{\mathbb{C}}(x))$. De plus, le lien cohomologique (1) entre X et A se met en famille comme suit [7]. Il existe une sous-variation de structures de Hodge naturelle $\mathbf{L}_{\mathrm{B}} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{B}}^{\otimes(1,1)}$ sur $\mathrm{Sh}'_{d,\mathbb{C}}$, et un isomorphisme $\mathbf{P}^2_{\mathrm{B}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^{*}_{\mathbb{C}}\mathbf{L}_{\mathrm{B}}$ de variations de structures de Hodge sur $\widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d,\mathbb{C}}$.

À l'aide des théorèmes de comparaison avec la cohomologie de de Rham algébrique (resp. la cohomologie ℓ-adique), on obtient des isomorphismes compatibles de fibrés vectoriels filtrés à connexion intégrable $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR},\mathbb{C}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^{*}_{\mathbb{C}}\mathbf{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{C}} \hookrightarrow P'^{*}_{\mathbb{C}}\mathbf{H}^{\otimes(1,1)}_{\mathrm{dR},\mathbb{C}}$ (resp. de systèmes locaux ℓ-adiques $\mathbf{P}^2_{\ell,\mathbb{C}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^{*}_{\mathbb{C}}\mathbf{L}_{\ell,\mathbb{C}} \hookrightarrow P'^{*}_{\mathbb{C}}\mathbf{H}^{\otimes(1,1)}_{\ell,\mathbb{C}}$) sur $\widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d,\mathbb{C}}$.

1.4. Classes de Hodge absolues et rationalité de la construction

Les corps reflex des trois variétés de Shimura qui interviennent sont tous égaux à $\mathbb{Q}$ de sorte que celles-ci ont des modèles canoniques Sh_d, Sh'_d et Ab définis sur $\mathbb{Q}$, qui sont reliés par des morphismes de variétés de Shimura $\pi_{\mathbb{Q}}$ et $\iota_{\mathbb{Q}}$.

5. Au détail près que Ω a deux composantes connexes.
6. Nous utilisons un revêtement double de l'application classique [Be85].
7. Nous noterons toujours $\mathbf{H}$ le H^1 en famille de variétés de Kuga-Satake, et $\mathbf{P}^2$ la cohomologie primitive en famille de surfaces K3 polarisées.

L'outil essentiel utilisé pour descendre sur $\mathbb{Q}$ les constructions ci-dessus est la théorie des classes de Hodge absolues, introduites implicitement à cet effet par Deligne [De72]. En effet, le morphisme (1) est induit par une classe de Hodge absolue. Cela résulte du théorème de Deligne que toute classe de Hodge sur une variété abélienne est absolue [DMOS82, I Theorem 2.11] ainsi que d'une réduction au cas où X est une surface de Kummer, par le principe B de Deligne [DMOS82, I Theorem 2.12].

Ce fait permet d'abord de montrer [Ki10, 2.2.1, 2.2.2] que les sous-fibrés vectoriels filtrés à connexion intégrable (resp. sous-systèmes locaux ℓ-adiques) ci-dessus sont naturellement définis sur Sh'_d : on a $\mathbf{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}^{\otimes(1,1)}$ (resp. $\mathbf{L}_{\ell,\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\ell,\mathbb{Q}}^{\otimes(1,1)}$).

Il permet ensuite de vérifier [MP13, Corollary 4.4] que l'application des périodes $P_{\mathbb{C}}$ est définie sur $\mathbb{Q}$. Une preuve différente avait été proposée par Rizov [Ri10, Theorem 3.9.1], comme conséquence d'un théorème de la multiplication complexe pour les surfaces K3 de nombre de Picard 20. Notant encore $\widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d,\mathbb{Q}} := \widetilde{\mathfrak{M}}_{2d,\mathbb{Q}} \times_{\mathrm{Sh}_d} \mathrm{Sh}'_d$, on obtient le diagramme :

$$\widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d,\mathbb{Q}} \xrightarrow{P'_{\mathbb{Q}}} \mathrm{Sh}'_d \xrightarrow{\iota_{\mathbb{Q}}} \mathrm{Ab}\,.$$

Associé à un argument de monodromie, il permet finalement [MP13, Proposition 4.6] d'obtenir des isomorphismes $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^*_{\mathbb{Q}}\mathbf{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}$ (resp. $\mathbf{P}^2_{\ell,\mathbb{Q}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^*_{\mathbb{Q}}\mathbf{L}_{\ell,\mathbb{Q}}$) sur $\widetilde{\mathfrak{M}}'_{2d,\mathbb{Q}}$, qui sont les analogues de (1) en cohomologie de de Rham (resp. ℓ-adique).

1.5. Modèles entiers de variétés de Shimura

On souhaite étendre les constructions ci-dessus sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Pour cela, il faut choisir des modèles de nos variétés sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Nous avons déjà indiqué que $\widetilde{\mathfrak{M}}_{2d,\mathbb{Q}}$ a un modèle $\widetilde{\mathfrak{M}}_{2d}$ fourni par son interprétation modulaire. Il reste à construire des modèles naturels pour les variétés de Shimura qui interviennent.

Une bonne notion, inspirée par la définition des modèles de Néron, a été dégagée par Milne [Mi92] (voir aussi [Mo98]). La formuler nécessite de ne pas travailler avec une structure de niveau fixée. Pour cela, soient (G, X) une donnée de Shimura de corps reflex E, $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de E, p un nombre premier, $\mathfrak{p}$ une place de E au-dessus de p, $\mathbb{A}_f^p$ les adèles finis de $\mathbb{Q}$ dont la composante en p est triviale, et $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ et $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ des sous-groupes compacts ouverts. On considère la limite projective $\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X) := \varprojlim_{K^p} \mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G, X)$ sur les structures de niveau premières à p : c'est un E-schéma muni d'une action continue de $G(\mathbb{A}_f^p)$. C'est pour ce schéma qu'on peut espérer l'existence d'un modèle vérifiant une propriété universelle de type Néron.

DÉFINITION 1.1. — *Un* ***modèle entier canonique lisse*** *en* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ *est un* $\mathfrak{O}_{(\mathfrak{p})}$*-schéma séparé, régulier et formellement lisse* $\mathcal{S}\!h_{K_p}(G, X)$ *muni d'une action continue de* $G(\mathbb{A}_f^p)$ *et d'une identification* $G(\mathbb{A}_f^p)$*-équivariante de sa fibre générique avec* $\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ *tel que pour tout* $\mathfrak{O}_{(\mathfrak{p})}$*-schéma régulier et formellement lisse* $\mathcal{X}$*, tout morphisme* $\mathcal{X}_E \to \mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ *se prolonge en un morphisme* $\mathcal{X} \to \mathcal{S}\!h_{K_p}(G, X)$*.*

Si un tel modèle existe, il est unique. On définit alors le modèle entier canonique lisse de $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G, X)$ *: c'est* $\mathcal{S}\!h_{K_pK^p}(G, X) := \mathcal{S}\!h_{K_p}(G, X)/K^p$*.*

Dans les cas qui nous intéressent, de tels modèles ont été construits par Kisin [Ki10] quand $p \nmid 2d$, et par Madapusi Pera [MP12] quand $p \neq 2$:

Théorème 1.2. — *Les variétés de Shimura* Sh_d *et* Sh'_d *admettent des modèles* $\mathcal{Sh}_d$ *et* $\mathcal{Sh}'_d$ *sur* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ *qui sont canoniques lisses sur* $\mathbb{Z}_{(p)}$ *pour tout* $p \neq 2$.

Si $p \nmid d$, le principe de la preuve de ce théorème remonte à Milne [Mi92], et une telle preuve a été annoncée par Vasiu [Va99]. La variété de Shimura Ab a une interprétation modulaire qui permet de construire un modèle entier naturel $\mathcal{Ab}$ de Ab sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$: $\mathcal{Ab}$ est encore un champ de modules de variétés abéliennes polarisées. On définit alors $\mathcal{Sh}'_d$ comme la normalisation de l'adhérence de Sh'_d dans $\mathcal{Ab}$ [8]. La difficulté, surmontée par Kisin, est de vérifier que $\mathcal{Sh}'_d$ est bien lisse. La propriété universelle des modèles canoniques lisses résulte alors de théorèmes d'extension de schémas abéliens. Kisin construit enfin $\mathcal{Sh}_d$ à partir de $\mathcal{Sh}'_d$ de sorte que $\pi : \mathcal{Sh}'_d \to \mathcal{Sh}_d$ soit toujours fini étale, en montrant que les difficultés identifiées par Moonen [Mo98, 3.21] n'apparaissent pas.

Pour réduire le cas général à cette situation, Madapusi Pera plonge primitivement le réseau $L_d \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ dans un $\mathbb{Z}_{(p)}$-réseau M de discriminant premier à p [MP12, Lemma 6.1]. Les variétés de Shimura associées à $\mathrm{SO}(M_{\mathbb{Q}})$ et $\mathrm{GSpin}(M_{\mathbb{Q}})$ sont justiciables des résultats de Kisin et possèdent donc des modèles entiers canoniques lisses en p. Madapusi Pera est capable de décrire avec assez de précision l'adhérence de Sh_d et Sh'_d dans ces modèles pour en déduire l'existence des modèles entiers canoniques lisses $\mathcal{Sh}_d$ et $\mathcal{Sh}'_d$. A posteriori, la construction montre qu'on aurait pu définir $\mathcal{Sh}'_d$ comme le lieu lisse de la normalisation de l'adhérence Sh'_d dans $\mathcal{Ab}$ [8].

La propriété universelle des modèles canoniques lisses, appliquée à une limite projective $\mathcal{X}$ d'espaces de modules de surfaces K3 avec structures de niveau, permet d'étendre l'application des périodes $P_{\mathbb{Q}}$ en $P : \widetilde{\mathfrak{M}}_{2d}^{\mathrm{lisse}} \to \mathcal{Sh}_d$ [MP13, Proposition 4.7]. Notant toujours $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d} := \widetilde{\mathfrak{M}}_{2d}^{\mathrm{lisse}} \times_{\mathcal{Sh}_d} \mathcal{Sh}'_d$, on obtient le diagramme :

$$\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d} \xrightarrow{P'} \mathcal{Sh}'_d \xrightarrow{\iota} \mathcal{Ab}.$$

Il est facile d'étendre $\mathbf{L}_{\ell,\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\ell,\mathbb{Q}}^{\otimes(1,1)}$ en un sous-système local ℓ-adique $\mathbf{L}_\ell \hookrightarrow \mathbf{H}_\ell^{\otimes(1,1)}$ sur $\mathcal{Sh}'_{d,\mathbb{Z}[\frac{1}{2\ell}]}$ satisfaisant $\mathbf{P}^2_\ell(1) \xrightarrow{\sim} P'^*\mathbf{L}_\ell$. La construction de Kisin et Madapusi Pera montre qu'il est également possible d'étendre naturellement $\mathbf{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}^{\otimes(1,1)}$ en un sous-fibré vectoriel filtré à connexion intégrable $\mathbf{L}_{\mathrm{dR}} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{dR}}^{\otimes(1,1)}$ sur $\mathcal{Sh}'_d$. La compatibilité $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}$ sera vérifiée à la proposition 1.5.

Remarque 1.3. — Quand $p \mid d$ mais $p^2 \nmid d$, Madapusi Pera [MP12] considère une variante des définitions et constructions ci-dessus et obtient des modèles entiers canoniques en p de Sh_d et Sh'_d non nécessairement lisses, qui permettent d'étendre l'application des périodes à $\widetilde{\mathfrak{M}}_{2d}$ tout entier [MP13].

8. Nous sommes ici imprécis sur le choix des structures de niveau.

1.6. Le théorème de Torelli

Venons-en à présent au théorème principal de cette partie, qui généralise le théorème de Torelli en caractéristique mixte :

Théorème 1.4. — *L'application des périodes P est une immersion ouverte.*

Cet énoncé avait déjà été essentiellement obtenu par Rizov [Ri10, Corollary 7.2.3] en restriction au lieu ordinaire et sauf pour certaines valeurs de p, puis par Maulik [Mau12, Proposition 5.10] quand $p \nmid d$ et $p \geq 5$. Le cas général, dû à Madapusi Pera [MP13, Theorem 4.8], suit une stratégie proche de celle de Maulik. Le choix d'une construction de Kuga-Satake utilisant toute l'algèbre de Clifford est une simplification technique importante introduite dans [Cha13, Proposition 13].

La preuve suit les arguments du théorème de Torelli infinitésimal classique. Les déformations infinitésimales d'une variété lisse X sont contrôlées par le groupe $H^1(X, T_X)$, à l'aide de l'application de Kodaira-Spencer. Si X est une surface K3, $H^1(X, T_X) \simeq H^1(X, \Omega^1_X)$ est un gradué pour la filtration de Hodge de la cohomologie de de Rham algébrique de X. Ceci explique que la preuve du théorème 1.4 soit une conséquence d'un résultat de compatibilité en cohomologie de Rham de la construction de Kuga-Satake :

Proposition 1.5. — *L'isomorphisme $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^*_{\mathbb{Q}}\mathbf{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}$ induit un isomorphisme $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}$ de fibrés vectoriels filtrés à connexion intégrable.*

Preuve du théorème 1.4 — Soient $[X] \in \widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}(K)$ un point correspondant à une surface K3 polarisée (X, ξ) sur un corps algébriquement clos K de caractéristique ≥ 3, et $v \in \widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}(K[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ un vecteur tangent à $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}$ en $[X]$ contracté par l'application des périodes P'. Comme $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}(1) \simeq P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}$ par la proposition 1.5, l'application $\nabla_v : \mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}|_{[X]} \to \mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}|_{[X]}$ est nulle. L'application induite par transversalité de Griffiths entre les gradués pour la filtration de Hodge $\nabla_v : H^0(X, \Omega^2_X) \to H^1(X, \Omega^1_X)^{\perp\xi}$ l'est donc également. Comme celle-ci est donnée par le cup-produit avec la classe de Kodaira-Spencer $\mathrm{KS}(v) \in H^1(X, T_X)$, et que $\Omega^2_X \simeq \mathcal{O}_X$, il s'ensuit que cette classe de Kodaira-Spencer est nulle. Par propriété de l'espace de modules, v est donc nul.

Comme $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}$ et $\mathcal{S}\!\mathit{h}'_d$ sont lisses de la même dimension relative 19 sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, nous avons montré que P' est étale, donc que P est étale. Comme $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\mathrm{lisse}}_{2d}$ est séparé et que $P|_{\widetilde{\mathfrak{M}}^{\mathrm{lisse}}_{2d,\mathbb{Q}}}$ est une immersion ouverte par le théorème de Torelli en caractéristique nulle, le Main Theorem de Zariski montre que P est une immersion ouverte. $\square$

La preuve de la proposition 1.5 exploite l'interprétation cristalline de la cohomologie de de Rham, en se reposant sur des versions entières du théorème de comparaison entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline. À cet effet, Maulik et Charles s'appuyaient sur la théorie de Fontaine-Laffaille et Fontaine-Messing [FM87], et sur des améliorations de celle-ci dues à Kisin [Ki06]. Cela ne leur permettait pas de traiter les caractéristiques 2 et 3. Madapusi Pera évite à cette étape toute hypothèse sur la caractéristique, en remarquant qu'il n'a besoin de considérer que des variétés ordinaires, et en exploitant un résultat antérieur plus faible de Bloch et Kato [BK86], au sujet duquel on pourra aussi consulter l'appendice de [PR88].

Preuve de la proposition 1.5 — Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 3$ et $s \in \widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}(W(K))$ dont la fibre spéciale correspond à une surface K3 X sur K. Les groupes de cohomologie de de Rham $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}|_s$ (resp. $P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}(-1)|_s$) sont des $W(K)$-modules qui ont une structure de F-cristaux [(9)] (i.e. qui portent une action semi-linéaire du Frobenius) induite par leur interprétation cristalline. Ogus [Og84, §7] a montré que l'isomorphisme $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}|_{s_{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\sim} P'^*_{\mathbb{Q}}\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}(-1)|_{s_{\mathbb{Q}}}$ commute à cette action du Frobenius. Comme expliqué par Madapusi Pera [MP13, Lemma 4.9], on peut aujourd'hui voir cet énoncé comme une conséquence d'un théorème de Blasius et Wintenberger ([Bla94], [Mo98, Theorem 5.6.3]) selon lequel le théorème de comparaison entre cohomologie cristalline et cohomologie étale p-adique est compatible aux réalisations des classes de Hodge absolues sur les variétés abéliennes.

Supposons X ordinaire. Les polygones de Hodge et de Newton du F-cristal $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}|_s$ coïncident alors. Comme la variété de Kuga-Satake A associée à X est également ordinaire ([Ny83, Proposition 2.5], [Og84, Theorem 7.8]) et que $P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}(-1)|_s$ est un sous-F-cristal primitif de $H^{\otimes(1,1)}_{\mathrm{cris}}(A)(-1)$, il en va de même pour le F-cristal $P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}(-1)|_s$. La décomposition de Newton-Hodge [Kat79, Theorem 1.6.1] montre alors que le F-cristal $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}|_s$ (resp. $P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}(-1)|_s$) est canoniquement somme directe de trois sous-F-cristaux de pentes 0, 1 et 2. Un théorème de Bloch et Kato [BK86, Theorem 9.6.2] montre que ces sous-F-cristaux s'identifient aux gradués tensorisés par $W(K)$ d'une filtration naturelle sur $\mathbf{P}^2_p|_{s_{\mathbb{Q}}}$ (resp. $P'^*_{\mathbb{Q}}\mathbf{L}_p(-1)|_{s_{\mathbb{Q}}}$). Comme $\mathbf{P}^2_p|_{s_{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\sim} P'^*_{\mathbb{Q}}\mathbf{L}_p(-1)|_{s_{\mathbb{Q}}}$, on conclut que $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}} \to P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{dR}}(-1)$ est un isomorphisme.

Appliquant ce résultat à des relèvements des points génériques géométriques de la fibre spéciale de $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}$, on voit que l'isomorphisme $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}(1) \xrightarrow{\sim} P'^*_{\mathbb{Q}}\mathbf{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}$ se prolonge en un isomorphisme de fibrés vectoriels sur un ouvert contenant les points génériques de la fibre spéciale de $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}$. Comme $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}$ est normal, il s'étend en un isomorphisme sur $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d}$ tout entier. Cet isomorphisme préserve la connexion et la filtration, car c'est le cas sur la fibre générique. □

Remarque 1.6. — La preuve précédente montre en fait [MP13, Corollary 4.14] que l'on a un isomorphisme $\mathbf{P}^2_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\sim} P'^*\mathbf{L}_{\mathrm{cris}}(-1) \hookrightarrow \mathbf{H}^{\otimes(1,1)}_{\mathrm{cris}}(-1)$ de F-cristaux sur $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\mathrm{lisse}}_{2d,\mathbb{F}_p}$, qui met en famille l'analogue cristallin de la relation (1).

Remarque 1.7. — Le théorème 1.4 implique que $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\mathrm{lisse}}_{2d,\mathbb{F}_p}$ a pour espace de modules grossier un schéma quasi-projectif. Il permet également de montrer que celui-ci est géométriquement intègre si $p^2 \nmid d$ [MP13, Corollary 4.16].

Remarque 1.8. — On ne peut espérer que l'application des périodes P soit surjective : il faudrait au moins prendre en compte les surfaces K3 quasi-polarisées, c'est-à-dire

9. Nous avons modifié les twists à la Tate car $\mathbf{P}^2_{\mathrm{dR}}(1)|_s$, qui peut avoir des pentes négatives, n'est pas vraiment un F-cristal.

munies d'un fibré en droites gros et nef. Les articles [Mau12] et [MP13] se placent dans ce cadre légèrement plus général. La question de la surjectivité de l'application des périodes est alors intimement liée à l'existence d'un critère de Néron-Ogg-Shafarevich pour les surfaces K3. Matsumoto [Mat14] a obtenu un tel résultat en caractéristique assez grande, en s'inspirant de techniques de Maulik [Mau12, §4].

Remarque 1.9. — Un théorème de Torelli à l'énoncé plus proche des formulations classiques (la surface K3 est déterminée par des données cohomologiques) avait été obtenu par Ogus [Og83] pour les surfaces K3 Shioda-supersingulières en caractéristique ≥ 5.

2. CONSTRUCTION DE FIBRÉS EN DROITES

Dans cette partie, nous expliquons les idées de la preuve de la conjecture de Tate pour les surfaces K3 en caractéristique différente de 2 :

Théorème 2.1. — *Soit X une surface K3 sur un corps de type fini k de caractéristique $\neq 2$. Soient ℓ un nombre premier inversible dans k, $\bar{k}$ une clôture séparable de k et $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Alors l'application classe de cycle induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\Gamma_k}.$$

Les premiers résultats positifs ont été obtenus pour des surfaces K3 elliptiques ([ASD73, Theorem 5.2], [Ar74, Theorem 1.7]) ou de degré 2 [RSZ83, Theorem 4].

Toutes les avancées ultérieures ont reposé sur la construction de Kuga-Satake. En caractéristique nulle, celle-ci permet facilement de se ramener à la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes prouvée par Faltings ([Fa83], [Fa84]). Sur les corps finis, Nygaard [Ny83] (resp. Nygaard et Ogus [NO85]) ont étendu ces arguments, et ramené la conjecture de Tate pour les surfaces K3 ordinaires (resp. de hauteur finie en caractéristique ≥ 5) à la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis prouvée par Tate [Ta66]. Après un premier paragraphe de généralités, nous rappelons brièvement ces travaux.

Dans les deux paragraphes suivants, nous discutons la preuve par Madapusi Pera [MP13] du théorème 2.1, qui se situe dans le prolongement de ces idées. Elle s'appuie de manière essentielle sur les travaux récents de Kisin [Ki14] sur la réduction modulo p de variétés de Shimura de type Hodge.

Une stratégie complètement différente a été développée par Maulik [Mau12], et poursuivie par Charles [Cha13], pour traiter le cas supersingulier (laissé ouvert par Nygaard et Ogus) en se ramenant au cas elliptique. Nous expliquons au sixième paragraphe comment ces méthodes permettent de prouver le théorème 2.1 pour les surfaces K3 supersingulières possédant une polarisation de degré premier à la caractéristique [10].

10. La preuve de [Cha13, Proposition 25] est erronée, et nous nous contentons donc d'expliquer un résultat plus faible que [Cha13, Theorem 1].

2.1. Préliminaires

Pour prouver le théorème 2.1, on peut remplacer k par une extension finie k'. En effet, si la conjecture de Tate vaut pour $X_{k'}$ et si $\alpha \in H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\Gamma_k}$, on peut écrire α comme $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire $\sum_i \lambda_i[\mathcal{L}_i]_\ell$ de classes de fibré en droites sur $X_{k'}$. On a alors $[k' : k]\alpha = \sum_i \lambda_i [N_{k'/k}(\mathcal{L}_i)]_\ell$.

Pour cette raison, on s'autorisera dans la suite à remplacer k par une extension finie sans nécessairement le mentionner explicitement. On choisit en particulier une telle extension de sorte que tous les fibrés en droites sur $X_{\bar{k}}$ soient définis sur k, et on munit X d'une polarisation primitive ξ de degré $2d$.

Nous avions exclu au paragraphe 1.2 un nombre fini de surfaces K3 superspéciales. Ce n'est pas grave pour deux raisons. D'une part, ce n'était pas vraiment nécessaire (voir la remarque 1.3). D'autre part, celles-ci sont supersingulières et possèdent des déformations supersingulières non superspéciales [Og79, Remark 2.7]. Par [Ar74, Theorem 1.1], il suffit de prouver la conjecture de Tate pour une telle déformation. On peut donc supposer $[X] \in \mathfrak{M}_{2d}^{\text{lisse}}(k)$.

Rappelons le diagramme $\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\text{lisse}}_{2d} \xrightarrow{P'} \mathcal{Sh}'_d \xrightarrow{\iota} \mathcal{Ab}$ obtenu au paragraphe 1.5. L'application des périodes P' est une immersion ouverte par le théorème de Torelli 1.4, et, par construction, l'application de Kuga-Satake ι est quasi-finie, et finie si $p \nmid d$.

Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer que $[X] \in \mathfrak{M}_{2d}^{\text{lisse}}(k)$ se relève en un point encore noté $[X] \in \widetilde{\mathfrak{M}}'^{\text{lisse}}_{2d}(k)$. On dira que la variété abélienne A correspondant à $\iota(P'([X]))$ est la variété de Kuga-Satake associée à X. Spécialisant à X et A les relations cohomologiques obtenues dans la partie précédente, on obtient des applications $P^2(X)(1) \xrightarrow{\sim} L(A) \hookrightarrow \mathrm{End}(H^1(A))$ pour diverses théories cohomologiques, qui généralisent la relation (1).

2.2. La conjecture de Tate en caractéristique nulle

Expliquons maintenant la preuve classique du théorème 2.1 en caractéristique nulle ([Ta94, Theorem 5.6 (a)], [An96, Theorem 1.6.1 (ii)]). Fixant un plongement $\bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} P^2_{\mathrm{B}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1)) \arrow[r, hook, "j_{\mathrm{B}}"] \arrow[d] & \mathrm{End}(H^1_{\mathrm{B}}(A_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) \arrow[d] \\ P^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \arrow[r, hook, "j_\ell"] & \mathrm{End}(H^1_{\text{ét}}(A_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)). \end{tikzcd}$$

La ligne supérieure est un morphisme de structures de Hodge rationnelles, la ligne inférieure est Γ_k-équivariante, et les flèches verticales sont données par le théorème de comparaison entre cohomologie de Betti et cohomologie ℓ-adique. Comme la structure de Hodge $\mathrm{End}(H^1_{\mathrm{B}}(A_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))$ est polarisable, il existe une rétraction $q_{\mathrm{B}} : \mathrm{End}(H^1_{\mathrm{B}}(A_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) \to P^2_{\mathrm{B}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1))$ de j_{B} qui est un morphisme de structures de Hodge. On note q_ℓ son extension des scalaires à $\mathbb{Q}_\ell$.

Soit $\alpha \in H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\Gamma_k}$. Quitte à la modifier par un multiple de la polarisation, on peut supposer $\alpha \in P^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\Gamma_k}$. Son image $j_\ell(\alpha)$ est encore Γ_k-invariante. Par la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes prouvée par Faltings ([Fa83], [Fa84]), cette image est $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire de classes d'endomorphismes f_i de A : écrivons $j_\ell(\alpha) = \sum_i \lambda_i [f_i]_\ell$. La classe $q_B([f_i]_{\mathrm{B}})$ est de Hodge, et par le théorème des classes $(1,1)$ de Lefschetz, c'est la classe d'un fibré en droites $\mathcal{L}_i$ sur X. On calcule alors $\alpha = q_\ell(j_\ell(\alpha)) = q_\ell(\sum_i \lambda_i [f_i]_\ell) = \sum_i \lambda_i q_\ell([f_i]_\ell) = \sum_i \lambda_i [\mathcal{L}_i]_\ell$.

2.3. Relèvements canoniques et quasi-canoniques

Les articles [Ny83] et [NO85] adaptent cette stratégie. Supposons k fini et X ordinaire, et esquissons les arguments de [Ny83]. Nygaard (voir aussi [De81b]) montre l'existence d'un relèvement polarisé $\mathcal{X}$ de X sur $W(k)$, dit canonique, qui vérifie la propriété suivante. Soit $\mathcal{A}$ le schéma abélien de Kuga-Satake associé à $\mathcal{X}$: alors A est ordinaire et $\mathcal{A}$ est son relèvement canonique (11). En particulier, tout endomorphisme de A se relève en un endomorphisme de $\mathcal{A}$.

La preuve du paragraphe précédent fonctionne alors : une classe dans $P^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\Gamma_k}$ induit une classe dans $\mathrm{End}(H^1_{\text{ét}}(A_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell))^{\Gamma_k}$. Par la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes prouvée par Tate [Ta66], celle-ci est $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire de classes d'endomorphismes de A. Ces endomorphismes se relèvent à $\mathcal{A}$, où leurs classes de Betti sont de Hodge, et induisent par projection des classes de Hodge dans $P^2_{\mathrm{B}}(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1))$. Par le théorème des classes $(1,1)$ de Lefschetz, celles-ci correspondent à des fibrés en droites qu'on peut spécialiser sur X pour conclure.

La stratégie de [NO85] est similaire mais plus compliquée. Ils travaillent avec la cohomologie cristalline plutôt qu'avec la cohomologie ℓ-adique, et développent, pour les surfaces K3 de hauteur finie, une notion plus faible de relèvement quasi-canonique. Comme les relèvements canoniques de [Ny83], ces relèvements quasi-canoniques ont la propriété remarquable que tout fibré en droites sur X s'y relève.

2.4. Endomorphismes spéciaux

La difficulté pour appliquer ces idées à une surface K3 supersingulière est qu'il n'est pas possible de trouver un relèvement de celle-ci en caractéristique nulle auquel tous les fibrés en droites se relèvent.

On peut tout de même exploiter les arguments ci-dessus en considérant plusieurs relèvements distincts de X. Cela permet de relier les fibrés en droites sur X à certains endomorphismes de A, dits spéciaux. Nous suivons la présentation systématique de Madapusi Pera ([MP12], [MP13]) ; ces arguments sont également utilisés dans la preuve de [Cha13, Proposition 22].

11. Nygaard [Ny83, Corollary 2.5, Proposition 2.8] montre ce résultat à isogénie près, mais voir [Ri10, Proposition 7.2.2] et [MP13, Proposition 4.22].

Définition 2.2. — *Soient k un corps et A la variété abélienne associée à un k-point de $\mathcal{S}h'_d$. Un endomorphisme f de A est dit* ***spécial*** *si sa classe appartient à $L(A) \hookrightarrow \mathrm{End}(H^1(A))$ pour toutes les cohomologies ℓ-adiques avec ℓ inversible dans k, et en cohomologie cristalline si k est de caractéristique finie.*

On montre [MP12] qu'il suffit de le vérifier pour une cohomologie ℓ-adique si k est de caractéristique nulle, et pour la cohomologie cristalline si k est de caractéristique finie. De plus, pour une famille de tels endomorphismes, être spécial est une propriété ouverte et fermée. On note $\mathrm{LEnd}(A)$ l'ensemble des endomorphismes spéciaux de A.

La proposition suivante est [MP13, Proposition 4.17 (4)] :

Proposition 2.3. — *Si A est la variété de Kuga-Satake associée à la surface K3 X, il y a un isomorphisme $\mathrm{Pic}(X)^{\perp\xi} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LEnd}(A)$ compatible aux réalisations cohomologiques.*

Preuve — Les arguments sont analogues à ceux des deux paragraphes précédents. Expliquons-les rapidement, surtout pour mettre en évidence que le théorème de Torelli 1.4 est utilisé de manière cruciale. Comme la preuve est plus facile en caractéristique nulle, supposons X de caractéristique finie p.

Si $\zeta \in \mathrm{Pic}(X)^{\perp\xi}$, on peut relever (X, ξ, ζ) en $(\mathcal{X}, \tilde{\xi}, \tilde{\zeta})$ en caractéristique nulle [LO11, Proposition A.1], noter $\mathcal{A}$ la variété de Kuga-Satake associée et plonger son corps de définition dans $\mathbb{C}$. La classe $[\tilde{\zeta}_{\mathbb{C}}]_{\mathrm{B}} \in P^2_{\mathrm{B}}(\mathcal{X}_{\mathbb{C}})$ est de Hodge, induit une classe de Hodge dans $\mathrm{End}(H^1_{\mathrm{B}}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}))$, qui correspond à un endomorphisme spécial de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, qu'on peut spécialiser en un endomorphisme spécial de A.

Réciproquement, soit $f \in \mathrm{LEnd}(A)$ un endomorphisme spécial. L'étude des déformations des endomorphismes spéciaux, effectuée à l'aide des théories de Serre-Tate et de Grothendieck-Messing, montre qu'il est possible de relever le point $[A] \in \mathcal{S}h'_d(k)$ en $\mathcal{A}$ en caractéristique nulle de sorte que l'endomorphisme spécial f se relève en un endomorphisme spécial $\tilde{f}$. Le théorème 1.4 montre que ce relèvement induit un relèvement compatible $\mathcal{X}$ de la surface K3 X. La classe $[\tilde{f}_{\mathbb{C}}]_{\mathrm{B}}$ est de Hodge. Comme $\tilde{f}$ est spécial, elle correspond à une classe de Hodge dans $P^2_{\mathrm{B}}(\mathcal{X}_{\mathbb{C}})$. C'est la classe d'un fibré en droites sur $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$, qu'on peut spécialiser sur X. □

Remarque 2.4. — La construction de Kuga-Satake sur $\mathbb{C}$ expliquée au paragraphe 1.1 montre que si $\zeta \in \mathrm{Pic}(X)^{\perp\xi}$, l'endomorphisme spécial f associé satisfait $f \circ f = (\zeta^2)\,\mathrm{Id}$.

On en déduit immédiatement :

Corollaire 2.5. — *Pour prouver le théorème 2.1 en caractéristique finie, il suffit de montrer que $\mathrm{LEnd}(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to L_\ell(A)^{\Gamma_k}$ est un isomorphisme*

Montrons, en suivant [MP13, Corollary 5.11], que nous pouvons maintenant nous ramener au cas des corps finis, à l'aide de la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps de type fini de caractéristique finie, prouvée par Zarhin.

Proposition 2.6. — *Pour prouver le théorème 2.1 en caractéristique finie, il suffit de traiter le cas où k est fini.*

Preuve — Écrivons k comme corps des fonctions d'une variété intègre B sur un corps fini. Quitte à rétrécir B, on peut supposer que X et A ont des modèles lisses $\mathcal{X}$ et $\mathcal{A}$ sur B. Choisissons $b \in B(\mathbb{F}_q)$ un point fermé de B.

Soient $\alpha \in L_\ell(A)^{\Gamma_k}$ une classe de cohomologie et $\alpha_b \in L_\ell(\mathcal{A}_b)^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ sa spécialisation. D'une part, par le théorème de Zarhin [Za76, Corollary 2], α est $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire de classes d'endomorphismes de A. D'autre part, par hypothèse, α_b est $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire de classes d'endomorphismes spéciaux de $\mathcal{A}_b$. Par injectivité des applications classe de cycle et spécialisation, α est $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire de classes d'endomorphismes de A qui sont spéciaux sur $\mathcal{A}_b$, donc d'endomorphismes spéciaux de A. $\square$

2.5. Réduction modulo p de variétés de Shimura

Dans ce paragraphe, nous finissons de présenter la preuve par Madapusi Pera du théorème 2.1 en caractéristique finie. Par la proposition 2.6, on suppose que k est fini.

Par le corollaire 2.5, il suffit de montrer que toute classe dans $L_\ell(A)^{\Gamma_k}$ est $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire de classes d'endomorphismes spéciaux. Malheureusement, la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes, qui montre seulement qu'elle est $\mathbb{Q}_\ell$-combinaison linéaire de classes d'endomorphismes, ne permet pas de conclure.

Cependant, cet énoncé ne fait plus intervenir de surfaces K3, mais seulement des variétés abéliennes obtenues par la construction de Kuga-Satake et leurs endomorphismes spéciaux : c'est un problème interne à la théorie des variétés de Shimura de type GSpin. La preuve de Madapusi Pera tire parti de ce cadre plus général.

Pour cela, plongeons $L_d \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ comme un sous-réseau primitif propre d'un $\mathbb{Z}_{(p)}$-réseau M de signature $(2, m)$ et de discriminant premier à p [MP12, Lemma 6.1]. On obtient un morphisme de variétés de Shimura $\mathrm{Sh}'_d \to \mathrm{Sh}'_M$, qui induit un morphisme $f : \mathcal{S}\!\mathcal{h}'_d \to \mathcal{S}\!\mathcal{h}'_M$ entre leurs modèles canoniques lisses en p. On remarque alors [MP13, Lemma 5.6] que l'énoncé qu'on cherche à montrer pour $[A] \in \mathcal{S}\!\mathcal{h}'_d(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est une conséquence formelle de l'énoncé analogue pour $f([A])$. De plus, cet énoncé analogue est plus simple pour deux raisons : d'une part, le discriminant est maintenant premier à p, et d'autre part, l'orthogonal de L_d dans M se plonge dans $\mathrm{LEnd}(f([A]))$, qui est donc non trivial.

Pour ne pas alourdir les notations, nous supposons dans la suite que ces conditions étaient déjà vérifiées sans qu'il ait été nécessaire d'introduire le sur-réseau M : on a donc $p \nmid d$, et $\mathrm{LEnd}(A) \neq \varnothing$.

Il est remarquable qu'il ait été possible de forcer l'existence d'un endomorphisme spécial de manière aussi formelle. En effet, tous les autres seront construits à partir de celui-ci. Pour cela, Madapusi Pera applique des résultats récents de Kisin [Ki14] sur les réductions modulo p de variétés de Shimura de type Hodge. Pour les décrire, nous nous plaçons brièvement dans ce cadre plus général.

Soit $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ une variété de Shimura de corps reflex E. On la suppose de type Hodge : il existe une immersion de variétés de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G, X) \to \mathrm{Ab}$ de but un champ de modules de variétés abéliennes polarisées. Si $\mathfrak{p}$ est une place de E au-dessus de p qui est hyperspéciale [12], Kisin [Ki10, Theorem 2.3.8] construit un modèle entier $\mathcal{Sh}_K(G,X)$ de $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ canonique lisse en $\mathfrak{p}$, à l'aide de la normalisation de son adhérence dans le modèle entier naturel (c'est-à-dire modulaire) $\mathcal{Ab}$ de Ab (dans notre cas, c'est ce que nous avons déjà expliqué au paragraphe 1.5).

Kisin donne une interprétation modulaire, en un sens faible, de ce modèle entier [Ki14, Proposition 1.3.9] : de la même manière que $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ s'interprète comme un espace de modules de variétés abéliennes polarisées dont certaines classes de cohomologie sont de Hodge, les $\overline{\mathbb{F}}_p$-points de $\mathcal{Sh}_K(G,X)$ correspondent à des variétés abéliennes sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ munies de certaines classes de cohomologie distinguées (en cohomologie ℓ-adique et cristalline). L'ensemble $\mathcal{Sh}_K(G,X)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est alors naturellement partitionné en classes d'isogénie (où l'on requiert que les isogénies préservent les classes de cohomologie distinguées) [Ki14, Proposition 1.4.15].

Soient $x\in\mathcal{Sh}_K(G,X)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ et A la variété abélienne associée. Si $\ell\neq p$, le sous-groupe de $\mathrm{GL}(H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Q}_\ell))$ préservant les classes de cohomologie distinguées est isomorphe à $G_{\mathbb{Q}_\ell}$. On note $I_\ell\subset G_{\mathbb{Q}_\ell}$ le centralisateur d'une puissance assez grande du Frobenius ℓ-adique. Procédant de même avec la cohomologie cristalline, on définit un sous-groupe $I_p\subset G_{\mathrm{Frac}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))}$. Notons enfin I le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique des $\mathbb{Q}$-automorphismes de A qui agissent à travers I_ℓ (resp. I_p) en cohomologie ℓ-adique (resp. cristalline).

Le théorème de Kisin que nous allons appliquer est [Ki14, Corollary 2.1.7] :

Théorème 2.7. — *Il existe $\ell\neq p$ tel que $I_{\mathbb{Q}_\ell}\to I_\ell$ soit un isomorphisme* [13].

Idée de la preuve — Le groupe I préserve à scalaire près la polarisation de A. Par positivité de l'involution de Rosati associée, $I_{\mathbb{R}}$ est extension d'un groupe compact par $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$. On en déduit que I est réductif, donc que le quotient $Q:=I_\ell/I_{\mathbb{Q}_\ell}$ est affine. Comme le Frobenius agit de manière semi-simple sur $H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Q}_\ell)$, I_ℓ est le centralisateur d'un tore dans $G_{\mathbb{Q}_\ell}$, donc un sous-groupe de Levi de $G_{\mathbb{Q}_\ell}$. En particulier, il est géométriquement connexe et Q est géométriquement connexe.

Pour conclure, il reste à montrer que Q est propre. Par un lemme de théorie des groupes algébriques [Ki14, Lemma 2.1.8], sous l'hypothèse que I_ℓ est déployé, il suffit de montrer que $I_\ell(\mathbb{Q}_\ell)/I(\mathbb{Q}_\ell)$ est compact pour la topologie ℓ-adique. À l'aide du théorème de Chebotarev, on assure cette hypothèse en choisissant ℓ tel que $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ soit déployé et tel que les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Q}_\ell)$ appartiennent à $\mathbb{Q}_\ell$.

La description que donne Kisin des classes d'isogénie montre l'existence, pour un q bien choisi, d'une application $I(\mathbb{Q})\backslash I_\ell(\mathbb{Q}_\ell)/(I_\ell(\mathbb{Q}_\ell)\cap K_\ell)\to\mathcal{Sh}_K(G,X)(\mathbb{F}_q)$. L'interprétation modulaire de $\mathcal{Sh}_K(G,X)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ lui permet de montrer (essentiellement dans la preuve de [Ki14, Proposition 2.1.3]) l'injectivité de cette application. C'est l'étape cruciale : on construit des éléments de $I(\mathbb{Q})$, donc des automorphismes de A.

Il s'ensuit que $I(\mathbb{Q}_\ell)\backslash I_\ell(\mathbb{Q}_\ell)/(I_\ell(\mathbb{Q}_\ell)\cap K_\ell)$ est fini : $I_\ell(\mathbb{Q}_\ell)/I(\mathbb{Q}_\ell)$ est donc compact. $\square$

12. Dans notre application, c'est la condition $p\nmid d$.
13. Kisin [Ki14, Corollary 2.3.2] en déduit que c'est vrai pour tout ℓ, mais nous n'en aurons pas besoin.

On peut maintenant conclure en suivant la preuve de [MP13, Theorem 5.4]. Commençons par choisir ℓ comme dans le théorème 2.7. Dans le cas particulier des variétés de Shimura de type GSpin que nous considérions, la définition de I_ℓ montre que, quitte à remplacer k par une extension finie, I_ℓ agit sur $H_\ell^{\otimes(1,1)}(A)$ en préservant $L_\ell(A)^{\Gamma_k}$, et que son action sur $L_\ell(A)^{\Gamma_k}$ est irréductible [MP13, Lemma 5.8]. Par le théorème 2.7, l'action de I sur $L_\ell(A)^{\Gamma_k}$ est irréductible. Comme I agit par automorphismes de A, cette action préserve l'espace $\mathrm{LEnd}(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ des endomorphismes spéciaux. Nous nous étions ramenés au cas où cet espace est non vide, de sorte que l'irréductibilité de l'action montre que $\mathrm{LEnd}(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell\to L_\ell(A)^{\Gamma_k}$ est un isomorphisme.

Nous avons montré la conjecture de Tate pour X et un ℓ particulier. On peut la reformuler comme suit : le nombre de Picard de X est égal à la multiplicité de la valeur propre 1 pour le Frobenius ℓ-adique. Par indépendance de ℓ du polynôme caractéristique du Frobenius ℓ-adique [De74], et semi-simplicité de l'action de celui-ci [De81a, Corollaire 1.10], on en déduit immédiatement le même énoncé pour tout nombre premier $\ell\neq p$.

La parenté de l'argument ci-dessus avec la preuve par Tate [Ta66] de la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis est frappante : celle-ci repose également sur un résultat de finitude de classes d'isogénie, et fait aussi, dans un premier temps, le choix d'un nombre premier ℓ particulier.

2.6. Utilisation de formes automorphes

Nous supposons dans tout ce paragraphe que $p\nmid 2d$, et nous montrons dans ce cas, en suivant [Mau12] et [Cha13], la conjecture de Tate pour les surfaces K3 supersingulières : il faut prouver qu'elles sont Shioda-supersingulières (i.e. de nombre de Picard 22).

L'idée remonte à [RSZ83, Theorem 4] : par un théorème d'Artin [Ar74, Theorem 1.1], il suffit de le faire pour une surface K3 particulière dans chaque composante irréductible $C\subset\widetilde{\mathfrak{M}}'^{\,\mathrm{lisse}}_{2d}$ du lieu supersingulier. Comme la conjecture de Tate est connue pour celles qui sont elliptiques [Ar74, Theorem 1.7], il suffit de montrer que C intersecte le lieu elliptique [14]. Pour cela, nous allons combiner deux ingrédients : une propriété d'amplitude du lieu elliptique, et un résultat de propreté du lieu supersingulier.

Le premier, dû à Maulik [Mau12, §3], repose sur des constructions de formes automorphes, et exploite à cet effet des travaux de Borcherds [Bor99]. Commençons par travailler sur $\mathbb{C}$, en conservant les notations du paragraphe 1.3. Pour tout $v\in L_d^\vee$, on dispose d'un diviseur $v^\perp\subset\Omega$. Si $n\in\mathbb{Q}^{>0}$ et $\gamma\in L_d^\vee/L_d$, le diviseur $\sum_{\langle v,v\rangle=-2n,[v]=\gamma}v^\perp$ est Γ-invariant et descend en un diviseur $y_{n,\gamma}$ sur $\Omega/\Gamma=\mathrm{Sh}_{d,\mathbb{C}}$: c'est un **diviseur de Heegner**. Par convention, on définit $y_{0,\gamma}=0$ si $\gamma\neq 0$, et $[y_{0,0}]=\lambda_{\mathbb{C}}$, où $\lambda_{\mathbb{C}}$ est le fibré de Hodge sur $\mathrm{Sh}_{d,\mathbb{C}}$.

Si $k\geq 1$, le théorème des classes $(1,1)$ de Lefschetz montre que le groupe de Picard d'une surface K3 complexe dont les périodes appartiennent au diviseur $y_{dk^2,0}$ contient un

14. Quand $p=3$, on doit inclure dans le lieu elliptique les surfaces K3 munies de fibrations quasi-elliptiques. Celles-ci vérifient la conjecture de Tate car elles sont unirationnelles, donc Shioda-supersingulières [Sh79, Corollary 2].

sous-réseau isomorphe à $\begin{pmatrix} 2d & 0 \\ 0 & -2dk^2 \end{pmatrix}$. Comme cette forme quadratique est isotrope, une telle surface K3 est elliptique.

Supposons maintenant par l'absurde que $\lambda_{\mathbb{C}}$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire dans $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\Omega/\Gamma)$ des $[y_{dk^2,0}]$. Alors il existe une forme linéaire α sur $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\Omega/\Gamma)$ telle que $\alpha([y_{dk^2,0}]) = 0$ pour tout k, mais $\alpha(\lambda) \neq 0$. Un théorème de Borcherds [Bor99, Theorem 4.5] précisé par McGraw [McG] montre que la série formelle :

$$\Phi_\alpha(q) = \sum_{n \in \mathbb{Q}^{\geq 0}} \sum_{\gamma \in L_d^\vee / L_d} \alpha([y_{n,\gamma}]) v_\gamma q^n \in \mathbb{Q}[L_d^\vee / L_d][[q^{\frac{1}{4d}}]]$$

est le développement de Fourier d'une forme modulaire vectorielle à valeurs dans $\mathbb{C}[L_d^\vee/L_d]$ et de poids demi-entier 21/2. Comme $\alpha([y_{0,0}]) \neq 0$, on peut écrire $\Phi_\alpha(q)$ comme somme d'une forme modulaire non nulle construite à l'aide d'une série d'Eisenstein, et d'une forme modulaire cuspidale. Le coefficient en $v_0 q^{dk^2}$ de la première croît plus rapidement avec k que celui de la seconde. Cela contredit, pour $k \gg 0$, le fait que $\alpha([y_{dk^2,0}]) = 0$.

Nous avons donc montré [Mau12, Theorem 3.1] l'existence d'un diviseur de Cartier (non nécessairement effectif) D sur $\mathrm{Sh}_{d,\mathbb{C}}$ supporté sur le lieu elliptique, et dont le fibré en droites associé est une puissance du fibré de Hodge $\lambda_{\mathbb{C}}$. Le diviseur D (dont les composantes irréductibles sont en fait des sous-variétés de Shimura de $\mathrm{Sh}_{d,\mathbb{C}}$) est défini sur un corps de nombres. Quitte à le remplacer par la somme de ses conjugués sous Galois, on peut le supposer défini sur $\mathbb{Q}$. On note encore D son pull-back à Sh'_d. Le résultat que nous utiliserons est l'amplitude de sa réduction modulo p :

Proposition 2.8. — *L'adhérence $\overline{D}$ de D dans $\mathcal{S}h'_d$ est ample en restriction à $\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{F}_p}$.*

Preuve — Notons μ le fibré ample naturel sur $\mathcal{A}b$: le déterminant du fibré de Hodge [FC90, Theorem V.2.3]. Comme ι est quasi-fini, $\iota^*\mu$ est un fibré ample sur $\mathcal{S}h'_d$. Maulik montre [Mau12, Proposition 5.8] que $\lambda_{\mathbb{C}}$ est proportionnel à $\iota^*_{\mathbb{C}}\mu_{\mathbb{C}}$. Des multiples convenables des fibrés en droites $\mathcal{O}(\overline{D})$ et $\iota^*\mu$ sur $\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{Z}_{(p)}}$ coïncident donc en restriction à $\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{Q}}$: ils diffèrent d'un diviseur de Cartier Δ supporté sur $\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{F}_p}$. Comme $\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{Z}_{(p)}}$ est lisse, Δ est trivial en restriction à $\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{F}_p}$ [Mau12, Lemma 5.12], et $\mathcal{O}(\overline{D})|_{\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{F}_p}}$ est bien ample. □

Le deuxième ingrédient est un résultat de propreté du lieu supersingulier. Maulik suppose que $p > 2d+4$. Il montre qu'une surface K3 polarisée supersingulière sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète de caractéristique p, dont la polarisation est très ample, a potentiellement bonne réduction [15] [Mau12, Theorem 4.1]. En effet, sous cette restriction sur la caractéristique, un théorème de Saito [Sa04] permet de construire un modèle semistable. Maulik applique le programme du modèle

15. Ce résultat était déjà connu sous la conjecture de Tate : c'est le théorème de Rudakov et Shafarevich [RS86] que nous avons énoncé au théorème 0.6.

minimal en caractéristique p de Kawamata [Kaw94] à ce modèle semistable, et vérifie que sous l'hypothèse de supersingularité, le modèle obtenu par ce procédé est lisse.

Cela permet à Maulik de construire des familles complètes non triviales de surfaces K3 supersingulières. Une difficulté est que ces familles pourraient ne pas être polarisées, mais Maulik est capable d'assurer la condition plus faible, et suffisante pour son argument, qu'elles soient quasi-polarisées. Finalement, le théorème de Torelli 1.4 implique que cette famille n'est pas contractée par l'application des périodes P', et permet de montrer qu'elle rencontre le diviseur ample $\overline{D}|_{\mathcal{Sh}'_{d,\mathbb{F}_p}}$, donc le lieu elliptique. Nous ne développerons pas plus ces arguments, qui sont détaillés dans [Mau12, §7].

Quand $p \nmid 2d$, l'idée de Charles est d'exploiter plutôt la propreté, prouvée par Oort [Oo74, Theorem 1.1 (a)], du lieu supersingulier dans l'espace de modules de variétés abéliennes polarisées $\mathcal{Ab}_{\mathbb{F}_p}$ (16). Ce résultat est plus facile, et valable en toute caractéristique : dans sa preuve, l'existence de modèles de Néron sert de substitut à l'existence de modèles semistables. Qu'il soit utile dans notre situation est montré par la proposition suivante [Cha13, Proposition 21] :

PROPOSITION 2.9. — *La variété de Kuga-Satake A d'une surface K3 supersingulière X est supersingulière.*

PREUVE — Nous devons introduire une variante de la construction de Kuga-Satake, qui est précisément celle considérée par Deligne [De72]. Reprenons temporairement les notations du paragraphe 1.1. Si nous avions utilisé l'algèbre de Clifford paire, nous aurions construit une variété abélienne $A^+ := \mathrm{Cl}^+(P^2_{\mathrm{B}}(X,\mathbb{R}))/\,\mathrm{Cl}^+(P^2_{\mathrm{B}}(X,\mathbb{Z}))$, dite **variété de Kuga-Satake paire** de X, telle que A est isogène à $(A^+)^2$. L'algèbre de Clifford paire $\mathrm{Cl}^+(L_d)$ agit sur A^+ par multiplication à droite. On vérifie qu'on a alors un isomorphisme de structures de Hodge $\mathrm{Cl}^+(P^2_{\mathrm{B}}(X)(1)) \simeq \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}^+(L_d)}(H^1_{\mathrm{B}}(A^+))$ donné par la multiplication à gauche. Des arguments analogues à ceux décrits au paragraphe 1.4 permettent de définir A^+ et l'action de $\mathrm{Cl}^+(L_d)$ sur tout corps, et d'y étendre l'isomorphisme ci-dessus en cohomologie ℓ-adique [De72, 6.5, 6.6].

Prouvons maintenant la proposition. Par spécialisation, on voit qu'il suffit de traiter le cas où X est défini sur un corps fini k. Comme A est isogène à $(A^+)^2$, il suffit de montrer que A^+ est supersingulière. On a un isomorphisme de Γ_k-modules $\mathrm{Cl}^+(P^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell(1))) \simeq \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}^+(L_d)}(H^1_{\text{ét}}(A^+_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell))$. Par la proposition 0.2 (iii), on peut supposer que le Frobenius agit trivialement sur $P^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell(1))$, donc sur $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}^+(L_d)}(H^1_{\text{ét}}(A^+_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell))$. Cela signifie qu'il agit sur $H^1_{\text{ét}}(A^+_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell)$ par un élément du bicommutant de $\mathrm{Cl}^+(L_d)$. Comparant avec la cohomologie de Betti, on voit que ce bicommutant est égal à $\mathrm{Cl}^+(L_d)\otimes\mathbb{Q}_\ell$. Comme le Frobenius commute à l'action de $\mathrm{Cl}^+(L_d)$, il agit via un élément du centre de $\mathrm{Cl}^+(L_d)\otimes\mathbb{Q}_\ell$. Comme $\mathrm{Cl}^+(L_d)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ est centrale simple (17) [Bou59, §9.4, Théorème 3], il agit par homothétie, et A^+ est donc supersingulière. □

16. Oort montre un résultat plus fort : le lieu des variétés abéliennes de p-rang nul est propre.
17. C'est la raison pour laquelle nous avons dû utiliser l'algèbre de Clifford paire.

On peut maintenant achever la démonstration en suivant la preuve de [Cha13, Proposition 22]. Rappelons que, par le théorème 1.4, l'application des périodes P' est une immersion ouverte. Fixons une composante irréductible C du lieu supersingulier, notons $\overline{C}$ l'adhérence de C dans $\mathcal{S}h'_d$, $\bar{\eta}$ un point générique géométrique de $\overline{C}$ et $\mathcal{A}$ le schéma abélien sur $\overline{C}$ induit par ι.

La construction de Kisin expliquée au paragraphe 1.5 montre que ι est propre (18). Comme le lieu supersingulier dans $\mathcal{A}b_{\mathbb{F}_p}$ est propre, son image réciproque par ι l'est également. La proposition 2.9 montre alors que $\overline{C}$ est propre. Comme C est de dimension > 0 [Og01, Theorem 15], $\overline{C}$ intersecte le diviseur ample $\overline{D}|_{\mathcal{S}h'_{d,\mathbb{F}_p}}$. Soit x un $\overline{\mathbb{F}}_p$-point dans l'intersection. Il est possible que x n'appartienne par à C, donc que $\mathcal{A}_x$ ne soit pas la variété de Kuga-Satake associée à une surface K3. Cependant, le choix de D montre que $\mathcal{A}_x$ est spécialisation de la variété de Kuga-Satake d'une surface K3 particulière, elliptique, en caractéristique nulle. On en déduit par la remarque 2.4 qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathcal{A}_x$ possède un endomorphisme spécial ϕ tel que $\phi \circ \phi = -2dk^2 \,\mathrm{Id}$.

Comme $\mathcal{A}_{\bar{\eta}}$ est supersingulière, le rang de $\mathrm{End}(\mathcal{A}_{\bar{\eta}})$ est maximal, de sorte que le conoyau de l'application de spécialisation $\mathrm{End}(\mathcal{A}_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{End}(\mathcal{A}_x)$ est de torsion. Un multiple de ϕ se relève donc en un endomorphisme spécial $\psi \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_{\bar{\eta}})$, qui satisfait $\psi \circ \psi = -2dk'^2 \,\mathrm{Id}$ pour un certain entier $k' \geq 1$. La surface K3 associée à $\bar{\eta}$ possède, par la proposition 2.3 et la remarque 2.4, un fibré en droites ζ orthogonal à la polarisation tel que $\zeta^2 = -2dk'^2$. Comme $\begin{pmatrix} 2d & 0 \\ 0 & -2dk'^2 \end{pmatrix}$ est isotrope, elle est elliptique. Cela conclut.

3. CONSTRUCTION DE COURBES RATIONNELLES

Dans cette partie, nous expliquons la preuve du théorème suivant ([BHT11], [LL12]). On trouvera également une exposition de ces résultats dans [Hu, §13.3].

Théorème 3.1. — *Une surface K3 X sur un corps algébriquement clos k contient une infinité de courbes rationnelles* (19) *dans les deux cas suivants :*

(i) Si k est de caractéristique nulle et X n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

(ii) Si k est de caractéristique $\neq 2$ et $\rho(X)$ est impair.

La stratégie de la preuve est due à Bogomolov, Hassett et Tschinkel : ils font fonctionner celle-ci sous l'hypothèse supplémentaire que X admet une polarisation de degré 2. Li et Liedtke ont obtenu le cas général en reprenant et en améliorant leurs idées.

Les techniques de la preuve s'inscrivent dans la lignée de travaux antérieurs. Un théorème attribué par Mori et Mukai [MM83] à Bogomolov et Mumford montre l'existence d'une courbe rationnelle sur toute surface K3. Chen [Che99] a amélioré ce résultat

18. C'est ici que nous utilisons que la polarisation est première à la caractéristique.

19. Dans tout ce texte, une courbe rationnelle est une sous-variété intègre dont la normalisation est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

en prouvant qu'une surface K3 complexe très générale contient une infinité de courbes rationnelles nodales. Ces résultats, comme le théorème qui nous intéresse, reposent sur des arguments de déformation. Ils exploitent la remarque suivante : on peut déformer une courbe rationnelle C sur une surface K3 à des déformations de celle-ci dès que le fibré en droites $\mathcal{O}(C)$ s'y déforme. Ce principe sera notre principal outil de construction de courbes rationnelles.

Les deux premiers paragraphes ci-dessous sont consacrés à ces techniques de déformation. On démontre (proposition 3.4) un énoncé qui rend rigoureux le principe formulé ci-dessus. Un des apports de [BHT11] est qu'il est utile de considérer des déformations d'applications stables plutôt que de simples courbes rationnelles : c'est dans ce cadre que se place la proposition 3.4.

L'amélioration principale qui a permis à Li et Liedtke [LL12] d'aller au-delà de l'article [BHT11] réside dans un choix astucieux des applications stables à déformer, et est expliquée au deuxième paragraphe (proposition 3.8).

Les deux paragraphes suivants présentent la preuve du théorème 3.1. Le cas (i) (resp. (ii)) est un argument de spécialisation et déformation en égale caractéristique nulle (resp. en caractéristique mixte). Les articles [BHT11] et [LL12] se placent dans le second cas, le premier en est une variante plus élémentaire, qui nous a été signalée par Charles. Dans les deux cas, il est aisé de construire des courbes rationnelles sur X, et la difficulté est de s'assurer qu'elles sont distinctes. Pour cela, on exploite le fait que X possède une infinité de spécialisations en caractéristique nulle (resp. en caractéristique finie) en lesquelles le nombre de Picard géométrique croît. Cela résulte d'un argument de théorie de Hodge (resp. de la conjecture de Tate pour les surfaces K3 sur les corps finis). Si l'utilisation de la caractéristique finie est la principale innovation de [BHT11], les détails de la preuve présentée ici sont issus de [LL12].

Finalement, on discute dans un cinquième paragraphe les limites de cette stratégie.

3.1. Déformation de courbes rationnelles

Commençons par énoncer le théorème de Bogomolov et Mumford ([MM83, Appendix], [BT00, Proposition 2.5], [LL12, Theorem 2.1]) mentionné dans l'introduction, qui nous sera utile plus tard :

Théorème 3.2. — *Soient X une surface K3 sur un corps algébriquement clos k et L un fibré en droites effectif sur X. Alors il existe un diviseur $D \in |L|$ dont toutes les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles.*

Ce théorème est tout d'abord démontré pour une surface K3 particulière (une surface de Kummer) en caractéristique nulle, en construisant le diviseur D explicitement. On traite le cas d'une surface générale en caractéristique nulle en déformant ce diviseur. Un argument de spécialisation montre alors le théorème pour toute surface K3 en toute caractéristique. Comme le diviseur explicite D utilisé dans [MM83] est nodal, [Hu] remarque qu'on obtient en fait :

Théorème 3.3. — *Soit (X, L) une surface K3 polarisée générale sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Alors X contient une courbe rationnelle nodale.*

Ces arguments de déformation seront importants pour la preuve du théorème 3.1. Donnons un exemple d'énoncé, en suivant [BHT11, Theorem 18] (voir aussi [HK13, §2]). On se place dans le contexte des applications stables de Kontsevich (voir par exemple [FP97]) : $\overline{\mathcal{M}}_0(X)$ désigne le champ de modules des applications stables de genre 0 sur X.

Proposition 3.4. — *Soient S un schéma intègre de type fini sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle, $(X, L) \to S$ une famille de surfaces K3 polarisées, et $s \in S$. Soit $[f : C \to X_s] \in \overline{\mathcal{M}} := \overline{\mathcal{M}}_0(X/S)$ une application stable de genre 0 telle que $f_*[C] \in |L_s|$. On suppose que f est* ***rigide*** *au sens où la composante connexe de la fibre de $\overline{\mathcal{M}} \to S$ contenant $[f]$ est de dimension nulle. Alors il existe une composante de $\overline{\mathcal{M}}$ contenant $[f]$ qui domine S.*

Preuve — Soit $\mathcal{X} \to \Delta := \mathrm{Spf}\, k[[x_1, \ldots, x_{20}]]$ la déformation verselle de X_s. Par [BHT11, Lemma 11], la théorie des déformations de f est contrôlée par un faisceau cohérent $\mathcal{N}_f$ [20] sur C : les déformations infinitésimales et les obstructions sont respectivement données par $H^0(C, \mathcal{N}_f)$ et $H^1(C, \mathcal{N}_f)$. De plus, la description qui y est donnée de $\mathcal{N}_f$, notamment la suite exacte en bas de la page 541, permet de calculer $\chi(C, \mathcal{N}_f) = -1$.

La théorie des déformations montre alors que $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathcal{X}/\Delta)$ est de dimension relative $\geq \chi(C, \mathcal{N}_f) = -1$ sur Δ au voisinage de $[f]$ (voir par exemple l'argument de [Ko96, I.2.15.1] qui, écrit pour le schéma de Hilbert, est général et s'applique). Par l'hypothèse de rigidité, l'image des composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathcal{X}/\Delta)$ passant par $[f]$ est de codimension ≤ 1 dans Δ. Comme le lieu où le fibré en droites L_s se déforme est un diviseur irréductible $H \subset \Delta$, et que cette image est incluse dans H, elle est nécessairement égale à H.

Comme l'image de $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}_{S,s}) \to \Delta$ est incluse dans H, on en déduit l'existence d'une composante irréductible de $\overline{\mathcal{M}}$ contenant $[f]$ dont l'image contient un voisinage de s, et qui domine donc S. □

Remarque 3.5. — Les travaux de Bloch [Blo72], Voisin [Vo92] et Ran [Ra95] sur l'application de semi-régularité permettent de comprendre la proposition 3.4 du point de vue de la théorie de Hodge.

Remarque 3.6. — Quand S est de caractéristique finie ou mixte, on peut obtenir des analogues de la proposition 3.4, en considérant la déformation verselle de X_s au-dessus de $\mathrm{Spf}(W(\kappa(s))[[x_1, \ldots, x_{20}]])$ [BHT11, Theorem 18]. Il convient de prendre garde que le dernier argument ne fonctionne pas en général, car il est possible que H ne soit pas irréductible. Cette difficulté disparaît si X_s est ordinaire ou si L_s est une polarisation primitive.

20. Quand C est lisse et f immersive, il s'agit du fibré normal usuel.

Remarque 3.7. — Il pourrait sembler que le théorème 3.2 implique immédiatement la conjecture 0.8 quand $\rho(X) \geq 2$, en l'appliquant à une infinité de fibrés effectifs distincts sur X. Il n'en est rien : il se pourrait que X ne contienne qu'un nombre fini de courbes rationnelles et que tous les diviseurs qu'on construit soient combinaisons linéaires de celles-ci.

3.2. Applications stables rigides

La difficulté qu'ont rencontrée Bogomolov, Hassett et Tschinkel pour prouver le théorème 3.1 sans hypothèse sur la polarisation de X est la suivante : ils souhaitaient déformer une réunion connexe D de courbes rationnelles sur une surface K3 X à des déformations de X en utilisant la proposition 3.4. Si toutes les courbes rationnelles dans D sont distinctes, ce n'est pas difficile car toute courbe stable f de genre 0 ayant D pour cycle associé est rigide si X n'est pas uniréglée. En revanche, s'il y a des multiplicités dans D, ce n'est pas automatique, même si X n'est pas uniréglée : f pourrait avoir des déformations non triviales à cycle constant.

Li et Liedtke ont proposé la solution suivante à cette difficulté technique ([LL12, Theorem 3.9]) :

Proposition 3.8. — *Soit X une surface K3 non uniréglée sur un corps algébriquement clos. Soient $D_1, \dots, D_n, R$ des courbes rationnelles sur X. On suppose que R est ample et nodale. Alors il existe $k \geq 0$ et une courbe stable $[f] \in \overline{\mathcal{M}}_0(X)$ génériquement non ramifiée et rigide dont le cycle associé est $D_1 + \cdots + D_n + kR$.*

La preuve de cette proposition est combinatoire et astucieuse. Il faut recoller les normalisations des courbes $D_1, \dots, D_n, R$ pour obtenir une courbe stable de genre 0, et le faire soigneusement, de sorte que celle-ci soit rigide. Nous ne recopierons pas ici les arguments de [LL12, Lemma 3.6, Theorem 3.9].

Bien sûr, une difficulté pour appliquer la proposition 3.8 est de produire une courbe rationnelle nodale R. On dispose heureusement du théorème 3.3 !

3.3. Surfaces K3 qui ne sont pas définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$

Prouvons maintenant le théorème 3.1 (i). Dans ce cas, la preuve est purement en caractéristique nulle : c'est légèment plus simple que le cadre de caractéristique mixte dans lequel se placent [BHT11] et [LL12], et qui sera expliqué au paragraphe suivant.

Théorème 3.9. — *Soit X une surface K3 sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle qui n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors X contient une infinité de courbes rationnelles.*

Preuve — Soit A une polarisation primitive de degré $2d$ sur X. Soient $U \to \mathfrak{M}_{2d,\overline{\mathbb{Q}}}$ une carte étale intègre [21] du champ de modules des surfaces K3 munies d'une polarisation

21. Comme dans [LL12], introduire U permet d'éviter de manipuler des champs de modules d'applications stables sur une base champêtre.

primitive de degré $2d$, $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ la famille universelle sur U, $\bar{\eta}$ un point géométrique de U tel que $(X, A) \simeq (\mathcal{X}_{\bar{\eta}}, \mathcal{A}_{\bar{\eta}})$, S l'adhérence de $\bar{\eta}$ dans U et $\bar{\xi}$ un point générique géométrique de U.

Comme X n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $\dim(S) > 0$. Un théorème de Green [Vo02, Proposition 17.20], appliqué à la variation de structure de Hodge sur $S_{\mathbb{C}}$ donnée par la cohomologie transcendante (i.e. l'orthogonal de $\mathrm{Pic}(X)$) de la famille de surfaces K3 $\mathcal{X}_{S_{\mathbb{C}}} \to S_{\mathbb{C}}$, montre que l'ensemble Σ des points fermés $s \in S$ tels que $\rho(\mathcal{X}_s) > \rho(X)$ est dense dans S. Par le théorème 3.2, pour tout $s \in \Sigma$, il existe une courbe rationnelle $C_s \subset \mathcal{X}_s$ dont la classe n'appartient pas à $\mathrm{Pic}(X)$. On note $f_s : \mathbb{P}^1 \to \mathcal{X}_s$ sa normalisation.

Fixons un entier $N > 0$. Si $\Sigma' := \{s \in \Sigma | \mathcal{A}_s.C_s > N\}$ n'était pas dense dans S, les $([f_s])_{s \in \Sigma \setminus \Sigma'}$ appartiendraient tous au S-schéma de type fini $M := \mathrm{Mor}_{S,<N}(\mathbb{P}^1, \mathcal{X})$ paramétrant les morphismes de degré $< N$ de $\mathbb{P}^1$ vers $\mathcal{X}$. Une des composantes irréductibles de M contenant un de ces $[f_s]$ dominerait S. Ceci contredirait l'hypothèse $\mathcal{O}(C_s) \notin \mathrm{Pic}(X)$. L'ensemble Σ' est donc dense dans S.

Si $s \in \Sigma'$, la théorie des déformations montre que le lieu sur U où le fibré en droites $\mathcal{O}(C_s)$ se déforme est un diviseur irréductible : on le note B_s et on note $\bar{\eta}_s$ un point générique géométrique de B_s. Par la proposition 3.4 [(22)], f_s se déforme le long de B_s : il existe une courbe rationnelle $\widetilde{C}_s \subset \mathcal{X}_{\bar{\eta}_s}$ dont C_s est une spécialisation. Les $(B_s)_{s \in \Sigma'}$ forment une collection infinie de diviseurs : dans le cas contraire, par densité de Σ' dans S, un des B_s contiendrait S, et cela contredirait l'hypothèse que $\mathcal{O}(C_s) \notin \mathrm{Pic}(X)$. Par conséquent, la réunion des $(B_s)_{s \in \Sigma'}$ est dense dans U. On peut alors appliquer le théorème 3.3 : il existe $s \in \Sigma'$ tel que le système linéaire $|\mathcal{A}_{\bar{\eta}_s}|$ contienne une courbe rationnelle nodale R, qui est bien sûr ample. De plus, par le théorème 3.2, si $m \gg 0$, il existe un diviseur $D \in |\mathcal{A}_{\bar{\eta}_s}^{\otimes m}(-\widetilde{C}_s)|$ dont toutes les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles.

On peut alors appliquer la proposition 3.8 : il existe une courbe stable $[g] \in \overline{\mathcal{M}}_0(\mathcal{X}_{\bar{\eta}_s})$ dont le cycle associé est $\widetilde{C}_s + D + kR$, et qui est génériquement non ramifiée et rigide.

Par la proposition 3.4, on peut choisir une composante irréductible M de $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathcal{X}/U)$ contenant $[g]$ qui domine U. Celle-ci est de plus propre sur U, par propreté des champs de modules d'applications stables. D'une part, le choix de $\widetilde{C}_s$ et la propreté de $M \to U$ montre qu'il est possible de spécialiser g en une courbe stable g_s sur $\mathcal{X}_s$ dont le cycle associé contient C_s. D'autre part, on peut choisir une courbe stable $g_{\bar{\xi}}$ sur $\mathcal{X}_{\bar{\xi}}$ qui est une générisation de g dans M. On peut alors choisir une spécialisation $g_{\bar{\eta}}$ de $g_{\bar{\xi}}$ sur $\mathcal{X}_{\bar{\eta}}$ dont g_s est une spécialisation. Le cycle associé à $g_{\bar{\eta}}$ contient alors une composante irréductible de degré $> N$, car tel est le cas pour sa spécialisation g_s.

On a donc construit une courbe rationnelle de degré $> N$ sur X. Comme N était arbitraire, on a montré l'existence d'une infinité de courbes rationnelles dans X. $\square$

22. L'hypothèse de rigidité est vérifiée car une surface K3 en caractéristique nulle n'est pas uniréglée.

3.4. Surfaces K3 de nombre de Picard impair

Nous pouvons à présent expliquer la preuve du théorème 3.1 quand $\rho(X)$ est impair.

Théorème 3.10. — *Soit X une surface K3 sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$ telle que $\rho(X)$ est impair. Alors X contient une infinité de courbes rationnelles.*

Preuve — La preuve du théorème 3.9 ci-dessus s'adapte : on utilise toujours des arguments de spécialisation et déformation, mais en caractéristique mixte. Contentons-nous d'indiquer les quelques modifications à apporter.

On considère à présent une carte étale U du champ de modules $\mathfrak{M}_{2d,\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ en caractéristique mixte, et on conserve les autres notations. En tous les points fermés $s \in S$, le nombre de Picard géométrique croît : cela résulte de l'hypothèse sur $\rho(X)$ et de la conjecture de Tate pour les surfaces K3 sur les corps finis (via le corollaire 0.5 (iii)). Cela remplace l'argument de théorie de Hodge utilisé dans la preuve du théorème 3.9.

On définit alors Σ comme l'ensemble des points fermés non supersinguliers de S. Si X est de caractéristique finie, la conjecture d'Artin (corollaire 0.5 (ii)) montre que X ne peut pas être supersingulière, et Σ est dense dans S par fermeture du lieu supersingulier. Si X est de caractéristique nulle, un théorème [(23)] de Joshi et Rajan [JR03, Theorem 6.6.2] et Bogomolov et Zarhin [BZ09] assure que Σ est dense dans S.

Enfin, il faut utiliser une variante en caractéristique mixte du théorème 3.4 (voir la remarque 3.6 et [BHT11, Theorem 18]) pour déformer f_s, qui nécessite deux précautions. D'une part, pour vérifier l'hypothèse de rigidité dans cet énoncé, nous avons utilisé le fait que les surfaces K3 en caractéristique nulle ne sont pas uniréglées. En caractéristique finie, ce n'est pas vrai en général, mais c'est le cas pour les surfaces K3 non supersingulières [Sh74, Corollary 2] [(24)] : c'est la raison pour laquelle nous avons modifié la définition de Σ. D'autre part, le lieu D_s dans U où $\mathcal{O}(C_s)$ se déforme est toujours un diviseur, est plat sur $\mathbb{Z}$, mais n'est pas nécessairement irréductible si le fibré en droites $\mathcal{O}(C_s)$ n'est pas primitif. Le dernier argument de la preuve du théorème 3.4 ne s'étend pas tel quel à cette situation : il permet seulement de montrer que f_s se déforme le long d'une des composantes irréductibles de D_s. On définit alors B_s comme étant l'une de ces composantes irréductibles.

Le reste de la preuve fonctionne sans modifications. □

3.5. Limites de la stratégie

Des techniques différentes ont permis de montrer la conjecture 0.8 pour les surfaces K3 elliptiques en caractéristique nulle ([BT00], [Ha03]). Comme une surface K3 de nombre de Picard ≥ 5 est automatiquement elliptique, le théorème 3.1 implique :

23. Ce théorème permet même de ne conserver dans Σ que des surfaces K3 ordinaires. Dans ce cas, les travaux de Nygaard [Ny83] sur la conjecture de Tate sont donc suffisants.

24. Il est montré ici qu'une surface K3 unirationnelle est supersingulière, mais la même preuve fonctionne si elle est uniréglée.

Corollaire 3.11. — *Soit X une surface K3 sur $\overline{\mathbb{Q}}$ telle que $\rho(X) \notin \{2,4\}$. Alors X contient une infinité de courbes rationnelles.*

Par conséquent, les surfaces K3 en caractéristique nulle pour lesquelles la conjecture 0.8 n'est pas connue sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et ont nombre de Picard 2 ou 4. Si l'on souhaitait utiliser la stratégie de la preuve du théorème 3.1 pour une telle surface K3 X définie sur un corps de nombres K, il faudrait connaître l'existence d'une infinité de places $\mathfrak{p}$ de K telles que le nombre de Picard géométrique de $X_{\mathfrak{p}}$ soit supérieur à celui de X (et telles que $X_{\mathfrak{p}}$ ne soit pas supersingulière).

C'est une question ouverte. Sa difficulté tient au fait, remarqué par Charles [Cha11, Theorem 1], que l'ensemble de ces places peut être de densité nulle. L'analyse de Charles décrit complètement ce phénomène. Elle permet même de donner des exemples de surfaces K3 sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de nombre de Picard 2 ou 4 pour lesquelles la stratégie s'applique, et qui contiennent donc une infinité de courbes rationnelles [Cha11, Corollary 4].

Enfin, la stratégie de Bogomolov, Hassett et Tschinkel repose de manière essentielle sur l'existence de spécialisations, qui permettent de s'assurer que l'on construit bien une infinité de courbes rationnelles distinctes. En particulier, cette stratégie ne permet de rien dire sur les surfaces K3 définies sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. En un sens, ce cas est le plus important.

De plus, cette stratégie ne donne pas de contrôle sur les courbes rationnelles construites. Par exemple, elle ne permet pas de construire une courbe rationnelle évitant un point fixé ou appartenant à un multiple d'un système linéaire fixé. Elle laisse également complètement ouverte la question suivante de Bogomolov :

Question 3.12. — *Soit X une surface K3 sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_p$. Passe-t-il une courbe rationnelle par tout point fermé de X ?*

Sur $\overline{\mathbb{Q}}$, cette question est qualifiée pudiquement de « logical possibility » dans [BT05], et on n'en connaît ni exemple ni contre-exemple. Sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, Bogomolov et Tschinkel [BT05, Theorem 1.1] ont obtenu le cas particulier suivant, montrant que l'énoncé est plausible :

Théorème 3.13. — *Soit X une surface de Kummer sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Alors il passe une courbe rationnelle par tout point fermé de X.*

RÉFÉRENCES

[An96] Y. ANDRÉ – *On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties*, Math. Ann. **305** (1996), 205-248.

[Ar74] M. ARTIN – *Supersingular K3 surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **7** (1974), 543-567.

[AM77] M. ARTIN, B. MAZUR – *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), 87–131.

[ASD73] M. ARTIN, H. P. F. SWINNERTON-DYER – *The Shafarevich-Tate conjecture for pencils of elliptic curves on K3 surfaces*, Invent. Math. **20** (1973), 249–266.

[Be85] A. BEAUVILLE – *Application aux espaces de modules*, Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes (Palaiseau, 1981/1982). Astérisque **126** (1985), 141–152.

[Bla94] D. BLASIUS – *A p-adic property of Hodge classes on abelian varieties*, Motives (Seattle, WA, 1991), 293–308, Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Blo72] S. BLOCH – *Semi-regularity and de Rham cohomology*, Invent. Math. **17** (1972), 51–66.

[BK86] S. BLOCH, K. KATO – *p-adic étale cohomology*, Publ. Math. I.H.É.S. **63** (1986), 107–152.

[BHT11] F. BOGOMOLOV, B. HASSETT, Y. TSCHINKEL – *Constructing rational curves on K3 surfaces*, Duke Math. J. **157** (2011), 535–550.

[BT00] F. BOGOMOLOV, Y. TSCHINKEL – *Density of rational points on elliptic K3 surfaces*, Asian J. Math. **4** (2000), 351–368.

[BT05] F. BOGOMOLOV, Y. TSCHINKEL – *Rational curves and points on K3 surfaces*, Amer. J. Math. **127** (2005), 825–835.

[BZ09] F. BOGOMOLOV, Y. ZARHIN – *Ordinary reduction of K3 surfaces*, Cent. Eur. J. Math. **7** (2009), 206–3213.

[Bor99] R. BORCHERDS – *The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions*, Duke Math. J. **97** (1999), 219–233.

[Bou59] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre, Chapitre 9.* Réimpression de l'édition originale de 1959. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[Cha11] F. CHARLES – *On the Picard number of K3 surfaces over number fields*, arXiv :1111.4117v1.

[Cha13] F. CHARLES – *The Tate conjecture for K3 surfaces over finite fields*, Invent. Math. **194** (2013), 119–145.

[Che99] X. CHEN – *Rational curves on K3 surfaces*, J. Alg. Geom. **8** (1999), 245–278.

[De72] P. DELIGNE – *La conjecture de Weil pour les surfaces K3*, Invent. Math. **15** (1972), 206–226.

[De74] P. DELIGNE – *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. I.H.É.S. **43** (1974), 273–307.

[De81a] P. DELIGNE – *Relèvement des surfaces K3 en caractéristique nulle*, rédigé par Luc Illusie. Lecture Notes in Math. **868**, Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), 58–79, Springer, Berlin-New York, 1981.

[De81b] P. DELIGNE – *Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques*, avec la collaboration de Luc Illusie et un appendice de Nicholas M. Katz. Lecture Notes in Math. **868**, Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), 80–137, Springer, Berlin-New York, 1981.

[DMOS82] P. DELIGNE, J. S. MILNE, A. OGUS, K.-Y. SHIH – *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math. **900**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[Fa83] G. FALTINGS – *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[Fa84] G. FALTINGS – *Complements to Mordell*, Rational points (Bonn, 1983/1984), 203–227, Aspects Math., E6, Vieweg, Braunschweig, 1984.

[FC90] G. FALTINGS, C.-L. CHAI – *Degeneration of abelian varieties*, With an appendix by David Mumford. Ergeb. Math. Grenzg. **22**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[FM87] J.-M. FONTAINE, W. MESSING – *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), 179–207, Contemp. Math. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, 1987.

[FP97] W. FULTON, R. PANDHARIPANDE – *Notes on stable maps and quantum cohomology*, Algebraic geometry (Santa Cruz 1995), 45–96, Proc. Sympos. Pure Math. **62** Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Ha03] B. HASSETT – *Potential density of rational points on algebraic varieties*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), 223–282, Bolyai Soc. Math. Stud. **12**, Springer, Berlin, 2003.

[HK13] D. HUYBRECHTS, M. KEMENY – *Stable maps and Chow groups*, Doc. Math. **18** (2013), 507–517.

[Hu] D. HUYBRECHTS – *Lectures on K3 surfaces*, http ://www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/K3.html.

[JR03] K. JOSHI, C.S. RAJAN – *Frobenius splitting and ordinarity*, arXiv :0110070.

[Kat79] N. M. KATZ – *Slope filtration of F-crystals*, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. I, 113–163, Astérisque **63**, Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Kaw94] Y. KAWAMATA – *Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic*, J. Alg. Geom. **3** (1994), 463–491.

[KM74] N. KATZ, W. MESSING – *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.

[Ki06] M. KISIN – *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic geometry and number theory, 459–496, Progr. Math. **253**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[Ki10] M. KISIN – *Integral models for Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010) 967–1012.

[Ki14] M. KISIN – *Mod p points on Shimura varieties of abelian type*, http ://www.math.harvard.edu/∼kisin/dvifiles/lr.pdf.

[Ko96] J. KOLLÁR – *Rational curves on algebraic varieties*, Ergeb. Math. Grenzg. **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[KS67] M. KUGA, I. SATAKE – *Abelian varieties attached to polarized K3 surfaces*, Math. Ann. **169** (1967) 239–242.

[La55] M. LAZARD – *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 251–274.

[LL12] J. LI, C. LIEDTKE – *Rational curves on K3 surfaces*, Invent. Math. **188** (2012), 713–727.

[LMS11] M. LIEBLICH, D. MAULIK, A. SNOWDEN – *Finiteness of K3 surfaces and the Tate conjecture*, arXiv :1107.1221v4.

[LO11] M. LIEBLICH, M. OLSSON – *Fourier-Mukai partners of K3 surfaces in positive characteristic*, arXiv :1112.5114v2

[MP12] K. MADAPUSI PERA – *Integral canonical models for Spin Shimura varieties*, http ://www.math.harvard.edu/∼keerthi/, version du 18 avril 2013.

[MP13] K. MADAPUSI PERA – *The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic*, http ://www.math.harvard.edu/∼keerthi/, version du 22 avril 2013.

[Mat14] Y. MATSUMOTO – *Good reduction criterion for K3 surfaces*, arXiv :1401.1261v1.

[Mau12] D. MAULIK – *Supersingular K3 surfaces for large primes*, avec un appendice d'Andrew Snowden, arXiv :1203.2889v2.

[McG] W. MCGRAW – *The rationality of vector valued modular forms associated with the Weil representation*, Math. Ann. **326** (2003) 105–122.

[Mi92] J. S. MILNE – *The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction*, The zeta functions of Picard modular surfaces, 151–253, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992.

[Mo98] B. MOONEN – *Models of Shimura varieties in mixed characteristics*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 267–350, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[MM83] S. MORI, S. MUKAI – *The uniruledness of the moduli space of curves of genus* 11, Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), 334–353, Lecture Notes in Math. **1016**, Springer, Berlin, 1983.

[Ny83] N. O. NYGAARD – *The Tate conjecture for ordinary K3 surfaces over finite fields*, Invent. Math. **74** (1983), 213–237.

[NO85] N. O. NYGAARD, A. OGUS – *Tate's conjecture for K3 surfaces of finite height*, Ann. Math. **122** (1985), 461–507.

[Og79] A. OGUS – *Supersingular K3 crystals*, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. II, 3–86, Astérisque **64**, Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Og83] A. OGUS – *A crystalline Torelli theorem for supersingular K3 surfaces*, Arithmetic and geometry, Vol. II, 361–394, Progr. Math. **36**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Og84] A. OGUS – *F-isocrystals and de Rham cohomology II*, Duke Math. J. **51** (1984), 765–850.

[Og01] A. OGUS – *Singularities of the height strata in the moduli of K3 surfaces*, Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999), 325–343, Progr. Math. **195**, Birkhäuser, Basel, 2001.

[Oo74] F. OORT – *Subvarieties of moduli spaces*, Invent. Math. **24** (1974), 95–119.

[PR88] B. PERRIN-RIOU – *Représentations p-adiques ordinaires*, avec un appendice de Luc Illusie. Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Ra95] Z. RAN – *Hodge theory and deformations of maps*, Compositio Math. **97** (1995), 309–328.

[Ri06] J. RIZOV – *Moduli stacks of polarized K3 surfaces in mixed characteristic*, Serdica Math. J. **32** (2006), 131–178.

[Ri10] J. RIZOV – *Kuga-Satake abelian varieties of K3 surfaces in mixed characteristic*, J. reine angew. Math. **648** (2010), 13–67.

[RS86] A. N. RUDAKOV, I. R. SHAFAREVICH – *On degeneration of K3 surfaces*, Proc. Steklov Inst. Math. **166**, 247–259 (1986).

[RSZ83] A. N. RUDAKOV, I. R. SHAFAREVICH, T. ZINK – *The influence of height on degenerations of algebraic surfaces of type K3*, Math. USSR Izv. **20**, 119–135 (1983).

[Sa04] T. SAITO – *Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction*, J. Alg. Geom. **13** (2004), 287–321.

[Sa12] T. SAITO – *The discriminant and the determinant of a hypersurface of even dimension*, Math. Res. Lett. **19** (2012), 855–871.

[Sh74] T. SHIODA – *An example of unirational surfaces in characteristic p*, Math. Ann. **211** (1974), 233–236.

[Sh79] T. SHIODA – *Supersingular K3 surfaces*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), 564–591, Lecture Notes in Math. **732**, Springer, Berlin, 1979.

[Ta65] J. TATE – *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963) 93–110 Harper & Row, New York, 1965.

[Ta66] J. TATE – *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.

[Ta94] J. TATE – *Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology*, Motives (Seattle, WA, 1991), 71–83, Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Va99] A. VASIU – *Integral canonical models of Shimura varieties of preabelian type*, Asian J. Math. **3** (1999), 401–518.

[Vo92] C. VOISIN – *Sur la stabilité des sous-variétés lagrangiennes des variétés symplectiques holomorphes*, Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), 294–303, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[Vo02] C. VOISIN – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés **10**. Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Za76] Y. ZARHIN – *Abelian varieties in characteristic p*, Mat. Zametki **19** (1976), 393–400.

[Za77] Y. ZARHIN – *Endomorphisms of abelian varieties and points of finite order in characteristic p*, Mat. Zametki **21** (1977), 737–744.

Olivier BENOIST

CNRS, IRMA
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F–67000 Strasbourg
E-mail : `obenoist@unistra.fr`