

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE.....	i
MODE D'EMPLOI.....	iii
INTRODUCTION.....	vii
CHAPITRE III. — APPLICATIONS LINÉAIRES COMPACTES ET PERTURBATIONS.....	1
§ 1. <i>Applications linéaires compactes</i>	2
1. Applications linéaires compactes.....	2
2. Applications linéaires compactes et topologies faibles.....	6
3. Transposition.....	8
4. Le théorème de Leray–Schauder.....	10
5. Sous-espaces invariants par un opérateur compact.....	12
6. Espaces d'approximation.....	14
7. Exemples d'espaces d'approximation.....	20
§ 2. <i>Exemples d'applications linéaires compactes</i>	23
1. Endomorphismes de trace finie, de Hilbert–Schmidt et de puissance p^e nucléaire.....	23
2. Opérateurs diagonaux dans des espaces de suites.....	23
3. Applications linéaires à valeurs dans un espace de fonctions continues définies par un noyau.....	25
4. Applications linéaires entre espaces de Lebesgue définies par un noyau.....	26
5. Restriction d'applications différentiables.....	34

6. Restriction de sections différentiables d'un fibré vectoriel . .	35
7. Restriction de sections analytiques d'un fibré vectoriel	37
§ 3. <i>Endomorphismes de Fredholm et endomorphismes de Riesz</i>	39
1. Morphismes stricts et applications linéaires de rang fini . .	39
2. Applications de Fredholm	40
3. Indice d'une application de Fredholm	43
4. Endomorphismes de Riesz	45
5. Applications de Fredholm et applications de Riesz entre espaces de Fréchet	52
6. Caractérisation spectrale des endomorphismes de Riesz	53
§ 4. <i>Perturbations dans les espaces de Banach</i>	55
1. Morphismes directs	55
2. Perturbation des applications de Fredholm	58
3. Perturbation des endomorphismes de Riesz	59
4. Conorme d'une application linéaire continue	61
5. Sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace normé	64
6. Perturbations des applications linéaires continues injectives ou surjectives	67
§ 5. <i>Perturbation par une application linéaire compacte</i>	71
1. Morphismes stricts et propreté	71
2. Perturbation des applications linéaires injectives ou surjectives	72
3. Perturbation des applications de Fredholm	73
4. Perturbation des endomorphismes de Riesz	75
5. La théorie de Frédéric Riesz	77
6. Alternative de Fredholm	79
§ 6. <i>Propriétés spectrales des endomorphismes des espaces de Banach</i>	82
1. Points isolés et points sensibles du spectre	82
2. Une partition du spectre	85
3. Spectre du transposé d'un endomorphisme	88
4. Perturbation par un opérateur compact	89
5. Spectre d'un opérateur compact	89
6. Cas des espaces hilbertiens	92
7. Le théorème de Krein–Rutman	93
Exercices du § 1.	103
Exercices du § 2.	118
Exercices du § 3.	120
Exercices du § 4.	123

Exercices du § 5.	125
Exercices du § 6.	128
CHAPITRE IV. — THÉORIE SPECTRALE HILBERTIENNE.....	143
§ 1. <i>Opérateurs compacts sur un espace hilbertien</i>	144
1. Endomorphismes diagonaux.....	144
2. Diagonalisation des endomorphismes compacts.....	147
3. Suite décroissante des valeurs propres.....	149
4. Caractérisations variationnelles des valeurs propres.....	151
5. Applications de la caractérisation variationnelle des valeurs propres.....	153
6. Inégalités de Weyl.....	155
7. Endomorphismes de trace finie.....	162
8. Applications nucléaires.....	165
9. Opérateurs intégraux de Hilbert–Schmidt.....	170
10. Trace des opérateurs intégraux à noyau continu.....	172
§ 2. <i>Endomorphismes normaux</i>	177
1. Compléments sur les espaces $L^p(X, \mu)$	177
2. Image essentielle d’une fonction mesurable.....	179
3. Fonctions universellement mesurables.....	180
4. L’algèbre stellaire $L^\infty(X, \mu)$	183
5. Endomorphismes de multiplication.....	184
6. Mesures spectrales.....	188
7. Algèbres stellaires commutatives d’endomorphismes d’un espace hilbertien.....	189
8. Continuité du calcul fonctionnel.....	192
§ 3. <i>Distributions et distributions tempérées</i>	194
1. Dérivation sous le signe somme.....	195
2. Critères d’intégrabilité dans \mathbf{R}^n et \mathbf{Z}^n	197
3. Fonctions test.....	198
4. Distributions.....	201
5. Interprétation de fonctions comme distributions.....	204
6. Dérivation des distributions.....	206
7. Fonctions de Schwartz.....	207
8. Inclusions d’espaces fonctionnels dans l’espace des fonctions de Schwartz.....	210
9. Fonctions à croissance polynomiale.....	212
10. Distributions tempérées.....	212
11. Interprétation de fonctions comme distributions tempérées.....	214

12. Transformation de Fourier des distributions tempérées	215
13. Distributions et distributions tempérées sur un espace vectoriel	219
14. Espaces de Sobolev	219
§ 4. <i>Opérateurs partiels</i>	222
1. Opérateurs partiels	222
2. Opérateurs fermés, fermables et à domaine dense	225
3. Exemples d'opérateurs partiels	229
4. Adjoint	233
5. Critères élémentaires pour les opérateurs auto-adjoints	237
6. Opérateurs différentiels	240
7. Spectre et résolvante	241
8. Pseudo-spectre	248
9. Opérateurs de multiplication	250
10. Extensions auto-adjointes d'un opérateur symétrique	253
§ 5. <i>Opérateurs partiels normaux et théorème spectral</i>	260
1. Bornification	260
2. Opérateurs partiels normaux et théorème spectral	263
3. Calcul fonctionnel universellement mesurable	268
4. Projecteurs spectraux	275
5. La formule de Helffer–Sjöstrand	278
6. Topologies résolvantes et continuité du calcul fonctionnel . .	283
7. Décomposition polaire	287
8. Opérateurs auto-adjoints définis par une forme hermitienne partielle positive	289
9. Principes variationnels pour le spectre des opérateurs positifs	294
10. Perturbation compacte et spectre essentiel	301
11. Perturbation	303
12. Opérateurs à résolvante compacte	305
Exercices du § 1.	311
Exercices du § 2.	317
Exercices du § 3.	328
Exercices du § 4.	342
Exercices du § 5.	350
CHAPITRE V. — REPRÉSENTATIONS UNITAIRES	371
§ 1. <i>Représentations unitaires</i>	371
1. Rappels concernant les représentations linéaires continues	372

2. Un critère de continuité.....	375
3. Représentations continues de dimension finie.....	376
4. Représentations irréductibles.....	376
5. Représentations unitaires.....	377
6. Somme directe hilbertienne et produit tensoriel de représentations unitaires.....	381
7. Coefficients matriciels.....	383
8. Le lemme de Schur.....	384
9. Semi-simplicité.....	388
10. Classes de représentations unitaires.....	390
11. Composantes isotypiques.....	392
§ 2. <i>Représentations des groupes localement compacts</i>	397
1. Continuité de certaines représentations.....	397
2. Extension de représentations à des espaces de mesures.....	398
3. Critère de semi-simplicité.....	400
4. Représentations régulières.....	403
5. Fonctions équivariantes.....	405
6. Représentations induites.....	413
7. Cas d'un sous-groupe fermé central.....	414
8. Représentations de carré intégrable.....	417
9. Sous-représentations de la représentation régulière d'un groupe commutatif.....	423
10. Représentations unitaires du groupe \mathbf{R}	425
§ 3. <i>Fonctions de type positif</i>	429
1. Noyaux universellement positifs.....	430
2. Complément sur le calcul fonctionnel holomorphe.....	433
3. Formes linéaires positives.....	434
4. Représentations des algèbres stellaires.....	439
5. Fonctions de type positif sur un groupe topologique.....	440
6. Dual unitaire d'un groupe localement compact.....	444
7. Existence de représentations irréductibles.....	448
8. Fonctions de type positif sur un groupe localement compact commutatif.....	452
§ 4. <i>Représentations des groupes compacts</i>	454
1. Semi-simplicité des représentations de dimension finie.....	454
2. Représentations irréductibles.....	455
3. Le théorème de Peter–Weyl.....	460
4. Coefficients matriciels et fonctions G -finies.....	462
5. Représentations dans un espace séparé quasi-complet.....	462

6. Caractères et classes de conjugaison.....	464
7. La cotransformation de Fourier.....	468
8. La transformation de Fourier.....	469
9. Indicateur de Frobenius–Schur et alternative de Larsen.....	474
Exercices du § 1.	481
Exercices du § 2.	484
Exercices du § 3.	490
Exercices du § 4.	502
NOTE HISTORIQUE.....	515
1. Découverte du spectre continu.....	515
2. Opérateurs compacts.....	519
3. Indice de Fredholm et perturbations.....	521
4. Opérateurs partiels et théorème spectral.....	524
5. Jonction entre analyse harmonique et théorie des groupes	526
6. Groupes localement compacts commutatifs.....	531
7. Algèbres d’opérateurs.....	534
8. Représentations des groupes localement compacts.....	537
BIBLIOGRAPHIE.....	539
INDEX DES NOTATIONS.....	547
INDEX TERMINOLOGIQUE.....	551
CRITÈRES D’AUTO-ADJONCTION.....	557
TABLE DES MATIÈRES.....	559