Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 21 NOVEMBRE 2026

Institut Henri Poincaré (amphithéatre Charles Hermite)
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

10h00 Pierre DEHORNOY
Abondance et finitude des flots d'Anosov en dimension 3,
d'après Barbot, Barthelmé, Béguin, Bonatti, Bowden, Colin, Fenley, Mann, Marty, Yu, ...

Au carrefour de la dynamique et de la topologie, les flots d'Anosov sur les 3-variétés constituent une classe fondamentale de systèmes dynamiques. À équivalence orbitale près, l'espace de ces flots sur une variété donnée forme un ensemble au plus dénombrable.

La compréhension globale de ces objets s'articule autour de trois problématiques : l'existence (quelles 3-variétés admettent un flot d'Anosov ?), l'abondance (une variété peut-elle admettre un nombre arbitrairement grand de flots distincts ?) et la surabondance (peut-elle en admettre une infinité ?). Bien que le problème de l'existence résiste encore à une classification complète, des travaux récents ont apporté des réponses positives à la question de l'abondance, tout en établissant des théorèmes de finitude excluant la surabondance dans de nombreux cas.

Cet exposé dressera un panorama de ces développements récents, en articulant les techniques de construction et les obstructions. Un rôle central y est joué par l'espace des orbites du flot relevé au revêtement universel. Son étude a récemment permis à Barthelmé, Frankel et Mann de prouver qu'un flot d'Anosov est uniquement déterminé, à équivalence orbitale près, par l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental représentées par des orbites périodiques. Ce résultat fournit un outil de distinction fondamental.

11h30 Samuel TAPIE
Groupes fondamentaux des variétés compactes à courbure de Ricci positive, *d'après E. Bruè, A. Naber et D. Semola*

Soit (M, g) une variété riemannienne complète. Si les courbures sectionnelles de g sont toutes positives ou nulles, il découle du théorème de Cheeger–Gromoll (1972) que le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est de type fini et virtuellement abélien.

Supposons seulement que (M, g) a sa courbure de Ricci positive ou nulle. Milnor a montré en 1968 que tous les sous-groupes de type fini de $\pi_1(M)$ sont à croissance polynomiale et donc virtuellement nilpotents par le théorème de Gromov (1981). Réciproquement, Wei (1988) et Wilking (2000) ont montré

que tout groupe de type fini virtuellement nilpotent peut se réaliser comme le groupe fondamental d'une variété complète à courbure de Ricci positive ou nulle.

Milnor avait conjecturé que $\pi_1(M)$ est toujours de type fini sous cette hypothèse d'une courbure de Ricci positive ou nulle. L'objectif principal de cet exposé est de présenter un contre-exemple à cette conjecture introduit par Bruè–Naber–Semola : il existe sur $\widetilde{M} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^4$ une métrique riemannienne à courbure de Ricci positive ou nulle qui admet une action isométrique sans point fixe du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. La construction repose sur un processus itératif délicat, qui donne asymptotiquement à $\widetilde{M}$ une forme « fractale ».

14h30 Javier FRESÁN
Irrationalité de $L(2, \chi_{-3})$, *d'après Calegari, Dimitrov et Tang*

Je présenterai des idées récentes de Calegari, Dimitrov et Tang pour établir l'irrationalité de certaines périodes. Ils démontrent notamment que la valeur de la fonction L de Dirichlet $L(2, \chi_{-3}) = 1 - 1/4 + 1/16 - 1/25 + 1/49 - \cdots$ est irrationnelle, et même que les nombres 1, $\zeta(2)$ et $L(2, \chi_{-3})$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Un aspect remarquable de leur méthode est qu'elle ne nécessite pas la construction de nouvelles approximations rationnelles convergeant rapidement vers ces nombres. Elle repose plutôt sur des bornes supérieures pour les dimensions d'espaces vectoriels engendrés par certaines fonctions G dont les coefficients possèdent des dénominateurs contrôlés. Les travaux de Bost et Charles fournissent une interprétation de ces « bornes d'holonomie arithmétique » en termes de la méthode des pentes en géométrie d'Arakelov, et constituent un ingrédient clé pour obtenir des estimations suffisamment fortes pour les applications à l'irrationalité.

16h00 Bertrand RÉMY
Annulations en cohomologie unitaire et théorie géométrique des groupes, *d'après Uri Bader et Roman Sauer*

La cohomologie à valeurs dans des représentations unitaires a de multiples applications en-dehors de la pure théorie des groupes : en arithmétique et en géométrie notamment. La situation où le groupe considéré est un groupe de Lie, et celle où c'est un groupe discret, sont liées (par induction) quand ce dernier est un réseau d'un groupe de Lie. Classiquement, on passe ainsi de calculs de cohomologie de groupes discrets à des calculs de cohomologie à coefficients unitaires pour des groupes de Lie semi-simples. Les coefficients sont plus gros mais le groupe ambiant a une structure bien comprise, qui rigidifie la situation ; au moyen de réductions supplémentaires, on est ramené à des calculs de cohomologie relative d'algèbres de Lie (Borel et Wallach). Les travaux de Bader et Sauer permettent de se passer de l'hypothèse de cocompacité des réseaux et fournissent, entre autres, des résultats d'annulation jusqu'au rang du groupe de Lie ambiant. Les techniques utilisées reposent sur une combinaison d'algèbre homologique et d'analyse fonctionnelle, ainsi que sur l'usage inédit d'ingrédients de théorie géométrique des groupes.