Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 24 JUIN 2023

Institut Henri Poincaré (amphi. Hermite)
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

11h00 Anne-Laure DALIBARD
Non-unicité des solutions de Leray de l'équation de Navier–Stokes avec terme source,
d'après Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo

La dynamique des fluides visqueux incompressibles est décrite par les équations de Navier–Stokes, pour lesquelles on dispose principalement de deux façons de construire des solutions en dimension trois. La première, due à Leray et étendue par Hopf, repose sur une méthode de compacité, et conduit à l'existence de solutions dites solutions « faibles », globales (c'est-à-dire définies pour tout temps). La seconde, due initialement à Fujita et Kato et généralisée ensuite, consiste à construire des solutions dites « fortes » par une méthode de point fixe, dans un espace fonctionnel à forte régularité. Les solutions fortes ainsi obtenues sont naturellement uniques, mais sont a priori locales. Cette dichotomie conduit naturellement à la question suivante, restée ouverte pendant presque un siècle : les solutions de Leray–Hopf sont-elles uniques ?

Récemment, Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo ont apporté une réponse négative à cette question fondamentale, en considérant le cas d'un fluide initialement au repos et soumis à une force extérieure. Leur preuve repose sur la construction d'un profil linéairement instable dans des variables auto-similaires et s'inspire d'un résultat de Vishik pour l'équation d'Euler, ainsi que des travaux de Sverak et de ses collaborateurs.

14h30 Daniel JUTEAU
Catégories tensorielles symétriques en caractéristique positive,
d'après Kevin Coulembier, Pavel Etingof, Victor Ostrik,. . .

Le formalisme tannakien a d'abord été développé par l'école de Grothendieck pour les besoins de la théorie des motifs. L'idée principale est que se donner un groupe (algébrique affine sur un corps k, disons algébriquement clos) est essentiellement équivalent à se donner sa catégorie de représentations en tant que catégorie monoïdale symétrique, munie du foncteur d'oubli (dit foncteur fibre) vers la catégorie des espaces vectoriels :

une catégorie pré-tannakienne (monoïdale symétrique, et vérifiant des conditions nécessaires naturelles) admettant un « foncteur fibre » est forcément équivalente à la catégorie des représentations du groupe des automorphismes tensoriels du foncteur fibre.

Dans le cas de la caractéristique 0, Deligne a montré en 1990 qu'une catégorie pré-tannakienne $\mathcal{C}$ admet un foncteur fibre (i.e. est tannakienne) si et seulement si tout objet a une puissance alternée qui est nulle. En 2002, il a montré un résultat plus général : si on suppose seulement que $\mathcal{C}$ est à croissance modérée (pour tout objet V, la longueur de $V^{\otimes n}$ est sous-exponentielle), alors $\mathcal{C}$ a une sorte de foncteur fibre, non pas vers les espaces vectoriels a priori, mais vers les super espaces vectoriels (espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués).

L'extension de ces résultats au cas où k est de caractéristique $p > 0$ a été un problème ouvert pendant une vingtaine d'années, mais de grands progrès ont été faits récemment. En particulier, Ostrik a identifié une catégorie de Verlinde Ver_p comme but naturel des « foncteurs fibres » en caractéristique p. Plus récemment, Coulembier, Etingof et Ostrik ont donné une certaine réponse à notre question : ils ont caractérisé les catégories pré-tannakiennes admettant un foncteur tensoriel symétrique vers Ver_p comme celles qui sont Frobenius-exactes et de croissance modérée (cette dernière condition pouvant être remplacée par : tout objet est annulé par une puissance alternée). Un cas particulier, qui est aussi une étape importante dans la preuve, est une caractérisation des catégories tannakiennes en caractéristique p. Nous donnerons un aperçu de ces résultats, ainsi que des exemples d'applications aux représentations modulaires.

16h00 Vincent TASSION

Invariance par rotation pour la percolation planaire,
d'après Hugo Duminil-Copin, Karol Kajetan Kozlowski, Dmitry Krachun, Ioan Manolescu et Mendes Oulamara

On considère la percolation indépendante critique sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$, vu comme un graphe : Pour chaque arête, on joue à pile ou face, l'arête est gardée avec probabilité $1/2$, elle est effacée sinon. On obtient ainsi un sous-graphe aléatoire de $\mathbb{Z}^2$. La loi de ce graphe aléatoire est invariante par rotation d'angle $\pi/2$, car elle hérite des symétries du réseau. Mais si l'on considère les grandes composantes connexes, de nouvelles symétries émergent : Hugo Duminil-Copin, Karol Kajetan Kozlowski, Dmitry Krachun, Ioan Manolescu et Mendes Oulamara ont montré que la loi de ces composantes connexes est asymptotiquement invariante par toutes les rotations. Ce résultat constitue une avancée majeure vers la compréhension des phénomènes critiques en mécanique statistique planaire : la conjecture principale dans le domaine est que la loi des grandes composantes connexes est en fait invariante par transformation conforme, et elle satisfait un principe d'universalité : cette loi asymptotique ne dépend pas du réseau sous-jacent. Dans cet exposé nous donnerons un sens rigoureux à ces énoncés, puis discuterons certains aspects essentiels : quel rôle joue le paramètre $1/2$? Quelles raisons heuristiques justifient l'émergence de ces symétries ? Quelles sont les idées principales pour l'invariance par rotation ?