

# Séminaire N. Bourbaki

**SAMEDI 28 JANVIER 2023**

Institut Henri Poincaré (amphi. Hermite)  
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

**11h** Gabriel DOSPINESCU

**La conjecture du facteur direct**, d'après Y. André et B. Bhatt

---

La conjecture du facteur direct de Hochster (énoncée dans les années 70) est un énoncé d'algèbre commutative de nature apparemment anodine : si  $B$  est une extension finie d'un anneau commutatif noethérien régulier  $A$ , alors  $A$  est un facteur direct de  $B$  en tant que  $A$ -module. Cette conjecture fait partie d'un faisceau de conjectures connues sous le nom de « conjectures homologiques », avec des implications frappantes en géométrie algébrique. Après la percée de Raymond C. Heitmann en 2002, qui a démontré la conjecture pour  $\dim A \leq 3$ , Yves André a démontré la conjecture du facteur direct en 2016. Peu de temps après Bhargav Bhatt a fourni une preuve plus simple. Les deux démonstrations utilisent de manière cruciale la théorie des espaces perfectoïdes de Peter Scholze, et le but de l'exposé est d'expliquer les principaux ingrédients de la preuve, ainsi que les raffinements obtenus ultérieurement par André et Bhatt.

**14h30** Mylène MAÏDA

**Convergence forte du spectre de permutations aléatoires et graphes presque Ramanujan**, d'après C. Bordenave et B. Collins

---

Un graphe fini est dit *Ramanujan* si sa matrice d'adjacence possède un trou spectral maximal, ce qui lui assure d'excellentes propriétés de graphe expenseur. À partir d'une famille de permutations aléatoires, Bordenave et Collins construisent une suite de graphes aléatoires *presque Ramanujan*. Cette propriété peut dans ce cas se reformuler en termes de *convergence forte* en probabilités libres. L'exposé sera l'occasion de présenter les résultats connus de convergence forte et quelques-unes de leurs applications. Nous insisterons par ailleurs sur un outil important de leur preuve, l'opérateur *non-backtracking* associé à l'opérateur d'adjacence pondéré d'un graphe. Nous expliquerons comment le spectre de ces deux opérateurs est relié et évoquerons son usage pour l'étude des graphes aléatoires.

**16h00** Mikael DE LA SALLE

**Algèbres de von Neumann, produits tensoriels, corrélations quantiques et calculabilité**, d'après Ji, Natarajan, Vidick, Wright et Yuen

---

En 1976, Connes demande si toute algèbre de von Neumann finie se plonge dans un ultraproduit d'algèbres de matrices. En 1980, Tsirelson demande si, dans la formulation mathématique de la mécanique quantique, autoriser des espaces de Hilbert de dimension infinie change fondamentalement le modèle. En 1993, Kirchberg conjecture que le produit tensoriel de deux copies de la  $C^*$ -algèbre pleine du groupe libre de rang infini dénombrable peut être muni d'une unique norme de  $C^*$ -algèbre. De manière surprenante et non triviale, ces trois problèmes sont en fait équivalents, c'est maintenant bien compris. Ces problèmes viennent d'être résolus, par la négative, avec des méthodes d'informatique : calculabilité, complexité, et informatique quantique. Je ferai de mon mieux pour raconter les grandes lignes de cette très longue preuve.