Homologie de Morse et simplicité de groupes de transformations

Maxime Bourrigan

Séminaire Bourbaki du vendredi, 31 mars 2023

Simplicité de groupes
de transformations

Homologie de Morse

Simplicité de groupes de transformations

Simplicité

Définition. Un groupe non trivial G est *simple* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- tout sous-groupe distingué $H \trianglelefteqslant G$ est égal à $\{1\}$ ou à G ; (distingué : $\forall g \in G, \forall x \in H, gxg^{-1} \in H$).
- tout morphisme de groupes $G \to G'$ est constant ou injectif.

Pourquoi ?

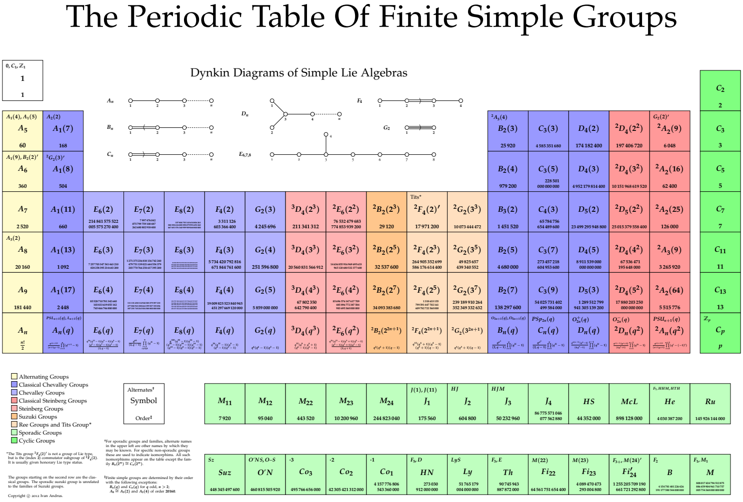


fig : I. Andrus

Dans le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$,

Dans le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$,

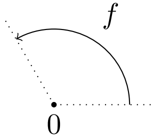
- signe : $G \to \{\pm 1\}$ ou encore $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \trianglelefteq G$.

Dans le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$,

- $\mathrm{signe} : G \to \{\pm 1\}$ ou encore $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \trianglelefteqslant G$.
- $\mathbb{R}^2 \simeq T \trianglelefteqslant G$.

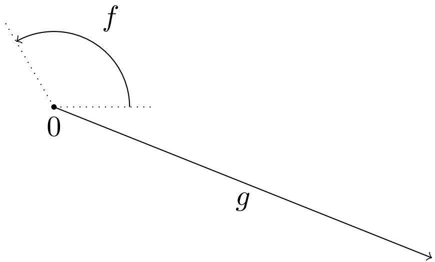
Dans le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$,

- signe : $G \to \{\pm 1\}$ ou encore $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \trianglelefteq G$.
- $\mathbb{R}^2 \simeq T \trianglelefteq G$.
- $G_0 = \{f \in G \mid f(0) = 0\}$ n'est pas distingué.



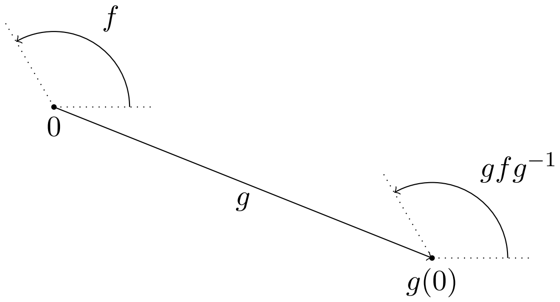
Dans le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$,

- signe : $G \to \{\pm 1\}$ ou encore $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \trianglelefteq G$.
- $\mathbb{R}^2 \simeq T \trianglelefteq G$.
- $G_0 = \{f \in G \mid f(0) = 0\}$ n'est pas distingué.



Dans le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$,

- signe : $G \to \{\pm 1\}$ ou encore $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \trianglelefteq G$.
- $\mathbb{R}^2 \simeq T \trianglelefteq G$.
- $G_0 = \{f \in G \mid f(0) = 0\}$ n'est pas distingué.



Groupes d'homéomorphismes

- Homéo($\mathbb{R}$) est-il simple ?

Groupes d'homéomorphismes

- Homéo($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Non. Homéo$_+(\mathbb{R}) \trianglelefteqslant$ Homéo($\mathbb{R}$).

Groupes d'homéomorphismes

- Homéo($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Non. $\text{Homéo}_+(\mathbb{R}) \trianglelefteq \text{Homéo}(\mathbb{R})$.

- $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ est-il simple ?

Groupes d'homéomorphismes

- Homéo($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Non. $\text{Homéo}_+(\mathbb{R}) \trianglelefteq \text{Homéo}(\mathbb{R})$.

- $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ est-il simple ?

  Non. $\{f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \gg 0, f(x) = x\} \trianglelefteq \text{Homéo}_+(\mathbb{R})$.

Groupes d'homéomorphismes

- Homéo($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Non. $\text{Homéo}_+(\mathbb{R}) \trianglelefteq \text{Homéo}(\mathbb{R})$.

- Homéo$_+$($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Non. $\{f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \gg 0, f(x) = x\} \trianglelefteq \text{Homéo}_+(\mathbb{R})$.

- Homéo$_c$($\mathbb{R}$) est-il simple ?

Groupes d'homéomorphismes

- Homéo($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Non. $\mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathbb{R}) \trianglelefteqslant \mathrm{Hom\acute{e}o}(\mathbb{R})$.

- Homéo$_+$($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Non. $\{f \in \mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \gg 0, f(x) = x\} \trianglelefteqslant \mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathbb{R})$.

- Homéo$_c$($\mathbb{R}$) est-il simple ?

  Oui.

Soit M une variété compacte sans bord de dimension $n \geqslant 1$.

- Homéo(M) est-il simple ?

Soit M une variété compacte sans bord de dimension $n \geqslant 1$.

- Homéo(M) est-il simple ?

  Non en général.
  Homéo$(M) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(M))$, Homéo$(M) \to \mathrm{Aut}(H_*(M))\ldots$

Soit M une variété compacte sans bord de dimension $n \geqslant 1$.

- Homéo(M) est-il simple ?

  Non en général.
  Homéo$(M) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(M))$, Homéo$(M) \to \mathrm{Aut}(H_*(M))\ldots$

  $\text{Homéo}_0(M) \trianglelefteq \text{Homéo}(M)$.

Soit M une variété compacte sans bord de dimension $n \geqslant 1$.

- Homéo(M) est-il simple ?

  Non en général.
  Homéo$(M) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(M))$, Homéo$(M) \to \mathrm{Aut}(H_*(M))\ldots$

  Homéo$_0(M) \trianglelefteq$ Homéo(M).

- Homéo$_0(M)$ est-il simple ?

Soit M une variété compacte sans bord de dimension $n \geqslant 1$.

- $\text{Homéo}(M)$ est-il simple ?

  Non en général.
  $\text{Homéo}(M) \to \text{Aut}\,(\pi_1(M))$, $\text{Homéo}(M) \to \text{Aut}(H_*(M))\ldots$

  $\text{Homéo}_0(M) \trianglelefteq \text{Homéo}(M)$.

- $\text{Homéo}_0(M)$ est-il simple ?

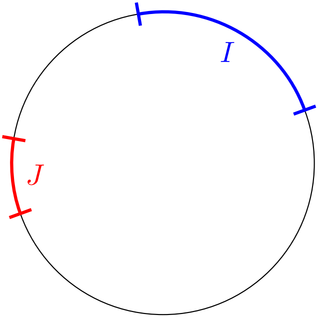
  Oui.

M variété connexe.

Théorème. Le groupe $\text{Homéo}_{c,0}(M)$ est simple.

Théorème. Le groupe $\text{Homéo}_+(S^1) = \text{Homéo}_0(S^1)$ est simple.

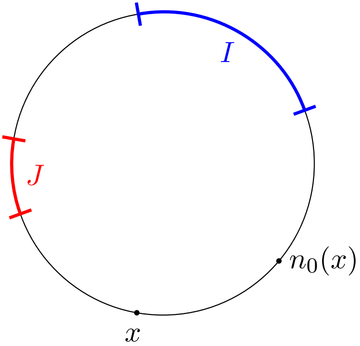
Démonstration : étape 1



Soit $\{\mathrm{id}\} \neq N \trianglelefteq \text{Homéo}_+(S^1)$.

$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints.
Alors il existe $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

Démonstration : étape 1

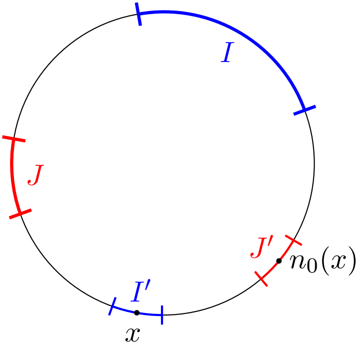


Soit $\{\mathrm{id}\} \neq N \trianglelefteq \text{Homéo}_+(S^1)$.

$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints.
Alors il existe $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

- $n_0 \in N : x \mapsto n_0(x) \neq x$;

Démonstration : étape 1

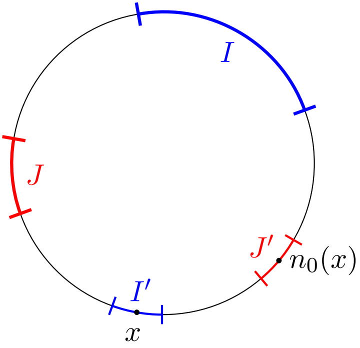


Soit $\{\mathrm{id}\} \neq N \trianglelefteq \text{Homéo}_+(S^1)$.

$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints.
Alors il existe $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

- $n_0 \in N : x \mapsto n_0(x) \neq x$;
- $n_0[I'] = J'$ et $I' \cap J' = \varnothing$;

Démonstration : étape 1

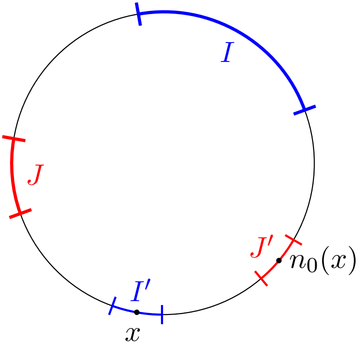


Soit $\{\mathrm{id}\} \neq N \trianglelefteq \mathrm{Homéo}_+(S^1)$.

$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints.
Alors il existe $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

- $n_0 \in N : x \mapsto n_0(x) \neq x$;
- $n_0[I'] = J'$ et $I' \cap J' = \varnothing$;
- $f \in \mathrm{Homéo}_+(S^1) : f[I] = I'$,
  $f[J] = J'$.

Démonstration : étape 1

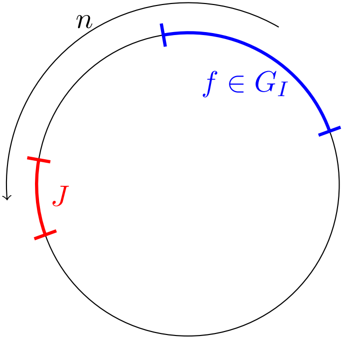


Soit $\{\mathrm{id}\} \neq N \trianglelefteq \text{Homéo}_+(S^1)$.

$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints.
Alors il existe $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

- $n_0 \in N : x \mapsto n_0(x) \neq x$;
- $n_0[I'] = J'$ et $I' \cap J' = \varnothing$;
- $f \in \text{Homéo}_+(S^1) : f[I] = I'$, $f[J] = J'$.
- $n = f^{-1} n f \in N$ convient.

Démonstration : étape 2

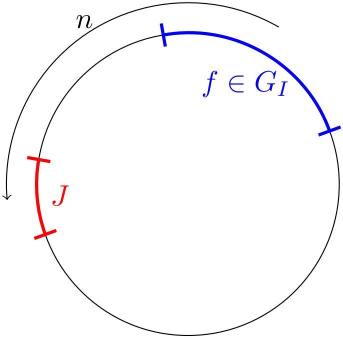


$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints. On a $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

$$f \in \text{Homéo}_+(S^1) : \text{supp}(f) \subseteq I$$

L'élément $f_J = n^{-1}\ f^{-1} n f \in N$ coïncide :

Démonstration : étape 2



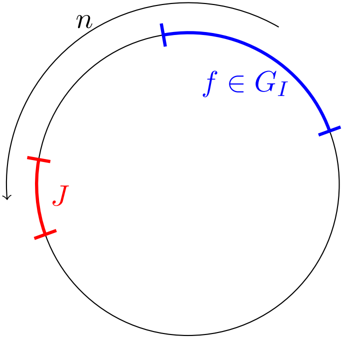
$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints. On a $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

$$f \in \text{Homéo}_+(S^1) : \text{supp}(f) \subseteq I$$

L'élément $f_J = n^{-1}\ f^{-1} n f \in N$ coïncide :

- avec f sur I ;

Démonstration : étape 2



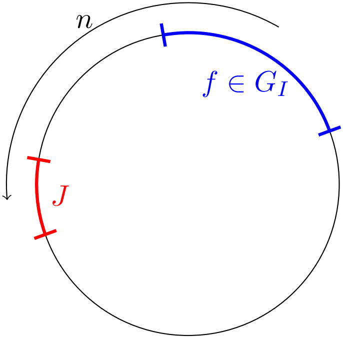
$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints. On a $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

$$f \in \text{Homéo}_+(S^1) : \text{supp}(f) \subseteq I$$

L'élément $f_J = n^{-1}\ f^{-1} n f \in N$ coïncide :

- avec f sur I ;
- avec $n^{-1} f^{-1} n$ sur J ;

Démonstration : étape 2



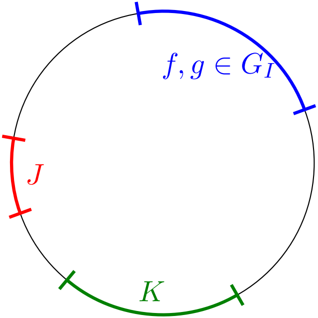
$I, J \subseteq S^1$ segments disjoints. On a $n \in N$ tel que $n[I] = J$.

$$f \in \text{Homéo}_+(S^1) : \text{supp}(f) \subseteq I$$

L'élément $f_J = n^{-1}\ f^{-1}nf \in N$ coïncide :

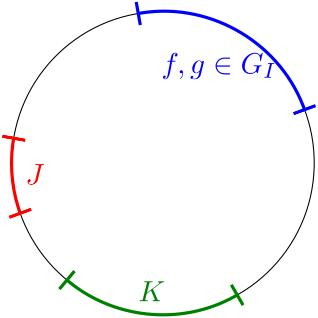
- avec f sur I ;
- avec $n^{-1}f^{-1}n$ sur J ;
- avec l'identité ailleurs.

Démonstration : étape 3



$I, J, K \subseteq S^1$ segments disjoints.

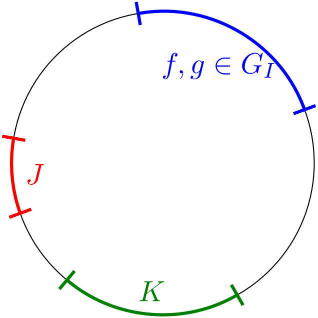
Démonstration : étape 3



$I, J, K \subseteq S^1$ segments disjoints.

$f_J, g_K \in N$ et $\begin{cases} \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \\ \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \end{cases}$

Démonstration : étape 3

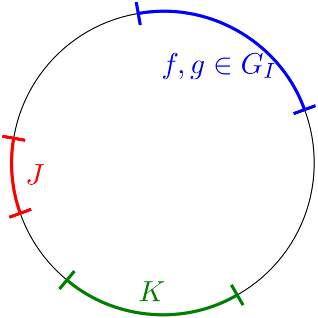


$I, J, K \subseteq S^1$ segments disjoints.

$f_J, g_K \in N$ et $\begin{cases} \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \\ \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \end{cases}$

$[f, g] := fgf^{-1}g^{-1} = [f_J, g_K] \in N.$

Démonstration : étape 3



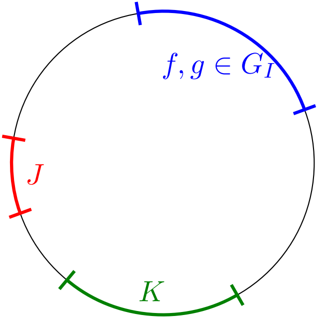
$I, J, K \subseteq S^1$ segments disjoints.

$f_J, g_K \in N$ et $\begin{cases} \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \\ \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \end{cases}$

$[f, g] := fgf^{-1}g^{-1} = [f_J, g_K] \in N.$

Ainsi, $G'_I = \langle [f, g] \,|\, f, g \in G_I \rangle \subseteq N.$

Démonstration : étape 3



$I, J, K \subseteq S^1$ segments disjoints.

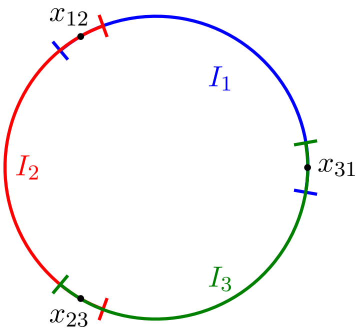
$f_J, g_K \in N$ et $\begin{cases} \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \\ \mathrm{supp}(f_J) \subseteq I \cup J \end{cases}$

$[f, g] := fgf^{-1}g^{-1} = [f_J, g_K] \in N.$

Ainsi, $G'_I = \left\langle [f, g] \,\middle|\, f, g \in G_I \right\rangle \subseteq N.$

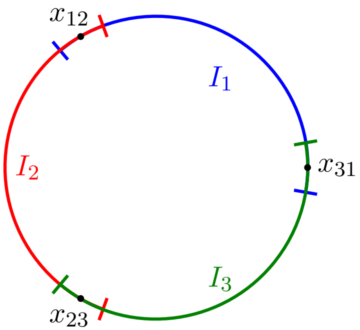
Lemme. $\text{Homéo}_c(\mathbb{R})$ est parfait : $G'_I = G_I$.

Démonstration : 4 – fragmentation



$$f \simeq \mathrm{id} \Rightarrow f(x_{ij}) \in I_{ij} := I_i \cap I_j.$$

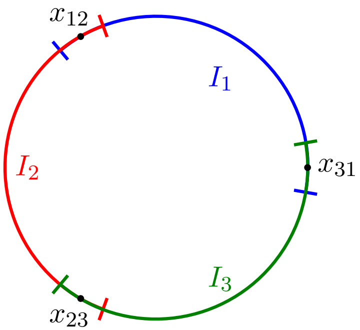
Démonstration : 4 – fragmentation



$f \simeq \mathrm{id} \Rightarrow f(x_{ij}) \in I_{ij} := I_i \cap I_j$.

On prend $g_{ij} \in \text{Homéo}_+(S^1)$, coïncidant avec f au voisinage de x_{ij} et de support inclus dans I_{ij}.

Démonstration : 4 – fragmentation

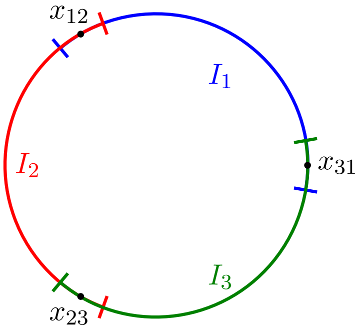


$f \simeq \mathrm{id} \Rightarrow f(x_{ij}) \in I_{ij} := I_i \cap I_j$.

On prend $g_{ij} \in \text{Homéo}_+(S^1)$, coïncidant avec f au voisinage de x_{ij} et de support inclus dans I_{ij}.

$h = (g_{12}g_{23}g_{31})^{-1} f \in G_{I_1} G_{I_2} G_{I_3}$, donc $f \in \langle G_{I_1}, G_{I_2}, G_{I_3} \rangle$.

Démonstration : 4 – fragmentation



$f \simeq \mathrm{id} \Rightarrow f(x_{ij}) \in I_{ij} := I_i \cap I_j$.

On prend $g_{ij} \in \text{Homéo}_+(S^1)$, coïncidant avec f au voisinage de x_{ij} et de support inclus dans I_{ij}.

$h = (g_{12}g_{23}g_{31})^{-1}f \in G_{I_1}G_{I_2}G_{I_3}$, donc $f \in \langle G_{I_1}, G_{I_2}, G_{I_3}\rangle$.

$\text{Homéo}_+(S^1) \subseteq \langle G_{I_1}, G_{I_2}, G_{I_3}\rangle$.

Démonstration : 5 – perfection locale

Soit $f \in \text{Homéo}_c(\mathbb{R})$.

Démonstration : 5 – perfection locale

Soit $f \in \mathrm{Homéo}_c(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f^2)$
  $\big(\forall t \in \,]x_0, x_1[\,, f(t) > t\big) \Rightarrow \big(\forall t \in \,]x_0, x_1[\,, f(t) > t\big)$.

Démonstration : 5 – perfection locale

Soit $f \in \mathrm{Homéo}_c(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f^2)$
  $\big(\forall t \in \left]x_0, x_1\right[, f(t) > t\big) \Rightarrow \big(\forall t \in \left]x_0, x_1\right[, f(t) > t\big)$.
- $f = g f^2 g^{-1}$

Démonstration : 5 – perfection locale

Soit $f \in \mathrm{Homéo}_c(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f^2)$
  $\big(\forall t \in \,]x_0, x_1[\,, f(t) > t\big) \Rightarrow \big(\forall t \in \,]x_0, x_1[\,, f(t) > t\big)$.
- $f = gf^2g^{-1}$ donc $f^{-1} = gf^{-2}g^{-1}$ donc

$$f = gf^{-2}g^{-1}f^2 = [g, f^{-2}].$$

Les ingrédients

$G = \text{Homéo}_+(S^1)$.

- Argument de transitivité : segments I ; $I \rightsquigarrow I'$.
  ☺
- Perfection locale : $G_I \simeq \text{Homéo}_c(\mathbb{R})$ parfait.
  ☺
- Fragmentation : $G = \langle G_{I_1}, \ldots, G_{I_r} \rangle$.
  ☺

Les ingrédients

$G = \text{Homéo}_+(M)$.

- Argument de transitivité : boules (plates ?) B ; $B \rightsquigarrow B'$.
  ☺
- Perfection locale : $G_I \simeq \text{Homéo}_c(\mathbb{R}^n)$ parfait.
  ☺ (astuce d'Anderson)
- Fragmentation : $G = \langle G_{B_1}, \ldots, G_{B_r} \rangle$.
  😐 ($\sim$ théorème de l'anneau d'Edwards et Kirby).

Les ingrédients

$G = \mathrm{Diff}^\infty(M)$.

- Argument de transitivité : boules B ; $B \rightsquigarrow B'$.
  ☺
- Perfection locale : $G_I \simeq \mathrm{Diff}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ parfait.
  ☹ (Thurston, Mather)
- Fragmentation : $G = \langle G_{B_1}, \ldots, G_{B_r} \rangle$.
  ☺ (partition de l'unité)

Les ingrédients

$G = \mathrm{Diff}^\infty(M)$.

- Argument de transitivité : boules B ; $B \rightsquigarrow B'$.
  ☺
- Perfection locale : $G_I \simeq \mathrm{Diff}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ parfait.
  ☹ (Thurston, Mather)
- Fragmentation : $G = \langle G_{B_1}, \dots, G_{B_r} \rangle$.
  ☺ (partition de l'unité)

Question ouverte : $\mathrm{Diff}_+^2(S^1)$ est-il simple ?

Homologie

de Morse

Fonctionnelle d'énergie

M variété riemannienne compacte, connexe.

On a une *fonctionnelle d'énergie*

$$E : \begin{cases} \Lambda M := C^0(S^1, M) \to & \mathbb{R} \\ \qquad \alpha & \mapsto \int_{S^1} \|\alpha'(t)\|^2 \, dt, \end{cases}$$

dont les points critiques sont les géodésiques.

Fonctionnelle d'énergie

M variété riemannienne compacte, connexe.

On a une *fonctionnelle d'énergie*

$$E : \begin{cases} \Lambda M := C^0(S^1, M) \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto \int_{S^1} \|\alpha'(t)\|^2 \, dt, \end{cases}$$

dont les points critiques sont les géodésiques.

Théorème (Cartan, Hadamard, ...). Toute composante « non constante » de ΛM contient au moins une vraie géodésique.

Fonctionnelle d'énergie

M variété riemannienne compacte, connexe.

On a une *fonctionnelle d'énergie*

$$E : \begin{cases} \Lambda M := C^0(S^1, M) \to & \mathbb{R} \\ \qquad \alpha & \mapsto \int_{S^1} \|\alpha'(t)\|^2 \, dt, \end{cases}$$

dont les points critiques sont les géodésiques.

Théorème (Cartan, Hadamard, ...). Toute composante « non constante » de ΛM contient au moins une vraie géodésique.

Idée (Morse). Même si M est simplement connexe, la topologie de ΛM force l'existence de points critiques (non constants) de E, et donc de (vraies) géodésiques.

Soit M une variété compacte.

Toute fonction lisse non constante $f : M \to \mathbb{R}$ possède au moins deux points critiques.

Théorème. Toute fonction lisse non constante $f : T^2 \to \mathbb{R}$ possède au moins trois points critiques.

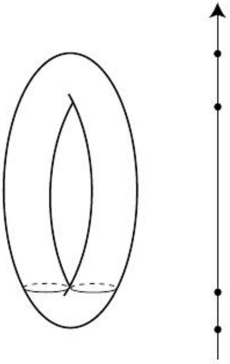


fig : M. Audin, M. Damian

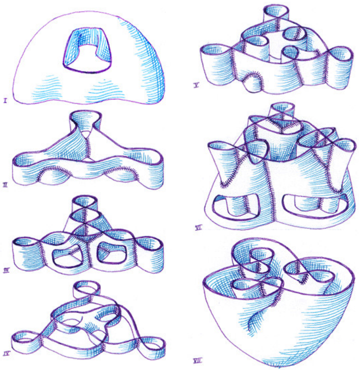
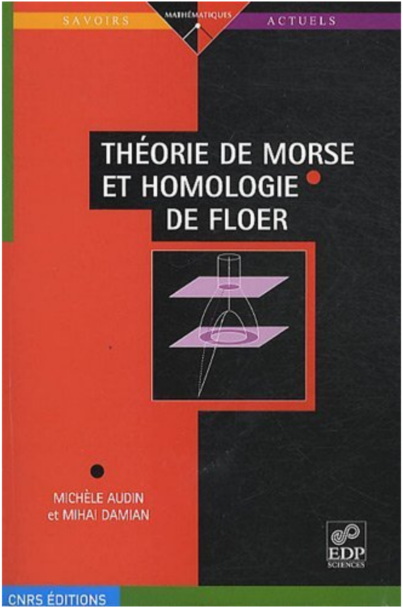


fig : C. Curtis

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2/\pi\mathbb{Z}^2 \to & \mathbb{R} \\ \quad (x,y) & \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y). \end{cases}$$

Une page de publicité



$f \in C^\infty(M)$ est *de Morse* si, en tout point $p \in \mathrm{Crit}(f)$, la hessienne $H_f(p)$ est non dégénérée.

$f \in C^\infty(M)$ est *de Morse* si, en tout point $p \in \mathrm{Crit}(f)$, la hessienne $H_f(p)$ est non dégénérée.

Lemme de Morse. Autour d'un point critique de Morse,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -x_1^2 - \cdots - x_\nu^2 + x_{\nu+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

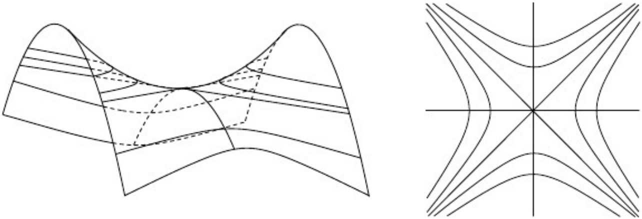


fig : M. Audin, M. Damian

$f \in C^\infty(M)$ est *de Morse* si, en tout point $p \in \mathrm{Crit}(f)$, la hessienne $H_f(p)$ est non dégénérée.

Lemme de Morse. Autour d'un point critique de Morse,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -x_1^2 - \cdots - x_\nu^2 + x_{\nu+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

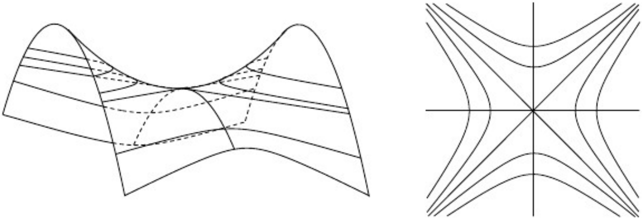


fig : M. Audin, M. Damian

Théorème. L'ensemble des fonctions de Morse est un ouvert dense de $C^\infty(M)$.

Inégalités de Morse

Théorème. Toute fonction de Morse sur M possède au moins $\sum_{k=0}^{n} \beta_k(M)$ points critiques.

$\beta_k(M) := \dim_{\mathbb{F}_2} H_k(M; \mathbb{F}_2)$.

Homologie

Étant donné une variété M, on peut lui associer un *complexe* $C_\bullet(M)$, c'est-à-dire :

- des espaces vectoriels $C_k(M)$, $k \in \mathbb{N}$;
- des applications linéaires $\partial_k : C_k(M) \to C_{k-1}(M)$ telles que $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.

Cela définit une *homologie* $H_\bullet(M)$ en posant $H_k(M) = \big(\ker \partial_k\big) / \big(\operatorname{im} \partial_{k+1}\big)$.

Par exemple, si M est triangulée, $C_k^{\mathrm{simp}}(M)$ possède une base en bijection avec les k-simplexes de M.

Inégalités de Morse

Théorème. Étant donné une variété M et une fonction de Morse f, il existe un complexe $C_\bullet(f) = C^{\mathrm{Morse}}(M, f)$ tel que

- $C_k(f)$ possède une base en bijection avec les points critiques d'indice k de f.
- $C_\bullet(f)$ calcule l'homologie de M.

Corollaire. La fonction f possède au moins $\beta_k(M)$ points critiques d'indice k.

Inégalités de Morse

Théorème. Étant donné une variété M et une fonction de Morse f, il existe un complexe $C_\bullet(f) = C^{\mathrm{Morse}}(M, f)$ tel que

- $C_k(f)$ possède une base en bijection avec les points critiques d'indice k de f.
- $C_\bullet(f)$ calcule l'homologie de M.

Corollaire. La fonction f possède au moins $\beta_k(M)$ points critiques d'indice k.

Mieux : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, X^k = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(M)\, X^k + (1+X) \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\geqslant 0} X^k.$

Premier exemple

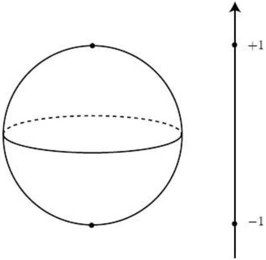


fig : M. Audin, M. Damian

$$C_0(f) = \mathbb{F}_2\, a$$
$$C_1(f) = \{0\}$$
$$C_2(f) = \mathbb{F}_2\, b$$

Premier exemple

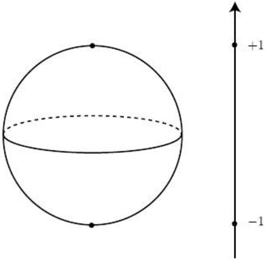


fig : M. Audin, M. Damian

$$C_0(f) = \mathbb{F}_2\, a$$
$$C_1(f) = \{0\}$$
$$C_2(f) = \mathbb{F}_2\, b$$

$$\partial_1 = 0$$
$$\partial_2 = 0$$

$$H_0(S^2) = \mathbb{F}_2[a]$$
$$H_1(S^2) = 0.$$
$$H_2(S^2) = \mathbb{F}_2[b].$$

Deuxième exemple

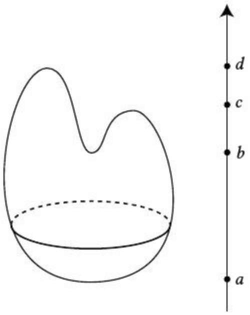


fig : M. Audin, M. Damian

$C_0(f) = \mathbb{F}_2\, a$
$C_1(f) = \mathbb{F}_2\, b$
$C_2(f) = \mathbb{F}_2\, c \oplus \mathbb{F}_2\, d$

$\partial_1 =$
$\partial_2 =$

$H_0(S^2) =$
$H_1(S^2) =$
$H_2(S^2) =$

Deuxième exemple

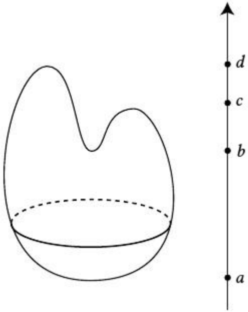


fig : M. Audin, M. Damian

$$C_0(f) = \mathbb{F}_2\, a$$
$$C_1(f) = \mathbb{F}_2\, b$$
$$C_2(f) = \mathbb{F}_2\, c \oplus \mathbb{F}_2\, d$$

$$\partial_1 = 0...$$
$$\partial_2 \neq 0$$

$$H_0(S^2) =$$
$$H_1(S^2) =$$
$$H_2(S^2) =$$

Morphismes de bord

Un champ de vecteurs X sur M est un *pseudo-gradient* de f si :

- $\forall p \in M \setminus \mathrm{Crit}(M), d_p f(X_p) < 0$;
- X est l'opposé du gradient de f dans une carte de Morse autour de $p \in \mathrm{Crit}(M)$.

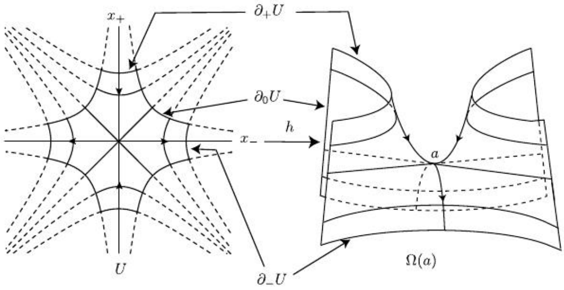


fig : M. Audin, M. Damian

On fixe un pseudo-gradient X de f.

Toutes les trajectoires de X vont d'un point-critique à l'autre.

On fixe un pseudo-gradient X de f.

Toutes les trajectoires de X vont d'un point-critique à l'autre.

Sous une certaine condition de **généricité**, l'ensemble des trajectoires de a à b **modulo reparamétrage** est une variété

$$\mathscr{L}(a,b) = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to M \text{ trajectoire de } X \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} a \\ \varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} b \end{array} \right\} \Big/ \mathbb{R}$$

de dimension $\text{indice}(a) - \text{indice}(b) - 1$.

Complexe de Morse

$\dim \mathscr{L}(a,b) = \text{indice}(a) - \text{indice}(b) - 1.$

On définit $\partial_k : C_{k+1}(f) = \mathbb{F}_2[\text{Crit}_{k+1}(f)] \to \mathbb{F}_2[\text{Crit}_k(f)]$ en posant

$$\partial_k(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_k(f)} |\mathscr{L}(a,b)|\, b \in C_k(f).$$

Deuxième exemple

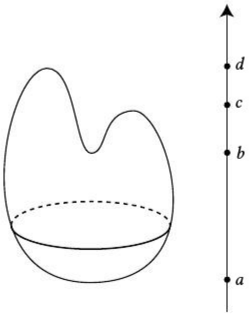


fig : M. Audin, M. Damian

$$C_0(f) = \mathbb{F}_2\, a$$
$$C_1(f) = \mathbb{F}_2\, b$$
$$C_2(f) = \mathbb{F}_2\, c \oplus \mathbb{F}_2 d$$

$$\partial_1 b = 2a = 0$$
$$\partial_2 c = \partial_2 d = b$$

$$H_0(S^2) = H_2(S^2) = \mathbb{F}_2$$
$$H_1(S^2) = 0.$$

Troisième exemple

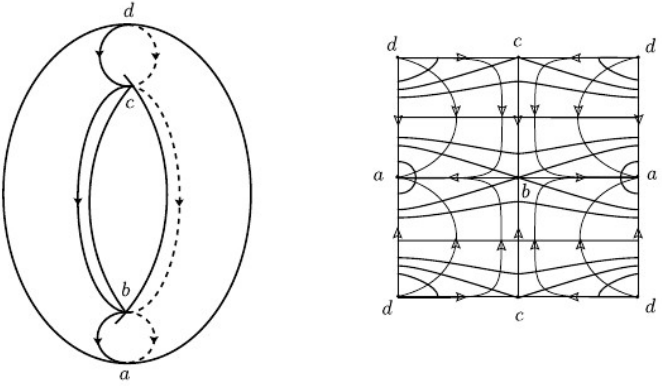


fig : M. Audin, M. Damian

Troisième exemple

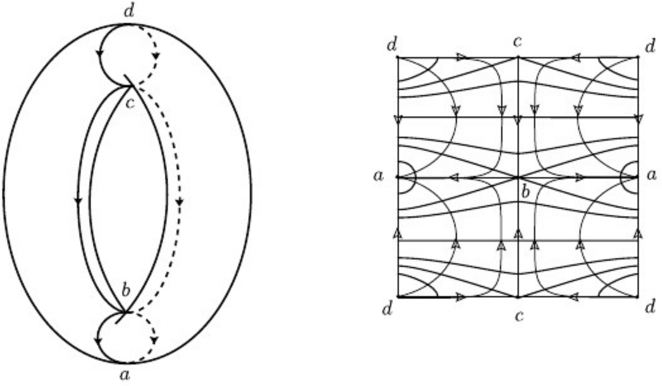


fig : M. Audin, M. Damian

En perturbant, $\partial = 0$.

$\partial^2 = 0$

$$\big(\partial_k \circ \partial_{k+1}\big)(a) = \sum_{c \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} \left| \bigsqcup_{b \in \mathrm{Crit}_k(f)} \mathscr{L}(a,b) \times \mathscr{L}(b,c) \right| c.$$

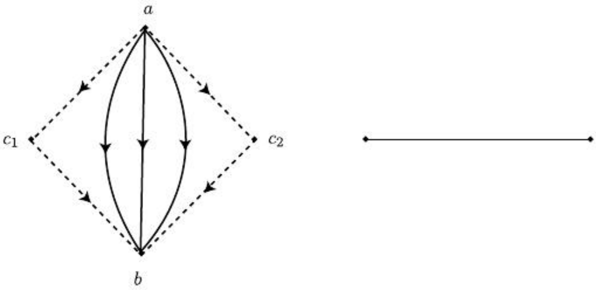


fig : M. Audin, M. Damian

Homologie de Floer

Andreas Floer
1956-1991

WITTEN'S COMPLEX AND INFINITE DIMENSIONAL MORSE THEORY

ANDREAS FLOER

---

and [3], we studied the Morse theory for the symplectic action function on the space $\Omega(L, L')$ of smooth paths in P connecting L and L'. More precisely, the symplectic action a is defined on the universal covering $\tilde{\Omega}$ of Ω by the condition

$$da(z)\xi = \int_0^1 \omega(\dot{z}(t), \xi(t))\, dt.$$

---

an almost Kähler structure. Then we consider for each pair (x_+, x_-) of intersections of L and L' the set

(4.2)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_J(x_-, x_+) = \{u\colon \mathbb{R}\times[0,1] \to P \mid\ & (1)\ u(\mathbb{R}\times\{0\}) \subset L;\\ & (2)\ u(\mathbb{R}\times\{1\}) \subset L';\\ & (3)\ \lim_{\tau\to\pm\infty} u(\tau, t) = x_\pm \text{ for all } t \in [0,1];\\ & (4)\ \overline{\partial}_J u = 0\}.\end{aligned}$$

Here, $\overline{\partial}_J$ is the Cauchy-Riemann operator

$$\overline{\partial}_J u(\tau, t) = \frac{\partial u(\tau, t)}{\partial \tau} + J_t(u(\tau, t))\frac{\partial u(\tau, t)}{\partial t}.$$

Homologie persistante

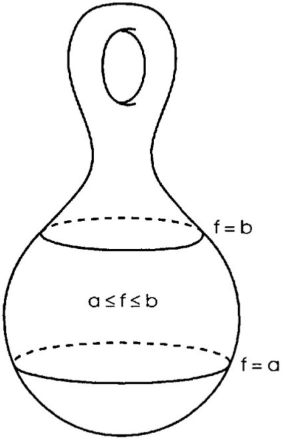


fig : J. Lafontaine

Si f est une fonction (par exemple de Morse), on a des applications linéaires

$$\pi_{a,b} : H_*(M_{\leqslant a}) \to H_*(M_{\leqslant b}), \qquad a \leqslant b$$

induites par l'inclusion $M_{\leqslant a} \to M_{\leqslant b}$.

Code-barres

Un *module de persistence de type fini* est la donnée (V, π) :

- d'une collection $V = (V_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'espaces vectoriels de dimension finie ;
- d'une collection $\pi = (\pi_{s,t})_{s \leqslant t}$ d'applications linéaires $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ vérifiant $\forall s \leqslant t \leqslant r, \pi_{s,r} = \pi_{t,r} \circ \pi_{s,t}$

vérifiant

- tous les $t \in \mathbb{R}$ sauf un nombre fini sont ordinaires : $\pi_{s,r}$ est un isomorphisme pour tous $s \leqslant r$ au voisinage de t ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, si $r > t$ est suffisamment proche de t, alors $\pi_{t,r}$ est un isomorphisme ;
- $V_s = 0$ pour $s \ll 0$.

Étant donné un intervalle semi-ouvert $I = [a, b[$, on a un module de persistence $M_I = (V, \pi)$ donné par

- $V_t = K$ si $t \in I$, et est nul sinon ;
- $\pi_{s,t}$ est l'identité quand c'est possible et est nulle sinon.

Proposition. Tout module de persistence de type fini se décompose comme une somme directe de modules M_I.

Cela permet de définir le *code-barres* d'un module de persistance (ou d'une fonction de Morse).

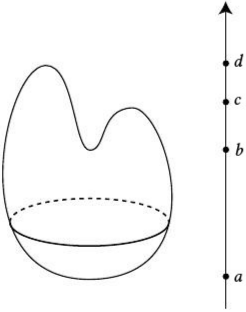
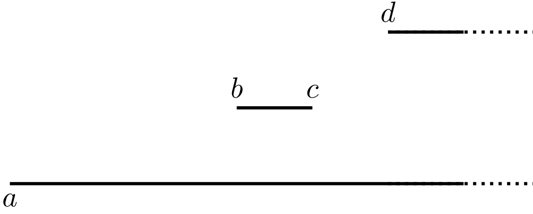


fig : M. Audin, M. Damian



$\mathscr{B}(f)$

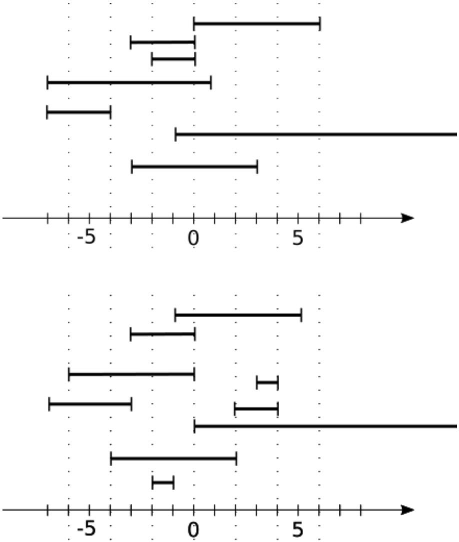


fig : V. Humilière

On a une distance d_{bot} sur l'ensemble des code-barres.

$d(B, B') \leqslant \delta$: modifications d'amplitude $\leqslant \delta$ autorisées

(y compris ajout/suppression d'intervalles de longueur $\leqslant 2\delta$).

Stabilité

Théorème. $d_{\text{bot}}(B, B') \leqslant \delta$ équivaut à l'existence d'un « δ-entrelacement » entre les modules de persistance $F : V \to V'[\delta]$, $G : V' \to V[\delta]$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\text{déc.}"'] & V'[\delta] \arrow[r, "G[\delta]"] & V[2\delta] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V' \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\text{déc.}"'] & V[\delta] \arrow[r, "F[\delta]"] & V'[2\delta] \end{tikzcd}$$

Stabilité

Théorème. $d_{\mathrm{bot}}(B, B') \leqslant \delta$ équivaut à l'existence d'un « δ-entrelacement » entre les modules de persistance $F : V \to V'[\delta]$, $G : V' \to V[\delta]$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\text{déc.}"'] & V'[\delta] \arrow[r, "G[\delta]"] & V[2\delta] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V' \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\text{déc.}"'] & V[\delta] \arrow[r, "F[\delta]"] & V'[2\delta] \end{tikzcd}$$

Corollaire. (Cohen-Steiner, Edelsbrunner, Harer).

$$d_{\mathrm{bot}}\big(\mathscr{B}(f), \mathscr{B}(g)\big) \leqslant \|g - f\|_{C^0}.$$

Merci !