

# Séminaire N. Bourbaki

**SAMEDI 23 MARS 2024**

Institut Henri Poincaré (amphithéâtre Hermite)  
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

**10h00** Anna BEN-HAMOU  
**Phénomène de cutoff pour les chaînes de Markov à courbure positive, d'après J. Salez**

---

Une chaîne de Markov présente le phénomène de cutoff si sa distance à l'équilibre reste proche de 1 jusqu'à un certain temps, puis chute abruptement vers 0 en un temps bien plus court. Découvert dans les années 1980 dans le contexte des mélanges de cartes, ce phénomène a depuis été observé pour une très grande variété de chaînes. Cependant, le problème de l'identification des mécanismes sous-jacents au cutoff reste une des plus grandes questions dans le domaine des temps de mélange. À cet égard, l'article *Cutoff for non-negatively curved Markov chains* de Justin Salez constitue une avancée majeure. Premièrement, il établit un critère très général pour le cutoff, reposant sur la notion de varentropie, permettant de comprendre le cutoff comme un phénomène de concentration entropique. Deuxièmement, il montre que ce critère est vérifié pour une grande famille de chaînes : les chaînes à courbure positive satisfaisant une condition qui ne concerne que les ordres de grandeur des temps de mélange et de relaxation.

**11h30** Laurent BESSIÈRES  
 **$\mu$ -bulles et variétés à courbure scalaire strictement positive en dimensions 4 et 5, d'après O. Chodosh, C. Li et Y. Liokumovich**

---

Un problème bien connu en géométrie est savoir quelles variétés admettent une métrique riemannienne de courbure scalaire strictement positive (PSC). De grandes avancées ont été obtenues dans les années 80 par Schoen–Yau et Gromov–Lawson, avec des techniques de surfaces minimales et de spineurs. Parmi les résultats obtenus dans cette période : une 3-variété compacte admet une métrique PSC si et seulement si sa décomposition en somme connexe n'admet pas de facteur asphérique (i.e. dont les groupes d'homotopie  $\pi_i$  sont nuls pour  $i > 1$ , ou de manière équivalente de revêtement universel contractible). Modulo la résolution de la conjecture de Géométrisation par Perelman, cela revient à dire que la variété est une somme connexe de quotients de  $S^3$  et de  $S^2 \times S^1$ .

En dimension supérieure, les tores  $T^n$  n'admettent pas de métrique PSC, ni plus généralement les variétés compactes à courbure sectionnelle négative ou nulle. Ceci a amené à conjecturer qu'une  $n$ -variété compacte asphérique n'admettait pas de métrique PSC.

Dans cet exposé je présenterai d'abord une preuve de cette conjecture en dimension 4 et 5 par Chodosh et Li. Leur démonstration utilise une nouvelle fonctionnelle introduite par M. Gromov, les  $\mu$ -bulles. Je présenterai ensuite une classification des  $n$ -variétés PSC suffisamment connexes en dimension 4 et 5, obtenue par Chodosh, Li et Liokumovich : un revêtement fini a le type d'homotopie de  $S^n$  ou de somme connexe de  $S^{n-1} \times S^1$ .

### 14h30 Bertrand RÉMY **Géométrie des groupes et complétion profinie**

---

Le contexte général de cet exposé est la question suivante : quels sont les groupes infinis de type fini qui sont caractérisés par la donnée de leurs quotients finis ? La relation d'équivalence associée est celle qui met dans la même classe les groupes possédant le même complété profini. On dit qu'un groupe possède la propriété de rigidité profinie (absolue) s'il est seul dans sa classe d'équivalence, autrement dit si tout groupe infini de type fini de même complété profini est isomorphe à celui-ci. Le problème de mettre en évidence des classes de groupes possédant cette rigidité est encore largement ouvert. On va présenter des constructions de groupes possédant la propriété de rigidité profinie absolue, ainsi que des résultats portant sur une version affaiblie de la rigidité profinie (relative à une classe restreinte de groupes mis en comparaison). Les techniques utilisées relèvent des représentations linéaires, de la géométrie hyperbolique de petite dimension, et d'arguments provenant de l'étude des groupes arithmétiques.

### 16h00 Simona ROTA NODARI **Mesures de Gibbs non linéaires et limites de champ moyen pour les systèmes quantiques, d'après Lewin, Nam et Rougerie**

---

Dans une série de travaux récents, Lewin, Nam et Rougerie ont établi un lien rigoureux entre certaines mesures de Gibbs non linéaires classiques et certains états de Gibbs quantiques. Plus précisément, ils ont prouvé que les mesures de Gibbs non linéaires peuvent être obtenues à partir des états de Gibbs grand-canoniques du problème à  $N$  corps, dans une limite de champ moyen où la température  $T$  diverge et la constante de couplage tend vers zéro comme  $1/T$ . Les cas bidimensionnels et tridimensionnels sont particulièrement difficiles en raison de la nécessité d'utiliser une procédure de renormalisation pour traiter l'émergence d'objets singuliers.