

Mesures cristallines et applications,
d'après P. Kurasov, N. Lev, A. Olevskii,
P. Sarnak, et M. Viazovska.

Yves Meyer

Bourbaki, 2 avril 2022

Plan de l'exposé

- Les séries de Dirichlet (Guinand, Kahane, Mandelbrojt)
- Le théorème de Kurasov et Sarnak
- Interpolation dans le plan temps-fréquence
- Le problème de Kepler
- Mesures cristallines et traitement du signal.

Plan de l'exposé

- Les séries de Dirichlet (Guinand, Kahane, Mandelbrojt)
- Le théorème de Kurasov et Sarnak
- Interpolation dans le plan temps-fréquence
- Le problème de Kepler
- Mesures cristallines et traitement du signal.

Plan de l'exposé

- Les séries de Dirichlet (Guinand, Kahane, Mandelbrojt)
- Le théorème de Kurasov et Sarnak
- Interpolation dans le plan temps-fréquence
- Le problème de Kepler
- Mesures cristallines et traitement du signal.

Plan de l'exposé

- Les séries de Dirichlet (Guinand, Kahane, Mandelbrojt)
- Le théorème de Kurasov et Sarnak
- Interpolation dans le plan temps-fréquence
- Le problème de Kepler
- Mesures cristallines et traitement du signal.

Plan de l'exposé

- Les séries de Dirichlet (Guinand, Kahane, Mandelbrojt)
- Le théorème de Kurasov et Sarnak
- Interpolation dans le plan temps-fréquence
- Le problème de Kepler
- Mesures cristallines et traitement du signal.

Notations

- La transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i y \cdot x) f(x) dx.$$

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est **localement fini** si, pour tout $R > 0$, l'ensemble des $x \in E$ vérifiant $|x| \leq R$ est fini.
- Enfin δ_a ou $\delta_a(x)$ est la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$ définie par $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$ pour toute fonction continue f .

Notations

- La transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i y \cdot x) f(x) dx.$$

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est **localement fini** si, pour tout $R > 0$, l'ensemble des $x \in E$ vérifiant $|x| \leq R$ est fini.
- Enfin δ_a ou $\delta_a(x)$ est la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$ définie par $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$ pour toute fonction continue f .

Notations

- La transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i y \cdot x) f(x) dx.$$

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est **localement fini** si, pour tout $R > 0$, l'ensemble des $x \in E$ vérifiant $|x| \leq R$ est fini.
- Enfin δ_a ou $\delta_a(x)$ est la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$ définie par $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$ pour toute fonction continue f .

Riemann

- La série de Dirichlet $\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$, $\Re s > 1$, se prolonge en une fonction méromorphe dont le seul pôle est $s = 1$.
- On pose $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$.
- On a

$$\xi(1 - s) = \xi(s).$$

Riemann

- La série de Dirichlet $\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$, $\Re s > 1$, se prolonge en une fonction méromorphe dont le seul pôle est $s = 1$.
- On pose $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$.
- On a

$$\xi(1 - s) = \xi(s).$$

Riemann

- La série de Dirichlet $\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$, $\Re s > 1$, se prolonge en une fonction méromorphe dont le seul pôle est $s = 1$.
- On pose $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$.
- On a

$$\xi(1 - s) = \xi(s).$$

Les séries de Dirichlet

- Jean-Pierre Kahane et Szolem Mandelbrojt (1958) considèrent les séries de Dirichlet $\phi(s) = \sum_1^\infty c_j \lambda_j^{-s}$ où $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ et où il existe un $s_0 > 0$ tel que $\sum_1^\infty |c_j| \lambda_j^{-s_0} < \infty$.
- Sous quelles conditions la fonction $\phi(s)$ qui est holomorphe dans $\Re s > s_0$ peut-elle se prolonger en une fonction méromorphe dans le plan complexe, ayant un seul pôle en $s = 1$, et vérifiant la même équation fonctionnelle que la fonction zeta de Riemann ?

Les séries de Dirichlet

- Jean-Pierre Kahane et Szolem Mandelbrojt (1958) considèrent les séries de Dirichlet $\phi(s) = \sum_1^\infty c_j \lambda_j^{-s}$ où $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ et où il existe un $s_0 > 0$ tel que $\sum_1^\infty |c_j| \lambda_j^{-s_0} < \infty$.
- Sous quelles conditions la fonction $\phi(s)$ qui est holomorphe dans $\Re s > s_0$ peut-elle se prolonger en une fonction méromorphe dans le plan complexe, ayant un seul pôle en $s = 1$, et vérifiant la même équation fonctionnelle que la fonction zeta de Riemann ?

Les séries de Dirichlet

- Kahane et Mandelbrojt démontrent (1958) le théorème suivant:

Theorem

Considérons les deux propriétés suivantes:

(i) $\phi(s) = \sum_1^\infty c_j \lambda_j^{-s}$ se prolonge en une fonction entière ou en une fonction méromorphe dans le plan complexe, ayant un seul pôle en $s = 1$ et vérifiant la même équation fonctionnelle que la fonction zeta de Riemann.

(ii) Il existe une constante c_0 telle que la mesure atomique $\mu = c_0 \delta_0 + \sum_1^\infty c_j (\delta_{\lambda_j} + \delta_{-\lambda_j})$ vérifie $\hat{\mu} = \mu$.

Alors on a toujours (ii) \Rightarrow (i) et si

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j \geq \beta > 0, j \in [a_m, b_m], \text{ et } b_m - a_m \rightarrow \infty \quad (1)$$

on a (i) \Rightarrow (ii).

Les séries de Dirichlet

- Kahane et Mandelbrojt démontrent (1958) le théorème suivant:

Theorem

Considérons les deux propriétés suivantes:

- (i) $\phi(s) = \sum_1^\infty c_j \lambda_j^{-s}$ se prolonge en une fonction entière ou en une fonction méromorphe dans le plan complexe, ayant un seul pôle en $s = 1$ et vérifiant la même équation fonctionnelle que la fonction zeta de Riemann.
- (ii) Il existe une constante c_0 telle que la mesure atomique $\mu = c_0 \delta_0 + \sum_1^\infty c_j (\delta_{\lambda_j} + \delta_{-\lambda_j})$ vérifie $\hat{\mu} = \mu$.

Alors on a toujours (ii) \Rightarrow (i) et si

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j \geq \beta > 0, j \in [a_m, b_m], \text{ et } b_m - a_m \rightarrow \infty \quad (1)$$

on a (i) \Rightarrow (ii).

Les séries de Dirichlet

Definition

Une mesure atomique μ sur \mathbb{R}^n est une **mesure cristalline** si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

- (1) Le support de μ est un ensemble localement fini,
- (2) μ est une distribution tempérée et
- (3) La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ est aussi une mesure atomique dont le support est un ensemble localement fini.

Les séries de Dirichlet

- Si (1) est vérifiée la mesure μ est un peigne de Dirac généralisé grâce au théorème de Nir Lev et d'Alexander Olevskii, un résultat qui n'a été établi que cinquante ans plus tard.
- Kahane et Mandelbrojt ne pouvaient donc que retomber sur la fonction ζ de Riemann ou sur ses variantes (séries zêta de Hurwitz, séries L de Dirichlet).

Les séries de Dirichlet

- Si (1) est vérifiée la mesure μ est un peigne de Dirac généralisé grâce au théorème de Nir Lev et d'Alexander Olevskii, un résultat qui n'a été établi que cinquante ans plus tard.
- Kahane et Mandelbrojt ne pouvaient donc que retomber sur la fonction ζ de Riemann ou sur ses variantes (séries zêta de Hurwitz, séries L de Dirichlet).

Les séries de Dirichlet

- Andrew Guinand définit la suite γ_k par

$$\sum_0^{\infty} \gamma_k q^k = \prod_1^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{2n})^{2/3}(1 + q^n)^{1/3}$$

où $|q| < 1$.

- Posons $\lambda_k = \sqrt{k + 1/9}$, $k = 0, 1, \dots$. En 1958 Guinand montre que la mesure atomique $\mu_G = \sum_0^{\infty} \gamma_k (\delta_{\lambda_k} + \delta_{-\lambda_k})$ vérifie $\hat{\mu}_G = \mu_G$.
- La fonction zêta de Guinand qui est donnée par la série $\zeta_G(s) = \sum_0^{\infty} \gamma_k (k + 1/9)^{-s/2}$ se prolonge en une fonction entière et l'on a

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta_G(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta_G(1-s).$$

Les séries de Dirichlet

- Andrew Guinand définit la suite γ_k par

$$\sum_0^{\infty} \gamma_k q^k = \prod_1^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{2n})^{2/3}(1 + q^n)^{1/3}$$

où $|q| < 1$.

- Posons $\lambda_k = \sqrt{k + 1/9}$, $k = 0, 1, \dots$. En 1958 Guinand montre que la mesure atomique $\mu_G = \sum_0^{\infty} \gamma_k (\delta_{\lambda_k} + \delta_{-\lambda_k})$ vérifie $\hat{\mu}_G = \mu_G$.
- La fonction zêta de Guinand qui est donnée par la série $\zeta_G(s) = \sum_0^{\infty} \gamma_k (k + 1/9)^{-s/2}$ se prolonge en une fonction entière et l'on a

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta_G(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta_G(1-s).$$

Les séries de Dirichlet

- Andrew Guinand définit la suite γ_k par

$$\sum_0^{\infty} \gamma_k q^k = \prod_1^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{2n})^{2/3}(1 + q^n)^{1/3}$$

où $|q| < 1$.

- Posons $\lambda_k = \sqrt{k + 1/9}$, $k = 0, 1, \dots$. En 1958 Guinand montre que la mesure atomique $\mu_G = \sum_0^{\infty} \gamma_k (\delta_{\lambda_k} + \delta_{-\lambda_k})$ vérifie $\hat{\mu}_G = \mu_G$.
- La fonction zêta de Guinand qui est donnée par la série $\zeta_G(s) = \sum_0^{\infty} \gamma_k (k + 1/9)^{-s/2}$ se prolonge en une fonction entière et l'on a

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta_G(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta_G(1-s).$$

Les séries de Dirichlet

- Alexander Olevskii attira mon attention sur ce travail et releva une faille dans la construction de Guinand.
- Nir Lev et Alexander Olevskii construisirent une mesure cristalline non triviale (2016).
- La preuve de Guinand fut complétée, grâce à l'aide de Philippe Michel (2017).

Les séries de Dirichlet

- Alexander Olevskii attira mon attention sur ce travail et releva une faille dans la construction de Guinand.
- Nir Lev et Alexander Olevskii construisirent une mesure cristalline non triviale (2016).
- La preuve de Guinand fut complétée, grâce à l'aide de Philippe Michel (2017).

Les séries de Dirichlet

- Alexander Olevskii attira mon attention sur ce travail et releva une faille dans la construction de Guinand.
- Nir Lev et Alexander Olevskii construisirent une mesure cristalline non triviale (2016).
- La preuve de Guinand fut complétée, grâce à l'aide de Philippe Michel (2017).

Pavel Kurasov et Peter Sarnak

Pour $y \in \mathbb{R}^n$ on définit l'exponentielle imaginaire \mathbf{w}_y par $\mathbf{w}_y(x) = \exp(2\pi i x \cdot y)$. Alors $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ et $\hat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y) \delta_y$ impliquent

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda = \sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y \quad (2)$$

Pavel Kurasov et Peter Sarnak

- Soit μ une mesure cristalline. Alors on a $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ et $\hat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y) \delta_y$. Il en résulte que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \hat{f}(\lambda) = \sum_{y \in F} a(y) f(y)$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit d'une nouvelle formule sommatoire de Poisson.

- Pour le peigne de Dirac $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ on a $\hat{\mu} = \mu$ et donc $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$ pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit de la formule sommatoire de Poisson usuelle.

Pavel Kurasov et Peter Sarnak

- Soit μ une mesure cristalline. Alors on a $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ et $\hat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y) \delta_y$. Il en résulte que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \hat{f}(\lambda) = \sum_{y \in F} a(y) f(y)$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit d'une nouvelle formule sommatoire de Poisson.

- Pour le peigne de Dirac $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ on a $\hat{\mu} = \mu$ et donc $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$ pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit de la formule sommatoire de Poisson usuelle.

- La série $\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ a un sens géométrique évident parce que Λ est localement fini tandis que la série $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$ converge au sens des distributions.
- On peut donc interpréter (2) en disant que $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est un objet géométrique bien défini dont le développement en série de Fourier est donné par $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$.
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ appartient-elle à une classe d'objets mathématiques ayant une série de Fourier ?
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est-elle presque-périodique ?

- La série $\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ a un sens géométrique évident parce que Λ est localement fini tandis que la série $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$ converge au sens des distributions.
- On peut donc interpréter (2) en disant que $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est un objet géométrique bien défini dont le développement en série de Fourier est donné par $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$.
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ appartient-elle à une classe d'objets mathématiques ayant une série de Fourier ?
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est-elle presque-périodique ?

- La série $\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ a un sens géométrique évident parce que Λ est localement fini tandis que la série $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$ converge au sens des distributions.
- On peut donc interpréter (2) en disant que $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est un objet géométrique bien défini dont le développement en série de Fourier est donné par $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$.
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ appartient-elle à une classe d'objets mathématiques ayant une série de Fourier ?
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est-elle presque-périodique ?

- La série $\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ a un sens géométrique évident parce que Λ est localement fini tandis que la série $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$ converge au sens des distributions.
- On peut donc interpréter (2) en disant que $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est un objet géométrique bien défini dont le développement en série de Fourier est donné par $\sum_{y \in F} a(y) \mathbf{w}_y$.
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ appartient-elle à une classe d'objets mathématiques ayant une série de Fourier ?
- La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \delta_\lambda$ est-elle presque-périodique?

Theorem

Il existe un ensemble uniformément discret Λ de nombres réels tel que:

- (a) L'espace vectoriel sur \mathbb{Q} engendré par Λ est de dimension infinie.*
- (b) $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ est une mesure cristalline presque-périodique.*

Corollaire

Il existe alors une fonction $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, positive ou nulle, et telle que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} w(x - \lambda) = 1.$$

Il existe donc des partitions **bancales** de l'identité.

Pavel Kurasov et Peter Sarnak

- La propriété (a) résultera de la construction de Λ et d'un théorème de Pierre Liardet.
- Pierre Liardet, *Sur une conjecture de Serge Lang*, Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), Soc. Math. France, Paris, 1975, pp. 187210. Astérisque, Nos. 24-25 (French). MR037668.

Pavel Kurasov et Peter Sarnak

- La propriété (a) résultera de la construction de Λ et d'un théorème de Pierre Liardet.
- Pierre Liardet, *Sur une conjecture de Serge Lang*, Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), Soc. Math. France, Paris, 1975, pp. 187-210. Astérisque, Nos. 24-25 (French). MR037668.

Pavel Kurasov et Peter Sarnak

En une variable réelle Alexander Olevskii et Alexander Ulanovskii ont caractérisé les mesures cristallines de la forme

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_{\lambda}.$$

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- On part d'un entier $n \geq 2$ et de n nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On désigne par $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore n dimensionnel et par $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}^n$ l'homomorphisme défini par $h(t) = (\alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)$. Ensuite on désigne par $V \subset \mathbb{T}^n$ une hypersurface sans bord.
- On suppose que $h(\mathbb{R})$ est partout transverse à V . Soit $d\sigma$ la mesure de surface sur V and soit $\mu = \omega d\sigma$ une mesure supportée par V dont la densité ω est continûment différentiable sur V .

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- On part d'un entier $n \geq 2$ et de n nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On désigne par $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore n dimensionnel et par $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}^n$ l'homomorphisme défini par $h(t) = (\alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)$. Ensuite on désigne par $V \subset \mathbb{T}^n$ une hypersurface sans bord.
- On suppose que $h(\mathbb{R})$ est partout transverse à V . Soit $d\sigma$ la mesure de surface sur V and soit $\mu = \omega d\sigma$ une mesure supportée par V dont la densité ω est continûment différentiable sur V .

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Il suffit de dérouler μ sur la droite réelle pour obtenir la mesure atomique $\kappa = \mu \circ h$ qui est notre candidate pour être une mesure cristalline.
- Parce que $h(\mathbb{R})$ est partout transverse à V cette mesure κ est une combinaison linéaire de mesures de Dirac portées par $\Lambda = \{t \in \mathbb{R}; h(t) \in V\}$.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Il suffit de dérouler μ sur la droite réelle pour obtenir la mesure atomique $\kappa = \mu \circ h$ qui est notre candidate pour être une mesure cristalline.
- Parce que $h(\mathbb{R})$ est partout transverse à V cette mesure κ est une combinaison linéaire de mesures de Dirac portées par $\Lambda = \{t \in \mathbb{R}; h(t) \in V\}$.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot x)$$

est la série de Fourier de μ sur \mathbb{T}^n alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot \alpha t)$$

est la série de Fourier de la mesure atomique κ . On a posé $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

- Sous une simple hypothèse spectrale sur μ la mesure atomique κ sera une mesure cristalline. Soit $S \subset \mathbb{Z}^n$ l'ensemble défini par $a(k) \neq 0$.
- L'hypothèse spectrale impliquera que $F = \{k \cdot \alpha, k \in S\}$ soit localement fini.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot x)$$

est la série de Fourier de μ sur \mathbb{T}^n alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot \alpha t)$$

est la série de Fourier de la mesure atomique κ . On a posé $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

- Sous une simple hypothèse spectrale sur μ la mesure atomique κ sera une mesure cristalline. Soit $S \subset \mathbb{Z}^n$ l'ensemble défini par $a(k) \neq 0$.
- L'hypothèse spectrale impliquera que $F = \{k \cdot \alpha, k \in S\}$ soit localement fini.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot x)$$

est la série de Fourier de μ sur \mathbb{T}^n alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot \alpha t)$$

est la série de Fourier de la mesure atomique κ . On a posé $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

- Sous une simple hypothèse spectrale sur μ la mesure atomique κ sera une mesure cristalline. Soit $S \subset \mathbb{Z}^n$ l'ensemble défini par $a(k) \neq 0$.
- L'hypothèse spectrale impliquera que $F = \{k \cdot \alpha, k \in S\}$ soit localement fini.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Pour démontrer le théorème de Kurasov et Sarnak, il suffit de choisir V et ω de sorte que (1) la propriété spectrale soit satisfaite et (2) que les coefficients de la mesure atomique κ soient égaux à 1.
- Une mesure de Radon μ sur \mathbb{T}^n satisfait la condition de Ahern (Patrick Ahern) si les coefficients de Fourier $c(k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, de μ sont nuls quand k_1, \dots, k_n n'ont pas tous le même signe: un des k_j est négatif et un autre $k_{j'}$ est positif.
- Si μ satisfait la condition de Ahern l'hypothèse spectrale est satisfaite si $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.
- Enfin μ satisfait la condition de Ahern si V est le graphe de $\phi : \mathbb{T}^{n-1} \mapsto \mathbb{T}$ et si $\exp(-2\pi i\phi)$ est une fonction intérieure.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Pour démontrer le théorème de Kurasov et Sarnak, il suffit de choisir V et ω de sorte que (1) la propriété spectrale soit satisfaite et (2) que les coefficients de la mesure atomique κ soient égaux à 1.
- Une mesure de Radon μ sur \mathbb{T}^n satisfait la condition de Ahern (Patrick Ahern) si les coefficients de Fourier $c(k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, de μ sont nuls quand k_1, \dots, k_n n'ont pas tous le même signe: un des k_j est négatif et un autre $k_{j'}$ est positif.
- Si μ satisfait la condition de Ahern l'hypothèse spectrale est satisfaite si $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.
- Enfin μ satisfait la condition de Ahern si V est le graphe de $\phi : \mathbb{T}^{n-1} \mapsto \mathbb{T}$ et si $\exp(-2\pi i\phi)$ est une fonction intérieure.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Pour démontrer le théorème de Kurasov et Sarnak, il suffit de choisir V et ω de sorte que (1) la propriété spectrale soit satisfaite et (2) que les coefficients de la mesure atomique κ soient égaux à 1.
- Une mesure de Radon μ sur \mathbb{T}^n satisfait la condition de Ahern (Patrick Ahern) si les coefficients de Fourier $c(k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, de μ sont nuls quand k_1, \dots, k_n n'ont pas tous le même signe: un des k_j est négatif et un autre $k_{j'}$ est positif.
- Si μ satisfait la condition de Ahern l'hypothèse spectrale est satisfaite si $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.
- Enfin μ satisfait la condition de Ahern si V est le graphe de $\phi : \mathbb{T}^{n-1} \mapsto \mathbb{T}$ et si $\exp(-2\pi i\phi)$ est une fonction intérieure.

Preuve du théorème de Kurasov et Sarnak

- Pour démontrer le théorème de Kurasov et Sarnak, il suffit de choisir V et ω de sorte que (1) la propriété spectrale soit satisfaite et (2) que les coefficients de la mesure atomique κ soient égaux à 1.
- Une mesure de Radon μ sur \mathbb{T}^n satisfait la condition de Ahern (Patrick Ahern) si les coefficients de Fourier $c(k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, de μ sont nuls quand k_1, \dots, k_n n'ont pas tous le même signe: un des k_j est négatif et un autre $k_{j'}$ est positif.
- Si μ satisfait la condition de Ahern l'hypothèse spectrale est satisfaite si $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.
- Enfin μ satisfait la condition de Ahern si V est le graphe de $\phi : \mathbb{T}^{n-1} \mapsto \mathbb{T}$ et si $\exp(-2\pi i\phi)$ est une fonction intérieure.

Interpolation dans le plan temps-fréquence

Definition

Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Nous dirons que Λ et F **se complètent** si la propriété suivante est satisfaite: pour toute fonction f appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ les propriétés $f|_{\Lambda} = 0$ et $\widehat{f}|_F = 0$ entraînent $f = 0$.

-
- On suppose que (i) $|\Lambda \cap \{|x| \leq j\}| \leq C_0 j^{N_0}$ pour une certaine constante $C_0 > 0$, un certain exposant $N_0 \geq 0$ et pour tout $j \geq 1$. On suppose également que (ii) la distance entre deux points distincts appartenant à $\Lambda \cap \{|x| \leq j\}$ est supérieure ou égale à $C_1 j^{-N_1}$ pour une certaine constante $C_1 > 0$, un certain exposant $N_1 \geq 0$ et pour tout $j \geq 1$.

Interpolation dans le plan temps-fréquence

Definition

Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Nous dirons que Λ et F **se complètent** si la propriété suivante est satisfaite: pour toute fonction f appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ les propriétés $f|_{\Lambda} = 0$ et $\widehat{f}|_F = 0$ entraînent $f = 0$.

-
- On suppose que (i) $|\Lambda \cap \{|x| \leq j\}| \leq C_0 j^{N_0}$ pour une certaine constante $C_0 > 0$, un certain exposant $N_0 \geq 0$ et pour tout $j \geq 1$. On suppose également que (ii) la distance entre deux points distincts appartenant à $\Lambda \cap \{|x| \leq j\}$ est supérieure ou égale à $C_1 j^{-N_1}$ pour une certaine constante $C_1 > 0$, un certain exposant $N_1 \geq 0$ et pour tout $j \geq 1$.

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Dans ces conditions l'ensemble des restrictions à Λ des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace $\mathcal{S}(\Lambda)$ des suites indexées par Λ et ayant une décroissance rapide à l'infini.
- Nous faisons les mêmes hypothèses (i) et (ii) sur F .
- Voici l'une des versions quantitatives de la définition. On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.

Conjecture

Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe une constante C et un exposant N tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait:

$$\|f\|_\infty \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} (1 + |\lambda|)^N |f(\lambda)| + C \sum_{y \in F} (1 + |y|)^N |\hat{f}(y)|.$$



Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Dans ces conditions l'ensemble des restrictions à Λ des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace $\mathcal{S}(\Lambda)$ des suites indexées par Λ et ayant une décroissance rapide à l'infini.
- Nous faisons les mêmes hypothèses (i) et (ii) sur F .
- Voici l'une des versions quantitatives de la définition. On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.

Conjecture

Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe une constante C et un exposant N tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait:

$$\|f\|_\infty \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} (1 + |\lambda|)^N |f(\lambda)| + C \sum_{y \in F} (1 + |y|)^N |\hat{f}(y)|.$$

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Dans ces conditions l'ensemble des restrictions à Λ des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace $\mathcal{S}(\Lambda)$ des suites indexées par Λ et ayant une décroissance rapide à l'infini.
- Nous faisons les mêmes hypothèses (i) et (ii) sur F .
- Voici l'une des versions quantitatives de la définition. On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.

Conjecture

Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe une constante C et un exposant N tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait:

$$\|f\|_\infty \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} (1 + |\lambda|)^N |f(\lambda)| + C \sum_{y \in F} (1 + |y|)^N |\hat{f}(y)|.$$



Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Dans ces conditions l'ensemble des restrictions à Λ des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace $\mathcal{S}(\Lambda)$ des suites indexées par Λ et ayant une décroissance rapide à l'infini.
- Nous faisons les mêmes hypothèses (i) et (ii) sur F .
- Voici l'une des versions quantitatives de la définition. On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.

Conjecture

Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe une constante C et un exposant N tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait:

$$\|f\|_\infty \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} (1 + |\lambda|)^N |f(\lambda)| + C \sum_{y \in F} (1 + |y|)^N |\hat{f}(y)|.$$



Interpolation dans le plan temps-fréquence

Conjecture

Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe un opérateur linéaire et continu $B : \mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$u = f|_{\Lambda}, v = \widehat{f}|_F \Rightarrow f = B(u, v).$$

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la forme linéaire $f \mapsto f(x_0)$ est alors continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. C'est donc aussi une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F)$. Il existe deux suites à croissance lente $c(\lambda, x_0)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a(y, x_0)$, $y \in F$, telles que $u = f|_\Lambda$ et $v = \widehat{f}|_F$ entraînent
$$f(x_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0)u(\lambda) + \sum_{y \in F} a(y, x_0)v(y).$$
- Finalement

$$\delta_{x_0} = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0)\delta_\lambda + \sum_{y \in F} a(y, x_0)\mathbf{w}_{-y}. \quad (3)$$

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la forme linéaire $f \mapsto f(x_0)$ est alors continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. C'est donc aussi une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F)$. Il existe deux suites à croissance lente $c(\lambda, x_0)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a(y, x_0)$, $y \in F$, telles que $u = f|_\Lambda$ et $v = \widehat{f}|_F$ entraînent
$$f(x_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0)u(\lambda) + \sum_{y \in F} a(y, x_0)v(y).$$
- Finalement

$$\delta_{x_0} = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0)\delta_\lambda + \sum_{y \in F} a(y, x_0)\mathbf{w}_{-y}. \quad (3)$$

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier au sens des distributions de la mesure atomique

$\mu = \delta_{x_0} - \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0) \delta_\lambda$ est la mesure atomique $\sum_{y \in F} a(y, x_0) \delta_{-y}$. Donc μ est une mesure cristalline.

- Voici une conjecture légèrement plus forte où l'on précise la dépendance en x_0 des coefficients $c(\lambda, x_0)$ et $a(y, x_0)$ dans (3):

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier au sens des distributions de la mesure atomique $\mu = \delta_{x_0} - \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda, x_0) \delta_\lambda$ est la mesure atomique $\sum_{y \in F} a(y, x_0) \delta_{-y}$. Donc μ est une mesure cristalline.
- Voici une conjecture légèrement plus forte où l'on précise la dépendance en x_0 des coefficients $c(\lambda, x_0)$ et $a(y, x_0)$ dans (3):

Interpolation dans le plan temps-fréquence

Conjecture

Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe deux familles $c_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a_y(x)$, $y \in F$, de fonctions de la classe de Schwartz telles que pour toute fonction f dans la classe de Schwartz on ait

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda(x) f(\lambda) + \sum_{y \in F} a_y(x) \hat{f}(y).$$

-
- Nous ne connaissons aucun exemple où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ soit canoniquement isomorphe à $\mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F)$.

Interpolation dans le plan temps-fréquence

Conjecture

Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe deux familles $c_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a_y(x)$, $y \in F$, de fonctions de la classe de Schwartz telles que pour toute fonction f dans la classe de Schwartz on ait

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda(x) f(\lambda) + \sum_{y \in F} a_y(x) \hat{f}(y).$$

-
- Nous ne connaissons aucun exemple où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ soit canoniquement isomorphe à $\mathcal{S}(\Lambda) \times \mathcal{S}(F)$.

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- On se place en dimension 1. Dans le cas particulier où $\Lambda = F = \{\pm\sqrt{k}, k = 0, 1, \dots\}$ Danylo Radchenko et Maryna Viazovska ont démontré le résultat suivant:

Theorem

Il existe une suite $a_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$ de fonctions de la classe de Schwartz qui sont paires, à valeurs réelles, et telles que pour toute fonction paire f de la classe de Schwartz on ait

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_k(x) f(\sqrt{k}) + \sum_0^{\infty} \hat{a}_k(x) \hat{f}(\sqrt{k})$$

où cette série converge uniformément sur tout compact vers f et converge au sens des distributions.



Interpolation dans le plan temps-fréquence

- On se place en dimension 1. Dans le cas particulier où $\Lambda = F = \{\pm\sqrt{k}, k = 0, 1, \dots\}$ Danylo Radchenko et Maryna Viazovska ont démontré le résultat suivant:

Theorem

Il existe une suite $a_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$ de fonctions de la classe de Schwartz qui sont paires, à valeurs réelles, et telles que pour toute fonction paire f de la classe de Schwartz on ait

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_k(x) f(\sqrt{k}) + \sum_0^{\infty} \hat{a}_k(x) \hat{f}(\sqrt{k})$$

où cette série converge uniformément sur tout compact vers f et converge au sens des distributions.



Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Ceci devient faux si f est une fonction impaire.
- En effet considérons $g(x) = \sin(\pi x^2) / \sinh(\pi x)$. On a $g(x) = 0$ si $x = \pm k^{1/2}$, $k = 0, 1, \dots$ et la transformée de Fourier de g est $-ig$.

Interpolation dans le plan temps-fréquence

- Ceci devient faux si f est une fonction impaire.
- En effet considérons $g(x) = \sin(\pi x^2) / \sinh(\pi x)$. On a $g(x) = 0$ si $x = \pm k^{1/2}$, $k = 0, 1, \dots$ et la transformée de Fourier de g est $-ig$.

Le problème de Kepler

- Kepler posa le problème de ranger, dans l'espace usuel, une infinité de boules de rayon donné de façon que la densité de cette disposition soit la plus grande possible.
- On pose $B_R = \{x; |x| \leq R\}$ et l'on désigne par $|B_R|$ le volume de B_R . Ensuite on divise par $|B_R|$ le volume occupé par les boules de rayon donné à l'intérieur de B_R et enfin on calcule la limite supérieure de ce quotient quand R tend vers l'infini. On obtient ainsi la densité de l'empilement.
- Ce problème peut évidemment être formulé en dimension quelconque. Maryna Viazovska a découvert la disposition optimale en dimension 8 et 24.

Le problème de Kepler

- Kepler posa le problème de ranger, dans l'espace usuel, une infinité de boules de rayon donné de façon que la densité de cette disposition soit la plus grande possible.
- On pose $B_R = \{x; |x| \leq R\}$ et l'on désigne par $|B_R|$ le volume de B_R . Ensuite on divise par $|B_R|$ le volume occupé par les boules de rayon donné à l'intérieur de B_R et enfin on calcule la limite supérieure de ce quotient quand R tend vers l'infini. On obtient ainsi la densité de l'empilement.
- Ce problème peut évidemment être formulé en dimension quelconque. Maryna Viazovska a découvert la disposition optimale en dimension 8 et 24.

Le problème de Kepler

- Kepler posa le problème de ranger, dans l'espace usuel, une infinité de boules de rayon donné de façon que la densité de cette disposition soit la plus grande possible.
- On pose $B_R = \{x; |x| \leq R\}$ et l'on désigne par $|B_R|$ le volume de B_R . Ensuite on divise par $|B_R|$ le volume occupé par les boules de rayon donné à l'intérieur de B_R et enfin on calcule la limite supérieure de ce quotient quand R tend vers l'infini. On obtient ainsi la densité de l'empilement.
- Ce problème peut évidemment être formulé en dimension quelconque. Maryna Viazovska a découvert la disposition optimale en dimension 8 et 24.

Le problème de Kepler

- Viazovska est partie de l'approche du problème par Henry Cohn et Noam Elkies. Cette approche est basée sur la programmation linéaire utilisée pour les codes correcteurs d'erreurs:

Theorem

Soit ϕ une fonction à valeurs réelles appartenant à la classe de Schwartz class $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\beta > 0$ un nombre réel tels que $\phi(0) = \hat{\phi}(0) = 1$, $\phi(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \beta$ et $\hat{\phi}(y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Alors la densité d'un empilement de boules dans \mathbb{R}^n ne peut dépasser $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}(\beta/2)^n$.

- Observons que l'on n'affaiblit pas le théorème 4 en supposant que ϕ est une fonction radiale.

Le problème de Kepler

- Viazovska est partie de l'approche du problème par Henry Cohn et Noam Elkies. Cette approche est basée sur la programmation linéaire utilisée pour les codes correcteurs d'erreurs:

Theorem

Soit ϕ une fonction à valeurs réelles appartenant à la classe de Schwartz class $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\beta > 0$ un nombre réel tels que $\phi(0) = \hat{\phi}(0) = 1$, $\phi(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \beta$ et $\hat{\phi}(y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Alors la densité d'un empilement de boules dans \mathbb{R}^n ne peut dépasser $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}(\beta/2)^n$.

- Observons que l'on n'affaiblit pas le théorème 4 en supposant que ϕ est une fonction radiale.

Le problème de Kepler

- Nous nous concentrons sur la dimension 8. Le réseau Λ_8 est défini par

$$\Lambda_8 = \{x \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^8; x_1 + \dots + x_8 \in 2\mathbb{Z}\}.$$

- Le réseau dual de Λ_8 est Λ_8 . On a donc pour toute fonction f de la classe de Schwartz

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_8} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_8} \hat{f}(\lambda).$$

- Viazovska démontre que la disposition optimale s'obtient avec des boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda \in \Lambda_8$. Ces boules sont deux à deux disjointes (en ignorant les points de contact).

Le problème de Kepler

- Nous nous concentrons sur la dimension 8. Le réseau Λ_8 est défini par

$$\Lambda_8 = \{x \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^8; x_1 + \dots + x_8 \in 2\mathbb{Z}\}.$$

- Le réseau dual de Λ_8 est Λ_8 . On a donc pour toute fonction f de la classe de Schwartz

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_8} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_8} \hat{f}(\lambda).$$

- Viazovska démontre que la disposition optimale s'obtient avec des boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda \in \Lambda_8$. Ces boules sont deux à deux disjointes (en ignorant les points de contact).

Le problème de Kepler

- Nous nous concentrons sur la dimension 8. Le réseau Λ_8 est défini par

$$\Lambda_8 = \{x \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^8; x_1 + \dots + x_8 \in 2\mathbb{Z}\}.$$

- Le réseau dual de Λ_8 est Λ_8 . On a donc pour toute fonction f de la classe de Schwartz

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_8} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_8} \hat{f}(\lambda).$$

- Viazovska démontre que la disposition optimale s'obtient avec des boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda \in \Lambda_8$. Ces boules sont deux à deux disjointes (en ignorant les points de contact).

Le problème de Kepler

- Pour démontrer ce résultat Viazovska utilise le théorème 4 avec $\beta = \sqrt{2}$. Voici comment on cherche ϕ . Si ϕ vérifie les conditions du théorème 4, on a $\sum_{\lambda \in \Lambda_8} \phi(\lambda) = 1 - a$ où $a \geq 0$ et $\sum_{y \in \Lambda_8} \hat{\phi}(y) = 1 + b$ où $b \geq 0$. Il résulte de (25) que $1 - a = 1 + b$ et donc $a = b = 0$.
- Donc ϕ ainsi que sa transformée de Fourier sont nulles sur $\Lambda_8 \setminus \{0\}$. Puisque ϕ est une fonction radiale, elle est nulle, ainsi que sa transformée de Fourier, sur toutes les sphères S_m , $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, centrées en 0 et de rayon $\sqrt{2m}$. La recherche de ϕ se rattache donc aux problèmes d'interpolation de la section 8.
- En utilisant cette observation, Viazovska construit une fonction radiale de la classe de Schwartz $\phi \in \mathbb{R}^8$ telle que $\phi(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \sqrt{2}$, $\hat{\phi} \geq 0$ et $\phi(0) = \hat{\phi}(0) = 1$.

Le problème de Kepler

- Pour démontrer ce résultat Viazovska utilise le théorème 4 avec $\beta = \sqrt{2}$. Voici comment on cherche ϕ . Si ϕ vérifie les conditions du théorème 4, on a $\sum_{\lambda \in \Lambda_8} \phi(\lambda) = 1 - a$ où $a \geq 0$ et $\sum_{y \in \Lambda_8} \hat{\phi}(y) = 1 + b$ où $b \geq 0$. Il résulte de (25) que $1 - a = 1 + b$ et donc $a = b = 0$.
- Donc ϕ ainsi que sa transformée de Fourier sont nulles sur $\Lambda_8 \setminus \{0\}$. Puisque ϕ est une fonction radiale, elle est nulle, ainsi que sa transformée de Fourier, sur toutes les sphères S_m , $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, centrées en 0 et de rayon $\sqrt{2m}$. La recherche de ϕ se rattache donc aux problèmes d'interpolation de la section 8.
- En utilisant cette observation, Viazovska construit une fonction radiale de la classe de Schwartz $\phi \in \mathbb{R}^8$ telle que $\phi(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \sqrt{2}$, $\hat{\phi} \geq 0$ et $\phi(0) = \hat{\phi}(0) = 1$.

Le problème de Kepler

- Pour démontrer ce résultat Viazovska utilise le théorème 4 avec $\beta = \sqrt{2}$. Voici comment on cherche ϕ . Si ϕ vérifie les conditions du théorème 4, on a $\sum_{\lambda \in \Lambda_8} \phi(\lambda) = 1 - a$ où $a \geq 0$ et $\sum_{y \in \Lambda_8} \hat{\phi}(y) = 1 + b$ où $b \geq 0$. Il résulte de (25) que $1 - a = 1 + b$ et donc $a = b = 0$.
- Donc ϕ ainsi que sa transformée de Fourier sont nulles sur $\Lambda_8 \setminus \{0\}$. Puisque ϕ est une fonction radiale, elle est nulle, ainsi que sa transformée de Fourier, sur toutes les sphères S_m , $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, centrées en 0 et de rayon $\sqrt{2m}$. La recherche de ϕ se rattache donc aux problèmes d'interpolation de la section 8.
- En utilisant cette observation, Viazovska construit une fonction radiale de la classe de Schwartz $\phi \in \mathbb{R}^8$ telle que $\phi(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \sqrt{2}$, $\hat{\phi} \geq 0$ et $\phi(0) = \hat{\phi}(0) = 1$.

Le problème de Kepler

- On applique alors le théorème de Cohn et Elkies. La densité d'un empilement de boules de rayon r dans \mathbb{R}^8 ne peut donc dépasser $\frac{\pi^4}{384}$. Mais, comme on le vérifie par un calcul direct, $\frac{\pi^4}{384}$ est exactement la densité d'un empilement de boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées sur le réseau Λ_8 . Cela termine la preuve.
- Observons qu'il y a exactement 240 sphères S_j de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda_j \in \Lambda_8$, $1 \leq j \leq 240$, qui sont tangentes à la sphère de rayon $\sqrt{2}/2$ centrée en 0. Cette configuration est remarquable parce que 240 ne peut être dépassé. C'est, en effet, le *kissing number* en dimension 8. C'est le plus grand nombre de boules disjointes (d'un rayon donné r) qui sont tangentes à une sphère de rayon r .

Le problème de Kepler

- On applique alors le théorème de Cohn et Elkies. La densité d'un empilement de boules de rayon r dans \mathbb{R}^8 ne peut donc dépasser $\frac{\pi^4}{384}$. Mais, comme on le vérifie par un calcul direct, $\frac{\pi^4}{384}$ est exactement la densité d'un empilement de boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées sur le réseau Λ_8 . Cela termine la preuve.
- Observons qu'il y a exactement 240 sphères S_j de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda_j \in \Lambda_8$, $1 \leq j \leq 240$, qui sont tangentes à la sphère de rayon $\sqrt{2}/2$ centrée en 0. Cette configuration est remarquable parce que 240 ne peut être dépassé. C'est, en effet, le *kissing number* en dimension 8. C'est le plus grand nombre de boules disjointes (d'un rayon donné r) qui sont tangentes à une sphère de rayon r .

Le traitement du signal

- David Donoho et Philip Stark ont étudié une classe de signaux f qui peuvent être modélisés par une somme $u + v$ entre une combinaison linéaire u d'un petit nombre de spikes (un spike représente une impulsion très brève et très énergétique) et une combinaison linéaire v d'un petit nombre de structures oscillantes.
- Le problème est alors d'extraire u du signal donné f . Donoho et Stark relie ce problème au principe d'incertitude de Heisenberg. Ces modèles font partie du programme plus général des modèles "multi-couches".

Le traitement du signal

- David Donoho et Philip Stark ont étudié une classe de signaux f qui peuvent être modélisés par une somme $u + v$ entre une combinaison linéaire u d'un petit nombre de spikes (un spike représente une impulsion très brève et très énergétique) et une combinaison linéaire v d'un petit nombre de structures oscillantes.
- Le problème est alors d'extraire u du signal donné f . Donoho et Stark relie ce problème au principe d'incertitude de Heisenberg. Ces modèles font partie du programme plus général des modèles "multi-couches".

Le traitement du signal

- La droite réelle est remplacée par l'anneau $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ et les signaux étudiés sont des éléments de l'espace euclidien $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.
- La norme de $f \in \mathcal{H}$ est simplement $\|f\| = (\sum_{j \in \mathbb{Z}_N} |f(j)|^2)^{1/2}$. La FFT ou Fast Fourier Transform a été développée dans ce cadre discret. On désigne par $|E|$ le cardinal de l'ensemble E .
- Pour tout $j \in \mathbb{Z}_N$ la *spike* $\mathbf{e}_j \in \mathcal{H}$ est défini par $\mathbf{e}_j(k) = 0$ si $k \neq j$ et $\mathbf{e}_j(j) = 1$. De même pour $k \in \mathbb{Z}_N$ l'onde $\mathbf{w}_k \in \mathcal{H}$ est définie par

$$\mathbf{w}_k(m) = N^{-1/2} \exp(2\pi i k m / N), \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

La collection $\mathbf{e}_j, j \in \mathbb{Z}_N$, est la base canonique de \mathcal{H} tandis que $\mathbf{w}_k, k \in \mathbb{Z}_N$, est la base de Fourier.

- Les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{H}$ sont les produits scalaires $\langle f, \mathbf{w}_k \rangle, k \in \mathbb{Z}_N$.

Le traitement du signal

- La droite réelle est remplacée par l'anneau $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ et les signaux étudiés sont des éléments de l'espace euclidien $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.
- La norme de $f \in \mathcal{H}$ est simplement $\|f\| = (\sum_{j \in \mathbb{Z}_N} |f(j)|^2)^{1/2}$. La FFT ou Fast Fourier Transform a été développée dans ce cadre discret. On désigne par $|E|$ le cardinal de l'ensemble E .
- Pour tout $j \in \mathbb{Z}_N$ la *spike* $\mathbf{e}_j \in \mathcal{H}$ est défini par $\mathbf{e}_j(k) = 0$ si $k \neq j$ et $\mathbf{e}_j(j) = 1$. De même pour $k \in \mathbb{Z}_N$ l'onde $\mathbf{w}_k \in \mathcal{H}$ est définie par

$$\mathbf{w}_k(m) = N^{-1/2} \exp(2\pi i k m / N), \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

La collection $\mathbf{e}_j, j \in \mathbb{Z}_N$, est la base canonique de \mathcal{H} tandis que $\mathbf{w}_k, k \in \mathbb{Z}_N$, est la base de Fourier.

- Les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{H}$ sont les produits scalaires $\langle f, \mathbf{w}_k \rangle, k \in \mathbb{Z}_N$.

Le traitement du signal

- La droite réelle est remplacée par l'anneau $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ et les signaux étudiés sont des éléments de l'espace euclidien $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.
- La norme de $f \in \mathcal{H}$ est simplement $\|f\| = (\sum_{j \in \mathbb{Z}_N} |f(j)|^2)^{1/2}$. La FFT ou Fast Fourier Transform a été développée dans ce cadre discret. On désigne par $|E|$ le cardinal de l'ensemble E .
- Pour tout $j \in \mathbb{Z}_N$ le *spike* $\mathbf{e}_j \in \mathcal{H}$ est défini par $\mathbf{e}_j(k) = 0$ si $k \neq j$ et $\mathbf{e}_j(j) = 1$. De même pour $k \in \mathbb{Z}_N$ l'*onde* $\mathbf{w}_k \in \mathcal{H}$ est définie par

$$\mathbf{w}_k(m) = N^{-1/2} \exp(2\pi i k m / N), \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

La collection $\mathbf{e}_j, j \in \mathbb{Z}_N$, est la base canonique de \mathcal{H} tandis que $\mathbf{w}_k, k \in \mathbb{Z}_N$, est la base de Fourier.

- Les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{H}$ sont les produits scalaires $\langle f, \mathbf{w}_k \rangle, k \in \mathbb{Z}_N$.

Le traitement du signal

- La droite réelle est remplacée par l'anneau $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ et les signaux étudiés sont des éléments de l'espace euclidien $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.
- La norme de $f \in \mathcal{H}$ est simplement $\|f\| = (\sum_{j \in \mathbb{Z}_N} |f(j)|^2)^{1/2}$. La FFT ou Fast Fourier Transform a été développée dans ce cadre discret. On désigne par $|E|$ le cardinal de l'ensemble E .
- Pour tout $j \in \mathbb{Z}_N$ le *spike* $\mathbf{e}_j \in \mathcal{H}$ est défini par $\mathbf{e}_j(k) = 0$ si $k \neq j$ et $\mathbf{e}_j(j) = 1$. De même pour $k \in \mathbb{Z}_N$ l'*onde* $\mathbf{w}_k \in \mathcal{H}$ est définie par

$$\mathbf{w}_k(m) = N^{-1/2} \exp(2\pi i k m / N), \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

La collection $\mathbf{e}_j, j \in \mathbb{Z}_N$, est la base canonique de \mathcal{H} tandis que $\mathbf{w}_k, k \in \mathbb{Z}_N$, est la base de Fourier.

- Les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{H}$ sont les produits scalaires $\langle f, \mathbf{w}_k \rangle, k \in \mathbb{Z}_N$.

Le traitement du signal

- Dans ce contexte Donoho et Stark étudient les signaux f qui sont des combinaisons linéaires de quelques spikes et de quelques ondes:

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k$$

où α_{λ} et β_k sont des coefficients scalaires et $\Lambda \subset \mathbb{Z}_N$ et $F \subset \mathbb{Z}_N$ sont des ensembles finis de petite cardinalité.

- Si les $M = |\Lambda| + |F|$ vecteurs \mathbf{e}_{λ} , $\lambda \in \Lambda$, et \mathbf{w}_k , $k \in F$ sont linéairement dépendants, il existe une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

Le traitement du signal

- Dans ce contexte Donoho et Stark étudient les signaux f qui sont des combinaisons linéaires de quelques spikes et de quelques ondes:

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k$$

où α_{λ} et β_k sont des coefficients scalaires et $\Lambda \subset \mathbb{Z}_N$ et $F \subset \mathbb{Z}_N$ sont des ensembles finis de petite cardinalité.

- Si les $M = |\Lambda| + |F|$ vecteurs \mathbf{e}_{λ} , $\lambda \in \Lambda$, et \mathbf{w}_k , $k \in F$ sont linéairement dépendants, il existe une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

Le traitement du signal

- Il existerait donc un signal $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda}$ qui est porté par Λ et dont la transformée de Fourier $\hat{f} = - \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{e}_k$ est portée par F . Si $|\Lambda|$ et $|F|$ sont trop petits ceci est interdit par le principe d'incertitude de Heisenberg. Pour préciser ce point on définit un entier H_N par la propriété suivante:

Definition

Pour tout Λ et tout F la condition $|\Lambda| + |F| \leq H_N$, entraîne que les vecteurs \mathbf{e}_{λ} , $\lambda \in \Lambda$, et \mathbf{w}_k , $k \in F$, sont linéairement indépendants.



Le traitement du signal

- Il existerait donc un signal $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda$ qui est porté par Λ et dont la transformée de Fourier $\hat{f} = - \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{e}_k$ est portée par F . Si $|\Lambda|$ et $|F|$ sont trop petits ceci est interdit par le principe d'incertitude de Heisenberg. Pour préciser ce point on définit un entier H_N par la propriété suivante:

Definition

Pour tout Λ et tout F la condition $|\Lambda| + |F| \leq H_N$, entraîne que les vecteurs \mathbf{e}_λ , $\lambda \in \Lambda$, et \mathbf{w}_k , $k \in F$, sont linéairement indépendants.



Le traitement du signal

Theorem

Si le produit $|\Lambda||F|$ est strictement inférieur à N , les vecteurs $\mathbf{e}_\lambda, \lambda \in \Lambda, \mathbf{w}_k, k \in F$, sont linéairement indépendants. Plus précisément pour tout $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \sum_{k \in F} \beta_k \mathbf{w}_k$ on a, en posant $\gamma_N = (|\Lambda||F|/N)^{1/2} \in (0, 1)$,

$$\|f\| \geq (1 - \gamma_N)^{1/2} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda|^2 + \sum_{k \in F} |\beta_k|^2 \right)^{1/2}$$

Le traitement du signal

- Si $|\Lambda||F| = N$ on ne peut pas conclure. Par exemple, si $|\Lambda| = N$ et $F = \{k_0\}$, les N vecteurs \mathbf{e}_λ et le vecteur \mathbf{w}_{k_0} , sont linéairement dépendants.

Definition

Définissons M_N comme la borne inférieure des longueurs $M = |\Lambda| + |F|$ des relations non triviales (16).

- On a évidemment $M_N = H_N + 1$. Terence Tao a complété le théorème 4 en démontrant le résultat suivant:

Theorem

On a $2\sqrt{N} \leq M_N \leq N + 1$ et $M_N = N + 1$ si et seulement si N est un nombre premier.



Le traitement du signal

- Si $|\Lambda||F| = N$ on ne peut pas conclure. Par exemple, si $|\Lambda| = N$ et $F = \{k_0\}$, les N vecteurs \mathbf{e}_λ et le vecteur \mathbf{w}_{k_0} , sont linéairement dépendants.

Definition

Définissons M_N comme la borne inférieure des longueurs $M = |\Lambda| + |F|$ des relations non triviales (16).

- On a évidemment $M_N = H_N + 1$. Terence Tao a complété le théorème 4 en démontrant le résultat suivant:

Theorem

On a $2\sqrt{N} \leq M_N \leq N + 1$ et $M_N = N + 1$ si et seulement si N est un nombre premier.



Le traitement du signal

- Si $|\Lambda||F| = N$ on ne peut pas conclure. Par exemple, si $|\Lambda| = N$ et $F = \{k_0\}$, les N vecteurs \mathbf{e}_λ et le vecteur \mathbf{w}_{k_0} , sont linéairement dépendants.

Definition

Définissons M_N comme la borne inférieure des longueurs $M = |\Lambda| + |F|$ des relations non triviales (16).

- On a évidemment $M_N = H_N + 1$. Terence Tao a complété le théorème 4 en démontrant le résultat suivant:

Theorem

On a $2\sqrt{N} \leq M_N \leq N + 1$ et $M_N = N + 1$ si et seulement si N est un nombre premier.



Le traitement du signal

- Disons un mot sur la borne inférieure. Nous supposons que N est un carré parfait ($N = m^2$) et que $|\Lambda| = |F| = m$. Dans ces conditions on choisit $F = \Lambda = \{0, m, 2m, \dots, (m-1)m\}$. Alors on a $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_m + \dots + \mathbf{e}_{(m-1)m} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_m + \dots + \mathbf{w}_{(m-1)m}$. On a bien $M = 2m = 2\sqrt{N}$.
- On retrouve ici la version discrète des peignes de Dirac. Mais si N est un nombre premier ces peignes de Dirac ne peuvent exister.

Le traitement du signal

- Disons un mot sur la borne inférieure. Nous supposons que N est un carré parfait ($N = m^2$) et que $|\Lambda| = |F| = m$. Dans ces conditions on choisit $F = \Lambda = \{0, m, 2m, \dots, (m-1)m\}$. Alors on a $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_m + \dots + \mathbf{e}_{(m-1)m} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_m + \dots + \mathbf{w}_{(m-1)m}$. On a bien $M = 2m = 2\sqrt{N}$.
- On retrouve ici la version discrète des peignes de Dirac. Mais si N est un nombre premier ces peignes de Dirac ne peuvent exister.

Nous débordons maintenant du cadre précédent en n'imposant plus à une mesure cristalline d'être une distribution tempérée. Dans la formule sommatoire de A. Bondarenko, D. Radchenko et K. Seip l'ensemble des fonctions de test qui est utilisé est un sous-espace \mathcal{E} de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ composé de fonctions entières. Ceci est, en partie, dû au problème posé par l'hypothèse de Riemann. Rien n'assure donc que les mesures atomiques qui interviennent implicitement dans le théorème 8 soient des distributions tempérées.

Theorem

Soit \mathcal{R} l'ensemble des zéros non triviaux ρ de la fonction ζ de Riemann. Soit Λ l'ensemble des nombres réels ou complexes $\lambda = \frac{\rho-1/2}{i}$, $\rho \in \mathcal{R}$. Soit $F = \left\{ \frac{\log n}{4\pi}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Alors toute fonction de test paire f dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier a un support compact est déterminée de façon unique par ses valeurs prises sur Λ et par les valeurs prises par sa transformée de Fourier sur F . Si un zéro non trivial $\rho = 1/2 + i\lambda$ apparaît avec une multiplicité égale à $m(\rho)$ les valeurs des $m(\rho) - 1$ dérivées $f^{(m)}(\lambda)$, $0 \leq m \leq m(\rho) - 1$ de f entrent en compte.