

# séminaire

# N. Bourbaki

à distance

---

2020–2021

**17 avril 2021**

**Exposés 1175–1176**



# Séminaire N. Bourbaki

---

Volume 2020–2021

17 avril 2021

- 1175 Kęstutis ČESNAVIČIUS  
**Reconstructing a variety from its topology,**  
*after Kollár, building on earlier work of Lieblich, Olsson*
- 1176 Clément DUPONT  
**Progrès récents sur la conjecture de Zagier et le programme  
de Goncharov, d'après Goncharov, Rudenko, Gangl, ...**

Ce Séminaire bénéficie de l'aide du CNRS et de la SMF.

©N. Bourbaki, 2021

Pour recevoir à l'avance le programme et les résumés de chaque séminaire, veuillez vous abonner en envoyant un courrier électronique à [seminaires+subscribe@bourbaki.fr](mailto:seminaires+subscribe@bourbaki.fr).

# Résumé

---

Kęstutis ČESNAVIČIUS

## **Reconstruire une variété à partir de sa topologie,**

*d'après Kollár, sur la base de travaux précédents de Lieblich et Olsson*

---

Une variété projective n'est pas la seule donnée du lieu d'annulation, dans un espace projective, des polynômes homogènes qui la définissent mais aussi celle du faisceau d'anneaux sur ce sous-espace. On peut se demander si l'espace topologique sous-jacent détermine seul la variété. Malgré des contre-exemples en dimension petite, une telle détermination s'avère vraie en dimension suffisamment grande pour les variétés normales, projectives, géométriquement irréductibles en caractéristique 0. Ce dernier résultat récent est dû à Kollár (qui s'appuie sur des travaux antérieurs de Lieblich et Olsson) et sera le sujet de cet exposé.

Clément DUPONT

## **Progrès récents sur la conjecture de Zagier et le programme de Goncharov,**

*d'après Goncharov, Rudenko, Gangl, ...*

---

La formule analytique du nombre de classes relie le résidu en  $s = 1$  de la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres à une quantité transcendante, le régulateur, qui est un déterminant de logarithmes d'unités du corps de nombres. A la fin des années 80, Zagier a conjecturé une généralisation de ce résultat classique à toutes les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind, où les polylogarithmes remplacent le logarithme. L'existence de régulateurs supérieurs reliés à ces valeurs spéciales résulte du calcul par Borel de la cohomologie stable du groupe linéaire, et la conjecture de Zagier peut être vue comme une recherche de cocycles explicites pour ces groupes de cohomologie. Une interprétation plus conceptuelle, en lien avec la théorie des motifs, a été donnée par Beilinson et Deligne. Dans le même temps, Goncharov a développé un programme qui englobe la conjecture de Zagier dans un ensemble de constructions et de conjectures qui visent à comprendre la K-théorie et les motifs de Tate mixtes « par générateurs et relations ». Il sera question dans cet exposé de progrès récents sur la conjecture de Zagier et le programme de Goncharov. On abordera notamment la preuve par Goncharov et Rudenko de la conjecture de Zagier dans le cas de la valeur spéciale en  $s = 4$ . La combinatoire des dissections des polygones est un ingrédient important, qui permet d'organiser les équations fonctionnelles des polylogarithmes.

# Abstract

---

Kęstutis ČESNAVIČIUS

**Reconstructing a variety from its topology,**

*after Kollár, building on earlier work of Lieblich, Olsson*

---

As part of the structure of a projective variety, one remembers not only the topological subspace cut out in projective space by the vanishing of defining homogeneous polynomials, but also a sheaf of rings on that subspace. One may wonder to what extent the topological space alone determines the variety. In spite of counterexamples in low dimension, such determination turns out to hold in sufficiently high dimension for normal, projective, geometrically irreducible varieties in characteristic 0. The latter is a recent result of Kollár (that builds on earlier work of Lieblich and Olsson) and it will be the subject of this talk.

Clément DUPONT

**Recent progress on Zagier's conjecture and Goncharov's program,**

*after Goncharov, Rudenko, Gangl, . . .*

---

The analytic class number formula relates the residue at  $s = 1$  of the Dedekind zeta function of a number field to a transcendental quantity, the regulator, which is a determinant of logarithms of units of the number field. At the end of the 80s, Zagier conjectured a generalization of this classical result to all special values of Dedekind zeta functions, where polylogarithms replace the logarithm function. The existence of higher regulators linked to these special values results from Borel's computation of the stable cohomology of the general linear group, and Zagier's conjecture can be viewed as a quest for explicit cocycles for these cohomology groups. A more conceptual interpretation, connected to the theory of motives, was given by Beilinson and Deligne. At the same time, Goncharov developed a program which incorporates Zagier's conjecture in a collection of constructions and conjectures aimed at understanding K-theory and mixed Tate motives « by generators and relations ». In this talk we will report on recent progress on Zagier's conjecture and Goncharov's program. In particular, we will discuss the proof, by Goncharov and Rudenko, of Zagier's conjecture for the case of the special value at  $s = 4$ . The combinatorics of polygon dissections is an important ingredient, which organizes functional equations of polylogarithms.



**RECONSTRUCTING A VARIETY FROM ITS TOPOLOGY**  
[after Kollár, building on earlier work of Lieblich and Olsson]

by Kęstutis Česnavičius

**INTRODUCTION**

The underlying Zariski topological space  $|X|$  of an algebraic variety or, more generally, a scheme  $X$  tends to have few open subsets in comparison to topologies that underlie structures appearing in differential geometry or geometric topology. Thus, intuitively,  $|X|$  is a weak invariant of  $X$ , and this intuition is confirmed by low-dimensional examples: for an algebraic curve  $C$ , the proper closed subsets of  $|C|$  are the finite subsets of closed points, so  $|C|$  does not see much beyond the cardinality of the algebraic closure of the base field. A more surprising example was constructed by WIEGAND and KRAUTER (1981, Cor. 1): for primes  $p$  and  $p'$ , there is a homeomorphism

$$|\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2| \simeq |\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{p'}}^2|.$$

Topological spaces that underlie schemes (resp., affine schemes) were, in fact, completely classified by HOCHSTER (1969, Thm. 9): they are the locally spectral (resp., the spectral) topological spaces. We recall that a topological space  $T$  is *spectral* if

- it is quasi-compact and quasi-separated;
- it is *sober*: each irreducible closed  $T' \subset T$  is the closure  $\overline{\{t\}}$  of a unique  $t \in T'$ ;
- the quasi-compact open subsets form a base of the topology of  $T$ .

A topological space  $T$  is *locally spectral* if it has an open cover by spectral spaces. The topological space  $|X|$  of a quasi-compact and quasi-separated scheme  $X$  is spectral, so Hochster's result implies that, somewhat surprisingly,  $|X|$  also underlies some affine scheme. For instance, for any field  $k$  and any  $n \geq 0$ , the topological space  $|\mathbb{P}_k^n|$  also underlies an affine scheme (which, of course, need not be a variety over a field).

Due to the above, the recent result of KOLLÁR (2020), which is the focus of this report, came as a surprise: a projective, irreducible, normal variety  $X$  over  $\mathbb{C}$  of dimension  $\geq 4$  is uniquely determined by its topological space  $|X|$ , see Theorem 1.1 below. A resulting general expectation in this direction is captured by the following conjecture of Kollár.

**CONJECTURE 0.1** (KOLLÁR, 2020, Conj. 3). — *For seminormal, geometrically irreducible varieties  $X$  and  $X'$  over fields  $k$  and  $k'$ , respectively, with  $\text{char } k = 0$*

and  $\dim X \geq 2$ , every homeomorphism  $|X| \xrightarrow{\sim} |X'|$  underlies a scheme isomorphism  $X \xrightarrow{\sim} X'$ .

## 1. RECONSTRUCTION OF PROJECTIVE VARIETIES

The following result of Kollár builds on previous work of Lieblich and Olsson and fully resolves Conjecture 0.1 for projective, normal varieties of dimension  $\geq 4$  in characteristic 0. In fact, it forms the foundation of credibility for a conjecture of this sort.

**THEOREM 1.1** (KOLLÁR, 2020, Thm. 2). — *For normal, geometrically integral, projective varieties  $X$  and  $X'$  over fields  $k$  and  $k'$ , respectively, such that either*

- (i)  $\dim X \geq 4$  and both  $k$  and  $k'$  are of characteristic 0; or
- (ii)  $\dim X \geq 3$  and both  $k$  and  $k'$  are finitely generated field extensions of  $\mathbb{Q}$ ;

*every homeomorphism  $|X| \xrightarrow{\sim} |X'|$  underlies a scheme isomorphism  $X \xrightarrow{\sim} X'$ .*

*Remark 1.2.* — Since  $X$  and  $X'$  are proper and geometrically integral, we have  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$  and  $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \cong k'$ , so a scheme isomorphism  $X \xrightarrow{\sim} X'$  amounts to a field isomorphism  $\iota: k \xrightarrow{\sim} k'$  and an isomorphism of varieties  $X \otimes_{k, \iota} k' \xrightarrow{\sim} X'$ .

We will focus on case (i) because it already contains most of the main ideas while avoiding further technicalities of (ii) that largely concern the Hilbert irreducibility theorem. Roughly, the proof is based on studying Weil divisors  $D$  on a normal  $X$ : such  $D$  are determined by  $|X|$  alone because they may be viewed as formal  $\mathbb{Z}$ -linear combinations of the points of codimension 1—for instance, a reduced effective divisor  $D \subset X$  is the closure of a finite set of codimension 1 points in  $X$ . We will let

$$\mathrm{Div}(X) := \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad \mathrm{Eff}(X) := \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

denote the group of all divisors (resp., the monoid of all effective divisors) on  $X$ .

It is not clear if notions such as ampleness or linear equivalence of divisors are determined by  $|X|$  alone, and the crux of the argument is in exhibiting hypotheses under which they are. The ability to topologically recognize linear equivalence eventually reduces the reconstruction problem to a combinatorial recognition theorem for projective spaces in terms of incidence of their lines and points (von Staudt’s fundamental theorem of projective geometry).

A divisor  $D$  on  $X$  is *ample* if some multiple  $nD$  with  $n > 0$  is a Cartier divisor whose associated line bundle  $\mathcal{O}(nD)$  is ample. We let  $\sim$  denote linear equivalence of divisors and say that divisors  $D_1$  and  $D_2$  on  $X$  are *linearly similar*, denoted by  $D_1 \sim_s D_2$ , if  $n_1 D_1 \sim n_2 D_2$  for some nonzero integers  $n_1$  and  $n_2$ . If this holds with  $n_1 = n_2$ , then we say that  $D_1$  and  $D_2$  are  *$\mathbb{Q}$ -linearly equivalent*, denoted by  $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2$ . When we speak of reduced (resp., irreducible) divisors, we implicitly assume that they are also effective (resp., effective and reduced). With these definitions, the overall proof of Theorem 1.1



proceeds in the following stages, which successively reconstruct more and more of the structure of  $X$  from the topological space  $|X|$ , and which will be discussed individually in the indicated sections:

$$|X| \xrightarrow{\S2} (|X|, \sim_s \text{ of irreducible ample divisors}) \xrightarrow{\S3-\S5} (|X|, \sim \text{ of effective divisors}) \xrightarrow{\S6} X.$$

The last step, namely, the determination of a normal, geometrically integral, projective variety  $X$  of dimension  $\geq 2$  over an infinite field from its underlying topological space  $|X|$  equipped with the relation of linear equivalence between effective divisors on  $|X|$  is due to LIEBLICH and OLSSON (2019).

The initial results of LIEBLICH and OLSSON (2019), although already sufficient for Theorem 1.1 above, have been sharpened and expanded in KOLLÁR, LIEBLICH, OLSSON, and SAWIN (2020).

## 2. RECOVERING LINEAR SIMILARITY OF AMPLE DIVISORS

NOTATION. *In this section, we let  $X$  be a normal, geometrically integral, projective variety over a field  $k$  of characteristic 0.*

The first stage of the proof of Theorem 1.1 is the reconstruction of linear similarity of irreducible ample divisors from the topological space  $|X|$  alone. This requires, in particular, to be able to topologically recognize ampleness of irreducible divisors, which rests crucially on the following Lefschetz type theorem for the divisor class group.

LEMMA 2.1 (RAVINDRA and SRINIVAS, 2006, Thm. 1). — *Suppose that  $\dim X \geq 3$  and let  $\mathcal{L}$  be an ample line bundle on  $X$  whose linear system  $\Gamma(X, \mathcal{L})$  is basepoint free. For some nonempty Zariski open  $U \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$  and every effective divisor  $D \subset X$  that corresponds to a  $k$ -point in  $U$ , the following restriction map is injective:*

$$\mathrm{Cl}(X) \hookrightarrow \mathrm{Cl}(D).$$

The cited result is sharper but only applies to the base change  $X_{\bar{k}}$  to an algebraic closure  $\bar{k}$ . This suffices because  $\mathrm{Cl}(X) \hookrightarrow \mathrm{Cl}(X_{\bar{k}})$ : to see this last injectivity, note that for any divisor  $H$  on  $X$  that represents a class in the kernel, both  $\mathcal{O}(H)$  and  $\mathcal{O}(-H)$  have nonzero global sections, which, since  $X$  is projective, means that  $H \sim 0$ .

For proving Theorem 1.1 for varieties of dimension  $\leq 4$ , one needs a refinement of Lemma 2.1 in which  $X$  is a surface (and  $D$  is a curve). This requires arithmetic inputs, notably a theorem of NÉRON (1952) on specialization of Picard groups. We refer to KOLLÁR (2020, Thm. 74) for this refinement of Lemma 2.1. It would also be interesting to extend Lemma 2.1 to positive characteristic because this may be useful for establishing further cases of Conjecture 0.1. For instance, we could then weaken the assumption on  $k$  in this section: we could let it be a field that is not a subfield of any  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .

The following is the promised topological criterion for ampleness.

PROPOSITION 2.2 (KOLLÁR, 2020, Lem. 67). — *Suppose that  $\dim X \geq 2$ . An irreducible divisor  $H \subset X$  is ample if and only if for every effective divisor  $D \subset X$  and distinct closed points  $x, x' \in X \setminus D$ , there is an effective divisor  $H' \subset X$  with*

$$|H \cap D| = |H' \cap D| \quad \text{and} \quad x \in H' \quad \text{but} \quad x' \notin H'.$$

*Sketch of proof.* — To begin with the simpler direction, we assume that  $H$  is ample, replace it by a multiple to assume that  $H$  is Cartier with associated very ample line bundle  $\mathcal{L}$ , and fix a  $D$  and  $x, x' \in X \setminus D$ . By EGA III<sub>1</sub>, 2.2.4, for some  $n > 0$  there is an  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  that vanishes at  $x$ , does not vanish at  $x'$ , and is such that the vanishing locus of  $s|_D$  is  $H \cap D$ . We can take  $H'$  to be the vanishing locus of  $s$ .

For the converse, we make a simplifying assumption that  $\dim X \geq 3$  (for  $\dim X = 2$  one needs a refinement of Lemma 2.1). To argue that  $H$  is ample, we will use Kleiman's criterion (KLEIMAN, 1966, Ch. III, Thm. 1 (i)  $\Leftrightarrow$  (iv) on p. 317), according to which it suffices to show that for all distinct closed points  $x, x' \in X$ , there exist an integer  $n > 0$  and an effective divisor  $\widetilde{H}$  such that  $\widetilde{H} \sim nH$  and  $x \in \widetilde{H}$  but  $x' \notin \widetilde{H}$  (this will simultaneously prove that some  $nH$  is basepoint free, so is also Cartier, as we require of ample divisors). Since  $X$  is projective, Lemma 2.1 and the Bertini theorem applied to the irreducible components of  $H_{\bar{k}}$  supply a normal effective divisor  $D \subset X$  not containing  $x, x'$ , or any generic point of  $H$  such that  $H \cap D$  is irreducible and  $\text{Cl}(X) \hookrightarrow \text{Cl}(D)$ . By applying the assumption to this  $D$ , we find an effective divisor  $H' \subset X$  with  $|H \cap D| = |H' \cap D|$  and  $x \in H'$  but  $x' \notin H'$ . Since  $H \cap D$  is irreducible, this equality of topological spaces means that  $nH|_D \sim n'H'|_D$  for some  $n, n' > 0$ . The injectivity of  $\text{Cl}(X) \hookrightarrow \text{Cl}(D)$  then implies that  $nH \sim n'H'$ , and it remains to set  $\widetilde{H} := n'H'$ .  $\square$

Proposition 2.2 allows us to topologically recognize irreducible ample divisors on  $X$ . Granted this, the following proposition then expresses the linear similarity relation  $\sim_s$  between such divisors purely in terms of the topological space  $|X|$ .

PROPOSITION 2.3 (KOLLÁR, 2020, Lem. 68). — *Suppose that  $\dim X \geq 3$ . Irreducible divisors  $H_1, H_2 \subset X$  with  $H_1$  ample are linearly similar if and only if for any disjoint, irreducible, closed subsets  $Z_1, Z_2 \subset X$  of dimension  $\geq 1$  there is an irreducible divisor  $H' \subset X$  with*

$$|H_1 \cap Z_1| = |H' \cap Z_1| \quad \text{and} \quad |H_2 \cap Z_2| = |H' \cap Z_2|.$$

*Sketch of proof.* — To begin with the simpler direction, we assume that  $n_1H_1 \sim n_2H_2$  for some nonzero  $n_1, n_2$  and fix  $Z_1, Z_2$  as in the statement. The  $n_i$  must have the same sign: otherwise  $\mathcal{O}(mH_1)$  and  $\mathcal{O}(-mH_1)$  would have nonzero global sections for every large, sufficiently divisible  $m > 0$ . Thus, we may assume that  $n_1, n_2 > 0$ . After replacing  $n_1$  and  $n_2$  by  $nn_1$  and  $nn_2$  for a large  $n > 0$ , we then combine EGA III<sub>1</sub>, 2.2.4 and the Bertini theorem (JOUANOLOU, 1983, 6.10) to find a global section of  $\mathcal{O}(n_1H_1) \simeq \mathcal{O}(n_2H_2)$  whose vanishing locus is an irreducible ample divisor  $H'$  with the desired properties (and even such that the intersection of  $H'_k$  with every irreducible component of  $X_{\bar{k}}$  is irreducible).

For the converse, we make a simplifying assumption that  $\dim X \geq 5$  (to improve to  $\dim X \geq 3$  one again needs a refinement of Lemma 2.1)—this time the assumption is more serious because the  $\dim X \geq 5$  case does not suffice for Theorem 1.1. Letting  $H_1, H_2$  be irreducible ample divisors as in the statement, we iteratively apply Lemma 2.1 (with the Bertini theorem) to build disjoint, irreducible, normal closed subschemes  $Z_1, Z_2 \subset X$  that are complete intersections of dimension 2 such that  $H_1 \cap Z_1 \subset Z_1$  and  $H_2 \cap Z_2 \subset Z_2$  are irreducible divisors and the following restriction maps are injective:

$$\mathrm{Cl}(X) \hookrightarrow \mathrm{Cl}(Z_1) \quad \text{and} \quad \mathrm{Cl}(X) \hookrightarrow \mathrm{Cl}(Z_2).$$

Since the intersections  $H_1 \cap Z_1$  and  $H_2 \cap Z_2$  are irreducible, these injections and the displayed equalities involving  $H'$  ensure that  $n_1 H_1 \sim n'_1 H'$  and  $n_2 H_2 \sim n'_2 H'$  for some  $n_i, n'_i > 0$ . It then follows that  $n_1 n'_2 H_1 \sim n'_1 n_2 H_2$ , so that  $H_1$  and  $H_2$  are linearly similar, as desired.  $\square$

Propositions 2.2 and 2.3 jointly carry out the first reconstruction step promised in §1:

$$|X| \rightsquigarrow (|X|, \sim_s \text{ of irreducible ample divisors}).$$

They also topologically determine complete intersection subvarieties as follows.

**COROLLARY 2.4.** — *Suppose that  $\dim X \geq 3$  and let  $H \subset X$  be an irreducible ample divisor. The topological space  $|X|$  alone determines the collection of those closed subsets  $Z \subset |X|$  that are set-theoretic complete  $H$ -intersections, i.e., for which there are irreducible divisors  $H_i \sim_s H$  for  $i = 1, \dots, r$  with  $r = \mathrm{codim}(Z, X)$  such that*

$$Z = |H_1 \cap \dots \cap H_r|.$$

*Proof.* — Propositions 2.2 and 2.3 imply that  $|X|$  alone determines the property of  $H$  being ample, as well as the linear similarity relation  $H_i \sim_s H$ .  $\square$

We will call such a closed subscheme  $H_1 \cap \dots \cap H_r \subset X$  a *complete  $H$ -intersection*. The requirement that the  $H_i$  be irreducible and only linearly similar (as opposed to linearly equivalent) to  $H$  makes this definition slightly nonstandard, but it is convenient because Propositions 2.2 and 2.3 only concern irreducible divisors. Any positive-dimensional complete  $H$ -intersection  $H_1 \cap \dots \cap H_r$  is automatically geometrically connected by the Lefschetz hyperplane theorem (SGA 2<sub>new</sub>, XII, 3.5), and the same then also holds for set-theoretic complete  $H$ -intersections.

### 3. RECOVERING $\mathbb{Q}$ -LINEAR EQUIVALENCE OF AMPLE DIVISORS

**NOTATION.** *In this section, we let  $X$  be a normal, geometrically integral, projective variety over field  $k$  of characteristic 0 and let  $H \subset X$  be an irreducible ample divisor.*

To prepare for topological recognition of linear equivalence of divisors, for now we continue to restrict to irreducible ample divisors and show how to recognize  $\mathbb{Q}$ -linear equivalence between them. This refines the result presented in the previous section

because  $\mathbb{Q}$ -linear equivalence  $\sim_{\mathbb{Q}}$  is a finer relation than linear similarity  $\sim_s$ . In addition, it involves techniques that will also be relevant later, such as topological recognition of reduced 0-dimensional intersections that we discuss in Proposition 3.5 below. A key notion behind these techniques is that of (topological) linkage defined as follows.

**DEFINITION 3.1.** — *Let  $Y_1, Y_2 \subset X$  be integral closed subschemes with  $\dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$ . Irreducible divisors  $H_1, H_2 \subset X$  with  $H_1 \sim_s H_2 \sim_s H$  are  $H$ -linked for  $Y_1$  and  $Y_2$  if some irreducible divisor  $\widetilde{H} \subset X$  with  $\widetilde{H} \sim_s H$  satisfies*

$$|\widetilde{H} \cap Y_1| = |H_1 \cap Y_1| \quad \text{and} \quad |\widetilde{H} \cap Y_2| = |H_2 \cap Y_2|.$$

*The  $H$ -linking of  $Y_1$  and  $Y_2$  is free if, for some finite set of closed points  $\Sigma \subset Y_1 \cup Y_2$ , all  $H_1$  and  $H_2$  as above that are disjoint from  $\Sigma$  are  $H$ -linked for  $Y_1$  and  $Y_2$ .*

By Propositions 2.2 and 2.3, if  $\dim X \geq 3$ , then these notions depend only on  $|X|$ . They topologically encode reducedness of 0-dimensional schematic intersections as follows.

**PROPOSITION 3.2** (KOLLÁR, 2020, Prop. 81). — *Let  $Y_1$  and  $Y_2$  be as in Definition 3.1 and suppose that  $\dim X \geq 3$ ,  $\dim Y_1 \geq 2$ ,  $\dim Y_2 \geq 1$ , and  $Y_1$  is geometrically connected (for instance, a set-theoretic complete  $H$ -intersection). Then the  $H$ -linking of  $Y_1$  and  $Y_2$  is free if and only if  $Y_1 \cap Y_2$  is reduced with  $\Gamma(Y_i, \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y_1 \cap Y_2, \mathcal{O})$  for some  $i$ .*

*Sketch of proof.* — Since  $\mathcal{O}(H)$  is ample, its global sections on  $Y_1 \cup Y_2$  lift to  $X$  after possibly replacing them by powers. The  $H_i$  and  $\widetilde{H}$  that appear in the definition of free  $H$ -linking correspond to some  $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}(n_i H))$  and  $\tilde{s} \in \Gamma(X, \mathcal{O}(\tilde{n}H))$ . Thus, in essence, the question of free  $H$ -linking of  $Y_1$  and  $Y_2$  is that of patching the sections  $s_i|_{Y_i}$  along  $Y_1 \cap Y_2$  to glue some of their powers to a section over  $Y_1 \cup Y_2$ . We may adjust the  $s_i|_{Y_i}$  by global units, so the glueing is intimately related to the restriction map

$$\Gamma(Y_1, \mathcal{O})^\times \times \Gamma(Y_2, \mathcal{O})^\times \rightarrow \Gamma(Y_1 \cap Y_2, \mathcal{O})^\times.$$

The analysis of this map eventually gives the claim, see *loc. cit.* for details. □

**Remark 3.3.** — In this proposition, the geometric connectedness of  $Y_1$  ensures that  $k \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y_1, \mathcal{O})$ . For  $X$  of dimension  $\geq 4$ , this then leads to a topological criterion for recognizing when a  $k$ -smooth closed point  $x \in X$  is  $k$ -rational because one may realize such an  $x$  as the schematic intersection  $Y_1 \cap Y_2$  of set-theoretic complete  $H$ -intersections  $Y_i$  with  $\dim Y_1 = 2$  and  $\dim Y_2 = 1$ , see KOLLÁR (2020, Cor. 82) and Corollary 2.4 above.

More generally, by building on the idea of analyzing free  $H$ -linking of set-theoretic complete  $H$ -intersections, Kollár is able to topologically recognize isomorphy of 0-dimensional closed subschemes lying in the smooth locus as follows.

PROPOSITION 3.4 (KOLLÁR, 2020, §84). — Suppose that  $\dim X \geq 4$  and let  $Z_1$  and  $Z_2$  be 0-dimensional, reduced closed subschemes of  $X^{\text{sm}}$ . Then  $(|X|, \sim_s$  of irreducible ample divisors) alone determines whether or not  $Z_1$  and  $Z_2$  are isomorphic as  $k$ -schemes.

In the setting of Proposition 3.2, it is also possible to topologically determine when  $Y_1 \cap Y_2$  is reduced (without the additional condition on the global sections) as follows.

PROPOSITION 3.5. — Suppose that  $\dim X \geq 3$  and let  $Y \subset X$  be an irreducible, geometrically connected closed  $k$ -subvariety. For irreducible, geometrically connected closed  $k$ -subvarieties  $Y', Z \subset X$  such that

$$|Y \cap Z| = |Y' \cap Z| \quad \text{and this intersection is 0-dimensional,}$$

consider the following condition (that is topological by Propositions 2.2 and 2.3):

(★) there is a finite set of closed points  $\Sigma \subset Y \cup Y' \cup Z$  such that all irreducible divisors  $H_1, H_2 \subset X$  disjoint from  $\Sigma$  with  $H_i \sim_s H$  that are  $H$ -linked for  $Y'$  and  $Z$  are also  $H$ -linked for  $Y$  and  $Z$ .

- (a) (KOLLÁR, 2020, Cor. 89). If  $\dim Y \geq 2$  and  $Z$  satisfies  $\dim X - 3 \geq \dim Z \geq 1$  and is such that (★) holds for every 2-dimensional, irreducible complete  $H$ -intersection  $Y'$ , then  $Y \cap Z$  is reduced.
- (b) (KOLLÁR, 2020, Cor. 93). If  $\dim Y \geq 3$  and  $y \in Y$  is a closed point such that  $X$  is  $k$ -smooth at  $y$ , then  $Y$  is  $k$ -smooth at  $y$  if and only if there is an irreducible complete  $H$ -intersection  $Z \subset X$  of codimension  $\dim Y$  such that  $Y \cap Z$  is 0-dimensional, contains  $y$ , and (★) holds whenever  $Y'$  is an irreducible complete  $H$ -intersection.

In (a), if  $Y \cap Z$  is reduced, then  $Y \cap Z \subset Y' \cap Z$ , so a patching of global sections of powers of  $\mathcal{O}(H)$  that gives rise to an  $H$ -linking of  $H_1$  and  $H_2$  for  $Y'$  and  $Z$  also gives a required patching with  $Y$  in place of  $Y'$  (compare with the sketch of proof for Proposition 3.2). Thus, the main part is the converse, for which we refer to *loc. cit.* The role of the assumption on  $\dim Z$  is to ensure, via the Bertini theorem, that there are many possible  $Y'$  with  $|Y' \cap Z| = |Y \cap Z|$ : the intersection of all such  $Y'$  is  $(Y \cap Z)^{\text{red}}$ .

In addition to topologically recognizing  $k$ -points and reducedness of 0-dimensional intersections as above, Kollár determines equality of intersection numbers as follows.

PROPOSITION 3.6 (KOLLÁR, 2020, Cor. 96). — Suppose that  $\dim X \geq 2$ . For prime divisors  $D_1, \dots, D_n \subset X$  and rational numbers  $q_{ij} \in \mathbb{Q}_{>0}$  with  $1 \leq i, j \leq n$ , we have

$$D_i \cdot H^{\dim X - 1} = q_{ij} \cdot D_j \cdot H^{\dim X - 1} \quad \text{for all } 1 \leq i, j \leq n$$

if and only if for some closed  $Z_0 \subset X$  of codimension  $\geq 2$  and every closed  $Z \subset X$  of codimension  $\geq 2$  containing  $Z_0$  there is a 1-dimensional, irreducible complete  $H$ -intersection  $C \subset X$  disjoint from  $Z$  such that each  $C \cap D_i$  is a disjoint union of  $m_i$  copies of  $\text{Spec}(K)$  for a finite field extension  $K/k$  that does not depend on  $i$ , and  $q_{ij} = \frac{m_i}{m_j}$ .

*Sketch of proof.* — The ‘only if’ follows from the definitions: indeed, the intersection number  $D_i.H^{\dim X-1}$  is read off from the schematic intersection  $C \cap D_i$ . For the ‘if,’ one first reduces to  $X$  being a surface by cutting it by irreducible ample divisors that are linearly similar to  $H$  and constructed via the Bertini theorem. Then the  $D_i$  are curves and one seeks a  $C$  cut out by some nonzero  $s \in H^0(X, \mathcal{O}(mH))$  for a large  $m > 0$  (such an  $s$  would lift to a section of  $\mathcal{O}(mH)$  defined over the original  $X$ ). By considering  $\mathcal{O}(mH)|_{\bigcup_{i=1}^n D_i}$  instead, it suffices to find a global section  $s_0$  of this sheaf for a large  $m > 0$  such that  $\{s_0 = 0\}$  is disjoint from  $Z$  and  $D_i \cap D_j$  for distinct  $D_i$  and  $D_j$  and is a union of copies of  $\text{Spec}(K)$  for some finite extension  $K/k$ . The key input to finding this  $s_0$  is a variant of a result of POONEN (2001), according to which, for any quasi-finite, generically étale morphism  $\pi: \bigcup_{i=1}^n D_i \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ , there are infinitely many separable closed points  $p \in \mathbb{P}_k^1$  whose  $\pi$ -preimage is a reduced disjoint union of copies of  $p$ .  $\square$

In practice,  $Z_0$  is the nonsmooth locus  $X \setminus X^{\text{sm}}$ . However,  $X \setminus X^{\text{sm}}$  need not *a priori* be determined by the topological space  $|X|$ , so, to get around this, one allows larger  $Z$  while still retaining the smoothness of  $X \setminus Z$ . In particular, Propositions 3.4 and 3.5 (a) show that, for  $X$  of dimension  $\geq 4$ , Proposition 3.6 gives a purely topological criterion for determining the ratios between the intersection numbers  $D_i.H^{\dim X-1}$ .

**COROLLARY 3.7.** — *Suppose that  $\dim X \geq 4$ . For prime divisors  $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  on  $X$ , the topological space  $|X|$  alone determines the ratios between the  $D_\lambda.H^{\dim X-1}$ .*

*Sketch of proof.* — It suffices to apply the reasoning above to every pair  $\{D_\lambda, D_{\lambda'}\}$ .  $\square$

In a similar vein, Proposition 3.6 implies the following criterion for recognizing  $\mathbb{Q}$ -linear equivalence of irreducible ample divisors.

**COROLLARY 3.8** (KOLLÁR, 2020, Claim 97.5). — *Suppose that  $\dim X \geq 2$ . For irreducible ample divisors  $H_1, H_2 \subset X$ , we have*

$$H_1 \sim_{\mathbb{Q}} H_2 \quad \text{if and only if both} \quad H_1 \sim_s H_2 \quad \text{and} \quad H_1.H^{\dim X-1} = H_2.H^{\dim X-1}.$$

*Sketch of proof.* — The ‘only if’ is clear because intersection numbers are insensitive to linear equivalence. For the ‘if,’ suppose that  $n_1 H_1 \sim n_2 H_2$  and use Proposition 3.6 to find a 1-dimensional, irreducible complete  $H$ -intersection  $C \subset X$  such that  $C \cap H_1$  and  $C \cap H_2$  are 0-dimensional, reduced, and  $k$ -isomorphic. This  $k$ -isomorphism and the assumed equality of intersection numbers imply that  $n_1 = n_2$ , so that  $H_1 \sim_{\mathbb{Q}} H_2$ .  $\square$

In the case when  $\dim X \geq 4$ , the criterion given by Corollary 3.8 is topological thanks to Corollary 3.7 and Propositions 2.2 and 2.3.

#### 4. TOPOLOGICAL PENCILS OF DIVISORS

NOTATION. *In this section, we let  $X$  be a geometrically normal, geometrically integral, positive-dimensional projective variety over a field  $k$ .*

The basic idea for topologically recognizing linear equivalence between general divisors on  $X$  is to first make them ample by adding a multiple of some ample divisor and to then place them into linear pencils with a common member whose general members are irreducible. In some sense this strategy achieves a reduction to the case of irreducible ample divisors considered in §§2–3, and the key for carrying it out is to topologically describe families of divisors that end up constituting the desired pencils. The central notion is that of a topological pencil that we are going to examine in this section.

DEFINITION 4.1. — *For a topological space  $T$ , a base locus of an infinite collection  $\mathcal{P} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  of subsets  $D_\lambda \subset T$ , denoted by  $\text{Base}(\mathcal{P})$ , is a closed subset  $B \subset T$  such that, for some  $\Lambda' \subset \Lambda$  whose complement is finite, we have*

$$D_\lambda \cap D_{\lambda'} \subseteq B \quad \text{for all distinct } \lambda, \lambda' \in \Lambda, \quad \text{with } D_\lambda \cap D_{\lambda'} = B \quad \text{when } \lambda, \lambda' \in \Lambda'.$$

Due to the last requirement, the base locus  $\text{Base}(\mathcal{P})$  is unique if it exists.

DEFINITION 4.2 (KOLLÁR, 2020, Def. 105). — *A topological pencil on  $X$  is a set  $\mathcal{P} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  of reduced divisors  $D_\lambda \subset X$  such that*

- *all but finitely many  $D_\lambda$  are irreducible;*
- *the  $D_\lambda$  jointly cover all the closed points of  $X$ ;*
- *$B := \text{Base}(\mathcal{P})$  exists, is of codimension  $\geq 2$  in  $X$ , and each  $D_\lambda \setminus B$  is connected.*

*A topological pencil  $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  is ample if all but finitely many  $D_\lambda$  are ample divisors.*

Since  $B$  is of codimension  $\geq 2$ , the divisors  $D_\lambda$  in a topological pencil are connected and pairwise have no common irreducible components. The notions of a topological pencil and of its base depend only on the topological space  $|X|$  and, if  $\dim X \geq 2$ , then, by Proposition 2.2, so does the ampleness of such a pencil. The following is the principal source of topological pencils.

Example 4.3. — Let  $C$  be a normal, projective, integral  $k$ -curve and let  $\pi: X \dashrightarrow C$  be a dominant rational  $k$ -morphism whose maximal locus of definition is  $X \setminus B$  for a closed subset  $B \subset X$ . Since  $X$  is normal and  $C$  is projective and nonsingular,  $B$  is of codimension  $\geq 2$  in  $X$  and  $\pi|_{X \setminus B}$  is flat. Let  $\mathcal{P} = \{D_\lambda\}$  be the collection of the closures in  $X$  of the reduced connected components of  $(\pi|_{X \setminus B})^{-1}(c)$  for a variable closed point  $c \in C$ . We will now show that  $\mathcal{P}$  is a topological pencil on  $X$  with base locus  $B$ .

The rational map  $\pi$  factors through the normalization  $\tilde{C}$  of  $C$  in the maximal algebraic subextension of  $k(X)/k(C)$  and this factorization has the same maximal locus of definition  $X \setminus B$ . By replacing  $C$  by  $\tilde{C}$ , we do not change  $\mathcal{P}$  and may assume that  $k(C)$  is algebraically closed in  $k(X)$ , so that, by EGA IV<sub>2</sub>, 4.5.9, the generic fiber of  $\pi$

is geometrically irreducible. It then follows from EGA IV<sub>3</sub>, 9.7.7 that all but finitely many  $D_\lambda$  are irreducible.

Consider the closure  $\overline{X} \subset X \times_k C$  of the graph of  $\pi|_{X \setminus B}$ , which inherits  $k$ -morphisms

$$\begin{array}{ccc} & \overline{X} & \\ b \swarrow & & \searrow \overline{\pi} \\ X & \overset{\pi}{\dashrightarrow} & C \end{array}$$

such that  $b$  is an isomorphism over  $X \setminus B$  and both  $\overline{\pi}$  and  $b$  are proper. The locus  $U$  of  $X$  over which  $b$  has finite fibers is open (SP, 01TI), so, since  $X$  is normal and  $b$  is birational, the finite map  $b|_{b^{-1}(U)}$  is an isomorphism. In particular,  $U = X \setminus B$  and  $B$  consists precisely of the points  $x \in X$  such that  $\dim(b^{-1}(x)) > 0$ . Since  $\overline{X} \subset X \times_k C$ , for closed such  $x$  the map  $b^{-1}(x) \rightarrow C$  is finite surjective and  $\dim(b^{-1}(x)) = 1$ .

The closure in  $X$  of a reduced connected component of  $(\pi|_{X \setminus B})^{-1}(c)$  is the  $b$ -image of the closure in  $\overline{X}$  of the corresponding reduced connected component of  $(\overline{\pi}|_{\overline{X} \setminus b^{-1}(B)})^{-1}(c)$ . Moreover, since  $C$  is nonsingular,  $\overline{\pi}$  is flat and its closed fibers are purely of dimension  $\dim X - 1$ . Thus, we conclude from the previous paragraph that the  $D_\lambda$  jointly cover all the closed points of  $X$  and that the base locus of  $\mathcal{P}$  is precisely  $B$  (in Definition 4.1 choose  $\Lambda'$  to consist of those closed points  $c \in C$  such that the  $c$ -fibers of  $\pi$  and  $\overline{\pi}$  are geometrically irreducible).

DEFINITION 4.4. — *A topological pencil  $\mathcal{P}$  on  $X$  is algebraic (resp., rational; resp., linear) if it is associated to some  $C$  and  $\pi$  as in Example 4.3 (resp., with  $C_k \simeq \mathbb{P}_k^1$ ; resp., with  $C \simeq \mathbb{P}_k^1$ ); an algebraic  $\mathcal{P}$  is noncomposite if  $\tilde{C} = C$  in Example 4.3, that is, if every finite morphism  $C' \rightarrow C$  of normal, projective, integral  $k$ -curves through which  $\pi$  factors is an isomorphism, equivalently, if  $k(C)$  is algebraically closed in  $k(X)$ .*

The following example relates topological pencils and linear equivalence.

Example 4.5. — Let  $\mathcal{L}$  be a line bundle on  $X$  and let  $s_0, s_\infty \in H^0(X, \mathcal{L})$  be nonzero global sections. The vanishing loci  $D_0 := \{s_0 = 0\}$  and  $D_\infty := \{s_\infty = 0\}$  are linearly equivalent divisors on  $X$ . If  $D_0$  and  $D_\infty$  have no common irreducible components, then  $s_0$  and  $s_\infty$  span a linear pencil whose base locus is  $\{s_0 = s_\infty = 0\}$ : indeed, to relate to Example 4.3, it suffices to note that  $s_0$  and  $s_\infty$  determine a rational map  $\pi: X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1$  whose maximal locus of definition is  $X \setminus \{s_0 = s_\infty = 0\}$ .

Conversely, for any pair of  $k$ -points  $c, c' \in \mathbb{P}_k^1$ , there is a rational function  $f \in k(t)$  that vanishes to order one at  $c$  and has a simple pole at  $c'$ , so any two  $k$ -fibers of a linear topological pencil  $\mathcal{P}$  are linearly equivalent on  $X$ .

To utilize this example, we need to recognize linearity of algebraic pencils.

LEMMA 4.6 (KOLLÁR, 2020, Lem. 109). — *Suppose that  $k$  is perfect and let  $\mathcal{P}$  be an algebraic topological pencil on  $X$ .*

- (a) *If  $\text{Base}(\mathcal{P})$  meets the  $k$ -smooth locus  $X^{\text{sm}} \subset X$ , then  $\mathcal{P}$  is rational.*



- (b) If  $\mathcal{P}$  is rational and  $X^{\text{sm}}(k) \neq \emptyset$ , then  $\mathcal{P}$  is linear.  
 (c) If  $\mathcal{P}$  is rational and the  $k$ -smooth locus of some  $D \in \mathcal{P}$  contains a nonempty open of some geometrically irreducible closed  $k$ -subvariety  $Y \subset \text{Base}(\mathcal{P})$ , then  $\mathcal{P}$  is linear.

*Proof.* — Let  $C$ ,  $\pi$ , and  $\overline{X}$  be as in Example 4.3 and let  $\widetilde{\overline{X}}$  be the normalization of  $\overline{X}$ . The role of the perfectness of  $k$  is to ensure that the normal  $k$ -curve  $C$  is  $k$ -smooth.

- (a) By a result of Abhyankar (KOLLÁR, 1996, VI.1.2), the positive dimensional fibers of a proper modification  $Y' \rightarrow Y$  of excellent, normal schemes with  $Y$  regular contain nonconstant rational curves (BHATT, 2012, Rem. 4.5). We apply this to the restriction of the morphism  $\widetilde{\overline{X}} \rightarrow X$  to  $X^{\text{sm}}$ : by using the assumption on  $\text{Base}(\mathcal{P})$ , we conclude that each positive-dimensional fiber of  $\overline{X} \rightarrow X$  receives a nonconstant morphism from a rational curve. It then follows from Example 4.3 that  $C_{\overline{k}}$  also receives such a morphism, so that  $C_{\overline{k}} \simeq \mathbb{P}_{\overline{k}}^1$ . Thus,  $\mathcal{P}$  is rational, as desired.  
 (b) If  $X^{\text{sm}}(k) \neq \emptyset$ , then the Lang–Nishimura theorem (POONEN, 2017, 3.6.11) implies that  $C(k) \neq \emptyset$ . Since, by assumption,  $C_{\overline{k}} \simeq \mathbb{P}_{\overline{k}}^1$ , we then conclude that  $C \simeq \mathbb{P}_k^1$ .  
 (c) Suppose that  $D$  arises from a closed point  $c \in C$  as in Example 4.3. It suffices to argue that  $[k(c) : k] = 1$ , since then  $C(k) \neq \emptyset$  and  $C \simeq \mathbb{P}_k^1$  (compare with (b)). Since  $k$  is perfect, Example 4.3 applied over  $\overline{k}$  shows that  $D_{\overline{k}}$  is a  $\text{Gal}(\overline{k}/k)$ -orbit of  $[k(c) : k]$  closures of connected components of fibers of  $\pi$  over  $\overline{k}$ . Thus, if  $D$  is  $k$ -smooth at the generic point of some geometrically irreducible  $k$ -subvariety  $Y \subset \text{Base}(\mathcal{P})$ , then the closures of distinct connected components of fibers of  $\pi$  over  $\overline{k}$  cannot simultaneously contain a nonempty open of  $Y_{\overline{k}}$ , so  $[k(c) : k] = 1$ .  $\square$

We turn to the key question of topologically recognizing when a topological pencil is algebraic. The most basic example is the following case of an empty base locus.

*Example 4.7.* — Suppose that  $k$  is algebraically closed. Then, by BOGOMOLOV, PIRUTKA, and SILBERSTEIN (2016, Thm. 1.1), every topological pencil  $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  whose base locus is empty, in other words, such that  $D_\lambda \cap D_{\lambda'} = \emptyset$  for  $\lambda \neq \lambda'$ , is algebraic. Indeed, *loc. cit.* says that there are a smooth, projective  $k$ -curve  $C$  and a surjective  $k$ -morphism  $\pi : X \rightarrow C$  with connected fibers such that each  $D_\lambda$  is contained in a (closed) fiber of  $\pi$ . Since the  $D_\lambda$  jointly cover the closed points of  $X$ , the set of closed fibers of  $\pi$  is then precisely  $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ .

To proceed beyond empty base loci, it is useful to first note that algebraic topological pencils are determined by infinitely many members as follows. In essence, this is the basic reduction mechanism for reaching irreducible ample divisors from general divisors.

LEMMA 4.8. — *For topological pencils  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}'$  on  $X$  with  $\mathcal{P}'$  algebraic, if the set  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$  of those divisors  $D \subset X$  that belong to both  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}'$  is infinite, then  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ .*

*Proof.* — The infinitude of  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$  implies that  $\text{Base}(\mathcal{P}) = \text{Base}(\mathcal{P}')$ , so we let  $B$  be this common base locus and let  $\pi : X \dashrightarrow C$  be a dominant rational morphism that gives rise to  $\mathcal{P}'$  as in Example 4.3. As in that example,  $X \setminus B$  is the maximal locus of definition

of  $\pi$  and we may assume that the generic fiber of  $\pi$  is geometrically irreducible. The complements  $D \setminus B$  for  $D \in \mathcal{P}$  are connected and pairwise disjoint, so the infinitude of  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$  ensures that each  $D \setminus B$  lies in a single fiber of  $\pi$ . Since topological pencils cover the closed points of  $X$ , it then follows that  $D \in \mathcal{P}'$  and that  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ , as desired.  $\square$

The following is a topological criterion for algebraicity of topological pencils.

PROPOSITION 4.9 (KOLLÁR, 2020, Prop. 107). — *Suppose that  $k$  is infinite. A topological pencil  $\mathcal{P} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  on  $X$  is algebraic if and only if for some infinite subset  $\Lambda' \subset \Lambda$  and every (or merely some) irreducible ample divisor  $H \subset X$ , the intersection numbers*

$$D_\lambda.H^{\dim X-1} \quad \text{are all equal for } \lambda \in \Lambda';$$

*thus, if  $\text{char}(k) = 0$  and  $\dim(X) \geq 4$ , then the algebraicity of  $\mathcal{P}$  depends only on  $|X|$ .*

*Sketch of proof.* — The last assertion that concerns topological recognition of algebraicity of  $\mathcal{P}$  follows from the rest and from Proposition 2.2 and Corollary 3.7.

For the rest, when  $\dim(X) = 1$ , every  $\mathcal{P}$  is algebraic and the claim is that  $X$  has infinitely many closed points of the same degree over  $k$ . This holds because there is a finite  $k$ -morphism  $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  and  $\mathbb{P}^1(k)$  is infinite. Thus, we may assume that  $\dim X \geq 2$ .

We begin with the simpler ‘only if’ direction and assume that  $\mathcal{P}$  is algebraic, associated to a  $\pi: X \dashrightarrow C$  as in Example 4.3 such that all but finitely many fibers of  $\pi$  are geometrically irreducible. By the 1-dimensional case, there is an infinite set  $\Lambda'$  of closed points of  $C$  of the same degree over  $k$  with irreducible  $\pi$ -fibers. By using the Bertini theorem, for every irreducible ample divisor  $H \subset X$  and every  $\lambda, \lambda' \in \Lambda'$  we may find a complete  $H$ -intersection curve  $Y \subset X$  for which  $Y \cap \text{Base}(\mathcal{P}) = \emptyset$ , both  $Y \cap D_\lambda$  and  $Y \cap D_{\lambda'}$  are 0-dimensional, and  $Y$  is flat over a neighborhood of  $\lambda$  and  $\lambda'$  in  $C$ . Then

$$D_\lambda.H^{\dim X-1} = D_{\lambda'}.H^{\dim X-1}$$

because both these intersection numbers are equal to the product of the degree of  $Y$  over  $C$  with the common degree of the points in  $\Lambda'$ .

For the converse, we fix a single  $H$  and let  $d$  be the common value  $D_\lambda.H^{\dim X-1}$  for  $\lambda \in \Lambda'$  and consider the Chow  $k$ -scheme  $\text{Chow}_{X,d}$  that parametrizes those effective divisors  $D \subset X$  that satisfy  $D.H^{\dim X-1} = d$ , so that  $\text{Chow}_{X,d}$  is projective over  $k$  (KOLLÁR, 1996, Ch. I). The  $D_\lambda$  for  $\lambda \in \Lambda'$  give infinitely many closed points on  $\text{Chow}_{X,d}$ , so, since  $\text{Chow}_{X,d}$  is of finite type over  $k$ , their closure contains a positive-dimensional irreducible closed subscheme  $C \subset \text{Chow}_{X,d}$ . Consider the universal family of divisors  $\pi: E \rightarrow C$  base changed from  $\text{Chow}_{X,d}$ , as well as the resulting commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & X \\ \pi \downarrow & & \\ \text{Chow}_{X,d} & \supset & C \end{array}$$

for which the  $D_\lambda$  for  $\lambda \in \Lambda'$  appear as fibers of  $\pi$ . It suffices to argue that there is a nonempty open  $X^0 \subset X$  such that the  $i^{-1}(x)$  for a dense set of closed points  $x \in X^0$  are singletons. Then, up to a power of Frobenius if  $\text{char } k > 0$ , the map  $i$  will be birational,  $C$  will be a curve by counting dimensions,  $\pi$  will give rise to an algebraic topological pencil  $\mathcal{P}'$  on  $X$  as in Example 4.3, and Lemma 4.8 will imply the desired  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ .

For the claim about  $X^0$ , first of all, the image of  $i$  contains infinitely many distinct divisors  $D_\lambda$  for  $\lambda \in \Lambda'$ , so the Chevalley constructibility theorem (EGA IV<sub>1</sub>, 1.8.4) implies that  $i$  is dominant. We then let

$$X^0 \subset X \setminus \text{Base}(\mathcal{P})$$

be a nonempty open over which  $i$  is flat (EGA IV<sub>3</sub>, 11.2.6 (ii)) and let  $x$  range over the closed points of  $D_\lambda \cap X^0$  for  $\lambda \in \Lambda'$ . Suppose that for such an  $x \in D_\lambda \cap X^0$  the fiber  $i^{-1}(x)$  is not a singleton. Then the divisor  $i^{-1}(D_\lambda \cap X^0) \subset i^{-1}(X^0)$  meets some  $\pi$ -fibers  $E_c$  over closed points  $c \in C$  such that  $E_c$  is different from the  $\pi$ -fiber  $D_\lambda$ . By construction, the effective divisors  $E_c$  on  $X$  are all algebraically equivalent to  $D_\lambda$ , so, since the latter is irreducible, the nonempty intersections  $E_c \cap D_\lambda$  have pure codimension 2 in  $X$ . This means that the intersections  $i^{-1}(D_\lambda \cap X^0) \cap E_c$  are nowhere dense in  $E_c$ .

Since  $i^{-1}(D_\lambda \cap X^0) \subset i^{-1}(X^0)$  is of pure codimension 1, another application of the Chevalley constructibility theorem then shows that the map  $i^{-1}(D_\lambda \cap X^0) \rightarrow C$  given by  $\pi$  is dominant and its image contains a nonempty open  $C^0 \subset C$ . However, this is impossible: by construction of  $C$ , there is a closed point  $c \in C^0$  such that  $E_c = D_{\lambda'}$  for some  $\lambda' \in \Lambda' \setminus \{\lambda\}$ , and  $i^{-1}(D_\lambda \cap X^0)$  cannot meet  $E_c$  because  $D_\lambda \cap D_{\lambda'}$  lies in  $\text{Base}(\mathcal{P})$ , which does not meet  $X^0$ . Thus,  $i^{-1}(x)$  is indeed a singleton, as desired.  $\square$

**COROLLARY 4.10.** — *If  $k$  is uncountable (equivalently, if  $|X|$  uncountable), then every topological pencil on  $X$  is algebraic.*

*Proof.* — To see the parenthetical equivalence it suffices to note that, by Noether normalization,  $|X|$  is uncountable if and only if  $|\mathbb{A}_k^{\dim(X)}|$  is uncountable. Suppose that  $|X|$  is uncountable, let  $\mathcal{P} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  be a topological pencil on  $X$ , and fix a  $\lambda \in \Lambda$  and a closed point  $x \in D_\lambda \setminus \text{Base}(\mathcal{P})$ . Since  $\text{Base}(\mathcal{P})$  is of codimension  $\geq 2$  in  $X$ , by cutting  $D_\lambda$  by sufficiently general hyperplanes passing through  $x$  supplied by the Bertini theorem, we may build an irreducible curve  $C \subset X$  that properly meets  $D_\lambda$  but does not meet  $\text{Base}(\mathcal{P})$ . Then  $C$  meets each  $D_{\lambda'}$  in finitely many points, to the effect that, since  $|C|$  is uncountable and the  $D_{\lambda'}$  cover the closed points of  $X$ , the set  $\Lambda$  is also uncountable. On the other hand, the Néron–Severi group  $\text{NS}(X)$  is countable (SGA 6, XIII, Thm. 5.1). Thus, there is an infinite subset  $\Lambda' \subset \Lambda$  such that the  $D_{\lambda'}$  for  $\lambda' \in \Lambda'$  are pairwise algebraically equivalent, and so also pairwise numerically equivalent (SGA 6, XIII, Thm. 4.6). Proposition 4.9 then shows that the pencil  $\mathcal{P}$  is algebraic.  $\square$

## 5. RECOVERING LINEAR EQUIVALENCE OF DIVISORS

NOTATION. *In this section, we let  $X$  be a geometrically normal, geometrically integral, positive-dimensional projective variety over an infinite field  $k$ .*

We are ready to describe Kollár’s topological recognition of linear equivalence of divisors on  $X$ . The following lemma allows us to only consider reduced divisors. We recall from §1 that, by definition, reduced divisors are assumed to be effective.

LEMMA 5.1. — *For the subgroup  $\mathcal{R} \subset \text{Div}(X)$  generated by the differences of linearly equivalent reduced divisors, every class in  $\text{Div}(X)/\mathcal{R}$  is represented by a difference of reduced divisors. In particular,  $\mathcal{R}$  is the subgroup of all divisors linearly equivalent to 0.*

*Proof.* — The last assertion follows from the rest because the difference of reduced divisors lies in  $\mathcal{R}$  if and only if this difference is linearly equivalent to 0. For the rest, every divisor is a sum of irreducible divisors (with multiplicities), so it suffices to show that every irreducible divisor  $D \subset X$  is linearly equivalent to  $D_1 - D_2$  for some reduced divisors  $D_i \subset X$  that share no irreducible components with divisors  $D' \subset X$  in some fixed finite set containing  $D$ : then  $D$  and  $D_1 - D_2$  will agree in  $\text{Div}(X)/\mathcal{R}$  and, by iteratively applying this with  $D'$  ranging over the  $D_i$  from preceding steps, we will represent every class in  $\text{Div}(X)/\mathcal{R}$  by a difference of reduced divisors.

To find a desired linear equivalence  $D \sim D_1 - D_2$ , we first choose a very ample divisor  $H \subset X$  and an  $m > 0$  such that  $D + mH$  is also very ample (HARTSHORNE, 1977, II, Exercise 7.5). Since  $k$  is infinite, the Bertini theorem (JOUANOLOU, 1983, 6.10) then supplies our desired geometrically reduced divisors  $D_i$  with  $D_1 \sim D + mH$  and  $D_2 \sim mH$ .  $\square$

As for linear equivalence of reduced divisors, the following is the key criterion.

PROPOSITION 5.2 (KOLLÁR, 2020, Thm. 115). — *Suppose that  $k$  is perfect and  $\dim X \geq 3$ , and let  $H \subset X$  be an irreducible ample divisor. Reduced divisors  $D_1, D_2 \subset X$  are linearly equivalent if and only if for every large enough closed subset  $\Sigma \subset X$  of codimension  $\geq 2$  and every integral curve  $C \subset X$  not in  $D_1 \cup D_2 \cup \Sigma$ , there are*

- irreducible divisors  $D', E' \subset X$  not in  $D_1 \cup D_2$  with  $E'$  ample and containing  $C$ ;
- algebraic topological pencils  $\mathcal{P}_1$  and  $\mathcal{P}_2$  with  $C \subset \text{Base}(\mathcal{P}_i)$ ;
- an irreducible ample divisor  $E \subset X$  with  $(D_i + D' + E') \setminus (E \cup \Sigma)$  connected;

such that

- $D_i + D' + E'$  and  $E$  lie in  $\mathcal{P}_i$  (so  $E$  also contains  $C$ );
- all but finitely many closed points of  $C$  lie in the  $k$ -smooth loci  $E^{\text{sm}}$  and  $E'^{\text{sm}}$ ;
- $D_i + D' + E'$  and  $E$  lie in the subset of those  $D \in \mathcal{P}_i$  for which the function  $D \mapsto D \cdot H^{\dim X - 1}$  takes the minimal value attained infinitely many times on  $\mathcal{P}_i$ .

*Sketch of proof.* — We begin with the simpler ‘only if’ direction, suppose that  $D_1$  and  $D_2$  are linearly equivalent, and choose  $\Sigma$  to contain  $X \setminus X^{\text{sm}}$ . We then choose an irreducible ample divisor  $D'$  that shares no components with  $D_1$  and  $D_2$ , does not contain  $C$ , and is such that the  $\mathcal{O}(D_i) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(D')$  are generated by global sections. This makes the reduced divisors  $D_i + D'$  basepoint free, so also Cartier. Moreover, since  $k$  is perfect, the integral curve  $C$  is generically  $k$ -smooth. We may then use the Bertini theorem (KLEIMAN and ALTMAN, 1979, Thm. 7) (which uses the assumption on  $\dim(X)$ ) to find an irreducible ample divisor  $E'$  that contains  $C$ , is  $k$ -smooth at the generic point of  $C$ , properly meets every irreducible component of  $D_i + D'$ , does not contain any irreducible component of  $\Sigma$ , and is such that the  $D_i + D' + E'$  are very ample (HARTSHORNE, 1977, II, Exercise 7.5 (d)). Granted that we make sure (as we may) that  $E'$  is sufficiently ample, we may then apply the Bertini theorem (KLEIMAN and ALTMAN, 1979, Thm. 7) again, this time with the ample line bundle

$$\mathcal{O}(D_1 + D' + E') \simeq \mathcal{O}(D_2 + D' + E'),$$

to find an irreducible ample divisor  $E \subset X$  with  $E \sim D_i + D' + E'$  such that  $E$  contains  $C$ , is  $k$ -smooth at the generic point of  $C$ , and does not contain any irreducible component of  $D_i + D' + E'$  nor any irreducible component of the intersections between  $E'$  and the irreducible components of the  $D_i + D'$ . The  $(D_i + D' + E') \setminus (E \cup \Sigma)$  are then connected, and we let  $\mathcal{P}_i$  be the linear pencil spanned by  $D_i + D' + E'$  and  $E$  as in Example 4.5. By construction, these  $D'$ ,  $E'$ ,  $\mathcal{P}_i$ , and  $E$  satisfy all the requirements (to check the requirement about the intersection numbers, one uses the fact that both  $D_i + D' + E'$  and  $E$  are  $k$ -fibers of the pencil and argues with a complete  $H$ -intersection curve  $Y$  analogous to the one used in the proof of Proposition 4.9).

For the ‘if’ direction, we may assume that  $\Sigma$  contains  $X \setminus X^{\text{sm}}$  and use the Bertini theorem (JOUANOLOU, 1983, Thm. 6.10) to choose  $C$  to be a generically smooth, geometrically integral complete  $H$ -intersection. With these choices, by Lemma 4.6 (a), the pencils  $\mathcal{P}_i$  are rational and, by its part (c), then they are even linear. At this point one uses the condition that involves the degree function  $D \mapsto D.H^{\dim X - 1}$  to check that both  $D_i + D' + E'$  and  $E$  are  $k$ -fibers of the pencil  $\mathcal{P}_i$  (we omit the details of this step here). It then follows from Example 4.5 that  $D_i + D' + E' \sim E$ , so that also  $D_1 \sim D_2$ .  $\square$

**COROLLARY 5.3** (KOLLÁR, 2020, Thm. 116). — *Suppose that  $\text{char}(k) = 0$  and  $\dim X \geq 4$ . The topological space  $|X|$  determines linear equivalence of divisors on  $X$ .*

*Sketch of proof.* — By Lemma 5.1, it suffices to show that  $|X|$  determines linear equivalence between reduced divisors. For this, we explain why the notions and conditions that appear in the linear equivalence criterion of Proposition 5.2 are determined by  $|X|$ :

- Ampleness of irreducible divisors by Proposition 2.2;
- Algebraicity of topological pencils by Proposition 4.9;
- The function  $D \mapsto D.H^{\dim X - 1}$  up to constant multiple by Corollary 3.7;

- All but finitely many closed points of  $C$  lying in  $E^{\text{sm}}$  and  $E'^{\text{sm}}$  by Proposition 3.5 (b): to apply it, we choose  $\Sigma$  to contain  $X \setminus X^{\text{sm}}$  (then all but finitely many closed points of  $C$  lie in  $X^{\text{sm}}$ ) and we note that  $E$  and  $E'$  are geometrically connected by the Lefschetz hyperplane theorem (SGA 2<sub>new</sub>, XII, 3.5).  $\square$

In conclusion, we have now described the second reconstruction step promised in §1:

$$(|X|, \sim_s \text{ of irreducible ample divisors}) \rightsquigarrow (|X|, \sim \text{ of effective divisors}).$$

## 6. RECOVERING THE PROJECTIVE VARIETY ITSELF

NOTATION. *In this section, we let  $X$  be a normal, geometrically integral projective variety of dimension  $\geq 2$  over an infinite field  $k$ .*

The remaining step

$$(|X|, \sim \text{ of effective divisors}) \rightsquigarrow X$$

is a result of LIEBLICH and OLSSON (2019). In this step, the ultimate source of reconstruction is the fundamental theorem of projective geometry that characterizes projective spaces combinatorially in terms of properties of incidence between their points and lines—in effect, for projective spaces this theorem reconstructs the full structure of an algebraic variety from axiomatic combinatorial data. It is fascinating that the collinearity relation for points in projective space encodes rich scheme-theoretic structure. This is not quite unexpected, however—after all, one knows that this relation is capable of encoding, for instance, polynomial equations with integer coefficients (LAFFORGUE, 2003, p. iv, Remarques).

The precise version of such a theorem that Lieblich and Olsson use is as follows, established via an argument that is close to E. Artin’s classical proof.

THEOREM 6.1 (LIEBLICH and OLSSON, 2019, Thm. 4.4). — *Let  $V$  and  $V'$  be finite-dimensional vector spaces over infinite fields  $k$  and  $k'$ , respectively, and let*

$$U \subset \text{Gr}_1(\mathbb{P}(V))(k) \quad \text{and} \quad U' \subset \text{Gr}_1(\mathbb{P}(V'))(k')$$

*be collections of lines in  $\mathbb{P}(V)$  and  $\mathbb{P}(V')$  given by the sets of  $k$ -points and  $k'$ -points of some nonempty Zariski open subsets of the indicated Grassmannians. For any bijection*

$$b: \mathbb{P}(V)(k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V')(k') \quad \text{that induces an inclusion } U \hookrightarrow U',$$

*there are a field isomorphism  $\iota: k \xrightarrow{\sim} k'$  and a  $\iota$ -semilinear isomorphism  $V \xrightarrow{\sim} V'$  such that the induced isomorphism  $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V')$  agrees with  $b$  on some Zariski open containing all the lines in  $U$ .*

With this theorem in hand, the strategy is to apply it with

$$V := \Gamma(X, \mathcal{O}(mH)) \quad \text{and} \quad V' := \Gamma(X', \mathcal{O}(mH')) \quad \text{for all } m > 0$$

for a suitable very ample divisor  $H \subset X$  and a homeomorphic to  $X$  projective variety  $X'$  that one seeks to show to be isomorphic to  $X$  (with  $H'$  being the image of  $H$ ). Indeed, the isomorphisms  $V \xrightarrow{\sim} V'$  then give isomorphisms between the graded components of the coordinate rings that appear in the projective embeddings

$$X \cong \text{Proj} \left( \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}(mH)) \right) \hookrightarrow \text{Proj} \left( \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}(H))^{\otimes m} \right)$$

and

$$X' \cong \text{Proj} \left( \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(X', \mathcal{O}(mH')) \right) \hookrightarrow \text{Proj} \left( \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}(H'))^{\otimes m} \right).$$

With the help of some additional arguments to make sure that the isomorphisms of the graded pieces are compatible as  $m$  varies, one obtains the desired  $X \xrightarrow{\sim} X'$ .

In view of this strategy, the key becomes defining the subsets of lines  $U$  and  $U'$  with which to apply Theorem 6.1. Since  $k$  is infinite, a line  $\ell \subset \mathbb{P}(V)$  is spanned by any two of its  $k$ -points, which correspond to  $k^\times$ -orbits of sections of  $\Gamma(X, \mathcal{O}(mH))$ , that is, to effective divisors on  $X$  linearly equivalent to  $mH$ . The *base locus* of  $\ell$  is the locus of common vanishing on  $X$  of these effective divisors. Lieblich and Olsson choose  $U$  to consist of all the lines that satisfy the following definition (and analogously for  $U'$ ).

**DEFINITION 6.2.** — *With  $V := \Gamma(X, \mathcal{O}(mH))$  as above, a line  $\ell \subset \mathbb{P}(V)$  is strongly definable if there is a closed subset  $Z \subset |X|$  of codimension  $\geq 2$  such that  $\ell$  consists precisely of those effective divisors on  $X$  linearly equivalent to  $mH$  that contain  $Z$ .*

The following description of the set of all strongly definable lines is critical for applying Theorem 6.1 to reconstruct the projective variety  $X$ .

**LEMMA 6.3** (LIEBLICH and OLSSON, 2019, Lem. 5.13). — *If the linear system determined by the ample divisor  $H \subset X$  is basepoint free, then the strongly definable lines in  $\mathbb{P}(V)$  comprise the set of  $k$ -points of a nonempty Zariski open of the Grassmannian  $\text{Gr}_1(\mathbb{P}(V))$ .*

The precise formulation of the reconstruction result that Lieblich and Olsson obtain by carrying out the strategy that we sketched in this section is as follows.

**THEOREM 6.4** (LIEBLICH and OLSSON, 2019, Prop. 6.2.5)

*For normal, geometrically integral, proper varieties  $X$  and  $X'$  over infinite fields  $k$  and  $k'$ , respectively, if  $X$  is projective and  $\dim X \geq 2$ , then any homeomorphism  $|X| \xrightarrow{\sim} |X'|$  that matches the linear equivalence relations on effective divisors on  $X$  and  $X'$  underlies a scheme isomorphism  $X \xrightarrow{\sim} X'$ .*

This result achieves the final reconstruction step

$$(|X|, \sim \text{ of effective divisors}) \rightsquigarrow X,$$

and hence completes our sketch of the proof of Theorem 1.1.

*Acknowledgements.* I thank the organizers of the Séminaire Bourbaki for their kind invitation. I thank János Kollár for patiently answering numerous questions. I thank Việt Toàn Học for an invitation to give lectures related to the material presented here.

## REFERENCES

- Bhargav BHATT (2012). “Annihilating the cohomology of group schemes”, *Algebra Number Theory* **6** (7), pp. 1561–1577.
- Fedor A. BOGOMOLOV, Alena PIRUTKA, and Aaron Michael SILBERSTEIN (2016). “Families of disjoint divisors on varieties”, *Eur. J. Math.* **2** (4), pp. 917–928.
- Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ (1961). “Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **11**, p. 167 (henceforth cited as: EGA III<sub>1</sub>).
- (1964). “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I”, French. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **20**, p. 259 (henceforth cited as: EGA IV<sub>1</sub>).
- (1965). “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II”, French. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **24**, p. 231 (henceforth cited as: EGA IV<sub>2</sub>).
- (1966). “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **28**, p. 255 (henceforth cited as: EGA IV<sub>3</sub>).
- Robin HARTSHORNE (1977). *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. xvi+496.
- Melvin HOCHSTER (1969). “Prime ideal structure in commutative rings”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **142**, pp. 43–60.
- Johan de JONG et al. (2008–). *The Stacks Project*. Available at <http://stacks.math.columbia.edu> (henceforth cited as: SP).
- Jean-Pierre JOUANOLOU (1983). *Théorèmes de Bertini et applications*. French. Vol. 42. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, pp. ii+127.
- Steven L. KLEIMAN (1966). “Toward a numerical theory of ampleness”, *Ann. of Math.* (2) **84**, pp. 293–344.
- Steven L. KLEIMAN and Allen B. ALTMAN (1979). “Bertini theorems for hypersurface sections containing a subscheme”, *Comm. Algebra* **7** (8), pp. 775–790.



- János KOLLÁR (1996). *Rational curves on algebraic varieties*. Vol. 32. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, pp. viii+320.
- (2020). “What determines a variety?”, *preprint*. Available at <https://arxiv.org/abs/2002.12424v2>.
- János KOLLÁR, Max LIEBLICH, Martin OLSSON, and Will SAWIN (2020). “Topological reconstruction theorems for varieties”, *preprint*. Available at <https://arxiv.org/abs/2003.04847v3>.
- Laurent LAFFORGUE (2003). *Chirurgie des grassmanniennes*. French. Vol. 19. CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xx+170.
- Max LIEBLICH and Martin OLSSON (2019). “A reconstruction theorem for varieties”, *preprint*. Available at <https://arxiv.org/abs/1902.04668v1>.
- André NÉRON (1952). “Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d’une courbe algébrique dans un corps”, French. *Bull. Soc. Math. France* **80**, pp. 101–166.
- Bjorn POONEN (2001). “Points having the same residue field as their image under a morphism”, *J. Algebra* **243** (1), pp. 224–227.
- (2017). *Rational points on varieties*. Vol. 186. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xv+337.
- Girivaru V. RAVINDRA and Vasudevan SRINIVAS (2006). “The Grothendieck–Lefschetz theorem for normal projective varieties”, *J. Algebraic Geom.* **15** (3), pp. 563–590.
- Alexander GROTHENDIECK (2005). *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*. French. Vol. 4. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)]. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962; Augmenté d’un exposé de Michèle Raynaud. [With an exposé by Michèle Raynaud]; With a preface and edited by Yves Laszlo; Revised reprint of the 1968 French original. Société Mathématique de France, Paris, pp. x+208 (henceforth cited as: SGA 2<sub>new</sub>).
- Pierre BERTHELOT, Alexander GROTHENDIECK, and Luc ILLUSIE (1971). *Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6)*. French. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 225. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre. Springer-Verlag, Berlin-New York, pp. xii+700 (henceforth cited as: SGA 6).
- Roger WIEGAND and William KRAUTER (1981). “Projective surfaces over a finite field”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (2), pp. 233–237.

1175–20

Kęstutis Česnavičius

CNRS, Université Paris-Saclay,  
Laboratoire de mathématiques d'Orsay,  
F-91405, Orsay, France

*E-mail* : `kestutis@math.u-psud.fr`

**PROGRÈS RÉCENTS SUR LA CONJECTURE DE ZAGIER  
ET LE PROGRAMME DE GONCHAROV**  
[d'après Goncharov, Rudenko, Gangl, ...]

par Clément Dupont

**INTRODUCTION**

La fonction zêta d'un corps de nombres  $F$  (extension finie du corps des rationnels) a été définie par Dedekind sous la forme

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} \quad (s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1) ,$$

où la somme porte sur les idéaux non nuls de l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_F$ , et  $N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}|$  est la norme. C'est un invariant arithmétique fondamental d'un corps de nombres, qui généralise la fonction zêta de Riemann  $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$ . ZAGIER (1986, 1991) a conjecturé que la valeur spéciale  $\zeta_F(n)$ , pour un entier  $n \geq 2$ , s'exprime de manière précise en termes d'évaluations en des éléments de  $F$  du  $n$ -ème polylogarithme classique

$$\operatorname{Li}_n(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^n} \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1) .$$

Cette conjecture vise à généraliser la formule analytique du nombre de classes, qui exprime le résidu de la fonction zêta en  $s = 1$  en termes de logarithmes d'unités.

Les travaux fondateurs de BOREL (1974, 1977) sur la cohomologie du groupe linéaire permettent de relier  $\zeta_F(n)$  au covolume d'un groupe de  $K$ -théorie de  $F$  à l'intérieur d'un espace euclidien via le *régulateur*

$$K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n} ,$$

pour un entier  $d_n$  qui dépend de  $F$ , défini plus bas par (7). La conjecture de Zagier devient alors un énoncé en  $K$ -théorie : il s'agit de produire un cocycle explicite, exprimé grâce à la fonction  $\operatorname{Li}_n$ , pour la classe de cohomologie du groupe linéaire qui donne naissance au régulateur. Concrètement, cela consiste à découvrir et organiser les équations fonctionnelles des polylogarithmes, ce qui revient souvent à des considérations non triviales de géométrie projective élémentaire. Après la preuve par Zagier du cas  $n = 2$

de la conjecture<sup>(1)</sup>, cette stratégie a permis à GONCHAROV (1991, 1994, 1995a,b) de prouver le cas  $n = 3$ . On renvoie aux exposés à ce séminaire d'OESTERLÉ (1993) et de CATHELIN (1993) pour des comptes rendus de ces résultats. Des obstructions nouvelles apparaissent pour  $n = 4$ , ce qui explique qu'il ait fallu attendre une vingtaine d'années de plus pour voir une preuve de ce cas de la conjecture de Zagier, par GONCHAROV et RUDENKO (2018). Le premier objectif de ce texte est de décrire les enjeux et les grandes lignes de cette preuve.

Afin de comprendre la nécessité d'ingrédients supplémentaires dans le cas  $n \geq 4$ , un point de vue motivique sur la conjecture de Zagier est utile. La philosophie des motifs, due à Grothendieck, est celle d'une catégorie qui serait le réceptacle d'une théorie de cohomologie universelle pour les variétés algébriques (concentrant en un objet les groupes de cohomologie singulière, de de Rham,  $\ell$ -adique, etc.) et où les morphismes seraient liés aux cycles algébriques. Dans la vision de BEILINSON (1985) et DELIGNE (1985), le régulateur devrait être induit par la réalisation de Hodge au niveau des groupes d'extensions via la formule

$$(1) \quad \text{Ext}_{\text{MT}(F)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \simeq K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}.$$

On a noté  $\text{MT}(F)$  la catégorie tannakienne des motifs de Tate mixtes sur  $F$ , qui existe inconditionnellement grâce aux résultats de Borel et aux travaux de VOEVODSKY (2000) et LEVINE (1993), et pour laquelle la formule ci-dessus est vérifiée. Dans ce cadre, la conjecture de Zagier affirme que les extensions (1) proviennent toutes de certains motifs « polylogarithmiques », dont les  $\text{Li}_n(z)$  sont des périodes.

Pour  $n \leq 3$  la situation est particulièrement favorable, puisqu'on s'attend à ce que tous les motifs qui sont des extensions itérées de  $\mathbb{Q}(0)$ ,  $\mathbb{Q}(-1)$ ,  $\mathbb{Q}(-2)$ ,  $\mathbb{Q}(-3)$  proviennent de motifs polylogarithmiques. Pour  $n \geq 4$  ce n'est plus le cas et de nouveaux motifs doivent être pris en compte, associés aux polylogarithmes  *multiples*

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}}.$$

Le problème devient beaucoup plus subtil : du point de vue des périodes, il faut montrer que *certaines* combinaisons linéaires spéciales de polylogarithmes multiples — celles qui sont des périodes d'extensions (1) — s'expriment en termes de polylogarithmes classiques. Dans cette direction, GANGL (2016) a apporté une contribution cruciale en démontrant une équation fonctionnelle, prévue par Goncharov, reliant  $\text{Li}_{3,1}$  et  $\text{Li}_4$ . Celle-ci a été redécouverte par GONCHAROV et RUDENKO (2018) qui l'incorporent à un contexte général, inspiré par les travaux de FOCK et GONCHAROV (2009) sur le dilogarithme, où la structure des polylogarithmes multiples est organisée par la combinatoire des structures amassées. La structure opéradique des dissections de polygones

---

1. ZAGIER (1986) a découvert et prouvé une version faible du cas  $n = 2$  de la conjecture par des méthodes de géométrie hyperbolique. La preuve de la version forte, qu'on peut trouver chez GONCHAROV (1995a), est un assemblage de résultats dûs à BLOCH (1977, 1978), DUPONT et SAH (1982), DUPONT (1987), et SUSLIN (1990).

joue notamment un rôle central, en lien avec le formalisme des corrélateurs, qui sont des variantes des polylogarithmes multiples introduites par GONCHAROV (2019).

Au vu de la discussion précédente, les résultats dont il sera question dans ce texte s’inscrivent dans une stratégie vers la conjecture de Zagier découpée en deux étapes distinctes et relativement indépendantes :

- 1) La première étape consiste à démontrer une conjecture de Zagier « faible »<sup>(2)</sup> qui fait intervenir les polylogarithmes *multiples*. De manière imprécise, il s’agit de donner une « formule » pour le régulateur de Borel en termes de polylogarithmes multiples. GONCHAROV (2005b) a apporté une contribution importante dans cette direction en décrivant le régulateur de Borel via une fonction appelée polylogarithme grassmannien (univalué). CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) donnent une formule pour une variante multivaluée de cette fonction, due à GONCHAROV (2013), en termes de polylogarithmes multiples. Ces résultats suggèrent qu’on dispose aujourd’hui de tous les ingrédients nécessaires à la réalisation de cette première étape<sup>(3)</sup>.
- 2) La deuxième étape consiste à passer des polylogarithmes multiples aux polylogarithmes classiques. Cette étape se passe au niveau de versions motiviques de ces fonctions, où une structure (comultiplicative) supplémentaire permet de distinguer les périodes d’extensions (1). Le caractère inexplicite du formalisme motivique amène en fait à travailler avec des versions « symboliques » des polylogarithmes multiples, ce qui demande une compréhension fine des relations fonctionnelles qu’ils satisfont.

### Le programme de Goncharov

Un des enjeux de la conjecture de Zagier est de décrire explicitement la  $K$ -théorie des corps de nombres. Les travaux de MATSUMOTO (1969) sur le  $K_2$  prolongés par MILNOR (1970), ainsi que ceux de SUSLIN (1990) sur le  $K_3$ , laissent à penser que le cas des corps de nombres n’est pas spécial et qu’il existe des descriptions explicites uniformes des groupes de  $K$ -théorie de tous les corps. Le point de vue motivique permet d’éclairer cette question : en admettant des conjectures générales on dispose pour tout corps  $F$  d’une catégorie  $MT(F)$  où les groupes d’extensions sont reliés à la  $K$ -théorie par une formule qui raffine (1). Le formalisme tannakien fournit donc des *complexes motiviques* qui calculent les groupes de  $K$ -théorie de  $F$  (ou plus précisément les gradués pour la  $\gamma$ -filtration définie par SOULÉ (1985)).

Une idée centrale de Goncharov est de s’inspirer de ces complexes motiviques pour donner des descriptions inconditionnelles de la  $K$ -théorie des corps qui soient aussi explicites et « petites » que possible. Du point de vue motivique, l’enjeu est de donner

---

2. Ce terme est parfois utilisée pour qualifier les résultats de BEILINSON et DELIGNE (1994) et DE JEU (1995), qui sont de nature différente.

3. Les résultats de GERDES (1991) vont dans la même direction puisqu’ils donnent une description d’une partie de la  $K$ -théorie rationnelle des corps en termes de géométrie projective *linéaire* et donnent donc du poids à la conjecture selon laquelle les extensions (1) proviennent toutes de motifs polylogarithmiques multiples.

une définition inconditionnelle de la catégorie  $\mathrm{MT}(F)$  « par générateurs et relations », le rôle des générateurs étant joué par les polylogarithmes multiples (motiviques) ou par certaines variantes. On rassemble ici sous le terme *programme de Goncharov* l'ensemble cohérent de constructions et de conjectures développées par Goncharov dans cette direction durant les trente dernières années. Le second objectif de ce texte est d'en présenter certaines idées directrices (et notamment la *conjecture de liberté* et la *conjecture de profondeur*) et de placer dans ce cadre les résultats de GANGL (2016) et GONCHAROV et RUDENKO (2018), mais aussi des contributions de CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) et de RUDENKO (2020).

*Organisation de ce texte.* — Au §1 on présente la conjecture de Zagier et ses liens avec la  $K$ -théorie. On y aborde le problème des relations polylogarithmiques et on définit les *complexes polylogarithmiques* de Goncharov. Le §2 introduit les catégories de motifs de Tate mixtes et leur formalisme tannakien. Dans ce cadre, on étudie dans les §3 et 4 les versions motiviques des polylogarithmes (multiples), qui mènent à une interprétation motivique de la conjecture de Zagier. On énonce et analyse la *conjecture de liberté* et la *conjecture de profondeur* de Goncharov, qui sont des énoncés généraux sur la structure de la catégorie des motifs de Tate mixtes sur un corps.

Après avoir introduit les corrélateurs, qui sont des variantes des polylogarithmes multiples, on étudie au §5 les résultats de Gangl et Goncharov–Rudenko sur la structure fine des motifs de Tate mixtes en poids  $\leq 4$ , qui mènent à la preuve de la conjecture de Zagier pour  $n = 4$ . Un rôle important est joué par certaines familles de relations entre polylogarithmes multiples qui trouvent leur origine dans l'étude des structures amassées, point de vue qu'on développe au §6. On conclut en mentionnant les travaux récents de Rudenko sur la conjecture de profondeur.

Il est ici question d'un sujet aux multiples ramifications dont certains des aspects importants n'apparaissent pas dans ce texte, par manque de place. C'est notamment le cas des liens avec la géométrie hyperbolique (voir par exemple GONCHAROV (1999), BROWN (2013), RUDENKO (2020)) et des aspects « non génériques » reliés à la  $K$ -théorie de variétés générales et aux classes caractéristiques (voir par exemple GONCHAROV (1993), GONCHAROV et RUDENKO (2018)).

*Notations et conventions.* — Pour des nombres complexes non nuls  $a, b$  on note  $a \sim_{\mathbb{Q}^\times} b$  pour signifier que  $a \in \mathbb{Q}^\times b$ . Pour un groupe abélien  $A$  on note  $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . On note  $\mathbb{Q}[X]$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel librement engendré par les éléments d'un ensemble  $X$ . Pour une application  $f$  de  $X$  vers un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $V$ , on note  $f : \mathbb{Q}[X] \rightarrow V$  l'application linéaire induite. On note  $V_n$  la composante homogène de degré  $n$  d'un espace vectoriel  $\mathbb{Z}$ -gradué  $V$ . Tous les espaces vectoriels, algèbres, etc. sont implicitement définis sur  $\mathbb{Q}$ .

*Remerciements.* — Je tiens à remercier Herbert Gangl, Alexander Goncharov, et Daniil Rudenko pour leur aide précieuse dans la préparation de ce texte et la patience avec

laquelle ils m'ont expliqué leurs travaux. Un grand merci aussi à Francis Brown, Damien Calaque, et Javier Fresán pour leurs commentaires et suggestions sur une version préliminaire de ce texte.

## 1. LA CONJECTURE DE ZAGIER

### 1.1. La formule analytique du nombre de classes

Soit  $F$  un corps de nombres, dont on note  $r_1$  le nombre de plongements réels (numérotés  $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$ ) et  $r_2$  le nombre de paires de plongements complexes conjugués non réels (numérotés  $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \overline{\sigma_{r_1+1}}, \dots, \overline{\sigma_{r_1+r_2}}$ ), de sorte que le degré de  $F$  est  $[F : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$ . Le *régulateur de Dirichlet* est le morphisme de groupes abéliens

$$(2) \quad \rho : \mathcal{O}_F^\times \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

défini par  $\rho(x) = (\log |\sigma_1(x)|, \dots, \log |\sigma_{r_1}(x)|, \log |\sigma_{r_1+1}(x)|^2, \dots, \log |\sigma_{r_1+r_2}(x)|^2)$  pour  $x \in \mathcal{O}_F^\times$ , et  $\rho(k) = \frac{1}{r_1+r_2}(k, \dots, k)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Le théorème des unités de Dirichlet affirme que  $\rho$  est injectif modulo torsion et que son image est un réseau de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ ; le régulateur de  $F$ , noté  $R_F$ , est le covolume de ce réseau.

La *formule analytique du nombre de classes* exprime le résidu de la fonction zêta de  $F$  en  $s = 1$  en fonction du régulateur, du nombre  $w_F$  de racines de l'unité dans  $F$ , du discriminant  $D_F$ , et du nombre de classes  $h_F$  :

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta_F(s) = \frac{2^{r_1+r_2} h_F}{w_F} \frac{\pi^{r_2}}{\sqrt{|D_F|}} R_F .$$

Comme son nom l'indique, son intérêt premier est de donner accès au nombre de classes. Cependant, nous nous intéresserons ici à la partie *transcendante* de la formule, que nous écrirons sous la forme

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta_F(s) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \frac{\pi^{r_2}}{\sqrt{|D_F|}} \det(\log |\sigma_i(\varepsilon_j)|)_{1 \leq i, j \leq r_1+r_2-1} ,$$

où  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r_1+r_2-1})$  est une base de  $\mathcal{O}_F^\times$  modulo torsion.

### 1.2. Polylogarithmes et conjecture de Zagier

ZAGIER (1991) a conjecturé une généralisation de la formule (4) à toutes les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind, où le logarithme doit être remplacé par les polylogarithmes. Pour un entier  $n \geq 1$ , rappelons la définition du  $n$ -ème *polylogarithme classique* :

$$(5) \quad \text{Li}_n(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^n} \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1) .$$

On renvoie le lecteur à LEWIN (1981) pour une histoire de ces fonctions qui remonte à Leibniz. On a  $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$  et l'équation différentielle  $\text{Li}'_n(z) = \frac{1}{z} \text{Li}_{n-1}(z)$ , pour  $n \geq 2$ , montre que  $\text{Li}_n$  se prolonge en une fonction holomorphe *multivaluée* sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

Le caractère multivalué signifie que la détermination de  $\text{Li}_n(z)$  change quand on fait un prolongement en suivant un lacet autour de  $z = 1$ . On introduit les versions *univaluées*

$$P_n(z) = p_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k B_k}{k!} \log^k |z| \text{Li}_{n-k}(z) \right) = p_n \left( \text{Li}_n(z) - \log |z| \text{Li}_{n-1}(z) + \cdots \right),$$

où les  $B_k$  sont les nombres de Bernoulli<sup>(4)</sup> et où  $p_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  est l'application « partie réelle » si  $n$  est impair et « partie imaginaire » si  $n$  est pair. Ce sont des fonctions sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  qui sont analytiques réelles et se prolongent par continuité à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  si  $n \geq 2$ , avec  $P_n(0) = P_n(\infty) = 0$ . Comme on le verra plus bas, les fonctions  $P_n$  sont naturelles du point de vue motivique (BEILINSON et DELIGNE 1994), ce qui explique qu'elles se comportent mieux que d'autres versions univaluées des polylogarithmes classiques (considérées par exemple par RAMAKRISHNAN (1986) et ZAGIER (1990)).

On a  $P_1(z) = -\log |1 - z|$ , et  $P_2(z) = \text{Im}(\text{Li}_2(z) + \log |z| \log(1 - z))$  est une fonction spéciale remarquable qui est connue dans la littérature sous le nom de *dilogarithme de Bloch–Wigner* (BLOCH 1977, 1978). Elle vérifie une équation fonctionnelle « à 5 termes », pour  $x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  :

$$(6) \quad P_2(x) - P_2(y) + P_2\left(\frac{y}{x}\right) - P_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + P_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

qu'on peut prouver en notant<sup>(5)</sup> que  $dP_2 = -\log |1 - x| d \log(x) + \log |x| d \log(1 - x)$  et que le membre de gauche s'annule pour  $x = y$ .

Soient  $F$  un corps de nombres et  $r_1, r_2$  comme dans le paragraphe précédent. Pour un entier  $n \geq 2$  posons

$$(7) \quad d_n = \begin{cases} r_1 + r_2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ r_2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

et fixons l'identification

$$(8) \quad \left( \bigoplus_{\sigma: F \rightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R} \right)^+ \simeq \mathbb{R}^{d_n}$$

où le symbole  $+$  désigne l'espace des invariants pour la conjugaison complexe, qui agit à la fois sur  $\mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R}$  et sur l'ensemble des plongements de  $F$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $P_n$  est vu comme étant à valeurs dans  $\mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R}$  il vérifie  $P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}$  et on obtient grâce à (8) un morphisme noté

$$(9) \quad P_n^F : \mathbb{Q}[F^\times] \rightarrow \mathbb{R}^{d_n}.$$

4.  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ , etc.

5. On peut aussi (voir par exemple ZAGIER (2007)) la prouver par une méthode de géométrie hyperbolique en remarquant que  $P_2(x)$  est le volume du tétraèdre hyperbolique « idéal » dont les sommets sont  $\infty, 0, 1$ , et  $x$  dans le bord de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ , identifié à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . L'équation à 5 termes exprime l'additivité du volume pour les 5 tétraèdres hyperboliques dont les sommets sont pris parmi  $\infty, 0, 1, x, y$ . Il s'agit d'une version univaluée d'une équation fonctionnelle pour  $\text{Li}_2(z)$  due à Abel.



Il se calcule, pour  $x \in F^\times$ , par

$$P_n^F(x) = \begin{cases} (P_n(\sigma_1(x)), \dots, P_n(\sigma_{r_1+r_2}(x))) & \text{si } n \text{ est impair} \\ (P_n(\sigma_{r_1}(x)), \dots, P_n(\sigma_{r_1+r_2}(x))) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

et est étendu par linéarité à  $\mathbb{Q}[F^\times]$ .

CONJECTURE 1.1 (Zagier). — *Soient  $F$  un corps de nombres et  $n$  un entier  $\geq 2$ . Il existe des éléments  $\xi_1, \dots, \xi_{d_n} \in \mathbb{Q}[F^\times]$  tels qu'on ait*

$$(10) \quad \zeta_F(n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \frac{\pi^{n([F:\mathbb{Q}]-d_n)}}{\sqrt{|D_F|}} \det \left( P_n^F(\xi_j) \right)_{1 \leq j \leq d_n} .$$

Dans le cas où  $F$  est totalement réel et  $n$  est pair, cette conjecture est un résultat de KLINGEN (1962) et SIEGEL (1969) (on a alors  $d_n = 0$  et le déterminant dans (10) vaut 1) qui généralise la formule d'Euler :  $\zeta(n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \pi^n$  pour  $n$  pair. Elle est aussi connue pour tout  $n$  dans le cas où  $F$  est un corps cyclotomique : cela découle en effet de la décomposition de la fonction zêta de  $F$  en produit de fonctions  $L$  de Dirichlet, et de ce que la valeur en  $n$  d'une telle fonction  $L$  s'exprime comme combinaison linéaire d'évaluations de  $\text{Li}_n$  aux racines de l'unité. Plus généralement, le théorème de Kronecker–Weber permet d'obtenir, pour un corps de nombres abélien  $F$ , une expression de  $\zeta_F(n)$  en termes d'évaluations de  $\text{Li}_n$  aux racines de l'unité — qui ne sont cependant pas des éléments de  $F$  en général. Notons enfin que la conjecture 1.1 se prête à (et est justifiée par) des vérifications numériques, comme expliqué par ZAGIER (1991) et ZAGIER et GANGL (2000).

La conjecture 1.1 a été prouvée pour  $n = 2$  par Zagier (voir la note de bas de page <sup>(1)</sup>) et pour  $n = 3$  par GONCHAROV (1991, 1994, 1995a). Le théorème suivant a été prouvé récemment par GONCHAROV et RUDENKO (2018).

THÉORÈME 1.2. — *La conjecture de Zagier est vraie pour  $n = 4$ .*

Remarque 1.3. — En utilisant l'équation fonctionnelle reliant  $\zeta_F(s)$  à  $\zeta_F(1-s)$ , on peut exprimer (10) sous la forme plus simple  $\zeta_F^*(1-n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \det \left( P_n(\xi_j) \right)_{1 \leq j \leq d_n}$ , où  $\zeta_F^*(1-n)$  est le premier coefficient non nul dans le développement limité de  $\zeta_F(s)$  en  $s = 1-n$  (qui s'avère être le coefficient de degré  $d_n$ ).

### 1.3. Polylogarithmes multiples

Pour des entiers  $n_1, \dots, n_r \geq 1$  on peut généraliser (5) et définir en suivant GONCHAROV (1995b) le *polylogarithme multiple* (à plusieurs variables)

$$(11) \quad \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}} ,$$

qui est une fonction holomorphe au voisinage de  $z_i = 0$  et qu'on peut prolonger analytiquement. L'étude de telles fonctions, aussi appelées *hyperlogarithmes*, remonte au

moins à KUMMER (1840) et POINCARÉ (1884). Elles apparaissent naturellement lorsqu'on multiplie des polylogarithmes classiques, par exemple

$$\operatorname{Li}_{n_1}(z_1) \operatorname{Li}_{n_2}(z_2) = \operatorname{Li}_{n_1, n_2}(z_1, z_2) + \operatorname{Li}_{n_2, n_1}(z_2, z_1) + \operatorname{Li}_{n_1+n_2}(z_1 z_2) ,$$

qui s'obtient facilement en découpant le domaine de sommation double. On appelle *poids* la somme  $n_1 + \dots + n_r$  des indices dans (11) et *profondeur* le nombre  $r$  d'indices. Un fait général est que les relations fonctionnelles linéaires entre polylogarithmes multiples sont homogènes pour le poids. En revanche, pour un poids donné, il existe de nombreuses relations entre polylogarithmes multiples de profondeurs différentes. Par exemple, la relation suivante, valable autour de  $x = y = 0$  et qui se montre par différentiation, permet d'exprimer la fonction de deux variables  $\operatorname{Li}_{1,1}$  comme combinaison linéaire d'évaluations de la fonction d'une variable  $\operatorname{Li}_2$  :

$$\operatorname{Li}_{1,1}(x, y) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{y(1-x)}{y-1}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{y-1}\right) - \operatorname{Li}_2(xy) .$$

De même, en poids 3, les fonctions  $\operatorname{Li}_{2,1}$ ,  $\operatorname{Li}_{1,2}$  et  $\operatorname{Li}_{1,1,1}$  peuvent toutes s'exprimer comme combinaisons linéaires d'évaluations de  $\operatorname{Li}_3$  et de produits d'évaluations de  $\operatorname{Li}_1$  et  $\operatorname{Li}_2$ .

Ce phénomène s'arrête en poids 4, où  $\operatorname{Li}_1$ ,  $\operatorname{Li}_2$ ,  $\operatorname{Li}_3$ ,  $\operatorname{Li}_4$  ne suffisent pas à exprimer tous les polylogarithmes multiples, comme remarqué par BÖHM (1964) dans le contexte du calcul des volumes hyperboliques en dimension 7 (voir aussi WECHSUNG (1991), WOJTKOWIAK (1991), et GONCHAROV (1994)). Comme nous le verrons plus bas, c'est ce qui rend le cas  $n = 4$  de la conjecture de Zagier différent des cas  $n = 2, 3$  et crucial dans la compréhension du cas général.

#### 1.4. $K$ -théorie et régulateurs supérieurs

La conjecture de Zagier est la partie émergée d'un iceberg qui interroge la description de la  $K$ -théorie des corps. D'après QUILLEN (1973), les foncteurs de  $K$ -théorie associent, pour tout entier  $i \geq 0$ , un groupe abélien  $K_i(R)$  à un anneau (unitaire)  $R$ , qui est un invariant « homotopique » de la catégorie des  $R$ -modules projectifs. Nous serons surtout intéressés par la  $K$ -théorie rationnelle  $K_i(R)_{\mathbb{Q}}$ , qui est plus facile à calculer. En effet, le théorème de MILNOR et MOORE (1965) permet d'en donner une description « homologique » comme l'espace des éléments primitifs de l'homologie rationnelle du groupe général linéaire stable  $GL(R)$  (l'union des groupes  $GL_N(R)$ , où l'inclusion  $GL_N(R) \hookrightarrow GL_{N+1}(R)$  est donnée par  $g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ) :

$$K_i(R)_{\mathbb{Q}} \simeq \operatorname{Prim} H_i(GL(R), \mathbb{Q}) .$$

La  $K$ -théorie rationnelle d'un corps de nombres  $F$  a été complètement calculée par BOREL (1974, 1977). En plus des calculs classiques  $K_0(F) = \mathbb{Z}$  et  $K_1(F) = F^{\times}$ , Borel démontre l'annulation  $K_{2i}(F)_{\mathbb{Q}} = 0$  pour  $i \geq 1$ . Concernant le degré impair, il définit pour tout  $n \geq 2$  une classe de cohomologie dans  $H^{2n-1}(GL(\mathbb{C}), \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R})$ , qui induit un morphisme  $K_{2n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R}$ . Celui-ci est compatible à la conjugaison complexe et induit par functorialité et l'identification (8) le *régulateur de Borel*

$$\rho_n : K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n} .$$

Il joue pour les groupes de  $K$ -théorie supérieurs le même rôle que le régulateur de Dirichlet (2) pour le groupe  $K_1(\mathcal{O}_F) \simeq \mathcal{O}_F^\times$  (on a  $K_i(\mathcal{O}_F)_\mathbb{Q} \simeq K_i(F)_\mathbb{Q}$  pour  $i \geq 2$ ), comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 1.4 (Borel). — *Soit  $n \geq 2$ . Le régulateur  $\rho_n$  est injectif modulo torsion (et donc  $\dim_{\mathbb{Q}} K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} = d_n$ ). Son image est un réseau de  $\mathbb{R}^{d_n}$  dont le covolume  $R_F^{(n)}$  est relié à la fonction zêta de  $F$  par la formule*

$$(12) \quad \zeta_F(n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \frac{\pi^{n([F:\mathbb{Q}]-d_n)}}{\sqrt{|D_F|}} R_F^{(n)} .$$

Les preuves déjà mentionnées de la conjecture de Zagier pour  $n = 2, 3, 4$  s'appuient sur le théorème de Borel et la preuve de la conjecture suivante, que nous préciserons plus bas, dont l'enjeu est de donner une « formule » pour le régulateur  $\rho_n$ .

CONJECTURE 1.5. — *Il existe*

— *un sous-espace  $\mathcal{R}_n(F) \subset \mathbb{Q}[F^\times]$  ;*

— *une application linéaire  $\varphi_n : K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{B}_n(F) := \mathbb{Q}[F^\times]/\mathcal{R}_n(F)$  ;*

*tels que  $P_n^F$  passe au quotient par  $\mathcal{R}_n(F)$  et qu'on ait le diagramme commutatif suivant :*

$$(13) \quad \begin{array}{ccccc} K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathcal{B}_n(F) & \xrightarrow{P_n^F} & \mathbb{R}^{d_n} \\ & & \searrow \rho_n & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

En effet, (10) découle alors de (12) et (13) en prenant pour  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq d_n}$  des représentants des images par  $\varphi_n$  des éléments d'une base de  $K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q}$ .

Remarque 1.6. — Vu que le régulateur de Borel est d'abord défini sur la  $K$ -théorie de  $\mathbb{C}$  puis induit sur celle de  $F$  par functorialité, il est naturel de sortir la conjecture 1.5 du cadre des corps de nombres et de vouloir définir  $\mathcal{R}_n(F)$  et  $\varphi_n$  pour un corps  $F$  quelconque, de manière fonctorielle en  $F$  — ce que nous ferons dans le prochain paragraphe.

Remarque 1.7. — Le nombre rationnel implicite dans (12) devrait essentiellement être, selon une conjecture de LICHTENBAUM (1973), le quotient des ordres des sous-groupes de torsion de  $K_i(\mathcal{O}_F)$  pour  $i \in \{2n-2, 2n-1\}$ . Cela généralise naturellement (3) puisque les sous-groupes de torsion de  $K_0(\mathcal{O}_F)$  et  $K_1(\mathcal{O}_F)$  sont le groupe des classes de  $F$  et le groupe des racines de l'unité de  $F$  respectivement. Cette conjecture est connue pour  $F$  totalement réel et  $n$  pair (on renvoie le lecteur à l'article de survol de KAHN (2005) pour plus de détails).

Remarque 1.8. — BEILINSON (1985) a défini des régulateurs pour toutes les variétés algébriques sur  $\mathbb{Q}$  (la construction de Beilinson dans le cas de la variété  $\text{Spec}(F)$  redonne le double du régulateur de Borel d'après BURGOS GIL (2002)) et conjecturé une vaste généralisation du théorème de Borel dans ce cadre. Une version de la conjecture de Zagier pour la valeur en  $s = 2$  de la fonction  $L$  d'une courbe elliptique sur  $\mathbb{Q}$ , qui fait

intervenir le dilogarithme elliptique de BLOCH (1978), a été démontrée par GONCHAROV et LEVIN (1998).

### 1.5. Relations polylogarithmiques

On appelle  $\mathcal{R}_n(F) \subset \mathbb{Q}[F^\times]$  comme dans la conjecture 1.5 un espace de *relations polylogarithmiques*. GONCHAROV (1994, 1995a) a défini un candidat pour cet espace qui a l'avantage d'avoir un sens pour un corps  $F$  quelconque et que nous décrivons maintenant <sup>(6)</sup>.

**1.5.1. Définition récursive.** — Pour démontrer des équations fonctionnelles pour la fonction  $\text{Li}_n$ , l'outil principal est de se ramener à la fonction  $\text{Li}_{n-1}$  grâce à l'équation différentielle

$$(14) \quad d\text{Li}_n(z) = \text{Li}_{n-1}(z) d\log(z) .$$

Plus précisément, on se ramène à des spécialisations d'équations fonctionnelles en une variable  $\sum_i a_i \text{Li}_n(x_i(t)) = \text{constante}$ , avec  $a_i \in \mathbb{Q}$  et  $x_i(t) \in \mathbb{C}(t)$ , qui se démontrent par différentiation par rapport à  $t$ . La définition de  $\mathcal{R}_n(F)$  s'obtient en abstrayant ce procédé.

On définit récursivement sur  $n \geq 2$  un sous-espace  $\mathcal{R}_n(F) \subset \mathbb{Q}[F^\times]$  et le quotient

$$\mathcal{B}_n(F) = \mathbb{Q}[F^\times] / \mathcal{R}_n(F) ,$$

de manière fonctorielle en  $F$ ; on note  $[x]_n$  la classe de  $x \in F^\times$  dans  $\mathcal{B}_n(F)$ . Les  $\mathcal{B}_n(F)$  sont parfois appelés *groupes de Bloch supérieurs* <sup>(7)</sup>. Dans tout ce qui suit il sera pratique de voir  $\mathbb{Q}[F^\times]$  comme le quotient de  $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)]$  par les relations  $[\infty] = [0] = 0$ . On considère

$$(15) \quad \tilde{\delta}_2 : \mathbb{Q}[F^\times] \rightarrow \Lambda^2 F_{\mathbb{Q}}^\times , [x] \mapsto -(1-x) \wedge x , [1] \mapsto 0 .$$

Pour  $n \geq 3$ , en supposant le foncteur  $\mathcal{B}_{n-1}$  défini, on considère

$$(16) \quad \tilde{\delta}_n : \mathbb{Q}[F^\times] \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F_{\mathbb{Q}}^\times , [x] \mapsto [x]_{n-1} \otimes x .$$

Ces formules sont censées rappeler (14). On définit alors  $\mathcal{R}_n(F)$  comme le sous-espace de  $\mathbb{Q}[F^\times]$  engendré par les différences  $\xi(1) - \xi(0)$ , pour  $\xi(t) \in \mathbb{Q}[F(t)^\times]$  dans le noyau du morphisme  $\tilde{\delta}_n$  associé au corps  $F(t)$ .

On montre que la fonction  $P_n$  passe au quotient par  $\mathcal{R}_n(\mathbb{C})$  et induit  $P_n : \mathcal{B}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  et donc  $P_n^F : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathbb{R}^{d_n}$  pour  $F$  un corps de nombres.

*Exemple 1.9.* — Calculons pour  $x \in F^\times \setminus \{1\}$  :

$$\tilde{\delta}_2([x] + [x^{-1}]) = -(1-x) \wedge x - (1-x^{-1}) \wedge x^{-1} = \frac{1}{1-x} \wedge x + \frac{x-1}{x} \wedge x = \frac{-1}{x} \wedge x = 0 .$$

6. ZAGIER (1991) en avait auparavant considéré des variantes spécifiques au cas des corps de nombres. Zagier comme Goncharov considèrent en fait des versions des objets  $\mathcal{R}_n(F)$  et  $\mathcal{B}_n(F)$  dans les groupes abéliens, respectivement sous-objets et quotients du groupe abélien libre  $\mathbb{Z}[F^\times]$ .

7. Cette terminologie est parfois utilisée dans la littérature pour désigner d'autres objets.

Ainsi, l'élément  $\xi(t) = [tx] + [(tx)^{-1}]$  est dans le noyau de  $\tilde{\delta}_2 : \mathbb{Q}[F(t)^\times] \rightarrow \Lambda^2(F(t)^\times_{\mathbb{Q}})$  et l'élément  $\xi(1) - \xi(0) = [x] + [x^{-1}]$  est dans  $\mathcal{R}_2(F)$ . Ce raisonnement est analogue à la preuve de l'équation fonctionnelle  $P_2(z) + P_2(z^{-1}) = 0$  par dérivation et évaluation en  $z = 0$ . Un raisonnement analogue permet de montrer par récurrence sur  $n \geq 2$  la relation  $[x]_n + (-1)^n[x]_n = 0$  dans  $\mathcal{B}_n(F)$ , qui correspond à l'équation fonctionnelle  $P_n(z) + (-1)^n P_n(z) = 0$ .

*Remarque 1.10.* — On espère pouvoir donner une description concrète (éventuellement conjecturale) de  $\mathcal{R}_n(F)$  en produisant des familles assez générales de relations polylogarithmiques.

**1.5.2. Relations polylogarithmiques pour  $n = 2, 3$ .** — Un rapide calcul montre que la relation suivante, qui rappelle la relation à 5 termes (6), est vérifiée dans  $\mathcal{B}_2(F)$  pour tous les  $x, y \in F \setminus \{0, 1\}$  :

$$(17) \quad [x]_2 - [y]_2 + \left[ \frac{y}{x} \right]_2 - \left[ \frac{1-y}{1-x} \right]_2 + \left[ \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right]_2 = 0 .$$

Une forme plus agréable de cette relation est

$$(18) \quad \sum_{i=0}^4 (-1)^i [r(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_4)]_2 = 0 ,$$

où  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des points deux à deux distincts de la droite projective  $\mathbb{P}^1(F)$  et où l'on note  $r(a, b, c, d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$  le birapport de 4 points. On obtient (17) en spécialisant à  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (\infty, 0, 1, x, y)$ , et les relations  $[1]_2 = 0$ ,  $[x]_2 + [x^{-1}]_2 = 0$ , et  $[x]_2 + [1-x]_2 = 0$  en spécialisant à des cas dégénérés. Un argument dû à WOJTKOWIAK (1996) montre que si  $F$  est algébriquement clos, ces relations engendrent toutes les relations polylogarithmiques pour  $n = 2$ . C'est aussi le cas si  $F$  est un corps de nombres, ce qui découle de la preuve de la conjecture de Zagier pour  $n = 2$  et des travaux de SUSLIN (1990). On conjecture que cela vaut pour tout corps  $F$ .

La preuve de la conjecture de Zagier pour  $n = 3$  repose notamment sur une variante de la relation (18) découverte par GONCHAROV (1994, 1995a). On peut l'écrire sous la forme très (anti)symétrique, découverte indépendamment par Goncharov et Zagier, d'une relation « à 840 termes » dans  $\mathcal{B}_3(F)$  :

$$(19) \quad \sum_{i=0}^6 (-1)^i R_3(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_6) = 0 ,$$

où  $a_0, \dots, a_6$  sont des points de  $\mathbb{P}^2(F)$  en position générale et  $R_3(a_1, \dots, a_6) \in \mathbb{Q}[F^\times]$  est un invariant d'une configuration de 6 points en position générale dans le plan projectif obtenue en antisymétrisant une variante du birapport (appelée *trirapport*). Goncharov conjecture que les relations (19) et leurs spécialisations engendrent toutes les relations polylogarithmiques pour  $n = 3$ .

## 1.6. Complexes polylogarithmiques

Le programme de Goncharov va bien au-delà du cas des corps de nombres et propose une description « symbolique » de la  $K$ -théorie rationnelle d'un corps  $F$  quelconque, dans l'esprit de la description de  $K_2(F)$  par MATSUMOTO (1969) et de sa généralisation par MILNOR (1970). Cette proposition, qui à première vue peut sembler arbitraire, sera éclairée par des considérations motiviques dans le prochain paragraphe.

Les morphismes  $\tilde{\delta}_n$  définis par (15) et (16) passent au quotient et induisent des morphismes

$$\delta_2 : \mathcal{B}_2(F) \rightarrow \Lambda^2 F_{\mathbb{Q}}^{\times} \quad \text{et} \quad \delta_n : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F_{\mathbb{Q}}^{\times} \quad \text{pour } n \geq 3 .$$

Ces morphismes s'assemblent en un complexe, le  $n$ -ème *complexe polylogarithmique*, noté  $\mathcal{B}^{\bullet}(F, n)$ , où  $\mathcal{B}_n(F)$  est placé en degré cohomologique 1 :

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow \mathcal{B}_{n-2}(F) \otimes \Lambda^2 F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathcal{B}_2(F) \otimes \Lambda^{n-2} F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow \Lambda^n F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow 0 .$$

Il est commode d'étendre les définitions à  $n \leq 1$  en posant  $\mathcal{B}_0(F) = \mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{B}_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$ , et donc  $\mathcal{B}^{\bullet}(F, 0) = \mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{B}^{\bullet}(F, 1) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}[-1]$ .

On peut maintenant énoncer une conjecture centrale du programme de Goncharov. Notons  $\text{gr}_{\gamma}$  les gradués pour la  $\gamma$ -filtration en  $K$ -théorie (SOULÉ 1985), issue de la structure de  $\lambda$ -anneau sur  $K_{\bullet}(F)_{\mathbb{Q}}$  induite par les opérateurs de puissance extérieure des  $F$ -espaces vectoriels.

CONJECTURE 1.11. — *On a des isomorphismes fonctoriels en le corps  $F$ , pour tout entier  $n \geq 0$  et tout entier relatif  $i$  :*

$$H^i(\mathcal{B}^{\bullet}(F, n)) \simeq \text{gr}_{\gamma}^n K_{2n-i}(F)_{\mathbb{Q}} .$$

On voit facilement que cette conjecture est vérifiée pour  $n \leq 1$ , ainsi que dans le cas  $i = n$  puisque  $H^n(\mathcal{B}^{\bullet}(F, n)) = K_n^M(F)_{\mathbb{Q}}$ , la  $K$ -théorie de Milnor rationnelle, qui est isomorphe à  $\text{gr}_{\gamma}^n K_n(F)_{\mathbb{Q}}$  d'après SUSLIN (1984) et SOULÉ (1985).

*Remarque 1.12.* — Une des sources de la conjecture 1.11 est le résultat de SUSLIN (1990) qui fournit une suite exacte<sup>(8)</sup>

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\gamma}^2 K_3(F)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}[F^{\times}]/\mathcal{R}_2^{(5)}(F) \xrightarrow{\delta_2} \Lambda^2(F_{\mathbb{Q}}^{\times}) \rightarrow K_2(F)_{\mathbb{Q}} \rightarrow 0 ,$$

où l'on a noté  $\mathcal{R}_2^{(5)}(F) \subset \mathcal{R}_2(F)$  le sous-espace engendré par les relations à 5 termes (17) et leurs spécialisations. On en déduit une surjection  $\text{gr}_{\gamma}^2 K_3(F)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow H^1(\mathcal{B}^{\bullet}(F, 2))$ , qui est un isomorphisme si et seulement si  $\mathcal{R}_2^{(5)}(F) = \mathcal{R}_2(F)$ , ce qui est le cas si  $F$  est un corps de nombres ou un corps algébriquement clos par la discussion du §1.5.2.

8. Le résultat de Suslin est plus précis puisqu'il prend aussi en compte la torsion en  $K$ -théorie.

Dans le cas d'un corps de nombres, les travaux de Borel (et la réinterprétation du régulateur de Borel par Beilinson, voir la remarque 1.8) ont pour conséquence l'annulation :

$$(20) \quad \mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q} = 0 \quad \text{si } i \neq 1 \quad (F \text{ corps de nombres}) .$$

La conjecture 1.11 implique donc dans ce cas un isomorphisme  $K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} \simeq \ker(\delta_n)$  dont la composition avec l'inclusion  $\ker(\delta_n) \subset \mathcal{B}_n(F)$  devrait donner lieu à un morphisme  $\varphi_n$  comme dans la conjecture 1.5.

Notons aussi que la conjecture 1.11 est compatible avec (et en fait implique) la conjecture d'annulation suivante de BEILINSON (1985) et SOULÉ (1985).

CONJECTURE 1.13 (Beilinson–Soulé). — *Pour tout corps  $F$  et tout entier  $n \geq 1$  :*

$$\mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q} = 0 \quad \text{si } i \leq 0 .$$

Cette conjecture est vérifiée pour les corps de nombres par (20).

*Remarque 1.14.* — La conjecture 1.11 exprime le fait que  $\mathcal{B}^\bullet(F, n)$  est un *complexe motivique* pour la variété  $\mathrm{Spec}(F)$ , au sens de LICHTENBAUM (1984) et BEILINSON (1987).

### 1.7. Une stratégie vers la conjecture de Zagier, première version

En extrapolant à partir des preuves de la conjecture de Zagier pour  $n = 2, 3$ , il est tentant, en suivant GONCHAROV (1993, 1994, 1995a), de procéder comme suit. On cherche d'abord une application  $R_n$  de l'ensemble des familles de  $2n$  points dans  $\mathbb{P}^{n-1}(F)$  en position générale, à valeurs dans  $\mathbb{Q}[F^\times]$ . Supposons que  $R_n$  soit invariante pour l'action de  $\mathrm{GL}_n(F)$  sur  $\mathbb{P}^{n-1}(F)$  et qu'on ait la relation dans  $\mathcal{B}_n(F)$  :

$$(21) \quad \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i R_n(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_{2n}) = 0 ,$$

pour tous les  $a_0, \dots, a_{2n}$  en position générale dans  $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ . (On peut même aller plus loin et spéculer sur le fait que les relations (21) et leurs spécialisations engendrent les relations polylogarithmiques.)

La suite de l'argument repose sur une construction d'algèbre homologique due à SUSLIN (1984). Notons  $G_k(F, r)$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel librement engendré par l'ensemble des  $\mathrm{GL}_r(F)$ -orbites de familles  $(a_0, \dots, a_k)$  de points de  $F^r$  en position générale. On a des différentielles

$$\partial : G_k(F, r) \longrightarrow G_{k-1}(F, r) , \quad (a_0, \dots, a_k) \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i (a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k)$$

$$\partial' : G_k(F, r) \longrightarrow G_{k-1}(F, r-1) , \quad (a_0, \dots, a_k) \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i (a_i | a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k) ,$$

où la notation  $(a_i | a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k)$  désigne la configuration associée aux images des points  $a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k$  dans  $F^r / F a_i \simeq F^{r-1}$ . Elles donnent lieu à un complexe double

formé des  $G_k(F, r)$  pour  $k \geq r \geq n$ , dont le complexe total est noté  $BG^\bullet(F, n)$ , la *nème complexe bigrassmannien*. Par convention,  $G_k(F, r)$  y est placé en degré cohomologique  $2n - k$ . La motivation pour cette construction est que si  $F$  est un corps infini,  $(G_\bullet(F, n), \partial)$  est une résolution du  $\mathrm{GL}_n(F)$ -module trivial  $\mathbb{Q}$  et permet donc de construire des classes de cohomologie de  $\mathrm{GL}_n(F)$ . On considère tous les  $n$  à la fois pour produire des classes de cohomologie du groupe linéaire stable  $\mathrm{GL}(F)$ .

Une application  $R_n$  comme ci-dessus induit un morphisme  $R_n : G_{2n-1}(F, n) \rightarrow \mathcal{B}_n(F)$  qui vérifie  $R_n \circ \partial = 0$ . Supposons qu'on puisse l'étendre en un morphisme de complexes

$$\tilde{R}_n : BG^\bullet(F, n) \longrightarrow \mathcal{B}^\bullet(F, n) .$$

Alors on obtient par un argument d'homologie des groupes un morphisme

$$H_{2n-1}(\mathrm{GL}(F), \mathbb{Q}) \longrightarrow \ker(\delta_n) \subset \mathcal{B}_n(F) ,$$

et donc un morphisme  $\varphi_n : K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{B}_n(F)$ . Il n'y a aucune raison *a priori* pour que ce morphisme fasse commuter le diagramme (13) (ou même qu'il soit non nul). Des techniques générales développées par Goncharov permettent de le montrer si l'on sait calculer la composante  $G_n(F, n) \rightarrow \Lambda^n(F^\times)_\mathbb{Q}$  de  $\tilde{R}_n$ , à l'autre extrémité du complexe bigrassmannien.

### 1.8. Nécessité des polylogarithmes multiples

L'existence d'un morphisme  $\tilde{R}_n$  comme dans le paragraphe précédent est appelée « conjecture optimiste » par GONCHAROV (1994, Conjecture 5.12). En effet, cette stratégie semble être difficile à faire fonctionner au-delà des cas  $n = 2, 3$ . La raison est qu'il est difficile de produire des relations « intéressantes » dans  $\mathcal{B}_n(F)$  (ou, ce qui revient au même, des équations fonctionnelles intéressantes pour les polylogarithmes classiques  $\mathrm{Li}_n$  ou  $\mathrm{P}_n$ ) pour  $n \geq 4$ , et les relations de cocycle (21) semblent inaccessibles en général. En pratique, les équations fonctionnelles pour les polylogarithmes classiques font naturellement intervenir les polylogarithmes *multiples*, dont on ne peut se passer pour  $n \geq 4$ . Il faut donc adapter la stratégie en considérant cette plus grande classe de fonctions — même si au bout du compte seuls les polylogarithmes *classiques* sont censés intervenir si l'on croit à la conjecture de Zagier.

Dit autrement, il apparaît rétrospectivement que les espaces  $\mathcal{B}_n(F)$  et les complexes  $\mathcal{B}^\bullet(F, n)$  sont des objets trop petits pour être facilement maniables. On les verra plus bas à l'intérieur d'objets plus naturels et plus structurés : la cogèbre de Lie motivique  $\mathcal{C}(F)$  et son complexe de Chevalley–Eilenberg. Le prochain paragraphe a pour but d'introduire ces objets et les liens qu'ils entretiennent avec la  $K$ -théorie.

## 2. MOTIFS DE TATE MIXTES ET $K$ -THÉORIE

On introduit maintenant la catégorie des motifs de Tate mixtes sur  $F$  et on développe son formalisme tannakien. Il sera commode de supposer que la conjecture d'annulation



de Beilinson–Soulé (conjecture 1.13) est vraie, ou, ce qui revient au même, de se restreindre au cas des corps  $F$  pour laquelle elle est vérifiée, ce qui inclut le cas des corps de nombres.

### 2.1. Motifs de Tate mixtes

Pour un corps  $F$ , notons  $\mathrm{DM}(F)$  la catégorie triangulée des motifs sur  $F$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  (dont différentes constructions équivalentes existent, notamment par HANAMURA (1995), LEVINE (1998), et VOEVODSKY (2000)). Chaque variété  $X$  sur  $F$  définit un objet de cette catégorie, le *motif* de  $X$ , qu’il faut voir comme un complexe qui contrôle toutes les versions de la cohomologie de  $X$  (de Rham, singulière,  $\ell$ -adique, etc.). Des foncteurs de réalisation définis sur  $\mathrm{DM}(F)$  permettent de retrouver ces différents groupes de cohomologie à partir du motif de  $X$ . La différence fondamentale entre la catégorie des motifs et les différentes catégories de réalisations est que les morphismes dans  $\mathrm{DM}(F)$  sont définis en termes de cycles algébriques, et sont notamment reliés aux groupes de Chow supérieurs de BLOCH (1986).

La catégorie  $\mathrm{DM}(F)$  est tensorielle et on dispose d’un objet  $\otimes$ -inversible  $\mathbb{Q}(-1)$ , le *motif de Lefschetz*, dont les réalisations sont les groupes de cohomologie  $H^1(\mathbb{P}_F^1 \setminus \{0, \infty\})$ . On note  $\mathbb{Q}(-n) = \mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Grâce à la comparaison entre groupes de Chow supérieurs et  $K$ -théorie on a des isomorphismes

$$(22) \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(F)}(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)[i]) \simeq \mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q},$$

qui expliquent l’irruption de la théorie des motifs dans des questions liées à la  $K$ -théorie.

Grâce à l’annulation qui découle de la conjecture de Beilinson–Soulé, LEVINE (1993) définit une  $t$ -structure sur la sous-catégorie triangulée de  $\mathrm{DM}(F)$  engendrée par les  $\mathbb{Q}(-n)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ , dont le cœur est par définition la catégorie  $\mathrm{MT}(F)$  des *motifs de Tate mixtes* sur  $F$ . Tout objet  $M$  de cette catégorie est muni d’une filtration finie (par le *poids*) par des sous-objets  $W_{2n}M$  de telle sorte que chaque gradué  $\mathrm{gr}_{2n}^W M$  est une somme directe finie d’objets  $\mathbb{Q}(-n)$ .

En suivant BEILINSON (1987) on est amené à formuler la conjecture additionnelle suivante, parfois appelée *conjecture du  $K(\pi, 1)$* .

CONJECTURE 2.1. — *Pour tous entiers  $n, i$  le morphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^i(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(F)}(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)[i]) \simeq \mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q}$$

*est un isomorphisme.*

Le morphisme ci-dessus est, pour des raisons générales, un isomorphisme si  $i = 0, 1$  et injectif pour  $i = 2$ . On en déduit, grâce à l’annulation (20), que la conjecture est vérifiée dans le cas d’un corps de nombres.

Il est facile de décrire géométriquement les extensions de  $\mathbb{Q}(-1)$  par  $\mathbb{Q}(0)$  dans  $\mathrm{MT}(F)$ . Via l’isomorphisme entre le groupe d’extensions correspondant et  $F_\mathbb{Q}^\times$ , un élément  $x \in F^\times$  est représenté par le *motif de Kummer*  $K(x)$ , dont les réalisations sont les groupes de cohomologie relative  $H^1(\mathbb{P}_F^1 \setminus \{0, \infty\}, \{1, x\})$  si  $x \neq 1$ . La question de la

description géométrique des extensions de  $\mathbb{Q}(-n)$  par  $\mathbb{Q}(0)$  dans  $\text{MT}(F)$  pour  $n \geq 2$  est difficile, et constitue en quelque sorte le coeur de la conjecture de Zagier, comme nous allons le voir.

## 2.2. Formalisme tannakien et complexes motiviques

La catégorie  $\text{MT}(F)$  est tannakienne neutre à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Les différentes réalisations donnent lieu à des foncteurs fibre, parmi lesquels les foncteurs fibre de Rham (si  $F$  est de caractéristique nulle)  $\omega_{\text{dR}} : \text{MT}(F) \rightarrow \text{Vect}_F$ , et Betti (cohomologie singulière, relative à un plongement complexe  $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$ )  $\omega_{\text{B}} : \text{MT}(F) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$ . La comparaison  $\omega_{\text{dR}} \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \omega_{\text{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  entre ces foncteurs donne lieu à des *matrices des périodes* pour les objets de  $\text{MT}(F)$ . La matrice des périodes de  $\mathbb{Q}(-n)$  est  $((2i\pi)^n)$ .

Dans la suite on travaillera surtout avec le foncteur fibre  $\mathbb{Z}$ -gradué canonique à valeurs dans les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels :

$$(23) \quad \omega : M \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{MT}(F)}(\mathbb{Q}(-n), \text{gr}_{2n}^W M) .$$

Si  $F$  est de caractéristique nulle, il s'agit d'une structure rationnelle sur le foncteur fibre de Rham :  $\omega \otimes_{\mathbb{Q}} F \simeq \omega_{\text{dR}}$ . La graduation sur  $\omega$  est couramment appelée *poids*, de sorte que  $\mathbb{Q}(-n)$  est de poids  $n$  <sup>(9)</sup>.

Par le formalisme tannakien, la catégorie  $\text{MT}(F)$  est équivalente à la catégorie des comodules sur une algèbre de Hopf commutative  $\mathbb{Z}$ -gradué  $\mathcal{H}(F)$ , où la graduation est encore appelée *poids*. Concrètement,  $\mathcal{H}_n(F)$  est engendré en tant que  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel par des coefficients matriciels  $(M, v, \varphi)$ , où  $M$  est un objet de  $\text{MT}(F)$  et  $v : \mathbb{Q}(-n) \rightarrow \text{gr}_{2n}^W M$ ,  $\varphi : \text{gr}_0^W M \rightarrow \mathbb{Q}(0)$  sont deux morphismes. Les relations entre ces coefficients matriciels sont engendrées par les égalités  $(M, f \circ v, \psi) = (N, v, \psi \circ f)$  pour des morphismes  $f : M \rightarrow N$  et  $v : \mathbb{Q}(-n) \rightarrow \text{gr}_{2n}^W M$ ,  $\psi : \text{gr}_0^W N \rightarrow \mathbb{Q}(0)$ . On a  $\mathcal{H}_n(F) = 0$  si  $n < 0$ ,  $\mathcal{H}_0(F) = \mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{H}_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$ .

Le produit dans  $\mathcal{H}(F)$  est induit par le produit tensoriel des objets de  $\text{MT}(F)$  et le coproduit  $\Delta : \mathcal{H}(F) \rightarrow \mathcal{H}(F) \otimes \mathcal{H}(F)$  se calcule par la formule

$$\Delta(M, v, \varphi) = \sum_i (M, e_i, \varphi) \otimes (M, v, e_i^{\vee}) ,$$

où  $(e_i)$  est n'importe quelle base de  $\omega(M)$ .

Il sera plus pratique de travailler modulo produits et de manipuler la cogèbre de Lie des indécomposables de  $\mathcal{H}(F)$

$$\mathcal{C}(F) = \mathcal{H}_{>0}(F) / \mathcal{H}_{>0}(F) \mathcal{H}_{>0}(F) , \quad \delta : \mathcal{C}(F) \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{C}(F) ,$$

dont le *cocrochet*  $\delta$  est induit par  $\Delta$ . Elle est  $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ -gradué et vérifie  $\mathcal{C}_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$ . Pour  $x \in F^{\times}$ , l'élément correspondant de  $\mathcal{C}_1(F)$  est le coefficient matriciel du motif de

---

9. Les poids sont donc divisés par 2 par rapport à la notion habituelle, pour laquelle  $\mathbb{Q}(-n)$  est de poids  $2n$ .

Kummer  $K(x)$  où  $v$  et  $\varphi$  sont induits par les isomorphismes naturels  $\mathrm{gr}_0^W K(x) \simeq \mathbb{Q}(0)$  et  $\mathrm{gr}_2^W K(x) \simeq \mathbb{Q}(-1)$  respectivement. On le note

$$\log^{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}_1(F) .$$

Les éléments de  $\mathcal{H}(F)$  ou  $\mathcal{C}(F)$  sont parfois appelés *périodes motiviques*, un terme qui recouvre plusieurs variantes de l'idée des coefficients matriciels dans une catégorie tannakienne de motifs (voir la remarque 3.1).

*Remarque 2.2.* — Le groupe tannakien correspondant au foncteur fibre (23) est le produit semi-direct de  $\mathbb{G}_m$  avec le schéma en groupes pro-unipotent  $U(F) = \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(F))$  et est souvent appelé *groupe de Galois motivique* de la catégorie  $\mathrm{MT}(F)$ . Il est complètement déterminé par l'algèbre de Lie graduée pro-nilpotente  $\mathfrak{u}(F)$  de  $U(F)$  (via la formule de Baker–Campbell–Hausdorff), qui s'obtient en dualisant la cogèbre de Lie  $\mathcal{C}(F)$ . L'avantage de travailler dans  $\mathcal{H}(F)$  ou  $\mathcal{C}(F)$  est qu'on peut facilement en produire des éléments et calculer leur coproduit ou cocrochet, alors qu'exhiber des points de  $U(F)$  ou des éléments de  $\mathfrak{u}(F)$  est incommode.

Pour un entier  $n \geq 1$  on considère la partie de poids  $n$  du complexe de Chevalley–Eilenberg de  $\mathcal{C}(F)$ , noté  $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n$ , où  $\mathcal{C}_n(F)$  est placé en degré cohomologique 1 :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 \mathcal{C}(F))_n \rightarrow (\Lambda^3 \mathcal{C}(F))_n \rightarrow \dots \rightarrow (\Lambda^{n-1} \mathcal{C}(F))_n \rightarrow \Lambda^n \mathcal{C}_1(F) \rightarrow 0 .$$

Sa cohomologie calcule des groupes d'extensions dans la catégorie des  $\mathcal{C}(F)$ -comodules gradués, et plus précisément :

$$(24) \quad H^i(\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^i(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) .$$

Si l'on croit à la conjecture 2.1, les complexes  $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n$  sont donc des *complexes motiviques* (au sens de la remarque 1.14), dont l'existence est conditionnelle à la conjecture de Beilinson–Soulé. (On a vu que les deux conjectures sont vérifiées dans le cas d'un corps de nombres.) Une partie des travaux de Goncharov vise à définir, en s'inspirant de  $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))$ , des complexes motiviques inconditionnels qui soient aussi explicites et « petits » que possible.

Notons que dans le cas d'un corps de nombres  $F$  on obtient l'isomorphisme inconditionnel suivant qui identifie la  $K$ -théorie rationnelle de  $F$  avec l'espace des primitifs de la cogèbre de Lie motivique :

$$(25) \quad K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \simeq H^1(\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n) = \ker \left( \delta : \mathcal{C}_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 \mathcal{C}(F))_n \right) .$$

De plus, on voit grâce à (20) et (24) que  $\mathcal{C}(F)$  est colibre. Duale, l'algèbre de Lie motivique  $\mathfrak{u}(F)$  est libre et ses indécomposables en poids  $-n \leq -1$  sont donnés par l'espace  $K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}^\vee$ .

Dans le paragraphe suivant on explique comment penser au régulateur dans le cadre du formalisme tannakien.

### 2.3. Réalisation de Hodge et régulateur

Soit  $F$  un corps de nombres. On a pour tout plongement  $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$  un foncteur de réalisation de Hodge  $\mathrm{MT}(F) \rightarrow \mathrm{MHS}$  vers la catégorie des structures de Hodge mixtes rationnelles, qui factorise les foncteurs de réalisation  $\omega_{\mathbb{B}}, \omega_{\mathrm{dR}}, \omega$ . Il induit pour tout  $n \geq 1$  un morphisme au niveau des groupes d'extensions

$$(26) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \simeq \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{Q} .$$

Rappelons qu'un nombre complexe  $a \in \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{Q}$  correspond par ce dernier isomorphisme à la structure de Hodge mixte dont une matrice des périodes est

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & (2i\pi)^n \end{pmatrix} ,$$

où la deuxième colonne donne la position de la filtration de Hodge dans une base rationnelle compatible à la filtration par le poids. Le motif de Kummer  $K(x)$  donne lieu à une structure de Hodge mixte pour laquelle

$$(27) \quad a = \int_1^z \frac{dt}{t} = \log(z) \in \mathbb{C}/2i\pi \mathbb{Q} ,$$

avec  $z = \sigma(x)$ .

Si l'on somme (26) sur tous les plongements complexes de  $F$ , on obtient en tensorisant par  $\mathbb{R}$  à l'arrivée et en utilisant (8) et (22) un morphisme

$$(28) \quad \varpi_n : K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n}$$

qu'on peut appeler *régulateur de Hodge*. On devrait avoir l'égalité  $\varpi_n = \rho_n$  avec le régulateur de Borel, mais ce résultat ne semble pas être dans la littérature.

Le point de vue de la réalisation de Hodge fournit en fait plus que le régulateur (28) : on a pour tout entier  $n$  un morphisme

$$\varpi_n : \mathcal{C}_n(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n}$$

qui induit (28) en restriction au noyau du cocrochet  $\delta$ , isomorphe à  $K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}$  via (25). Il apparaît chez GONCHAROV (1999) sous le nom de morphisme des *périodes réelles* ou *Lie-périodes* (voir aussi BROWN (2014) pour une interprétation tannakienne comme variante du morphisme des *périodes univaluées*). Explicitons sa définition en suivant BEILINSON et DELIGNE (1994). Représentons un élément de  $\mathcal{C}_n(F)$  par un coefficient matriciel  $(M, v, \varphi)$ . Pour un plongement  $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$ , soit  $P$  une matrice des périodes de  $M$  (matrice de l'isomorphisme naturel  $\omega(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \omega_{\mathrm{dR}}(M) \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathbb{B}}(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ ). Si  $D$  désigne la matrice diagonale qui agit par  $(-1)^k$  en poids  $k$ , le produit  $D\bar{P}^{-1}P$  est alors une matrice unipotente. La composante de  $\varpi_n(M, v, \varphi)$  correspondant au plongement  $\sigma$  est alors l'accouplement

$$\langle \varphi, \frac{1}{2} \log(D\bar{P}^{-1}P)v \rangle .$$

Par exemple,  $\varpi_1(\log^{\mathcal{C}}(x))$  a pour composantes les  $\log|\sigma(x)|$ .

### 3. LA CONJECTURE DE ZAGIER DANS LE CONTEXTE MOTIVIQUE

On passe maintenant à l'interprétation motivique de la conjecture de Zagier, d'après BEILINSON et DELIGNE (1994) et GONCHAROV (1994, 1995a). En suivant Goncharov, on arrivera naturellement à l'énoncé de la *conjecture de liberté* sur la structure de la cogèbre de Lie motivique.

#### 3.1. Motifs polylogarithmiques et polylogarithmes motiviques

On dispose pour tout  $x \in F^\times$  d'un *motif polylogarithmique*  $L(x)$ , qui est un ind-objet de  $\text{MT}(F)$  tel que  $\text{gr}_{2k}^W L(x) \simeq \mathbb{Q}(-k)$  pour tout entier naturel  $k$ . Une matrice de périodes de  $W_{2n}L(x)$ , relative à un plongement  $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$ , est de la forme suivante, où l'on note  $z = \sigma(x)$ .

$$(29) \quad \begin{pmatrix} 1 & \text{Li}_1(z) & \text{Li}_2(z) & \text{Li}_3(z) & \cdots & \text{Li}_n(z) \\ & 2i\pi & 2i\pi \log(z) & 2i\pi \frac{\log^2(z)}{2} & \cdots & 2i\pi \frac{\log^{n-1}(z)}{(n-1)!} \\ & & (2i\pi)^2 & (2i\pi)^2 \log(z) & \cdots & (2i\pi)^2 \frac{\log^{n-2}(z)}{(n-2)!} \\ & & & (2i\pi)^3 & & \\ & & & & & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & (2i\pi)^n \end{pmatrix}$$

(Si  $x = 1$ ,  $\text{Li}_1(z)$  n'est pas défini et doit être remplacé par 0 dans cette matrice.) L'apparition de  $\text{Li}_n(z)$  dans une matrice des périodes s'explique par la formule intégrale suivante, valable pour  $z \notin ]1, +\infty[$  :

$$\text{Li}_n(z) = \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1} \frac{z dt_1 \cdots dt_n}{(1 - zt_1)t_2 \cdots t_n} .$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , le motif polylogarithmique donne lieu, via les isomorphismes  $\text{gr}_0^W L(x) \simeq \mathbb{Q}(0)$  et  $\text{gr}_{2n}^W L(x) \simeq \mathbb{Q}(-n)$ , à un coefficient matriciel noté

$$(30) \quad \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}_n(F)$$

et appelé *polylogarithme motivique*. La structure très simple de  $L(x)$ , reflétée dans la structure par blocs de la matrice (29), permet de calculer son cocrochet, donné pour  $n \geq 2$  par la formule :

$$(31) \quad \delta \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) = \text{Li}_{n-1}^{\mathcal{C}}(x) \wedge \log^{\mathcal{C}}(x) .$$

Notons que  $\delta \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$  a seulement une composante non nulle dans  $\mathcal{C}_{n-1}(F) \wedge \mathcal{C}_1(F)$ . Si  $F$  est un corps de nombres, un calcul rapide utilisant (29) montre qu'on a l'égalité au niveau des régulateurs de Hodge :

$$(32) \quad \varpi_n(\text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)) = \text{P}_n^F(x) .$$

Cela justifie le choix de  $\text{P}_n$  comme version univaluée de  $\text{Li}_n$ .

*Remarque 3.1.* — C'est l'équation (32) qui justifie l'appellation *polylogarithme motivique* pour l'élément  $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$ . Il existe dans la littérature des variantes de cette construction qui portent le même nom et jouent des rôles différents, mais qui ont en commun de venir de coefficients matriciels dans une catégorie tannakienne de motifs (comme  $\mathrm{MT}(F)$ ) ou de systèmes de réalisations (structures de Hodge mixtes, etc.). Par exemple, on peut considérer une version  $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{H}}(x)$  dans l'algèbre de Hopf motivique  $\mathcal{H}(F)$ , dont  $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$  est la version modulo produits. On en déduit par itération maximale du coproduit (réduit) le *symbole* de  $\mathrm{Li}_n(x)$ , qui est égal à  $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{S}}(x) = -(1-x) \otimes x \otimes \cdots \otimes x$  et vit dans  $(\mathcal{H}_1(F))^{\otimes n} = (F_{\mathbb{Q}}^{\times})^{\otimes n}$ . Une autre variante, plus proche de la notion de période, est de considérer l'algèbre des périodes motiviques, relative à un plongement complexe de  $F$ , notée  $\mathcal{P}(F) = \mathcal{O}(\mathrm{Isom}_{\mathrm{MT}(F)}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}}))$ , dont les éléments sont représentés par des coefficients matriciels  $(M, \alpha, \tau)$  avec  $M \in \mathrm{MT}(F)$ ,  $\alpha \in \omega_{\mathrm{dR}}(M)$  et  $\tau \in \omega_{\mathrm{B}}(M)^{\vee}$ . Cette algèbre est munie d'un morphisme d'algèbres vers  $\mathbb{C}$ , le *morphisme des périodes*, et on peut relever (une détermination de)  $\mathrm{Li}_n(x) \in \mathbb{C}$  en un élément  $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{P}}(x) \in \mathcal{P}(F)$ . Cette dernière construction faisant intervenir la réalisation de Betti en plus de la réalisation de de Rham (ou  $\omega$ -réalisation), elle permet de prendre en compte le caractère multivalué de la fonction  $\mathrm{Li}_n$ . On renvoie le lecteur à l'article de survol de BROWN (2017) pour un tour d'horizon de ces notions.

*Remarque 3.2.* — À bien des égards, les relations entre polylogarithmes motiviques (et plus généralement entre périodes motiviques) se prouvent comme les relations entre polylogarithmes, c'est-à-dire par différentiation, où le cocrochet joue le rôle de la différentielle. Soit  $B$  un ouvert non vide de  $\mathbb{A}_F^1 = \mathrm{Spec}(F[t])$ . Par localisation, la  $K$ -théorie de  $B$ , définie comme la  $K$ -théorie de l'anneau des fonctions  $\mathcal{O}(B)$ , s'exprime en termes de la  $K$ -théorie de  $F$  et de ses extensions finies. Par le théorème de Borel, on dispose donc si  $F$  est un corps de nombres d'une catégorie  $\mathrm{MT}(B)$  de motifs de Tate mixtes (ou faisceaux motiviques de Tate mixtes) sur  $B$ , et on montre que le morphisme structurel  $B \rightarrow \mathrm{Spec}(F)$  induit un isomorphisme

$$(33) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(B)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0))$$

pour tout  $n \geq 2$  (phénomène de *rigidité*). Soit  $\xi(t) \in \mathbb{Q}[\mathcal{O}(B)^{\times}]$  tel que  $\delta(\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(\xi(t))) = 0$ , avec  $n \geq 2$ . Alors par (33) on voit que  $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(\xi(t))$  est indépendant de  $t$ , et il suffit de spécialiser  $t$  en un point rationnel de  $B$  pour trouver la constante. Si  $F = \mathbb{Q}$  et  $n$  est pair, l'annulation de  $K_{2n-1}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}}$  implique que la constante est nécessairement zéro. En travaillant avec des variations de structures de Hodge mixtes on peut traiter le cas de bases plus générales (voir par exemple GONCHAROV (2002)).

*Remarque 3.3.* — Dans l'esprit de la remarque précédente, on peut voir  $\mathrm{Li}_n$  comme un motif de Tate mixte sur la base  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . En réalisation de Hodge, on obtient une variation de structures de Hodge mixtes sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  étudiée par HAIN (1994) (le système local sous-jacent avait été calculé par RAMAKRISHNAN (1982)). La présence d'une connexion (de Gauss–Manin) dans ce formalisme explique la ressemblance formelle entre l'équation différentielle (14) et l'expression du cocrochet (31).

### 3.2. Interprétation motivique de la conjecture de Zagier

Le raisonnement de la remarque 3.2 implique que le morphisme

$$\iota_n : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{C}_n(F), [x]_n \mapsto \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$$

est bien défini pour tout  $n \geq 2$ . De plus, la formule (31) implique que  $\log^{\mathcal{C}} : F_{\mathbb{Q}}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_1(F)$  et  $\iota_2, \dots, \iota_n$  s'assemblent en un morphisme de complexes

$$\iota^{\bullet}(n) : \mathcal{B}^{\bullet}(F, n) \longrightarrow \text{CE}^{\bullet}(\mathcal{C}(F))_n.$$

On obtient donc, au niveau des  $H^1$ , un morphisme

$$\psi_n : \ker(\delta_n) \longrightarrow \ker(\delta : \mathcal{C}_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 \mathcal{C}(F))_n).$$

Si  $F$  est un corps de nombres, on a donc grâce à (25) et (32) le diagramme commutatif suivant :

$$(34) \quad \begin{array}{ccc} \ker(\delta_n) & \xrightarrow{\psi_n} & K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\varpi_n} \mathbb{R}^{d_n} \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \mathbb{P}_n^F \end{array}$$

La ressemblance formelle avec le diagramme (13) ne doit pas tromper le lecteur sur le fait que  $\psi_n$  va dans le sens opposé à  $\varphi_n$  ! L'existence du diagramme (34) n'est pas suffisante pour prouver la conjecture de Zagier, qui serait une conséquence de la conjecture suivante (et de l'égalité des régulateurs  $\varpi_n = \rho_n$ ).

**CONJECTURE 3.4.** — *Le morphisme  $\psi_n$  est surjectif.*

En effet, (10) découle alors de (12) et (34) en prenant pour  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq d_n}$  des antécédents par  $\psi_n$  d'une base de  $K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}$ .

*Remarque 3.5.* — Le diagramme (34) a été construit par BEILINSON et DELIGNE (1994) en supposant l'existence du formalisme motivique, et indépendamment par DE JEU (1995). En fait, Beilinson–Deligne comme de Jeu rendent  $\iota_n$  et donc  $\psi_n$  injectifs en remplaçant l'espace  $\mathcal{R}_n(F)$  des relations polylogarithmiques par l'espace des relations satisfaites par les  $\text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$ .

*Remarque 3.6.* — Via le dictionnaire tannakien, la conjecture 3.4 affirme que toutes les extensions de  $\mathbb{Q}(-n)$  par  $\mathbb{Q}(0)$  dans  $\text{MT}(F)$  se trouvent dans la sous-catégorie tannakienne engendrée par les motifs polylogarithmiques  $L(x)$  pour  $x \in F^{\times}$ .

Il est important de noter que le morphisme  $\iota_n : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{C}_n(F)$  lui-même n'est pas surjectif pour  $n \geq 4$  (c'est-à-dire que les motifs polylogarithmiques n'engendrent pas la catégorie tannakienne  $\text{MT}(F)$ ). En effet, on peut par exemple produire des éléments de  $\mathcal{C}_4(F)$  dont le cocrochet a une composante non nulle dans  $\mathcal{C}_2(F) \wedge \mathcal{C}_2(F)$ . C'est ce phénomène qui rend le cas  $n = 4$  de la conjecture de Zagier si crucial dans la perspective du cas général.

### 3.3. La conjecture de liberté

**3.3.1. Énoncé.** — La conjecture suivante de GONCHAROV (1994, 1995a) renforce la conjecture 3.4 de manière cohérente avec la conjecture 1.11.

CONJECTURE 3.7. — *Pour tout  $n \geq 1$ , le morphisme de complexes  $\iota^\bullet(n)$  est un quasi-isomorphisme.*

On l'appelle *conjecture de liberté* à cause de la formulation équivalente suivante.

CONJECTURE 3.8. — (i) *La cogèbre de Lie quotient  $\mathcal{C}(F)/\mathcal{C}_1(F)$  est colibre.*

(ii) *Pour tout  $n \geq 2$ , le morphisme  $\iota_n$  est injectif et identifie  $\mathcal{B}_n(F)$  avec l'espace des primitifs de  $\mathcal{C}(F)/\mathcal{C}_1(F)$  en poids  $n$ .*

Dualement, cette conjecture affirme que la sous-algèbre de Lie  $\mathbf{u}(F)_{\leq -2}$  de l'algèbre de Lie motivique  $\mathbf{u}(F)$  est libre et que ses indécomposables en poids  $-n \leq -2$  sont donnés par l'espace  $\mathcal{B}_n(F)^\vee$ . Si  $F$  est un corps de nombres, on a vu que l'algèbre de Lie motivique  $\mathbf{u}(F)$  est libre et il en est donc de même pour  $\mathbf{u}(F)_{\leq -2}$ , ce qui règle le point (i).

*Remarque 3.9.* — La conjecture de liberté peut être séparée en deux énoncés relativement indépendants. D'une part, l'injectivité de  $\iota_n$  revient à dire que les seules relations satisfaites par les polylogarithmes multiples motiviques  $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$  sont celles prévues par l'espace des relations polylogarithmiques  $\mathcal{R}_n(F)$ . D'autre part, l'enjeu est de préciser la place des polylogarithmes motiviques à l'intérieur de la cogèbre de Lie motivique ; la conjecture implique notamment qu'on peut identifier via  $\iota_n$  :

$$(35) \quad \mathcal{B}_n(F) \stackrel{?}{=} \{ \alpha \in \mathcal{C}_n(F) \mid \delta\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}(F) \wedge \mathcal{C}_1(F) \} .$$

**3.3.2. La conjecture de liberté en bas poids.** — Explicitons la conjecture de liberté en poids  $n = 2, 3, 4$ .

— En poids 2 elle affirme que  $\iota_2 : \mathcal{B}_2(F) \rightarrow \mathcal{C}_2(F)$  est un isomorphisme. Ce résultat est connu si  $F$  est un corps de nombres comme sous-produit de la preuve de la conjecture de Zagier pour  $n = 2$  et des travaux de Suslin (voir la remarque 1.12).

— En poids 3 elle affirme que  $\iota_3 : \mathcal{B}_3(F) \rightarrow \mathcal{C}_3(F)$  est un isomorphisme ; même dans le cas d'un corps de nombres, on ne sait prouver ni l'injectivité ni la surjectivité.

— En poids 4 elle prend la forme d'une suite exacte courte

$$(36) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{B}_4(F) \xrightarrow{\iota_4} \mathcal{C}_4(F) \xrightarrow{\delta_{2,2}} \mathcal{C}_2(F) \wedge \mathcal{C}_2(F) \longrightarrow 0 .$$

On sait seulement montrer que  $\delta_{2,2}$  est surjectif si  $F$  est un corps de nombres (voir §5.1 plus bas).



### 3.4. Une stratégie vers la conjecture de Zagier, version raffinée

Le diagramme (34) semble être l'*habitat naturel* de la conjecture de Zagier, et la conjecture 3.4 (surjectivité de  $\psi_n$ ) semble être plus fondamentale que la conjecture 1.5, qui nécessite d'inventer un morphisme  $\varphi_n$  (conjecturalement une section de  $\psi_n$ ) en découvrant des relations polylogarithmiques — la conjecture 3.4 n'étant pas concernée par ces relations. Malheureusement, cette approche « naturelle » à la conjecture de Zagier n'a pas encore porté ses fruits. L'obstacle principal est que la définition des motifs de Tate mixtes est si peu explicite qu'on ne sait pas très bien dire « à quoi ressemble » un élément de  $\mathcal{C}_n(F)$ .

Malgré ce constat, le point de vue motivique permet de raffiner la stratégie vers la conjecture de Zagier en mettant en lumière le rôle central joué par la cogèbre de Lie motivique. Il semble en effet plus raisonnable de chercher à définir un morphisme de la  $K$ -théorie vers (les éléments primitifs de)  $\mathcal{C}(F)$ , et de s'en remettre à la conjecture de liberté pour en déduire une flèche vers  $\mathcal{B}(F)$  comme dans la conjecture 1.5.

La conjecture de liberté étant présentement hors de portée, on procède via des remplacements « symboliques » des espaces  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$ , qu'on note  $B_n$  et  $C_n$ , et qui sont définis par générateurs et relations *explicites*, avec la même structure abstraite (crochets) que leurs versions calligraphiques et des morphismes  $B \rightarrow \mathcal{B}$  et  $C \rightarrow \mathcal{C}$  (dont on peut conjecturer qu'ils sont des isomorphismes). Il faut penser à  $B_n(F)$  comme à un remplacement de  $\mathcal{B}_n(F)$  où les relations polylogarithmiques inexplicites  $\mathcal{R}_n(F)$  sont remplacées par des familles explicites de relations. Le groupe  $C_n(F)$  joue un rôle similaire mais incorpore la structure motivique de tous les polylogarithmes *multiples*, qu'on étudiera au prochain paragraphe. La structure conjecturale de la cogèbre de Lie motivique joue un rôle de guide et suggère une stratégie vers la conjecture de Zagier découpée en deux étapes relativement indépendantes :

1) La première étape consiste à construire un morphisme

$$K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^1(\mathrm{CE}^{\bullet}(C(F))_n) = \ker \left( \delta : C_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 C(F))_n \right)$$

à partir d'un morphisme de complexes

$$(37) \quad BG^{\bullet}(F, n) \longrightarrow \mathrm{CE}^{\bullet}(C(F))_n$$

comme au §1.7. Les techniques générales développées par Goncharov permettent de démontrer la compatibilité souhaitée entre le régulateur de Borel et le régulateur de Hodge induit sur  $C_n(F)$  via le morphisme vers  $\mathcal{C}_n(F)$ . On obtient comme corollaire de cette première étape une version « faible » de la conjecture de Zagier, où les polylogarithmes classiques sont remplacés par les polylogarithmes multiples. GONCHAROV (2005b) a apporté une contribution importante dans cette direction en décrivant le régulateur de Borel via une fonction appelée polylogarithme grassmannien (univalué). CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) donnent une formule pour une variante multivaluée de cette fonction, due à GONCHAROV (2013), en termes de polylogarithmes multiples. En principe, la marche à suivre est donc d'étendre ces

formules en un morphisme de complexes (37). Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette partie du travail de GONCHAROV et RUDENKO (2018), dans le cas  $n = 4$ , qui s’appuie notamment sur des travaux antérieurs de GONCHAROV (2000).

- 2) La deuxième étape consiste à prouver une version « symbolique » de la conjecture de liberté, c’est-à-dire à démontrer que le morphisme naturel  $B^\bullet(F, n) \rightarrow \text{CE}^\bullet(F, n)$  est un quasi-isomorphisme<sup>(10)</sup>. Pour  $n = 4$ , cette tâche a été accomplie par GANGL (2016) et GONCHAROV et RUDENKO (2018), et nous en décrivons les grandes lignes après un interlude sur les polylogarithmes multiples dans le contexte motivique.

#### 4. POLYLOGARITHMES MULTIPLES MOTIVIQUES ET PROFONDEUR

On explique maintenant comment définir des versions motiviques des polylogarithmes multiples dans la cogèbre de Lie motivique,

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{C}_{n_1 + \dots + n_r}(F),$$

pour des entiers  $n_1, \dots, n_r \geq 1$  et des éléments  $x_1, \dots, x_r \in F^\times$ . Ils sont définis comme des coefficients matriciels d’un motif de Tate mixte sur  $F$  appelé *groupe fondamentale motivique*, ce qui reflète l’interprétation des polylogarithmes multiples comme intégrales itérées. Le concept de profondeur (l’entier  $r$ ) fera l’objet d’une discussion particulière. On introduit aussi certaines variantes, les *corrélateurs*, en suivant GONCHAROV (2019).

##### 4.1. Intégrales itérées

Pour une variété différentielle  $X$ , des 1-formes différentielles  $\omega_1, \dots, \omega_n$  sur  $X$ , et un chemin lisse  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , on définit l’*intégrale itérée*

$$\int_{\gamma} \omega_1 \cdots \omega_n = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} f_1(t_1) dt_1 \cdots f_n(t_n) dt_n$$

où l’on a noté  $f_i(t)dt$  le tiré en arrière de  $\omega_i$  par  $\gamma$ . Cela généralise le concept classique d’intégrale d’une 1-forme le long d’un chemin à des mots formés de 1-formes.

Dans le cas où  $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_n, \infty\}$  est la droite projective époincée, on note, pour des points-base  $a_0, a_{n+1} \in X$ ,

$$(38) \quad \text{I}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) = \int_{a_0}^{a_{n+1}} \frac{dt}{t - a_1} \cdots \frac{dt}{t - a_n}$$

qui dépend d’un choix de chemin de  $a_0$  vers  $a_{n+1}$  dans  $X$ . On peut étendre cette définition au cas où  $a_0, a_{n+1}$  sont « à l’infini » dans  $X$ , c’est-à-dire parmi  $a_1, \dots, a_n, \infty$ . Dans ce cas-là l’intégrale itérée peut diverger (ce qui est le cas si et seulement si  $a_0 = a_1$  ou  $a_n = a_{n+1}$ ) et on fixe des vecteurs tangents à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  en  $a_0$  et  $a_{n+1}$  (qui sont alors appelés *points-base tangentiels*) pour la régulariser. Il est alors naturel de considérer

10. Pour l’application à la conjecture de Zagier, on a seulement besoin de montrer qu’il induit un isomorphisme au niveau des  $H^1$ .

des chemins  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  qui partent de  $a_0$  et arrivent en  $a_{n+1}$  avec des vecteurs vitesse égaux aux vecteurs tangents prescrits, et sont tels que  $\gamma(t) \in X$  pour  $0 < t < 1$ .

Pour des entiers  $n_1, \dots, n_r \geq 1$  et des nombres complexes non nuls  $a_1, \dots, a_r$  on note

$$I_{n_1, \dots, n_r}(a_1, \dots, a_r; a_{r+1}) = (-1)^r I(0; a_1, \{0\}^{n_1-1}, a_2, \{0\}^{n_2-1}, \dots, a_r, \{0\}^{n_r-1}; a_{r+1})$$

où  $\{0\}^k$  désigne une liste de 0 de longueur  $k$ . Cette notation est abusive et dépend du choix d'un chemin de 0 à  $a_{r+1}$ . Dans le cas divergent ( $n_r = 1, a_r = a_{r+1}$ ) la convention est de régulariser l'intégrale itérée via le vecteur tangent  $a_{r+1}$  en  $a_{r+1}$ , de sorte que  $I_1(a; a) = 0$ .

Un calcul rapide montre que les polylogarithmes multiples s'expriment en termes d'intégrales itérées sous la forme :

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(x_1, \dots, x_r) = I_{n_1, \dots, n_r}(1, x_1, x_1 x_2, \dots, x_1 x_2 \cdots x_{r-1}; x_1 x_2 \cdots x_r),$$

ou réciproquement :

$$I_{n_1, \dots, n_r}(a_1, \dots, a_r; a_{r+1}) = \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_{r+1}}{a_r}\right).$$

## 4.2. Groupoïdes fondamentaux motiviques et polylogarithmes multiples motiviques

Soit  $F$  un corps de nombres pour lequel on fixe un plongement complexe. Soit  $S \subset \mathbb{P}^1(F)$  un ensemble fini contenant  $\infty$ , et notons  $X = \mathbb{P}_F^1 \setminus S$ . On fixe un ensemble fini de points-base (éventuellement tangentiels) sur  $X$ , définis sur  $F$ . On note  $\pi_1^{\text{uni}}(X(\mathbb{C}))$  la *complétion pro-unipotente* (ou *de Malcev*) du groupoïde fondamental topologique de  $X(\mathbb{C})$  relatif au choix de points-base, qui est un schéma en groupoïdes défini sur  $\mathbb{Q}$  qui factorise les représentations unipotentes de  $\pi_1(X(\mathbb{C}))$ . Les intégrales itérées donnent lieu, d'après CHEN (1977), à un isomorphisme :

$$(39) \quad T(H_{\text{dR}}^1(X)) \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\pi_1^{\text{uni}}(X(\mathbb{C}))_{a,b}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

où  $T(V)$  désigne l'algèbre tensorielle sur  $V$  et la flèche associée à un mot  $\omega_1 \cdots \omega_n$  la fonction d'intégration  $\gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega_1 \cdots \omega_n$  définie sur les chemins  $\gamma$  de  $a$  à  $b$  dans  $X(\mathbb{C})$ . On peut, d'après DELIGNE (1989), GONCHAROV (2001b, 2005a) et DELIGNE et GONCHAROV (2005), voir (39) comme l'isomorphisme des périodes d'un ind-objet de la catégorie  $\text{MT}(F)$ , noté  $\mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(X)_{a,b})$ . En réalisation de Hodge cette construction remonte aux travaux de MORGAN (1978) et HAIN (1987).

En  $\omega$ -réalisation, le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\text{Hom}_{\text{MT}(F)}(\mathbb{Q}(-k), \text{gr}_{2k}^W \mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(X)_{a,b}))$  est indépendant de  $a, b$  et a une base formée des mots de longueur  $k$  en les  $dt/(t-s)$ , pour  $s \in S \setminus \{\infty\}$ . On a donc un isomorphisme canonique  $\text{gr}_0^W \mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(X)_{a,b}) \rightarrow \mathbb{Q}(0)$ , et l'intégrande de (38) permet de définir un coefficient matriciel

$$I^{\mathcal{C}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) \in \mathcal{C}_n(F),$$

pour tous les  $a_0, \dots, a_{n+1} \in F$ , qui ne dépend pas de choix de chemin de  $a_0$  à  $a_{n+1}$ , et ne dépend de choix de vecteurs tangents en  $a_0$  et  $a_{n+1}$  que si  $n = 1$ . Par les formules

du paragraphe précédent, on obtient aussi des éléments

$$(40) \quad I_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(a_1, \dots, a_r; a_{r+1}) \in \mathcal{C}_{n_1 + \dots + n_r}(F) \quad \text{et} \quad \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{C}_{n_1 + \dots + n_r}(F),$$

associés à  $a_1, \dots, a_{r+1}$  ou  $x_1, \dots, x_r$  dans  $F^\times$ . Ils généralisent (30) et on les appelle *polylogarithmes multiples motiviques* (dans leur version modulo produits). La conjecture suivante est due à GONCHAROV (1995b).

CONJECTURE 4.1. — *Les polylogarithmes multiples motiviques (40) engendrent la cogèbre de Lie motivique  $\mathcal{C}(F)$ .*

Via le dictionnaire tannakien, cette conjecture affirme que la catégorie tannakienne  $\text{MT}(F)$  est engendrée par les ind-objets  $\mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(\mathbb{P}_F^1 \setminus S)_{a,b})$ , pour  $S \subset \mathbb{P}^1(F)$  un sous-ensemble fini contenant  $\infty$  et  $a, b$  des points-base (éventuellement tangentiels) définis sur  $F$ .

Remarque 4.2. — Parmi les progrès vers cette conjecture, citons le théorème de BROWN (2012) selon lequel l'objet  $\mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}))$ , avec points-base tangentiels adéquats, engendre la catégorie  $\text{MT}(\mathbb{Z}) \subset \text{MT}(\mathbb{Q})$  des motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$ , et les résultats antérieurs de DELIGNE (2010) dans le cas de certains corps cyclotomiques. Dans une autre direction, BÖHM (1964) montre que tous les volumes de polytopes hyperboliques s'expriment en termes de polylogarithmes multiples (voir RUDENKO (2020)).

GONCHAROV (2001a, 2005a) montre que le cocrochet des polylogarithmes multiples motiviques est calculé par la jolie formule suivante<sup>(11)</sup>, qui généralise (31) :

$$(41) \quad \begin{aligned} & \delta I^{\mathcal{C}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} I^{\mathcal{C}}(a_0; a_1, \dots, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n; a_{n+1}) \wedge I^{\mathcal{C}}(a_i; a_{i+1}, \dots, a_{j-1}; a_j). \end{aligned}$$

### 4.3. La conjecture de profondeur

On définit de manière récursive une filtration croissante  $D$  (par la *profondeur*) sur la cogèbre de Lie motivique, en posant  $D_{-1}\mathcal{C}(F) = 0$ ,  $D_0\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}_1(F)$  et pour  $k \geq 1$ ,

$$D_k\mathcal{C}(F) = \{\alpha \in \mathcal{C}(F) \mid \delta\alpha \in \mathcal{C}_1(F) \wedge \mathcal{C}(F) + D_{k-1}\mathcal{C}(F) \wedge D_{k-1}\mathcal{C}(F)\}.$$

Il s'agit d'une filtration exhaustive : pour tout entier  $n$  on a

$$(42) \quad \mathcal{C}_n(F) = D_{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{C}_n(F).$$

Cette définition est plus claire dans le contexte dual de l'algèbre de Lie motivique : la filtration (décroissante) duale est donnée par  $D^0\mathbf{u}(F) = \mathbf{u}(F)$ ,  $D^1\mathbf{u}(F) = \mathbf{u}_{\leq -2}(F)$ , et pour tout  $k \geq 2$ ,  $D^k\mathbf{u}(F) = [\mathbf{u}_{\leq -2}(F), D^{k-1}\mathbf{u}(F)]$ .

La filtration par la profondeur est compatible avec la notion de profondeur des polylogarithmes multiples, au sens où on a  $\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r) \in D_r\mathcal{C}(F)$  pour tous les  $x_1, \dots, x_r \in F^\times$ , comme on peut le voir en utilisant (41). La conjecture suivante

11. Le lecteur attentif remarquera que certains termes du membre de droite peuvent dépendre de choix de vecteurs tangents en  $a_1, \dots, a_n$ , même si la somme n'en dépend pas.

de GONCHAROV (2001a), appelée *conjecture de profondeur*, raffine la conjecture 4.1 et précise la place des polylogarithmes multiples motiviques dans la cogèbre de Lie motivique.

CONJECTURE 4.3. — *Soit un entier  $k \geq 1$ . Les polylogarithmes multiples motiviques  $\mathrm{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r)$ , pour  $r \leq k$ , engendrent  $D_k \mathcal{C}(F)$ .*

Pour  $k = 1$  on retrouve (35). Le théorème suivant a été prouvé récemment par RUDENKO (2020) et constitue un premier pas vers la conjecture de profondeur, au vu de (42).

THÉORÈME 4.4. — *Tout polylogarithme multiple motivique de poids  $n \geq 2$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de polylogarithmes multiples motiviques  $\mathrm{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r)$  avec  $r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ .*

On peut enlever le mot « motivique » de cet énoncé quitte à travailler modulo des produits de polylogarithmes multiples de poids inférieur. Ce théorème est une amélioration notable de l'état antérieur des connaissances, où la borne  $\lfloor n/2 \rfloor$  était remplacée par  $\max\{1, n - 2\}$ .

#### 4.4. Corrélateurs

GONCHAROV (2019) a introduit une manière d'organiser les polylogarithmes multiples motiviques sous une forme plus symétrique (au sens de la symétrie cyclique voire diédrale) qui semble bien adaptée à l'étude des relations. Les objets centraux sont appelés *corrélateurs motiviques*.

4.4.1. *Produit et crochet d'Ihara.* — Soit  $S \subset \mathbb{P}^1(F)$  un ensemble fini contenant  $\infty$ , et notons  $S \setminus \{\infty\} = \{s_1, \dots, s_N\}$ . On fait le choix d'un vecteur tangent à  $\mathbb{P}_F^1$  en chaque point de  $S$  et on considère le groupoïde fondamental motivique  $\pi_1^{\mathrm{mot}}(\mathbb{P}_F^1 \setminus S)$  relatif à ce choix de points-base. On note  $\Pi$  sa  $\omega$ -réalisation, qui est un schéma en groupoïdes défini sur  $\mathbb{Q}$ . Par le formalisme tannakien, il est muni d'une action du groupe tannakien  $U(F)$ , qui a d'abord été étudiée par IHARA (1989) dans le cadre des représentations galoisiennes. Notons d'abord que le groupoïde  $\Pi$  est constant : pour une  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  et  $a, b \in S$ ,  $\Pi_{a,b}(R)$  est canoniquement isomorphe au groupe des séries non commutatives « group-like » en  $N$  variables  $X_1, \dots, X_N$  :

$$\Pi_{a,b}(R) = \{F \in R\langle\langle X_1, \dots, X_N \rangle\rangle, \Delta(F) = F \otimes F\},$$

où le coproduit (complété)  $\Delta$  est déterminé par  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$  et  $\Delta(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$ . Cependant, l'action de  $U(F)$  sur  $\Pi_{a,b}$  est sensible aux points-base  $a, b$ .

Soit  $A$  le schéma en groupes dont les points sont les automorphismes du groupoïde  $\Pi$  qui agissent trivialement sur  $\exp(X_i) \in \Pi_{s_i, s_i}$  pour tout  $i = 1, \dots, N$  et sur  $\exp(X_\infty) \in \Pi_{\infty, \infty}$ , avec  $X_\infty = -X_1 - \dots - X_N$ . L'action de  $U(F)$  sur  $\Pi$  se factorise par  $A$  et induit donc un morphisme de schémas en groupes  $U(F) \rightarrow A$ . L'évaluation en la série constante  $1 \in \Pi_{\infty, s_i}$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , induit un isomorphisme de schémas  $A \xrightarrow{\sim} P$  où  $P$  est le sous-schéma de  $\Pi_{\infty, s_1} \times \dots \times \Pi_{\infty, s_N}$  formé des  $N$ -uplets  $(F_1, \dots, F_N)$  qui

vérifient  $F_1 X_1 F_1^{-1} + \dots + F_N X_N F_N^{-1} = X_1 + \dots + X_N$ . On a donc par transfert une loi de groupe sur  $P$  qu'on appelle *produit d'Thara*.

Passons maintenant aux algèbres de Lie en notant  $\mathfrak{a} = \text{Lie}(A)$  et  $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ . Cette dernière algèbre de Lie est l'espace des  $N$ -uplets  $(f_1, \dots, f_N)$  d'éléments de l'algèbre de Lie libre complétée  $\widehat{\text{Lie}}(X_1, \dots, X_N)$  qui vérifient  $[f_1, X_1] + \dots + [f_N, X_N] = 0$ . Son crochet de Lie, noté  $\{-, -\}$  et appelé *crochet d'Thara*, est donné par la formule  $\{f, g\} = \underline{h}$  avec

$$h_i = D_f(g_i) - D_g(f_i) - [f_i, g_i] ,$$

où l'on note  $D_f$  l'unique dérivation continue de  $\widehat{\text{Lie}}(X_1, \dots, X_N)$  qui est telle que  $D_f(X_i) = [f_i, X_i]$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ .

**4.4.2. Codage par des mots cycliques.** — DRINFEL'D (1990) donne la description suivante de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$ . On voit  $\mathfrak{p}$  à l'intérieur de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{q}$ , qui est définie de la même manière en permettant aux  $f_i$  d'être des séries non commutatives quelconques dans  $\mathbb{Q}\langle\langle X_1, \dots, X_N \rangle\rangle$ . Soit maintenant  $\mathfrak{cyc}$  l'espace des séries cycliques, c'est-à-dire invariantes par permutation circulaire des lettres à l'intérieur de chaque mot, qui ont un terme constant nul. Pour une série  $F$  on note  $\partial_i F$  sa dérivée partielle par rapport à  $X_i$ , qui est donnée sur les mots par  $\partial_i(X_i w) = w$  et  $\partial_i(X_j w) = 0$  pour  $j \neq i$ . On a un isomorphisme  $\mathfrak{cyc} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{q}$  donné par  $F \mapsto (\partial_1 F, \dots, \partial_n F)$ . On a donc le diagramme suivant d'algèbres de Lie :

$$(43) \quad \mathfrak{u}(F) \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{p} \hookrightarrow \mathfrak{q} \xleftarrow{\sim} \mathfrak{cyc}$$

Pour décrire le crochet de Lie sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{cyc}$  il est plus commode de la voir comme le dual linéaire d'une cogèbre de Lie graduée  $\mathcal{Cyc}$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , une base de  $\mathcal{Cyc}_n$  est donnée par les mots de longueur  $n + 1$  en  $X^1, \dots, X^N$  considérés modulo permutations circulaires des lettres à l'intérieur de chaque mot. Le cocrochet sur  $\mathcal{Cyc}$  est donné par

$$\delta(X^{i_0} \dots X^{i_n}) = \sum_{0 \leq j < k \leq n} (X^{i_j} \dots X^{i_k}) \wedge (X^{i_k} \dots X^{i_{j-1}}) .$$

On a donc, dualement à (43), un morphisme de cogèbres de Lie

$$(44) \quad \mathcal{Cyc} \rightarrow \mathcal{C}(F) .$$

On montre que ce morphisme ne dépend des choix des vecteurs tangents en les points-base  $s_1, \dots, s_N, \infty$  qu'en poids 1.

**4.4.3. Corrélateurs motiviques.** — Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$  et appliquons la construction du paragraphe précédent à un ensemble  $S \supset \{x_0, \dots, x_n\}$ . En appliquant (44) au mot dont les lettres correspondent à  $x_0, \dots, x_n$ , on obtient un élément

$$\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}_n(F) ,$$

appelé *corrélateur motivique* par GONCHAROV (2019). On a la symétrie cyclique  $\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n, x_0)$  et la formule de cocrochet

$$(45) \quad \delta \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq j < k \leq n} \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_j, \dots, x_k) \wedge \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_k, \dots, x_{j-1}),$$

qui peut être visualisée à l'aide de coupures dans un disque, comme dans la figure 1.

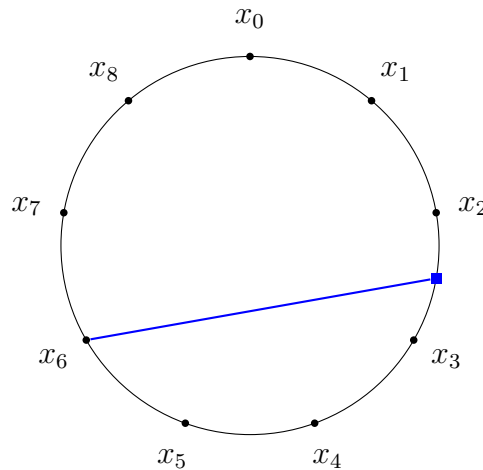


FIGURE 1. Pour  $n = 8$ , le terme dans la formule de cocrochet (45) correspondant à  $(j, k) = (3, 6)$  est  $\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_3, x_4, x_5, x_6) \wedge \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_6, x_7, x_8, x_0, x_1, x_2)$ .

En poids 1 on a

$$\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1) = \log^{\mathcal{C}}(x_1 - x_0)$$

si on fait le choix du vecteur tangent en  $\infty$  qui est dual à  $d(1/x)$ . En poids 2 on a

$$\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, x_2) = \text{Li}_2^{\mathcal{C}}\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\right).$$

*Remarque 4.5.* — Goncharov donne une formule intégrale pour  $\varpi_n(\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, \dots, x_n))$  et étudie des généralisations sur des courbes de genre supérieur qui devraient jouer un rôle dans des généralisations de la conjecture de Zagier (voir la remarque 1.8).

Les corrélateurs motiviques s'expriment en termes des polylogarithmes multiples motiviques, et *vice versa*. Par exemple, on montre facilement par récurrence sur  $n \geq 1$  qu'on a l'égalité, pour  $x \in F$  :

$$\text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) = -\text{Cor}^{\mathcal{C}}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, x).$$

Il semble néanmoins que les relations entre corrélateurs motiviques aient une combinatoire plus maniable que celles entre polylogarithmes multiples motiviques, notamment du fait de la symétrie cyclique (comparer les formules (41) et (45)). Ils sont à la source de la description « symbolique » par GONCHAROV et RUDENKO (2018) de la cogèbre de Lie motivique en poids  $\leq 4$ , que nous abordons maintenant.

## 5. LA STRUCTURE DE LA COGÈBRE DE LIE MOTIVIQUE EN POIDS $\leq 4$

On s'intéresse maintenant à la structure fine de la cogèbre de Lie motivique en poids  $\leq 4$  et aux résultats de GANGL (2016) et GONCHAROV et RUDENKO (2018) vers la conjecture de liberté et la conjecture de Zagier pour  $n = 4$ .

### 5.1. La relation à 5 termes en poids 4

Rappelons que la conjecture de liberté prévoit, en poids 4, la suite exacte courte (36). En mettant de côté l'injectivité de  $\iota_4$ , cela revient à montrer que la composante  $\delta_{2,2}$  du cocrochet induit un isomorphisme

$$\bar{\delta}_{2,2} : \mathcal{C}_4(F)/\iota_4(\mathcal{B}_4(F)) \longrightarrow \mathcal{C}_2(F) \wedge \mathcal{C}_2(F) .$$

La surjectivité est facile, au moins dans le cas d'un corps de nombres où l'on sait que  $\mathcal{C}_2(F)$  est engendré par les dilogarithmes motiviques  $\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(x)$  pour  $x \in F^\times$ . La formule générale (41) implique en effet l'égalité, pour  $x, y \in F^\times$  :

$$(46) \quad \delta_{2,2} \text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(x, y) = -\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(x) \wedge \text{Li}_2^{\mathcal{C}}(y) .$$

Pour prouver l'injectivité, il faut déjà montrer que tout polylogarithme multiple motivique de poids 4 dont le cocrochet  $\delta_{2,2}$  s'annule est une combinaison linéaire de polylogarithmes motiviques  $\text{Li}_4^{\mathcal{C}}(x)$ . (C'est suffisant si l'on croit à la conjecture 4.1, ou dans une version « symbolique » de la cogèbre de Lie motivique où seuls les polylogarithmes multiples apparaissent.) Une première réduction (voir GANGL (2016) et DAN (2008) corrigé par CHARLTON (2017)) permet d'exprimer tout polylogarithme multiple motivique de poids 4 en termes de  $\text{Li}_4^{\mathcal{C}}$  et  $\text{Li}_{3,1}^{\mathcal{C}}$  seulement. Au vu de (46) on est alors amené à définir une section de  $\bar{\delta}_{2,2}$  par la formule  $\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(x) \wedge \text{Li}_2^{\mathcal{C}}(y) \mapsto -\text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(x, y)$ , et le tout est de montrer que cette section est bien définie. On montre assez facilement que  $\text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(x, y) + \text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(y, x) = 0$  modulo  $\iota_4(\mathcal{B}_4(F))$  et il reste à montrer que  $\text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}$  vérifie la relation à 5 termes en la première variable, ces relations engendrant toutes les relations entre dilogarithmes motiviques  $\text{Li}_2^{\mathcal{C}}$  au moins si  $F$  est un corps de nombres. C'est le contenu du théorème suivant, conjecturé par GONCHAROV (1994, 1995a) et démontré par GANGL (2016).

**THÉORÈME 5.1.** — *On a, pour  $x_0, \dots, x_4 \in \mathbb{P}^1(F)$  deux à deux distincts et  $y \in F^\times$  :*

$$(47) \quad \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(r(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_4), y) = 0 \pmod{\iota_4(\mathcal{B}_4(F))} .$$

Ce théorème apporte du poids à la conjecture de liberté (conjecture 3.8), et est une étape cruciale dans la preuve de la conjecture de Zagier pour  $n = 4$ . La preuve de Gangl, assistée par ordinateur, exprime le membre de gauche de (47) comme une combinaison linéaire explicite de 122 évaluations de  $\text{Li}_4^{\mathcal{C}}$  en des arguments qui sont malheureusement difficiles à interpréter en vue d'éventuelles généralisations. L'approche de GONCHAROV et RUDENKO (2018) permet de redémontrer ce résultat de manière plus conceptuelle



grâce à des relations entre polylogarithmes multiples motiviques qui semblent avoir une origine systématique. Ces relations donnent lieu à une version « symbolique » de la cogèbre de Lie motivique en poids  $\leq 4$ , qu'on présente maintenant.

## 5.2. Définitions de $B$ et $C$ en poids $\leq 4$

En suivant GONCHAROV et RUDENKO (2018), on définit maintenant par générateurs et relations des espaces vectoriels  $C_n(F)$  et des sous-espaces  $B_n(F)$  de manière fonctorielle en le corps  $F$ , pour  $n = 1, 2, 3, 4$ . On pose  $B_1(F) = C_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$ .

On considère la normalisation suivante du birapport de 4 points dans  $\mathbb{P}^1$

$$r_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)},$$

ainsi qu'une version à 6 points :

$$r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_6)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_5)(x_6 - x_1)}.$$

On voit  $r_2$  (resp.  $r_3$ ) comme un morphisme de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$  (resp.  $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ ) dans  $\mathbb{P}^1$ . Rappelons que l'espace de modules  $\mathcal{M}_{0,k}$  est l'espace des  $k$ -uplets de points deux à deux distincts de la droite projective  $\mathbb{P}^1$  modulo les automorphismes de  $\mathbb{P}^1$ , et que  $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$  désigne sa compactification de Deligne–Mumford. Dans les définitions qui suivent on fait un abus de notation en notant  $(x_1, \dots, x_k)$  un point de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$ , et de manière similaire les points qui s'en déduisent par l'action du groupe symétrique sur  $k$  éléments ou par des applications d'oubli  $\overline{\mathcal{M}}_{0,k} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,k'}$  avec  $k' < k$ .

**DÉFINITION 5.2.** — *On définit  $B_2(F) = C_2(F)$  comme le quotient de l'espace vectoriel librement engendré par des symboles  $[x]_2$  pour  $x \in \mathbb{P}^1(F)$  par les relations suivantes, pour  $(x_1, \dots, x_5) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(F)$  :*

$$\begin{aligned} & [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4)]_2 + [r_2(x_2, x_3, x_4, x_5)]_2 + [r_2(x_3, x_4, x_5, x_1)]_2 \\ & + [r_2(x_4, x_5, x_1, x_2)]_2 + [r_2(x_5, x_1, x_2, x_3)]_2 = 0. \end{aligned}$$

On a ici réécrit la relation à 5 termes (18) sous une forme cyclique. Dans la suite on utilise la sommation cyclique  $\text{Cyc}_n f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$ , où les indices sont pris modulo  $n$ .

**DÉFINITION 5.3.** — *On définit  $B_3(F) = C_3(F)$  comme le quotient de l'espace vectoriel engendré par des symboles  $[x]_3$  et  $[x, y]_{2,1}$  pour  $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$  par les relations suivantes, pour  $(x_1, \dots, x_6) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,6}(F)$  :*

$$\begin{aligned} (48) \quad & \text{Cyc}_6 \left( [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_5, x_6, x_1)]_{2,1} \right. \\ & \left. - [r_2(x_1, x_2, x_4, x_5)]_3 + 2[r_2(x_1, x_3, x_4, x_5)]_3 \right) \\ & = 4[r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)]_3 - 6[1]_3. \end{aligned}$$

Les générateurs  $[x, y]_{2,1}$  vont jouer le rôle de polylogarithmes multiples (ou corrélateurs) motiviques de profondeur 2. Comme le suggère l'égalité  $B_3(F) = C_3(F)$ , ils s'écrivent en fonction des générateurs  $[x]_3$  grâce à la spécialisation suivante (au diviseur  $\{x_1 = x_3\} \simeq \overline{\mathcal{M}}_{0,5}$  du bord de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ ) de la relation (48) :

$$[x, y]_{2,1} = [1 - x^{-1}]_3 + [1 - y^{-1}]_3 + [y/x]_3 + [(1 - y)/(1 - x)]_3 - [x(1 - y)/y(1 - x)]_3 - [1]_3 .$$

En substituant cette dernière expression dans (48) on obtient la relation (« à 22 termes ») découverte par GONCHAROV (1994, 1995a) et qui est à l'origine de la relation « à 840 termes » (19). Il est notable que la relation (49) est liée à la géométrie des configurations de 6 points dans  $\mathbb{P}^1$  alors que (19) concerne les configurations de 7 points dans  $\mathbb{P}^2$ .

DÉFINITION 5.4. — *On définit  $C_4(F)$  comme le quotient de l'espace vectoriel engendré par des symboles  $[x]_4$  et  $[x, y]_{3,1}$  pour  $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$  par les relations suivantes<sup>(12)</sup>, pour  $(x_1, \dots, x_7) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,7}(F)$  :*

$$(49) \quad \begin{aligned} & \text{Cyc}_7 \left( - [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_6, x_7, x_1)]_{3,1} \right. \\ & \quad + [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_5, x_7, x_1)]_{3,1} \\ & \quad - [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_5, x_6, x_1)]_{3,1} \\ & \quad \left. + [r_2(x_1, x_2, x_4, x_6)]_4 + [r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)]_4 \right) = 0 . \end{aligned}$$

On définit  $B_4(F) \subset C_4(F)$  comme le sous-espace engendré par les symboles  $[x]_4$ .

Les relations (48) et (49) ont une origine commune qui sera l'objet du §6. Contentons-nous pour l'instant de noter que les arguments de  $r_2$  et  $r_3$  dans ces relations s'interprètent comme des dissections d'un polygone à 6 côtés (respectivement à 7 côtés) comme dans la figure 2.

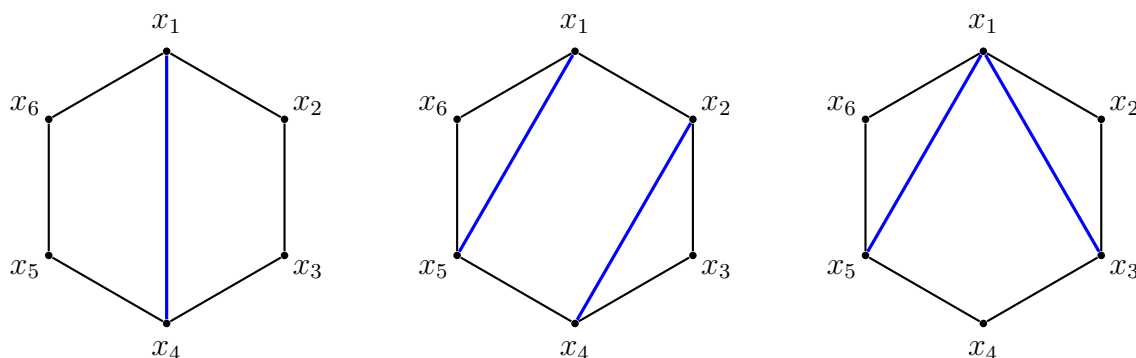


FIGURE 2. Les arguments de  $r_2$  dans la relation (48) sont les sommets des quadrilatères figurant dans les dissections d'un hexagone.

12. GONCHAROV et RUDENKO (2018) incluent dans leur définition de  $C_4(F)$  les relations entre les générateurs  $[x]_4$  qui viennent des relations tétralgorithiques  $\mathcal{R}_4(F)$ , tout en conjecturant que ça ne change pas la définition. Cet ajout ne sera pas nécessaire en ce qui nous concerne.

### 5.3. La structure de la cogèbre de Lie motivique en poids $\leq 4$

Le théorème suivant est prouvé par GONCHAROV et RUDENKO (2018).

THÉORÈME 5.5. — 1) Les formules suivantes munissent  $C_{\leq 4}(F)$  d'une structure de cogèbre de Lie graduée :

$$\begin{aligned} \delta[x]_2 &= -(1-x) \wedge x, \quad \delta[x]_3 = [x]_2 \wedge x, \quad \delta[x]_4 = [x]_3 \wedge x, \\ \delta[x, y]_{2,1} &= [(1-y)/(1-x)]_2 \wedge (y/x) + [y/x]_2 \wedge (1-y)/(1-x) \\ &\quad + [x]_2 \wedge (1-y^{-1}) + [y]_2 \wedge (1-x^{-1}), \\ \delta[x, y]_{3,1} &= [x, y]_{2,1} \wedge (x/y) + [x/y]_3 \wedge (1-x)/(1-y) \\ &\quad + [x]_3 \wedge (1-y^{-1}) - [y]_3 \wedge (1-x^{-1}) - [x]_2 \wedge [y]_2. \end{aligned}$$

2) Les formules suivantes définissent un morphisme de cogèbres de Lie graduées  $C_{\leq 4}(F) \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 4}(F)$

$$\begin{aligned} [x]_n &\mapsto -\text{Cor}^{\mathcal{C}}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, x) = \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) \quad \text{pour } n = 2, 3, 4, \\ [x, y]_{2,1} &\mapsto \text{Cor}^{\mathcal{C}}(0, x, 1, y), \\ [x, y]_{3,1} &\mapsto -\text{Cor}^{\mathcal{C}}(0, 0, x, 1, y). \end{aligned}$$

C'est la deuxième partie du théorème qui justifie les définitions de  $C_{\leq 4}(F)$  et du cocrochet. Nous expliquerons dans la prochaine section comment Goncharov et Rudenko sont arrivés à ces formules par la combinatoire des dissections de polygones. On renvoie le lecteur aux travaux récents de RUDENKO (2020) et CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2020) pour des généralisations en poids supérieur.

Le théorème suivant, qui est une version « symbolique » du théorème 5.1, est prouvé par GONCHAROV et RUDENKO (2018).

THÉORÈME 5.6. — On a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow B_4(F) \longrightarrow C_4(F) \xrightarrow{\delta_{2,2}} C_2(F) \wedge C_2(F) \longrightarrow 0.$$

On note d'abord que la première flèche est injective par définition et que la deuxième flèche est surjective puisque  $\delta_{2,2}[x, y]_{3,1} = -[x]_2 \wedge [y]_2$  pour tous les  $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$ . Il reste à montrer l'exactitude au milieu ; comme dans la discussion du §5.1, cela revient à montrer que le morphisme  $C_2(F) \wedge C_2(F) \rightarrow C_4(F)/B_4(F)$  donné par  $[x]_2 \wedge [y]_2 \mapsto -[x, y]_{3,1}$  est bien défini, c'est-à-dire que le symbole  $[x, y]_{3,1}$  vérifie  $[x, y]_{3,1} + [y, x]_{3,1} = 0$  et la relation à 5 termes en la première variable modulo  $B_4(F)$ . Ces deux relations sont prouvées en combinant des spécialisations de la relation générique (49) à des strates de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,7}$  bien choisies.

On peut montrer que la restriction à  $B_{\leq 4}(F)$  du morphisme  $C_{\leq 4}(F) \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 4}(F)$  se factorise par un morphisme  $B_{\leq 4}(F) \rightarrow \mathcal{B}_{\leq 4}(F)$ . On obtient alors le diagramme commutatif de complexes suivant, où  $\sim$  désigne un quasi-isomorphisme.

$$(50) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}^\bullet(F, 4) & \longrightarrow & \mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_4 \\ \uparrow & & \uparrow \\ B^\bullet(F, 4) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{CE}^\bullet(C(F))_4 \end{array}$$

#### 5.4. Compléments sur la preuve

En plus du quasi-isomorphisme (50), un ingrédient important de la preuve du cas  $n = 4$  de la conjecture de Zagier par GONCHAROV et RUDENKO (2018) est la construction d'un morphisme de complexes

$$BG^\bullet(F, 4) \longrightarrow \mathrm{CE}^\bullet(C(F))_4 ,$$

où  $BG^\bullet(F, 4)$  est le complexe bigrassmannien introduit au §1.7. La composante cruciale est un morphisme  $G_7(F, 4) \rightarrow C_4(F)$ , qui associe un élément de  $C_4(F)$  à une configuration  $(a_0, \dots, a_7)$  de 8 points de  $F^4$  en position générale. Ce morphisme est une version du polylogarithme grassmannien de GONCHAROV (2005b, 2013) et est construit de manière implicite en se basant sur des travaux antérieurs de GONCHAROV (2000).

Peu après, CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) ont donné une formule explicite pour ce morphisme, poussé dans  $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_4$ , en termes de  $I_{3,1}^{\mathcal{C}}$  et  $\mathrm{Li}_4^{\mathcal{C}}$ . Il devrait donc être possible, quitte à vérifier des compatibilités avec les relations définissant  $C(F)$ , de se servir de cette formule pour rendre la preuve de GONCHAROV et RUDENKO (2018) effective.

De plus, CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) écrivent explicitement un représentant dans  $\mathcal{B}_4(F)$  du même cocycle pour en déduire une équation fonctionnelle du tétralgorithme, dans l'esprit de (18) et (19). Elle s'écrit dans  $\mathcal{B}_4(F)$  sous la forme prévue

$$\sum_{i=0}^8 (-1)^i R_4(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_8) = 0 ,$$

où  $R_4(a_1, \dots, a_8) \in \mathbb{Q}[F^\times]$  est un invariant explicite mais compliqué d'une configuration de 8 points dans  $\mathbb{P}^3(F)$ , dont l'interprétation géométrique n'est pas encore claire.

## 6. LE RÔLE DES STRUCTURES AMASSÉES ET DE LA COMBINATOIRE DES DISSECTIONS

Les structures amassées, introduites par FOMIN et ZELEVINSKY (2002), sont des objets de combinatoire algébrique (et géométrique) qui interviennent dans de nombreux domaines. FOCK et GONCHAROV (2009) ont mis en lumière l'importance de ces structures dans l'étude du dilogarithme et de ses aspects motiviques, et GONCHAROV et RUDENKO (2018) ont incorporé les polylogarithmes (multiples) supérieurs dans ce

contexte. Ce sont ces liens, et notamment la combinatoire des dissections de polygones, qui expliquent la forme des relations (48) et (49) dont il a été question plus haut.

### 6.1. Structures amassées et dilogarithme

Fixons un entier  $n$ . Une *graine*  $(B, u)$  est la donnée d'une matrice antisymétrique à coefficients entiers  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et d'une famille  $u = (u_1, \dots, u_n)$  d'éléments du corps  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  qui l'engendrent librement. On peut la représenter par un carquois (graphe orienté) dont les sommets sont les entiers de 1 à  $n$ , décorés par les  $u_i$ , et où  $b_{ij}$  arêtes vont de  $i$  vers  $j$  si  $b_{ij} \geq 0$ . On appelle  $B$  la *matrice d'échange*,  $u$  l'*amas* et les  $u_i$  les *variables d'amas*.

Pour un sommet  $k \in \{1, \dots, n\}$  la *mutation* de la graine  $(B, u)$  suivant le sommet  $k$  est la graine  $(B', u')$  où

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{ij} + |b_{ik}|b_{kj} & \text{si } b_{ik}b_{kj} > 0 \\ b_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

et les variables  $u_i$  sont données par  $u'_i = u_i$  pour  $i \neq k$  et par la relation d'échange

$$u_k u'_k = \prod_{i | b_{ik} > 0} u_i^{b_{ik}} + \prod_{j | b_{kj} > 0} u_j^{b_{kj}}.$$

*Exemple 6.1.* — Voici un exemple de mutation (suivant le sommet de gauche) :

$$x_1 \bullet \longrightarrow \bullet x_2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1+x_2}{x_1} \bullet \longleftarrow \bullet x_2$$

Si l'on continue à appliquer des mutations suivant le sommet de droite, puis de gauche, puis de droite, puis de gauche, on retombe (après 5 mutations donc) sur la graine de départ, à renumérotation des sommets près :  $x_2 \bullet \longleftarrow \bullet x_1$ .

En partant d'une graine et en appliquant successivement des mutations suivant tous les sommets possibles, on produit ce qu'on appellera improprement une *structure amassée*. Il arrive, comme dans l'exemple précédent, qu'on ne produise ainsi qu'un nombre fini de graines différentes. Ce phénomène de finitude est rare et correspond, d'après FOMIN et ZELEVINSKY (2003b), aux graines dont une mutation a un carquois sous-jacent qui est une orientation d'un carquois de Dynkin (type ADE). Dans ces cas, la structure combinatoire des mutations peut être modélisée par un graphe appelé *graphe d'échange*, où les sommets sont les graines (à renumérotation des sommets près) et les arêtes indiquent les mutations. D'après CHAPOTON, FOMIN et ZELEVINSKY (2002), le graphe d'échange est le 1-squelette d'un polytope convexe appelé associaèdre généralisé. En type  $A$  il s'agit de l'associaèdre classique, découvert par Stasheff. L'exemple que nous venons de traiter correspond au type  $A_2$ , et son graphe d'échange est un cycle de longueur 5, qui est le bord d'un pentagone.

L'importance des structures amassées dans l'étude du dilogarithme et de ses aspects motiviques a été mise en lumière par FOCK et GONCHAROV (2009). Pour une graine  $(B, u)$  donnée on définit :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} u_i \wedge u_j \in \Lambda^2(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)_{\mathbb{Q}}^{\times}) .$$

Si  $(B', u')$  est obtenue par mutation du sommet  $k$ , on a la relation fondamentale

$$(51) \quad W' - W = -(1 + X) \wedge X \quad \text{avec} \quad X = \prod_{j=1}^n u_j^{b_{kj}} .$$

On l'écrit sous la forme plus suggestive

$$(52) \quad W' - W = \delta_2[-X]_2 ,$$

où  $[-X]_2$  est vu dans le groupe de Bloch  $\mathcal{B}_2(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n))$ . Cela implique qu'on a l'égalité  $[W] = [W']$  dans  $K_2(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n))$  : une classe canonique dans le  $K_2$  est attachée à la structure amassée.

En revenant au cas du type  $A_2$ , on voit qu'on peut exprimer la discussion précédente sous la forme du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_2(\mathbb{Q}(x_1, x_2)) & \xrightarrow{\delta_2} & \Lambda^2(\mathbb{Q}(x_1, x_2)_{\mathbb{Q}}^{\times}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La première ligne est le complexe cellulaire du pentagone. La flèche verticale de droite envoie un sommet du pentagone, c'est-à-dire une graine, vers l'élément  $W$  correspondant. La flèche verticale du milieu envoie une arête du pentagone, c'est-à-dire une mutation, vers l'élément  $[-X]_2$  correspondant. La commutativité du carré de droite est équivalente à (52). La commutativité du carré de gauche est équivalente à l'égalité

$$[-x_1]_2 + \left[ -\frac{1+x_2}{x_1} \right]_2 + \left[ -\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \right]_2 + \left[ -\frac{1+x_1}{x_2} \right]_2 + [-x_2]_2 = 0$$

dans  $\mathcal{B}_2(\mathbb{Q}(x_1, x_2))$ , ce qui est une réécriture<sup>(13)</sup> de la relation à 5 termes du dilogarithme (17).

Une idée importante de GONCHAROV et RUDENKO (2018) est que les liens entre structures amassées et dilogarithmes devraient s'étendre en poids supérieur. On se contentera de développer ces idées dans le cadre du type  $A$ , alors que la vision de

13. Il suffit pour s'en convaincre de poser  $x_1 = -x$ ,  $x_2 = -1 + y$ , et utiliser les relations  $[1 - u]_2 = -[u]_2$  et  $[u^{-1}]_2 = -[u]_2$ . Notons qu'on peut justifier de la commutativité du carré de gauche, et donc redécouvrir la relation à 5 termes, par un argument abstrait. En effet,  $\delta_2$  est injective puisque d'après la remarque 1.12 son noyau est un quotient de  $\text{gr}_\gamma^2 K_3(\mathbb{Q}(x_1, x_2))_{\mathbb{Q}}$ , qui par localisation est isomorphe à  $\text{gr}_\gamma^2 K_3(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}}$ , et donc nul par le théorème 1.4. La commutativité du carré de droite et le fait que  $\partial \circ \partial = 0$  impliquent donc la commutativité du carré de gauche.

Goncharov–Rudenko est plus générale. Il est d’ailleurs connu que les autres types jouent un rôle dans les équations fonctionnelles des polylogarithmes (on trouve chez GOLDEN, GONCHAROV, SPRADLIN, VERGU et VOLOVICH (2014) une équation fonctionnelle pour le trilogarithme dans le cadre de la structure amassée de type  $D_4$ ).

## 6.2. Structures amassées en type $A$

Rappelons que l’associaèdre  $\mathcal{A}_n$  est un polytope convexe de dimension  $n - 3$  dont le treillis des faces est en bijection avec le treillis des dissections d’un polygone  $\Pi_n$  à  $n$  côtés, la codimension d’une face étant le nombre de diagonales dans la dissection correspondante. Les sommets de  $\mathcal{A}_n$  sont donc en bijection avec les triangulations de  $\Pi_n$ . La famille des associaèdres a une structure opéradique : à une dissection de  $\Pi_n$  en des polygones  $\Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_r}$  correspond une face de  $\mathcal{A}_n$  isomorphe au produit  $\mathcal{A}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{n_r}$ .

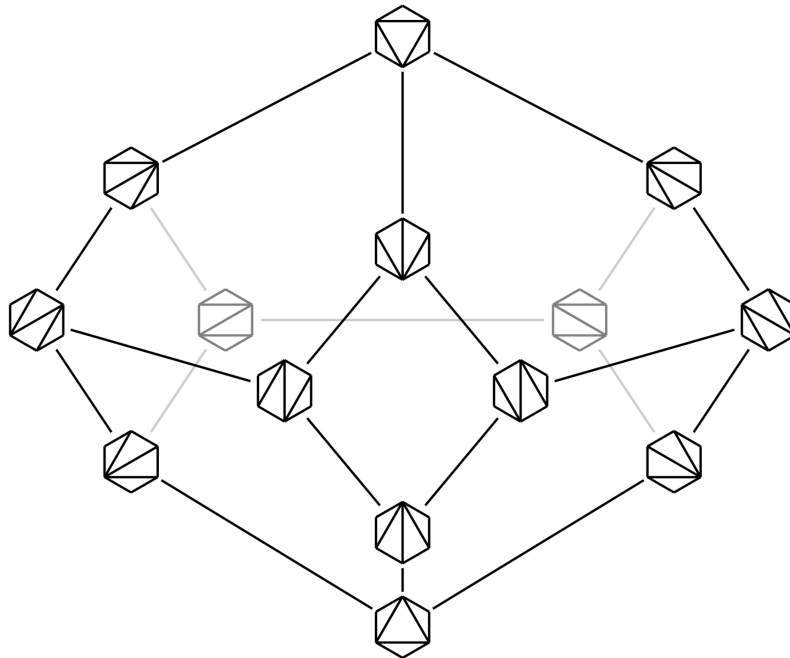


FIGURE 3. L’associaèdre  $\mathcal{A}_6$  a 3 faces carrées et 6 faces pentagonales (figure empruntée à FOMIN et ZELEVINSKY (2003a)).

Le 1-squelette de  $\mathcal{A}_n$  est le graphe d’échange d’une structure amassée (de type  $A_{n-3}$ ) qu’on décrit maintenant. Notons  $|v, w|$  le déterminant de deux vecteurs  $v, w$  du plan. Soit  $Y_n$  la variété sur  $\mathbb{Q}$  définie comme le quotient par  $SL_2$  de l’espace des  $n$ -uplets  $(v_1, \dots, v_n)$  de points du plan en position générale (c’est-à-dire tels que  $|v_i, v_j| \neq 0$  si  $i \neq j$ ). Via les déterminants  $|v_i, v_j|$ , on peut voir  $Y_n$  comme la sous-variété du tore  $\mathbb{G}_m^{n(n-1)/2}$  définie par les équations de Plücker. On peut aussi voir  $Y_n$  comme l’ouvert du cône affine sur la Grassmannienne  $Gr(2, n)$  formé des 2-plans dans un espace vectoriel de dimension  $n$  qui sont en position générale par rapport à  $n$  hyperplans de coordonnées. Notons  $F_n$  le corps des fonctions de  $Y_n$ , qui est non canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_{2n-3})$ .

À une dissection de  $\Pi_n$  en des polygones  $\Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_r}$  est associée un morphisme de  $Y_n$  vers  $Y_{n_1} \times \dots \times Y_{n_r}$  dont les composantes sont des morphismes d'oubli, et on a donc un morphisme  $F_{n_1} \otimes \dots \otimes F_{n_r} \longrightarrow F_n$ .

On oriente le polygone  $\Pi_n$  et on étiquette ses sommets avec des symboles  $v_1, \dots, v_n$  de manière cyclique. On associe une graine à une triangulation de  $\Pi_n$  de la manière suivante, illustrée par la figure 4. Définissons un carquois en plaçant un sommet sur chacune des  $n - 3$  diagonales de la triangulation et sur chacun des  $n$  côtés de  $\Pi_n$  (ces  $n$  derniers sommets sont considérés *gelés*, ce qui signifie qu'ils ne donneront pas lieu à des mutations). On décore par la variable d'amas  $|v_i, v_j| \in F_n$  un sommet qui est sur un segment reliant  $v_i$  et  $v_j$ , avec  $i < j$ . Chaque triangle de la triangulation donne lieu à trois sommets du carquois, qu'on relie par trois arêtes orientées dans le sens direct.

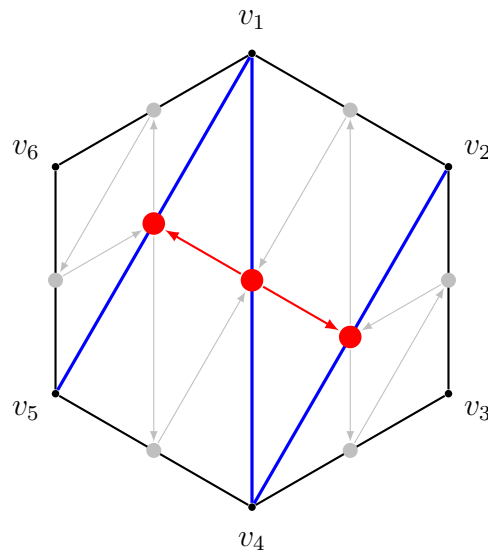


FIGURE 4. Le carquois associé à une triangulation.

Soient  $T$  et  $T'$  deux triangulations qui sont reliées par un « flip » d'une diagonale dans un quadrilatère, comme dans la figure 5. On voit grâce aux relations de Plücker que les graines associées à  $T$  et  $T'$  sont des mutations l'une de l'autre suivant le sommet correspondant au quadrilatère. On engendre, en itérant les « flips » (mutations suivant les sommets non gelés), une structure amassée avec un nombre fini de graines dont le graphe d'échange est le 1-squelette de l'associaèdre  $\mathcal{A}_n$ .

Par la construction du paragraphe précédent, on associe un élément  $W_T \in \Lambda^2(F_n^\times)_{\mathbb{Q}}$  à toute triangulation  $T$  de  $\Pi_n$ . Concrètement, on associe au triangle ( $n = 3$ ) l'élément

$$W_{\Delta} = |v_1, v_2| \wedge |v_2, v_3| + |v_2, v_3| \wedge |v_1, v_3| + |v_1, v_3| \wedge |v_1, v_2| \in \Lambda^2(F_3^\times)_{\mathbb{Q}},$$

et à une triangulation  $T$  la somme des contributions de chaque triangle :

$$(53) \quad W_T = \sum_{\Delta \in T} W_{\Delta}.$$



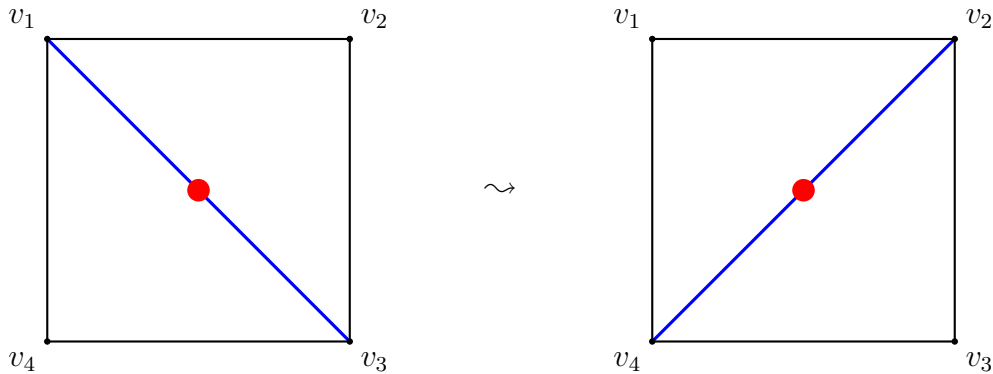


FIGURE 5. Un « flip » d'une diagonale dans un quadrilatère.

### 6.3. Polylogarithmes amassés

**6.3.1. La conjecture.** — GONCHAROV et RUDENKO (2018) partent de l'idée, simple mais féconde, d'écrire la relation (53) sous une forme multiplicative, et donc plus naturellement compatible à la structure opéradique,

$$(54) \quad \exp(W_T) = \prod_{\Delta \in T} \exp(W_\Delta) ,$$

dans l'algèbre extérieure  $\Lambda(F_n^\times)_\mathbb{Q}$  (il n'y a qu'un nombre fini de termes puisque  $\exp(W_\Delta) = 1 + W_\Delta$ ). C'est ce passage à l'exponentielle qui permet de passer du dilogarithme aux poids supérieurs. Afin de formaliser cela, il sera commode de faire intervenir la cogèbre de Lie motivique du corps  $F_n$ , dont l'existence est malheureusement conditionnelle à la conjecture de Beilinson–Soulé pour  $F_n$ , qui n'est pas prouvée. On pourrait écrire des énoncés inconditionnels (mais moins propres) au prix de remplacer les  $F_n$  par un corps de nombres  $F$  et les variables  $v_i$  par des vecteurs suffisamment génériques de  $F^2$ .

Passons en notation homologique et considérons les complexes

$$\mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))_k = \mathrm{CE}^{k-\bullet}(\mathcal{C}(F_n))_k \quad \text{et} \quad \mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n)) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))_k .$$

On note  $C_\bullet(\mathcal{A}_n)$  le complexe cellulaire de l'associaèdre  $\mathcal{A}_n$ , dont une base est donnée par les dissections de  $\Pi_n$ . La conjecture suivante est due à GONCHAROV et RUDENKO (2018).

CONJECTURE 6.2. — *Il existe des morphismes de complexes*

$$\alpha_n : C_\bullet(\mathcal{A}_n) \longrightarrow \mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))$$

pour  $n \geq 3$ , appelés polylogarithmes amassés, qui vérifient :

— *Initialisation* : le morphisme  $\alpha_3 : C_0(\mathcal{A}_3) \rightarrow \mathrm{CE}_0(\mathcal{C}(F_3)) = \Lambda(F_3^\times)_\mathbb{Q}$  est donné par

$$\alpha_3(\Delta) = \exp(W_\Delta) .$$

— *Compatibilité aux structures opéradiques* : pour toute dissection  $D_1 \times D_2$  de  $\Pi_n$  obtenue en recollant une dissection  $D_1$  de  $\Pi_{n_1}$  et une dissection  $D_2$  de  $\Pi_{n_2}$  avec  $n_1 + n_2 = n + 1$ , on a l'égalité :

$$\alpha_n(D_1 \times D_2) = \alpha_{n_1}(D_1) \alpha_{n_2}(D_2) ,$$

où le membre de droite s'interprète via les inclusions naturelles de  $F_{n_1}$  et  $F_{n_2}$  dans  $F_n$ .

Grâce à la structure opéradique, les images par  $\alpha_n$  des générateurs de  $C_{n-3}(\mathcal{A}_n)$ , pour tout  $n \geq 3$ , déterminent uniquement la collection des morphismes  $\alpha_n$ . L'idée est de découvrir les  $\alpha_n$  par une procédure récursive.

*Remarque 6.3.* — D'un point de vue opéradique, la conjecture 6.2 prévoit l'existence d'un diagramme commutatif d'opérades (différentielles graduées, cycliques non symétriques) :

$$\begin{array}{ccc} \text{As}_\infty & \xrightarrow{\sim} & \text{As} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \exp(W) \\ \text{CE}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & K^M \end{array}$$

Ce diagramme fait intervenir l'opérade  $\text{As}$  des algèbres associatives, et sa résolution canonique  $\text{As}_\infty$ , l'opérade des algèbres associatives à homotopie près, données en arité  $n$  par  $\text{As}(n) = H_0(\mathcal{A}_n) = \mathbb{Q}$  et  $\text{As}_\infty(n) = C_\bullet(\mathcal{A}_n)$ , où la structure opéradique est induite par les inclusions des faces des associaèdres (voir par exemple LODAY et VALLETTE (2012, chapitre 9)). On a noté  $\text{CE}(\mathcal{C})$  et  $K^M$  les opérades données en arité  $n$  par  $\text{CE}(\mathcal{C})(n) = \text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))$  et  $K^M(n) = H_0(\text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))) = K^M(F_n)$  respectivement, avec les structures opéradiques induites par le produit de l'algèbre extérieure. Il ne semble pas y avoir d'argument abstrait d'algèbre homologique qui implique l'existence du morphisme  $\alpha$ .

**6.3.2. Calculs en basse dimension.** — En degré 0, la compatibilité aux structures opéradiques et (54) force  $\alpha_n$  à être définie par  $\alpha_n(T) = \exp(W_T)$ . En degré 1, l'égalité (52) motive la définition, pour  $D$  une dissection qui contient des triangles et un quadrilatère :

$$\alpha_n(D) = -\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(-X_D) \otimes \frac{1}{2}(\exp(W_T) + \exp(W_{T'})) ,$$

où  $T$  et  $T'$  sont les deux triangulations de  $\Pi_n$  compatibles avec  $D$ , et  $X_D$  est défini comme dans (51). On vérifie que cette formule est compatible aux structures opéradiques et qu'on a  $\delta\alpha_n(D) = \alpha_n(T') - \alpha_n(T) = \alpha_n(\partial D)$ . Notons que  $-X_D$  est un birapport ; par exemple dans le cas du carré on a en poids 2 :

$$\alpha_4(\square)_2 = -\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(r_2(x_1, x_2, x_3, x_4)) ,$$

où l'on note  $x_i \in \mathbb{P}^1$  la classe de  $v_i$ .

Goncharov et Rudenko étendent la définition de  $\alpha_n$  en degré 2. Pour cela il suffit de traiter le cas d’une dissection  $D$  de  $\Pi_n$  qui contient des triangles et un pentagone. Notons  $D_1, \dots, D_5$  les dissections obtenues en ajoutant une diagonale à  $D$ , de telle sorte que la superposition de  $D_{i-1}$  et  $D_i$  (indices modulo 5) crée une triangulation  $T_i$ . On remarque que l’élément

$$\widetilde{W} = W_{D_i} - X_{D_{i-1}} \wedge X_{D_i} \in \Lambda^2(F_n^\times)_\mathbb{Q}$$

est indépendant de  $i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . La formule

$$\alpha_n(D) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \text{Li}_3^{\mathcal{C}}(-X_{D_i}) \otimes (X_{D_{i-1}}/X_{D_{i+1}}) \wedge \exp(\widetilde{W})$$

est alors compatible aux structures opéradiques et vérifie  $\delta\alpha_n(D) = \alpha_n(\partial D)$ . Par exemple dans le cas du pentagone on a en poids 4 :

$$\alpha_5(\diamond)_4 = \frac{1}{2} \text{Cyc}_5 \left( \text{Li}_3^{\mathcal{C}}(r_2(x_1, x_2, x_3, x_4)) \otimes r_2(x_1, x_3, x_4, x_2) \right).$$

En degré 3, Goncharov et Rudenko utilisent la combinatoire des corrélateurs pour découvrir une formule pour  $\alpha_6$ . Ils prouvent qu’en posant

$$\begin{aligned} \alpha_6(\diamond)_4 = & \text{Cyc}_6^- \left( -\text{Cor}^{\mathcal{C}}(0, 0, r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), 1, r_2(x_4, x_5, x_6, x_1)) \right. \\ & \left. + \text{Li}_4^{\mathcal{C}}(r_2(x_1, x_3, x_4, x_5)) - \text{Li}_4^{\mathcal{C}}(r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)) \right), \end{aligned}$$

on définit un morphisme de complexes  $C_\bullet(\mathcal{A}_6) \rightarrow \text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_6))_4$ .

La structure opéradique permet alors d’induire un morphisme de complexes  $C_{\bullet \leq 3}(\mathcal{A}_7) \rightarrow \text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_7))_4$  puisque les faces de dimension  $\leq 3$  de l’associaèdre  $\mathcal{A}_7$  sont toutes des produits d’associaèdres de dimension inférieure. On a donc l’égalité, dans  $\text{CE}_2(\mathcal{C}(F_7))_4 = \mathcal{C}_3(F_7) \wedge (F_7^\times)_\mathbb{Q} \oplus \mathcal{C}_2(F_7) \wedge \mathcal{C}_2(F_7)$  :

$$\delta(\alpha_7(\partial(\diamond))_4) = \alpha_7(\partial\partial(\diamond))_4 = 0.$$

Par un argument de rigidité comme dans la remarque 3.2, on a donc, pour  $F$  un corps de nombres et  $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{P}^1(F)$ , la relation

$$\alpha_7(\partial(\diamond))_4 = 0$$

dans  $\mathcal{C}_4(F)$ . C’est exactement la relation (49) qui apparaît dans la définition de  $C_4(F)$ .

### 6.4. Polylogarithmes quadrangulaires

Concluons ce texte avec un mot sur les travaux de RUDENKO (2020) et la preuve du théorème 4.4, qui est une étape vers la conjecture de profondeur de Goncharov. Les techniques utilisent des objets appelés *polylogarithmes quadrangulaires*. Ils sont notés

$$\text{QLi}_{n,k}(x_0, \dots, x_{2n+1}) \in \mathcal{C}_{n+k}(F),$$

avec  $x_0, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{P}^1(F)$ , et sont définis comme des sommes alternées de certains corrélateurs  $\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_{i_0}, \dots, x_{i_{n+k}})$ . Rudenko montre les deux liens suivants entre polylogarithmes quadrangulaires et polylogarithmes multiples.

- (a) Tout corrélateur motivique de poids pair  $2n$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $QLi_{n,n}$ . Tout corrélateur motivique de poids impair  $2n+1$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $QLi_{n,n+1}$ .
- (b) Le polylogarithme quadrangulaire  $QLi_{n,k}$  s'écrit comme combinaison linéaire de polylogarithmes multiples motiviques de profondeur  $\leq n$ .

La partie la plus subtile est la preuve de (b), qui s'appuie sur la combinatoire des quadrangulations (dissection en des quadrilatères) des polygones. La relation exacte entre polylogarithmes quadrangulaires et polylogarithmes amassés reste à préciser.

## RÉFÉRENCES

- Alexander A. BEILINSON (1985). « Higher regulators and values of  $L$ -functions », *J. Soviet Math.* **30** (2), p. 2036-2070.
- (1987). « Height pairing between algebraic cycles », in : *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*. T. 1289. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 1-25.
- Alexander A. BEILINSON et Pierre DELIGNE (1994). « Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs », in : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 97-121.
- Spencer BLOCH (1977). « Applications of the dilogarithm function in algebraic  $K$ -theory and algebraic geometry ». In : *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*. Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, p. 103-114.
- (1978). *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*. Irvine lecture notes. CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- (1986). « Algebraic cycles and higher  $K$ -theory », *Adv. in Math.* **61** (3), p. 267-304.
- Johannes BÖHM (1964). « Zu Coxeters Integrationsmethode in gekrümmten Räumen », *Math. Nachr.* **27**, p. 179-214.
- Armand BOREL (1974). « Stable real cohomology of arithmetic groups », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7**, p. 235-272.
- (1977). « Cohomologie de  $SL_n$  et valeurs de fonctions zêta aux points entiers », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **4** (4), p. 613-636.
- Francis BROWN (2012). « Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$  », *Ann. of Math. (2)* **175** (2), p. 949-976.
- (2013). « Dedekind zeta motives for totally real number fields », *Invent. Math.* **194** (2), p. 257-311.

- \_\_\_\_\_ (2014). « Single-valued motivic periods and multiple zeta values », *Forum Math. Sigma* **2**, e25.
- \_\_\_\_\_ (2017). « Notes on motivic periods », *Commun. Number Theory Phys.* **11** (3), p. 557-655.
- José Ignacio BURGOS GIL (2002). *The regulators of Beilinson and Borel*. T. 15. CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, p. xii+104. ISBN : 0-8218-2630-1.
- Jean-Louis CATHELIN (1993). « Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes (d'après A. B. Goncharov et d'autres) », in : *Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93*. Astérisque No. 216, Société mathématique de France, Exp. No. 772, 5, p. 311-341.
- Frédéric CHAPOTON, Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY (2002). « Polytopal realizations of generalized associahedra », *Canad. Math. Bull.* **45** (4), p. 537-566.
- Steven CHARLTON (2017). « A review of Dan's reduction procedure for multiple polylogarithms », *prépublication arXiv 1703.03961*.
- Steven CHARLTON, Herbert GANGL et Danylo RADCHENKO (2019). « Explicit formulas for Grassmannian polylogarithms », *prépublication arXiv 1909.13869*.
- \_\_\_\_\_ (2020). « Functional equations of polygonal type for multiple polylogarithms in weight 5, 6 and 7 », *prépublication arXiv 2012.09840*.
- Kuo-Tsai CHEN (1977). « Iterated path integrals », *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (5), p. 831-879.
- Nicușor DAN (2008). « Sur la conjecture de Zagier pour  $n = 4$  », *prépublication arXiv 0809.3984*.
- Rob DE JEU (1995). « Zagier's conjecture and wedge complexes in algebraic  $K$ -theory », *Compositio Math.* **96** (2), p. 197-247.
- Pierre DELIGNE (1985). *Lettre à C. Soulé (20/01/1985)*.
- \_\_\_\_\_ (1989). « Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points », in : *Galois groups over  $\mathbf{Q}$  (Berkeley, CA, 1987)*. T. 16. Math. Sci. Res. Inst. Publ. Springer, New York, p. 79-297.
- \_\_\_\_\_ (2010). « Le groupe fondamental unipotent motivique de  $\mathbf{G}_m - \mu_N$ , pour  $N = 2, 3, 4, 6$  ou  $8$  », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (112), p. 101-141.
- Pierre DELIGNE et Alexander B. GONCHAROV (2005). « Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (1), p. 1-56.
- Vladimir G. DRINFEL'D (1990). « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  », *Algebra i Analiz* **2** (4), p. 149-181.
- Johan Louis DUPONT (1987). « The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles », *J. Pure Appl. Algebra* **44** (1-3), p. 137-164.
- Johan Louis DUPONT et Chih-Han SAH (1982). « Scissors congruences. II », *J. Pure Appl. Algebra* **25** (2), p. 159-195.
- Vladimir V. FOCK et Alexander B. GONCHAROV (2009). « Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (6), p. 865-930.

- Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY (2002). « Cluster algebras. I. Foundations », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2), p. 497-529.
- (2003a). « Cluster algebras : notes for the CDM-03 conference », in : *Current developments in mathematics, 2003*. Int. Press, Somerville, MA, p. 1-34.
- (2003b). « Cluster algebras. II. Finite type classification », *Invent. Math.* **154** (1), p. 63-121.
- Herbert GANGL (2016). « Multiple polylogarithms in weight 4 », *prépublication arXiv 1609.05557*.
- Wolfram GERDES (1991). « The linearization of higher Chow cycles of dimension one », *Duke Math. J.* **62** (1), p. 105-129.
- John K. GOLDEN, Alexander B. GONCHAROV, Marcus SPRADLIN, Cristian VERGU et Anastasia VOLOVICH (2014). « Motivic amplitudes and cluster coordinates », *J. High Energy Phys.* **2014** (1), p. 91.
- Alexander B. GONCHAROV (1991). « The classical trilogarithm, algebraic  $K$ -theory of fields and Dedekind zeta functions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **24** (1), p. 155-162.
- (1993). « Explicit construction of characteristic classes », in : *I. M. Gel'fand Seminar*. T. 16. Adv. Soviet Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 169-210.
- (1994). « Polylogarithms and motivic Galois groups », in : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 43-96.
- (1995a). « Geometry of configurations, polylogarithms, and motivic cohomology », *Adv. Math.* **114** (2), p. 197-318.
- (1995b). « Polylogarithms in arithmetic and geometry ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*. Birkhäuser, Basel, p. 374-387.
- (1999). « Volumes of hyperbolic manifolds and mixed Tate motives », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (2), p. 569-618.
- (2000). « Geometry of the trilogarithm and the motivic Lie algebra of a field », in : *Regulators in analysis, geometry and number theory*. T. 171. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, p. 127-165.
- (2001a). « Multiple polylogarithms and mixed Tate motives », *prépublication arXiv 0103059*.
- (2001b). « The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of  $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$  », *Duke Math. J.* **110** (3), p. 397-487.
- (2002). « Periods and mixed motives », *prépublication arXiv 0202154*.
- (2005a). « Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry », *Duke Math. J.* **128** (2), p. 209-284.
- (2005b). « Polylogarithms, regulators, and Arakelov motivic complexes », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (1), p. 1-60.
- (2013). « A simple construction of Grassmannian polylogarithms », *Adv. Math.* **241**, p. 79-102.

- (2019). « Hodge correlators », *J. reine angew. Math.* **748**, p. 1-138.
- Alexander B. GONCHAROV et Andrey M. LEVIN (1998). « Zagier’s conjecture on  $L(E, 2)$  », *Invent. Math.* **132** (2), p. 393-432.
- Alexander B. GONCHAROV et Daniil RUDENKO (2018). « Motivic correlators, cluster varieties and Zagier’s conjecture on  $\zeta_F(4)$  », *prépublication arXiv 1803.08585*.
- Richard M. HAIN (1987). « The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group », in : *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*. T. 46. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 247-282.
- (1994). « Classical polylogarithms », in : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 3-42.
- Masaki HANAMURA (1995). « Mixed motives and algebraic cycles. I », *Math. Res. Lett.* **2** (6), p. 811-821.
- Yasutaka IHARA (1989). « The Galois representation arising from  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  and Tate twists of even degree », in : *Galois Groups over  $\mathbb{Q}$* . Math. Sci. Res. Inst. Pub., p. 299-313.
- Bruno KAHN (2005). « Algebraic  $K$ -theory, algebraic cycles and arithmetic geometry », in : *Handbook of  $K$ -theory. Vol. 1, 2*. Springer, Berlin, p. 351-428.
- Helmut KLINGEN (1962). « Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion », *Math. Ann.* **145**, p. 265-272.
- Ernst E. KUMMER (1840). « Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen. (Fortsetzung) », *J. Reine Angew. Math.* **21**, p. 328-371.
- Marc LEVINE (1993). « Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic  $K$ -theory », in : *Algebraic  $K$ -theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991)*. T. 407. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, p. 167-188.
- (1998). *Mixed motives*. T. 57. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, p. x+515. ISBN : 0-8218-0785-4.
- Leonard LEWIN (1981). *Polylogarithms and associated functions*. With a foreword by A. J. Van der Poorten. North-Holland Publishing Co., New York-Amsterdam, p. xvii+359. ISBN : 0-444-00550-1.
- Stephen LICHTENBAUM (1973). « Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic  $K$ -theory ». In : *Algebraic  $K$ -theory, II : “Classical” algebraic  $K$ -theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, 489-501. Lecture Notes in Math., Vol. 342.
- (1984). « Values of zeta-functions at non-negative integers ». In : *Number Theory Noordwijkerhout 1983*. Sous la dir. d’Hendrik JAGER. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 127-138. ISBN : 978-3-540-38906-4.
- Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE (2012). *Algebraic operads*. T. 346. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer, Heidelberg, p. xxiv+634. ISBN : 978-3-642-30361-6.

- Hideya MATSUMOTO (1969). « Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **2**, p. 1-62.
- John W. MILNOR (1970). « Algebraic  $K$ -theory and quadratic forms », *Invent. Math.* **9**, p. 318-344.
- John W. MILNOR et John C. MOORE (1965). « On the structure of Hopf algebras », *Ann. of Math. (2)* **81**, p. 211-264.
- John W. MORGAN (1978). « The algebraic topology of smooth algebraic varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (48), p. 137-204.
- Joseph OESTERLÉ (1993). « Polylogarithmes », in : *Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93*. Astérisque No. 216, Société mathématique de France, Exp. No. 762, 3, p. 49-67.
- Henri POINCARÉ (1884). « Sur les groupes des équations linéaires », *Acta Math.* **4** (1), p. 201-312.
- Daniel QUILLEN (1973). « Higher algebraic  $K$ -theory. I ». In : *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, p. 85-147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- Dinakar RAMAKRISHNAN (1982). « On the monodromy of higher logarithms », *Proc. Amer. Math. Soc.* **85** (4), p. 596-599.
- (1986). « Analogs of the Bloch-Wigner function for higher polylogarithms », in : *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*. T. 55. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 371-376.
- Daniil RUDENKO (2020). « On the Goncharov depth conjecture and a formula for volumes of orthoschemes », *prépublication arXiv 2012.05599*.
- Carl Ludwig SIEGEL (1969). « Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen », *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1969**, p. 87-102.
- Christophe SOULÉ (1985). « Opérations en  $K$ -théorie algébrique », *Canad. J. Math.* **37** (3), p. 488-550.
- Andrei A. SUSLIN (1984). « Homology of  $GL_n$ , characteristic classes and Milnor  $K$ -theory », in : *Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982)*. T. 1046. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 357-375.
- (1990). «  $K_3$  of a field, and the Bloch group », *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **183**, p. 180-199, 229.
- Vladimir VOEVODSKY (2000). « Triangulated categories of motives over a field », in : *Cycles, transfers, and motivic homology theories*. T. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, p. 188-238.
- Gerd WECHSUNG (1991). « Functional equations of hyperlogarithms », in : *Structural properties of polylogarithms*. T. 37. Math. Surveys Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 171-184.
- Zdzislaw WOJTKOWIAK (1991). « The basic structure of polylogarithmic functional equations », in : *Structural properties of polylogarithms*. T. 37. Math. Surveys Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 205-231.



- (1996). « Functional equations of iterated integrals with regular singularities », *Nagoya Math. J.* **142**, p. 145-159.
- Don ZAGIER (1986). « Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions », *Invent. Math.* **83** (2), p. 285-301.
- (1990). « The Bloch-Wigner-Ramakrishnan polylogarithm function », *Math. Ann.* **286** (1-3), p. 613-624.
- (1991). « Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic  $K$ -theory of fields », in : *Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989)*. T. 89. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, p. 391-430.
- (2007). « The dilogarithm function », in : *Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*. Springer, Berlin, p. 3-65.
- Don ZAGIER et Herbert GANGL (2000). « Classical and elliptic polylogarithms and special values of  $L$ -series », in : *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*. T. 548. NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, p. 561-615.

Clément Dupont

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,  
Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France  
*E-mail* : clement.dupont@umontpellier.fr

# Séminaire N. Bourbaki

Samedi 24 avril 2021

Nguyen-Viet DANG

**Le principe d'incertitude fractal et ses applications**, *d'après Bourgain, Dyatlov, Jin, Nonnenmacher, Zahl*

---

Dans cet exposé, nous décrivons un nouveau principe d'incertitude qui interdit à toute fonction dans  $L^2$  d'être localisée simultanément en position et en fréquence près d'ensembles fractals vérifiant certaines hypothèses de porosité. Dans un second temps, nous discuterons des applications spectaculaires de ce principe à des problèmes d'analyse géométrique sur les surfaces hyperboliques.

Élise GOJJARD

**Sous-variétés totalement géodésiques des espaces de modules de Riemann**, *d'après Eskin, McMullen, Mukamel, Wright*

---

Soit  $\mathcal{M}_{g,n}$  l'espace de module des surfaces de Riemann de genre  $g$  à  $n$  points marqués. Cet espace est naturellement muni de la métrique de Teichmüller, une métrique de Finsler qui permet de comparer les structures conformes sur les surfaces, et qui coïncide avec la métrique de Kobayashi. Une sous-variété de  $\mathcal{M}_{g,n}$  est dite extittotalement géodésique si elle contient toutes les géodésiques de Teichmüller qui lui sont tangentes. Les sous-variétés totalement géodésiques de dimension (complexe) 1, appelées courbes de Teichmüller, sont relativement bien étudiées depuis les premières constructions de Veech dans les années 80; elles sont en particulier infiniment nombreuses dans chaque espace de module  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Récemment, Wright a montré, en s'appuyant sur des résultats de finitude d'Eskin, Filip et Wright, qu'en dimension plus grande, ce n'était plus le cas : il n'y a qu'un nombre fini de telles sous-variétés dans chaque  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Dans cet exposé nous présenterons la preuve de ce résultat : plus précisément nous expliquerons comment se ramener aux résultats d'Eskin-Filip-Wright en passant par les sous-variétés linéaires des espaces de modules de différentielles abéliennes. Nous présenterons également les constructions d'exemples primitifs de dimension 2 en petit genre d'Eskin-McMullen-Mukamel-Wright.



# Ouvrages de N. Bourbaki

---

Les ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE sont publiés par Springer-Verlag.

*Théorie des ensembles*, chapitres 1 à 4 (1970)

*Algèbre* : chapitres 1 à 3 (1970); chapitres 4 à 7 (1981);  
chapitre 8 (2012); chapitre 9 (1959); chapitre 10 (1980).

*Topologie générale* : chapitres 1 à 4 (1971); chapitres 5 à 10 (1974).

*Fonctions d'une variable réelle*, chapitres 1 à 7 (1976).

*Espaces vectoriels topologiques*, chapitres 1 à 5 (1981).

*Intégration* : chapitres 1 à 4 (1965); chapitre 5 (1967); chapitre 6 (1959);  
chapitres 7 et 8 (1963); chapitre 9 (1969).

*Algèbre commutative* : chapitres 1 à 4 (1968); chapitres 5 à 7 (1965);  
chapitres 8 et 9 (1983); chapitre 10 (1998).

*Variétés différentielles et analytiques*, fascicule de résultats (1971).

*Groupes et algèbres de Lie* : chapitre 1 (1971); chapitres 2 et 3 (1972);  
chapitres 4 à 6 (1968); chapitres 7 et 8 (1975); chapitre 9 (1982).

*Théories spectrales*, chapitres 1 et 2 (1967); deuxième édition, refondue  
et augmentée (2019).

*Topologie algébrique*, chapitres 1 à 4 (2016).

*Éléments d'histoire des mathématiques* (1974).

Traductions anglaises :

*Theory of Sets*, chapters 1-4 (2004).

*Algebra* : I, chapters 1-3 (1989); II, chapters 4-7 (1990).

*General Topology* : chapters 1-4 (1995); chapters 5-10 (1989).

*Functions of a Real Variable. Elementary Theory* (2004).

*Topological Vector Spaces*, chapters 1-5 (2003).

*Commutative algebra*, chapters 1-7 (1989).

*Integration* : I, chapters 1-6 (2004); II, chapters 7-9 (2004).

*Lie groups and Lie algebras* : chapters 1-3 (1989); chapters 4-6 (1989);  
chapters 7-9 (2005).

*General Topology* : chapters 1-4 (1989); chapters 5-10 (1989).

*Elements of the history of mathematics* (1994).