Séminaire Nicolas Bourbaki

Samedi 18 juin 2016

Nalini ANANTHARAMAN

Zéros de fonctions aléatoires gaussiennes

Depuis l'expérience de Chladni, les lignes nodales des fonctions propres du laplacien sur une variété riemannienne fascinent. Courant donne une borne supérieure sur le nombre de domaines nodaux, et aucune borne inférieure n'est connue – il n'est même pas vrai que le nombre de domaines nodaux doive tendre vers l'infini avec la valeur propre.

Un autre domaine où le lieu des zéros occupe une place centrale est bien sûr la géométrie algébrique ; les variétés projectives réelles sont définies comme lieu des zéros réels de polynômes homogènes. Les bornes connues sur le nombre de composantes connexes du lieu des zéros en fonction du degré et de la dimension ne sont très certainement pas optimales (à part en bas degré et dimension).

Ces deux exemples incitent à considérer des fonctions propres ou des polynômes réels « aléatoires », et à s'intéresser à la topologie typique du lieu des zéros. Nous décrirons les approches de Nazarov et Sodin (2007-2015) et Gayet et Welschinger (2010-2015) dans le cas gaussien.

Francis BACH

Parcimonie et systèmes linéaires sous-déterminés, *d'après Emmanuel Candès*

Les systèmes linéaires sous-déterminés, avec plus d'inconnues que d'équations, sont très courants dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques. Pour pallier l'absence de solutions uniques, certaines structures, dites de parcimonie, peuvent être imposées sur les solutions, comme le fait d'avoir un nombre maximal de composantes non nulles. Cette simple hypothèse donne lieu à une théorie riche mettant en jeu des concepts de convexité et de matrices aléatoires. Dans cet exposé, je présenterai les travaux d'Emmanuel Candès sur l'échantillonnage compressé et la complétion de matrices, qui sont deux instantiations marquantes de ces systèmes sous-déterminés.

Evelyne MIOT

Le flot binormal, l'équation de Schrödinger et les tourbillons filamentaires, *d'après V. Banica et L. Vega*

La dynamique des tourbillons filamentaires – écoulements de fluides où le tourbillon se concentre le long d'une courbe de l'espace – est usuellement décrite par un flot géométrique appelé flot binormal. Il existe une famille remarquable de solutions auto-similaires de ce flot, qui forment une singularité de type coin à temps égal à zéro. Dans une série d'articles, V. Banica et L. Vega ont développé un cadre mathématique puissant pour l'analyse fine des propriétés de stabilité de ces solutions singulières. Je présenterai leurs résultats et l'approche utilisée, qui reposent sur le lien profond unissant le flot binormal et l'équation de Schrödinger.

Kannan SOUNDARARAJAN

The Liouville function in short intervals, *after Matomäki and Radziwiłł*

The Liouville function $\lambda(n)$ is a completely multiplicative function, taking the value 1 if n has an even number of prime factors (counted with multiplicity) and -1 if n has an odd number of prime factors. This function is expected to behave like a "random" collection of signs, plus or minus one both being equally likely. For example, a famous conjecture of Chowla asserts that the values of $\lambda(n)$ and $\lambda(n+1)$ (and more generally translates of any k fixed distinct integers) are uncorrelated. Another well known belief was that almost all intervals with length tending to infinity should have roughly an equal number of plus and minus values of the Liouville function. Recently, Matomäki and Radziwiłł established that this last belief is indeed true, and more generally established a variant of such a result for a general class of multiplicative functions. Further joint work with Tao led to the proof of average versions of the Chowla conjecture, and to proving the existence of new sign patterns in the Liouville function. Finally, the recent work of Tao establishes a logarithmic version of the Chowla conjecture, and building on this settled the Erdös discrepancy conjecture. I will discuss some of the ideas behind these results in the Seminar.