Séminaire Nicolas Bourbaki

Samedi 24 janvier 2015

Luigi AMBROSIO

The regularity theory of area-minimizing integral currents

The theory of currents, developed in the '70 by Federer and Fleming, provides weak solutions (area-minimizing currents) to Plateau's problem with no restriction on dimension and codimension. The regularity theory of area-minimizing currents, besides its intrinsic interest, has been the source of inspiration for many regularity theorems in elliptic and parabolic partial differential equations even in a non-geometric context. The regularity theory of area-minimizing currents started with the seminal work of De Giorgi for codimension one currents, namely weak hypersurfaces, and culminated in a monumental work (even in terms of size) by F.J. Almgren, who established an optimal result for currents of arbitrary codimension. In the last few years Almgren's work has been revisited, improved and streamlined in a series of papers by De Lellis and Spadaro. The seminar will describe these recent developments, emphasizing the key technical ideas.

Gilles CARRON

De nouvelles utilisations du principe du maximum en géométrie, *d'après B. Andrews, J. Clutterbuck et S. Brendle*

Le principe du maximum est un outil simple mais puissant pour étudier des problèmes géométriques, qui se formule à l'aide d'une équation scalaire aux dérivées partielles elliptique ou parabolique. Des formules à la Bochner permettent également d'étudier des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cet outil avait par exemple été utilisé par S-T. Yau et T. Aubin dans la résolution du problème de Calabi pour obtenir des estimées a priori des solutions d'une équation de Monge-Ampère. Récemment des techniques de doublement de variables ont permis la résolution de deux problèmes célèbres : la conjecture de Lawson à propos des 2-tores plongés minimalement dans la sphère $\mathbb{S}^3$ par S. Brendle et la conjecture de l'écart fondamentale qui permet une minoration optimale de l'écart entre les deux premières valeurs propres d'un domaine convexe de l'espace euclidien par B. Andrews et J. Clutterbuck.

Philippe EYSSIDIEUX

Métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano, *d'après Chen-Donaldson-Sun et Tian*

Une conjecture centrale de Géométrie kählérienne, d'abord formulée par Yau puis précisée par Tian et Donaldson, prédit qu'une variété projective lisse complexe polarisée admet une métrique kählérienne de courbure scalaire constante si et seulement si elle est stable en un sens approprié issu de la théorie géométrique des invariants. Dans le cas de la polarisation anticanonique sur une variété de Fano, elle prédit l'équivalence entre existence d'une métrique de Kähler-Einstein et K-polystabilité. La direction la plus difficile – l'existence de la métrique – a été établie récemment de façon simultanée par Chen-Donaldson-Sun et Tian par une méthode de continuité singulière dont le succès repose sur un énoncé d'algébricité de certaines limites de Gromov-Hausdorff de variétés kählériennes. L'exposé expliquera les grandes lignes de cette solution.

David HARARI

Zéro-cycles et points rationnels sur les fibrations en variétés rationnellement connexes, *d'après Harpaz et Wittenberg*

Soit X une variété algébrique définie sur $\mathbf{Q}$, possédant des points dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$. Colliot-Thélène a conjecturé que, pour X rationnellement connexe (par exemple unirationnelle), une certaine obstruction cohomologique (dite *de Brauer-Manin*) à l'existence d'un point rationnel était la seule ; il existe aussi une conjecture analogue en remplaçant les points rationnels par les zéro-cycles de degré 1. Une méthode d'attaque fructueuse utilisée depuis trente ans consiste à considérer une famille $X \to \mathbf{P}^1$ de variétés rationnellement connexes et à essayer de démontrer que la conjecture vaut pour l'espace total si on la connaît pour les fibres. Le but de cet exposé est d'expliquer une avancée récente décisive de Y. Harpaz et O. Wittenberg, qui ont obtenu un tel théorème sous des hypothèses très générales pour les zéro-cycles, ainsi que d'importantes avancées pour les points rationnels en se basant sur un théorème de combinatoire additive dû à L. Matthiesen.