

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> .....	IX
<b>Chapitre VIII. Modules et anneaux semi-simples</b> .....	1
<b>1. Modules artiniens et modules noethériens</b> .....	1
1. Modules artiniens et modules noethériens.....	1
2. Anneaux artiniens et anneaux noethériens.....	4
3. Contremodule.....	8
4. Polynômes à coefficients dans un anneau noethérien.....	9
Exercices.....	13
<b>2. Structure des modules de longueur finie</b> .....	23
1. Anneaux locaux.....	23
2. Décomposition de Weyr-Fitting.....	25
3. Modules indécomposables et modules primordiaux.....	27
4. Modules semi-primordiaux.....	29
5. Structure des modules de longueur finie.....	34
Exercices.....	36
<b>3. Modules simples</b> .....	41
1. Modules simples.....	41
2. Le lemme de Schur.....	43
3. Sous-modules maximaux.....	44
4. Modules simples sur un anneau artinien.....	46
5. Classes de modules simples.....	47
Exercices.....	48

<b>4. Modules semi-simples</b> .....	51
1. Modules semi-simples .....	51
2. L'homomorphisme $\bigoplus_i \text{Hom}_A(M, N_i) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \bigoplus_i N_i)$ .....	53
3. Quelques opérations sur les modules .....	53
4. Modules isotypiques .....	57
5. Description d'un module isotypique .....	58
6. Composants isotypiques d'un module .....	61
7. Description d'un module semi-simple .....	65
8. Multiplicités et longueurs dans les modules semi-simples .....	67
Exercices .....	70
<b>5. Commutation</b> .....	73
1. Commutant et bicommutant d'un module .....	73
2. Modules générateurs .....	75
3. Bicommutant d'un module générateur .....	78
4. Contremodule d'un module semi-simple .....	80
5. Théorème de densité .....	83
6. Application à la théorie des corps .....	84
Exercices .....	86
<b>6. Équivalence de Morita des modules et des algèbres</b> .....	91
1. Commutant et dualité .....	91
2. Modules générateurs et modules projectifs de type fini .....	94
3. Bimodules inversibles et équivalence de Morita .....	96
4. Correspondance de Morita des modules .....	99
5. Ensembles ordonnés de sous-modules .....	102
6. Autres propriétés préservées par la correspondance de Morita .....	105
7. Équivalence de Morita des algèbres .....	107
Exercices .....	111
<b>7. Anneaux simples</b> .....	115
1. Anneaux simples .....	115
2. Modules sur un anneau simple .....	118
3. Degrés .....	120
4. Idéaux des anneaux simples .....	122
Exercices .....	124

<b>8. Anneaux semi-simples</b> .....	131
1. Anneaux semi-simples.....	131
2. Modules sur un anneau semi-simple.....	134
3. Facteurs d'un anneau semi-simple.....	136
4. Idempotents et anneaux semi-simples.....	140
Exercices.....	144
<b>9. Radical</b> .....	147
1. Radical d'un module.....	147
2. Radical d'un anneau.....	150
3. Lemme de Nakayama.....	154
4. Relèvements d'idempotents.....	155
5. Couverture projective d'un module.....	156
Exercices.....	161
<b>10. Modules sur un anneau artinien</b> .....	169
1. Radical d'un anneau artinien.....	169
2. Modules sur un anneau artinien.....	170
3. Modules projectifs sur un anneau artinien.....	171
Exercices.....	174
<b>11. Groupes de Grothendieck</b> .....	179
1. Fonctions additives de modules.....	179
2. Groupe de Grothendieck d'un ensemble additif de modules.....	182
3. Utilisation des suites de composition.....	185
4. Le groupe de Grothendieck $R(A)$ .....	186
5. Changement d'anneaux.....	189
6. Le groupe de Grothendieck $R_K(A)$ .....	189
7. Structure multiplicative dans $K(\mathcal{C})$ .....	191
8. Le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ .....	195
9. Le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ d'un anneau artinien.....	196
10. Changement d'anneau pour $K_0(A)$ .....	197
11. Réciprocité de Frobenius.....	197
12. Cas des anneaux simples.....	199
Exercices.....	202

<b>12. Produit tensoriel de modules semi-simples</b> .....	207
1. Modules semi-simples sur un produit tensoriel d'algèbres.....	207
2. Produit tensoriel de modules simples.....	209
3. Produit tensoriel d'algèbres commutatives semi-simples.....	211
4. Radical d'un produit tensoriel d'algèbres.....	213
5. Produit tensoriel de modules semi-simples.....	214
6. Produit tensoriel d'algèbres semi-simples.....	217
7. Extension des scalaires dans les modules semi-simples.....	217
Exercices.....	221
<b>13. Algèbres absolument semi-simples</b> .....	225
1. Modules absolument semi-simples.....	225
2. Algèbres sur un corps séparablement clos.....	226
3. Algèbres absolument semi-simples.....	227
4. Caractérisation des modules absolument semi-simples.....	231
5. Dérivations des algèbres semi-simples.....	232
6. Cohomologie des algèbres.....	234
7. Cohomologie des algèbres absolument semi-simples.....	236
8. Scindage des algèbres artiniennes.....	238
Exercices.....	242
<b>14. Algèbres centrales et simples</b> .....	247
1. Algèbres centrales et simples.....	247
2. Deux lemmes sur les bimodules.....	250
3. Théorèmes de conjugaison.....	252
4. Automorphismes des algèbres semi-simples.....	254
5. Sous-algèbres simples des algèbres simples.....	255
6. Sous-algèbres commutatives maximales.....	257
7. Sous-algèbres étales maximales.....	260
8. Sous-algèbres diagonalisables des algèbres simples.....	262
Exercices.....	265
<b>15. Groupes de Brauer</b> .....	273
1. Classes d'algèbres.....	273
2. Définition du groupe de Brauer.....	274
3. Changement de corps.....	276
4. Exemples de groupes de Brauer.....	279
Exercices.....	280

<b>16. Autres descriptions du groupe de Brauer</b> .....	281
1. $\tau$ -extensions de groupes.....	281
2. Image inverse d'une $\tau$ -extension.....	283
3. Image directe d'une $\tau$ -extension.....	285
4. Loi de groupe sur les classes de $\tau$ -extensions.....	289
5. Description cohomologique.....	291
6. Restriction et corestriction.....	294
7. Algèbres galoisiennes.....	300
8. Opérations sur les algèbres galoisiennes.....	307
9. Produits croisés.....	309
10. Application au groupe de Brauer.....	312
11. Indice et exposant.....	317
Exercices.....	319
<b>17. Normes et traces réduites</b> .....	329
1. Compléments sur les polynômes caractéristiques.....	329
2. Normes et traces réduites.....	332
3. Propriétés des normes et traces réduites.....	335
4. La norme réduite est une fonction polynomiale.....	338
5. Transitivité des normes et traces réduites.....	340
6. Normes réduites et déterminants.....	342
Exercices.....	344
<b>18. Algèbres simples sur un corps fini</b> .....	347
1. Polynômes sur un corps fini.....	347
2. Algèbres simples sur un corps fini.....	348
Exercices.....	351
<b>19. Algèbres de quaternions</b> .....	353
1. Propriétés générales des algèbres de quaternions.....	353
2. Centre des algèbres de quaternions.....	355
3. Simplicité des algèbres de quaternions.....	355
4. Critères pour qu'une algèbre de quaternions soit un corps.....	357
5. Algèbres sur un corps ordonné maximal.....	359
Exercices.....	361

<b>20. Représentations linéaires des algèbres</b> .....	365
1. Représentations linéaires des algèbres .....	365
2. Dual restreint d'une algèbre .....	367
3. Coefficients d'un module .....	368
4. Dual restreint et coefficients matriciels .....	371
5. Dual d'une algèbre semi-simple .....	371
6. Caractère d'une représentation .....	374
7. Coefficients d'un ensemble de classes de modules .....	379
8. Structure de cogèbre sur le dual restreint .....	380
Exercices .....	385
<b>21. Représentations linéaires des groupes finis</b> .....	387
1. Représentations linéaires .....	387
2. Le théorème de Maschke .....	391
3. Représentations induites et coïnduites .....	392
4. Représentations et groupe de Grothendieck .....	394
5. Formule d'inversion de Fourier .....	396
6. Relations d'orthogonalité de Schur .....	399
7. Relation d'orthogonalité des caractères .....	400
8. Fonctions centrales sur un groupe fini .....	401
9. Cas des groupes commutatifs .....	404
10. Caractères et groupes de Grothendieck .....	405
11. Dimension des représentations simples .....	405
12. Changement de corps de base .....	406
13. Représentations linéaires complexes .....	411
Exercices .....	414
<b>Appendice 1. Algèbres sans élément unité</b> .....	425
1. Idéaux réguliers .....	425
2. Adjonction d'un élément unité .....	427
3. Radical d'une algèbre .....	429
4. Théorème de densité .....	431
Exercices .....	433
<b>Appendice 2. Déterminants sur un corps non commutatif</b> .....	437
1. Une généralisation des formes multilinéaires alternées .....	437
2. Un théorème d'unicité .....	438
3. Déterminant d'un automorphisme .....	441

4. Déterminant d'une matrice carrée.....	442
5. Le groupe unimodulaire.....	445
Exercices.....	448
<b>Appendice 3. Le théorème des zéros de Hilbert.....</b>	<b>451</b>
<b>Appendice 4. Trace d'un endomorphisme de rang fini.....</b>	<b>453</b>
1. Applications linéaires de rang fini.....	453
2. Trace d'un endomorphisme de rang fini.....	454
Exercices.....	457
<b>Note Historique.....</b>	<b>459</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>467</b>
<b>Index des notations.....</b>	<b>473</b>
<b>Index terminologique.....</b>	<b>475</b>