Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 21 NOVEMBRE 2026

Exposé nº 1260

Samuel TAPIE

Groupes fondamentaux des variétés complètes à courbure de Ricci positive, *d'après E. Bruè, A. Naber et D. Semola*

Soit (M, g) une variété riemannienne complète. Si les courbures sectionnelles de g sont toutes positives ou nulles, il découle du théorème de Cheeger–Gromoll (1972) que le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est de type fini et virtuellement abélien.

Supposons seulement que (M, g) a sa courbure de Ricci positive ou nulle. Milnor a montré en 1968 que tous les sous-groupes de type fini de $\pi_1(M)$ sont à croissance polynomiale et donc virtuellement nilpotents par le théorème de Gromov (1981). Réciproquement, Wei (1988) et Wilking (2000) ont montré que tout groupe de type fini virtuellement nilpotent peut se réaliser comme le groupe fondamental d'une variété complète à courbure de Ricci positive ou nulle.

Milnor avait conjecturé que $\pi_1(M)$ est toujours de type fini sous cette hypothèse d'une courbure de Ricci positive ou nulle. L'objectif principal de cet exposé est de présenter un contre-exemple à cette conjecture introduit par Bruè–Naber–Semola : il existe sur $\widetilde{M} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^4$ une métrique riemannienne à courbure de Ricci positive ou nulle qui admet une action isométrique sans point fixe du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. La construction repose sur un processus itératif délicat, qui donne asymptotiquement à $\widetilde{M}$ une forme « fractale ».

Fundamental groups of complete manifolds with non-negative Ricci curvature, *after E. Bruè, A. Naber, and D. Semola*

Let (M, g) be a complete Riemannian manifold. If the sectional curvatures of g are non-negative, the Cheeger–Gromoll theorem (1972) shows that the fundamental group $\pi_1(M)$ is a finitely generated virtually Abelian group.

Suppose now that only the Ricci curvature of (M, g) is non-negative. Milnor proved in 1968 that the finitely generated subgroups of $\pi_1(M)$ have polynomial growth and are thus virtually nilpotent by Gromov theorem (1981). Conversely, Wei (1988) and Wilking (2000) showed that any finitely generated virtually nilpotent group can be realized as the fundamental group of a complete Riemannian manifold whose Ricci curvature is non-negative.

Milnor conjectured that $\pi_1(M)$ is always finitely generated when the Ricci curvature is non-negative. The main goal of this exposé is to present a counter-example to Milnor's conjecture that was introduced by Bruè–Naber–Semola : on $\widetilde{M} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^4$ there exists a Riemannian metric with non-negative Ricci curvature admitting a fixed point free isometric action of the group $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. The construction relies on an intricate iterative process that asymptotically gives to $\widetilde{M}$ "fractal" form.

Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.
The text of the talk will be made available after the Seminar.