

## EMPILEMENTS DE SPHÈRES EN TRÈS GRANDE DIMENSION [d’après B. Klartag]

par Guillaume Aubrun

### 1. Introduction

Dans l’espace euclidien  $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ , nous désignons par  $B(x, r)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r > 0$ . Un *empilement de sphères* est une famille  $(B(x_i, r))$  de boules de même rayon  $r$  qui sont deux à deux disjointes, ce qui revient à dire que leurs centres vérifient  $\|x_i - x_j\| \geq 2r$  si  $i \neq j$ . La *densité* de cet empilement est définie, lorsqu’elle existe, comme la limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B(0, R) \cap \bigcup_i B(x_i, r))}{\text{vol}(B(0, R))}$$

Notons  $\delta_n$  la densité maximale d’un empilement de sphères dans  $\mathbf{R}^n$ ; le problème étant invariant par changement d’échelle, nous pouvons supposer ces sphères de rayon 1. L’étude des nombres  $\delta_n$  est un problème ancien abordé dans plusieurs exposés (Oesterlé, 1990, 2000, 2019). Voici la liste exhaustive des valeurs connues à ce jour.

- $\delta_1 = 1$ . Trivial.
- $\delta_2 = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ . Cette densité est atteinte pour des boules centrées en les points du réseau hexagonal.
- $\delta_3 = \frac{\pi}{\sqrt{18}}$ . C’est la conjecture de Kepler démontrée par Hales (2005). Cette densité est atteinte pour des boules centrées en les points du réseau cubique à faces centrées.
- $\delta_8 = \frac{\pi^4}{384}$  (Viazovska, 2017). Cette densité est atteinte pour des boules centrées en les points du réseau  $E_8$ .
- $\delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!}$  (Cohn, Kumar, Miller, Radchenko et Viazovska, 2017). Cette densité est atteinte pour des boules centrées en les points du réseau de Leech.

Notons  $\delta_n^L$  la densité maximale d’un empilement de sphères centrées en les points d’un réseau de  $\mathbf{R}^n$ . Le calcul de  $\delta_n^L$  est une question fondamentale de la géométrie des nombres. La valeur est connue pour  $n \leq 9$  et  $n = 24$ . Une référence sur ces questions est Conway et Sloane (1999); le cas  $n = 9$  a été résolu récemment (Dutour Sikirić et Woerden, 2025).

Il est évident que  $\delta_n^L \leq \delta_n$ . Dans les rares cas, listés ci-avant, où la valeur de  $\delta_n$  est connue, elle est égale à  $\delta_n^L$ . Cependant, il est vraisemblable que les valeurs de  $\delta_n^L$  et  $\delta_n$  diffèrent pour tout  $n$  assez grand.

Cet exposé s'intéresse à l'estimation de  $\delta_n$  et  $\delta_n^L$  lorsque la dimension  $n$  tend vers l'infini. Rappelons d'abord l'histoire de ces questions.

Il est très facile de démontrer l'inégalité  $\delta_n \geq 2^{-n}$  en considérant une famille maximale de boules deux à deux disjointes de rayon  $r$  et en remarquant que les boules de mêmes centres et de rayon  $2r$  recouvrent  $\mathbf{R}^n$ . L'inégalité  $\delta_n^L \geq 2^{-n}$  est plus délicate ; c'est une conséquence du théorème de Minkowski–Hlawka énoncé par Minkowski dès 1893 et démontré dans Hlawka (1943). Nous en donnerons une preuve dans la section 2 à l'aide de réseaux *aléatoires*. Pour  $n$  grand, il n'est connu aucun exemple explicite d'un empilement de sphères centrées en un réseau de  $\mathbf{R}^n$  ayant une densité supérieure à  $2^{-n}$ .

Mentionnons maintenant les bornes supérieures connues. Dans un article très court, Blichfeldt (1929) démontre l'inégalité

$$\delta_n \leq \frac{n+2}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

Ce résultat a été substantiellement amélioré par Kabatyanskii et Levenshtein (1978)

$$(1) \quad \delta_n \leq (\alpha + o(1))^n$$

où  $\alpha \approx 0.66 < \frac{1}{\sqrt{2}}$  est une constante explicite. Des meilleures estimations du terme  $o(1)$  ont ensuite été données par Cohn et Zhao (2014) et Sardari et Zargar (2024).

Cet exposé s'intéresse en premier lieu aux bornes inférieures. La borne « triviale »  $2^{-n}$  a d'abord été améliorée par Rogers (1947) en

$$(2) \quad \delta_n^L \geq cn \cdot 2^{-n}.$$

Ici et dans tout l'exposé, les lettres  $c$  et  $C$  désignent des réels  $> 0$  non spécifiés qui ne dépendent pas de la dimension. D'autres approches donnant de meilleures estimations de la constante  $c$  ont ensuite été proposées par Davenport et Rogers (1947), puis Ball (1992) et Vance (2011).

L'avancée suivante est due à Venkatesh (2013) qui a montré, en considérant des réseaux aléatoires ayant des symétries d'origine algébrique, que l'inégalité

$$\delta_n^L \geq cn(\log \log n) \cdot 2^{-n}$$

est vraie pour une infinité de  $n$ . Une approche différente, d'inspiration combinatoire et n'utilisant pas de réseaux (Campos, Jensen, Michelen et Sahasrabudhe, 2023) a permis d'obtenir pour toute dimension la minoration

$$\delta_n \geq \left( \frac{1}{2} - o(1) \right) n \log n \cdot 2^{-n}.$$

Enfin, le résultat le plus abouti, que nous présentons ici, est le suivant

THÉORÈME 1.1 (Klartag, 2026). — *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout entier  $n \geq 1$ ,*

$$\delta_n \geq \delta_n^L \geq cn^2 \cdot 2^{-n}.$$

Ce progrès peut sembler modeste étant donné qu’il subsiste un fossé exponentiel entre la borne inférieure de Klartag et la meilleure borne supérieure (1). Notons toutefois que Venkatesh (2013) conjecture que la quantité  $2^n \delta_n^L$  est majorée par un polynôme en  $n$ . Nous savons désormais qu’un tel polynôme a nécessairement un degré  $\geq 2$ .

La section 2 présente l’argument de Rogers donnant la minoration (2). Le principe est de construire, étant donné un réseau aléatoire, un ellipsoïde de grand volume compatible avec le réseau, c’est-à-dire dont l’intérieur ne contient aucun point non nul du réseau. Cet ellipsoïde est déterminé par les minima successifs du réseau.

Klartag raffine ces idées en utilisant *deux fois* la méthode probabiliste : dans un réseau aléatoire, il considère un ellipsoïde compatible aléatoire. La définition de cet ellipsoïde aléatoire repose sur un processus stochastique dont l’étude fait intervenir tous les points du réseau de norme assez petite, et pas uniquement les minima successifs.

Ce processus d’exploration brownienne peut être défini dans un convexe fermé quelconque, ce que nous faisons dans la section 3. La preuve de Klartag est détaillée dans la section 4.

## 2. L’argument de Rogers

Un *réseau* est un ensemble de la forme  $\Lambda = A(\mathbf{Z}^n)$  pour  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ . Le nombre  $\mathrm{covol}(\Lambda) := |\det(A)|$  ne dépend pas du choix de la matrice  $A$  et est appelé *covolume* du réseau  $\Lambda$ . L’ensemble des réseaux de  $\mathbf{R}^n$  de covolume 1 s’identifie à  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ . La mesure de Haar sur  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$  induit sur cet ensemble une mesure finie (voir Benoist, 2009, Section 2.2) que l’on peut normaliser pour être de masse 1.

Ainsi, pour tout nombre réel  $v > 0$ , l’ensemble des réseaux de  $\mathbf{R}^n$  de covolume  $v$  admet une unique mesure de probabilité invariante par l’action de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ . Dans tout l’exposé, l’expression « réseau aléatoire de covolume  $v$  » se réfèrera à cette mesure de probabilité.

Nous utiliserons de façon centrale la formule d’intégration suivante, due à Siegel (1945). Si  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$  est un réseau aléatoire de covolume  $v$ , alors pour toute fonction  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue

$$(3) \quad \mathbf{E} \left[ \sum_{x \in \Lambda^*} f(x) \right] = \frac{1}{v} \int_{\mathbf{R}^n} f$$

où  $\Lambda^* := \Lambda \setminus \{0\}$ .

Notons  $B_n := B(0, 1)$  la boule unité ouverte de  $\mathbf{R}^n$  et  $\omega_n := \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2} + 1)$  son volume. La *norme minimale* d’un réseau  $\Lambda$  est la quantité  $r = \min\{\|x\| : x \in \Lambda^*\}$ . Les boules  $\{B(x, r/2) : x \in \Lambda\}$  forment un empilement de sphères de densité  $r^n \omega_n / \mathrm{covol}(\Lambda)$ .

La méthode probabiliste fournit une preuve immédiate de l'inégalité  $\delta_n^L \geq 2^{-n}$  de Minkowski–Hlawka. Si  $\Lambda$  est un réseau aléatoire de covolume  $\omega_n$ , la formule de Siegel (3) appliquée à la fonction  $f = \mathbf{1}_{B_n}$  s'écrit

$$\mathbf{E}[|B_n \cap \Lambda^*|] = 1.$$

Puisque le nombre  $|B_n \cap \Lambda^*|$  est pair, il est égal à 0 avec probabilité  $\geq \frac{1}{2}$ . Il existe donc un réseau  $\Lambda$  de  $\mathbf{R}^n$  de covolume  $\omega_n$  et de norme minimale  $\geq 1$ , ce qui implique que la famille  $\{B(x, \frac{1}{2}) : x \in \Lambda\}$  est un empilement de sphères de densité  $\geq 2^{-n}$ .

Nous allons maintenant détailler la preuve de Rogers de l'inégalité  $\delta_n^L \geq cn2^{-n}$ . Appelons *ellipsoïde* l'image de la boule unité ouverte par une application linéaire inversible. Le point de départ est de remarquer que si  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$  est un réseau et  $\mathcal{E}$  est un ellipsoïde ne contenant aucun point de  $\Lambda^*$ , alors

$$(4) \quad \delta_n^L \geq \frac{\text{vol}(\mathcal{E})}{\text{covol}(\Lambda)} 2^{-n}.$$

En effet, si  $\mathcal{E} = T(B_n)$  pour  $T \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ , alors la famille  $\{B(x, 1) : x \in 2T^{-1}\Lambda\}$  est un empilement de sphères de densité  $\omega_n / \text{covol}(2T^{-1}\Lambda) = 2^{-n} \text{vol}(\mathcal{E}) / \text{covol}(\Lambda)$ .

Soit  $\Lambda$  un réseau aléatoire de covolume  $v := \frac{\omega_n}{n}$ . Considérons la fonction

$$f(x) := \left( \log \frac{1}{\|x\|} \right)_+ = \left( \log \frac{1}{\|x\|} \right) \mathbf{1}_{B_n}(x).$$

D'après la formule de Siegel (3), nous avons

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{x \in \Lambda^*} f(x) \right] = \frac{1}{v} \int_{\mathbf{R}^n} f = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_n} \log \frac{1}{\|x\|} dx.$$

Cette intégrale se calcule en coordonnées polaires comme

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{B_n} \log \frac{1}{\|x\|} dx = \frac{\int_0^1 \log(1/r) r^{n-1} dr}{\int_0^1 r^{n-1} dr} = \frac{1/n^2}{1/n} = 1/n.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{x \in \Lambda^*} f(x) \right] = 1$$

et en particulier, il existe un réseau  $\Lambda$  de covolume  $v$  vérifiant  $\sum_{x \in \Lambda^*} f(x) \leq 1$ . Fixons un tel réseau.

Pour  $1 \leq i \leq n$ , posons

$$\lambda_i := \inf \{ \lambda : \dim(\text{Vect}(\Lambda \cap \lambda B_n)) \geq i \}.$$

Les nombres  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  sont appelés les *minima successifs* du réseau  $\Lambda$ . Il existe des éléments  $y_1, \dots, y_n$  de  $\Lambda$  formant une base de  $\mathbf{R}^n$  et vérifiant  $\|y_i\| = \lambda_i$ . Nous avons

$$\begin{aligned} -\log(\lambda_1 \cdots \lambda_n) &= \log \frac{1}{\|y_1\|} + \cdots + \log \frac{1}{\|y_n\|} \\ &\leq f(y_1) + \cdots + f(y_n) \\ &\leq \sum_{y \in \Lambda^*} f(y) = 1. \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'inégalité  $\lambda_1 \cdots \lambda_n \geq 1/e$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale vérifiant pour  $1 \leq i \leq n$

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_i).$$

Considérons l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i : \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i^2} < 1 \right\}$$

et soit  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  un élément de  $\Lambda^*$ . Soit  $j$  maximal tel que  $\alpha_j \neq 0$ . Nous avons  $\|x\| \geq \lambda_j$ , et par ailleurs

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^j \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i^2} \geq \frac{\|x\|^2}{\lambda_j^2} \geq 1.$$

Ainsi, l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  ne contient aucun point de  $\Lambda^*$ . Au vu de (4), cela implique l'inégalité

$$\delta_n^L \geq \frac{\text{vol}(\mathcal{E})}{v} 2^{-n} = n 2^{-n} \lambda_1 \cdots \lambda_n \geq e^{-1} n 2^{-n}.$$

Nous avons ainsi démontré la minoration (2).

### 3. Exploration brownienne d'un convexe fermé

Dans toute cette partie, nous fixons un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  et un sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset E$  convexe fermé ne contenant pas de droite affine. Fixons également un *mouvement brownien standard*  $(B_t)_{t \geq 0}$  dans  $E$ , c'est-à-dire un processus stochastique à valeurs dans  $E$  tel que, pour toute base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , les  $n$  processus stochastiques scalaires  $(\langle B_t, e_i \rangle)_{t \geq 0}$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , sont des mouvements browniens indépendants. Notons  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration canonique de  $(B_t)$ , supposée complète. Autrement dit, pour  $t \geq 0$ , la tribu  $\mathcal{F}_t$  la plus petite tribu contenant les ensembles négligables et rendant mesurables les variables aléatoires  $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$ .

Nous allons définir un processus stochastique à valeurs dans  $\mathcal{C}$  que nous appellerons *exploration brownienne* de  $\mathcal{C}$ . Informellement, l'exploration brownienne de  $\mathcal{C}$  est construite en conditionnant le mouvement brownien  $(B_t)$  à appartenir à une face de  $\mathcal{C}$  atteinte antérieurement. Ce processus est une martingale qui atteint presque sûrement un point extrémal de  $\mathcal{C}$  en temps fini.

Pour tout  $x \in \mathcal{C}$ , l'ensemble

$$(5) \quad V(x, \mathcal{C}) := \{y \in E : \exists \varepsilon > 0 : |t| < \varepsilon \implies x + ty \in \mathcal{C}\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'égalité  $V(x, \mathcal{C}) = E$  a lieu si et seulement si  $x$  est un point intérieur à  $\mathcal{C}$ , et l'égalité  $V(x, \mathcal{C}) = \{0\}$  a lieu si et seulement si  $x$  est un point extrémal de  $\mathcal{C}$ . Dans le sous-espace vectoriel  $V(x, \mathcal{C})$ , le point 0 est intérieur au convexe  $(\mathcal{C} - x) \cap V(x, \mathcal{C})$ .

PROPOSITION 3.1. — Soit  $x_0$  un point intérieur à  $\mathcal{C}$ . Il existe une martingale continue  $(X_t)$  adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  et vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$(6) \quad X_0 = x_0, \quad dX_t = p_t(dB_t)$$

où  $p_t$  désigne la projection orthogonale sur le sous-espace  $V(X_t, \mathcal{C})$ , qui vérifie les propriétés suivantes : presque sûrement,

- (a) pour tout  $t \geq 0$ , on a  $X_t \in \mathcal{C}$ ,
- (b) il existe un point extrémal  $z$  de  $\mathcal{C}$  et un réel  $T > 0$  (aléatoires) tels que  $X_t = z$  pour tout  $t \geq T$ ,
- (c) pour tous  $0 \leq s \leq t$ , on a  $V(X_t, \mathcal{C}) \subset V(X_s, \mathcal{C})$ .

Ce processus  $(X_t)$  est appelé *processus d'exploration brownienne de  $\mathcal{C}$  issu de  $x_0$* . Sa construction utilise récursivement le lemme suivant.

LEMME 3.2. — Soit  $V$  un espace euclidien et  $K \subset V$  un convexe fermé, distinct de  $V$  et contenant 0 dans son intérieur. Soit  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard dans  $V$ . La variable aléatoire

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : \beta_t \notin K\}$$

vérifie presque sûrement  $0 < \tau < \infty$ . De plus, presque sûrement,  $\beta_\tau \in \partial K$ .

*Démonstration.* — Puisque  $K \neq V$ , par le théorème de Hahn–Banach, il existe un élément  $z \in V$  de norme 1 tel que la forme linéaire  $\langle z, \cdot \rangle$  est minorée sur  $K$ . Le processus stochastique scalaire  $(\langle z, \beta_t \rangle)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien et vérifie donc presque sûrement  $\inf\{\langle z, \beta_t \rangle : t \geq 0\} = -\infty$  (voir Le Gall, 2013, Corollaire 2.3), ce qui implique l'existence d'un réel  $t$  tel que  $\beta_t \notin K$ . Nous avons ainsi montré que  $\tau$  est presque sûrement fini. Les autres propriétés découlent du fait que la fonction  $t \mapsto \beta_t$  est presque sûrement continue.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.1.* — Posons  $X_0 = x_0$ . Pour construire  $(X_t)_{t \geq 0}$ , définissons une suite de temps d'arrêt

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$$

de telle sorte que si  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$  alors  $V(X_t, \mathcal{C}) = V_i$ , où  $V_i := V(X_{\tau_i}, \mathcal{C})$ . Notons  $\pi_i$  la projection orthogonale sur  $V_i$ . Nous allons définir  $(X_t)$  de telle manière que, si  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$

$$X_t = X_{\tau_i} + \pi_i(B_t - B_{\tau_i}).$$

La construction se fait par récurrence sur  $i \in \{0, \dots, n\}$ . En supposant construits  $\tau_0, \dots, \tau_i$  et  $(X_t)_{0 \leq t \leq \tau_i}$ , définissons  $\tau_{i+1}$  de la manière suivante.

— Si  $V_i \neq \{0\}$ , posons

$$\tau_{i+1} = \tau_i + \inf\{t > 0 : V(X_{\tau_i} + \pi_i(B_{\tau_i+t} - B_{\tau_i}), \mathcal{C}) \neq V_i\}.$$

Appliquons le lemme 3.2 à l'espace euclidien  $V_i$ , au convexe  $K = (\mathcal{C} - X_{\tau_i}) \cap V_i$  et au processus  $(\beta_t)$  défini par  $\beta_t := \pi_i(B_{\tau_i+t} - B_{\tau_i})$  qui est un mouvement brownien standard dans  $V_i$ . Remarquons aussi que puisque  $\dim(V_i) \geq 1$  et  $\mathcal{C}$  ne contient pas de droite, l'ensemble  $K$  n'est pas égal à  $V_i$ . Nous pouvons donc conclure que presque sûrement,  $\tau_{i+1} < \infty$  et  $\dim(V_{i+1}) < \dim(V_i)$ .

— Si  $V_i = \{0\}$ , la récurrence se termine. Posons  $X_t = X_{\tau_i}$  pour tout  $t \geq \tau_i$ . Posons aussi (ce choix est arbitraire)  $\tau_k = \tau_j + k$  pour tout entier  $j < k \leq n$ .

Par construction,  $(X_t)$  est une martingale continue qui vérifie les conditions (a), (b) avec  $T = \tau_n$  et (c) de la proposition 3.1. Il reste à voir qu'elle est solution de l'équation différentielle stochastique (6), c'est-à-dire que, au sens de l'intégrale d'Itô, pour tout  $t \geq 0$

$$X_t - X_0 = \int_0^t p_s(dB_s).$$

Par définition de l'intégrale stochastique, nous avons (au sens de  $L^2$ )

$$(7) \quad \int_0^t p_s(dB_s) = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N_P-1} p_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

où  $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_P} = t\}$  est une subdivision (déterministe) de  $[0, t]$  de pas  $\delta(P) := \max_{0 \leq i < N_P} |t_{i+1} - t_i|$ . Par construction de  $(X_t)$ , si  $Q = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{N_Q} = t\}$  est une subdivision (aléatoire) de  $[0, t]$  contenant  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\} \cap [0, t]$ , nous avons

$$(8) \quad X_t - X_0 = \sum_{i=0}^{N_Q-1} p_{s_i}(B_{s_{i+1}} - B_{s_i}).$$

En choisissant une telle subdivision  $Q$  plus fine que  $P$ , l'écart entre les sommes apparaissant dans (7) et (8) peut-être rendu arbitrairement petit au sens dans  $L^2$ . Nous en déduisons l'égalité

$$X_t - X_0 = \int_0^t p_s(dB_s)$$

au sens de  $L^2$ , et donc presque sûrement puisque les deux membres sont des martingales continues.  $\square$

*Remarque 3.3.* — Pour  $1 \leq i \leq n$ , la loi du  $i$ ème temps d'arrêt  $\tau_i$  défini dans la preuve précédente est une mesure diffuse sur  $\mathbf{R}_+$ . En effet, soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que la boule  $B(x_0, \varepsilon)$  soit incluse dans  $\mathcal{C}$  et  $\tau' := \inf\{t > 0 : \|B_t - x_0\| \geq \varepsilon\}$  le temps de sortie associé. Par la propriété de Markov forte, la loi de  $\tau_i$  est la convolution de la loi de  $\tau'$  et de la loi du  $i$ ème temps d'arrêt du processus d'exploration de  $\mathcal{C}$  issu d'un point

choisi uniformément sur la sphère  $\partial B(x_0, \varepsilon)$ . Puisque  $\tau'$  a une loi diffuse (Ciesielski et Taylor, 1962), c'est aussi le cas de  $\tau_i$ .

Nous utiliserons cette remarque pour démontrer les propositions 3.6 et 4.2. Toutefois, elle n'est pas nécessaire pour démontrer le théorème 1.1 à condition de remplacer ces propositions par une variante affaiblie où la conclusion est sous forme intégrée, telle que celle qui sera utilisée dans l'inégalité (10).

Dans la suite de cette partie, fixons  $x_0 \in \mathcal{C}$  et notons  $(X_t)$  le processus d'exploration brownienne de  $\mathcal{C}$  issu de  $x_0$ . Comme dans la proposition 3.1,  $p_t$  désigne la projection orthogonale sur  $V(X_t, \mathcal{C})$ . Nous allons démontrer deux inégalités de couplage qui illustrent l'idée que l'exploration brownienne « diffuse moins vite » que le mouvement brownien standard.

PROPOSITION 3.4. — *Pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ , pour tout  $t > 0$  et pour tout  $\lambda > 0$*

$$\mathbf{P}(\|X_t - x_0\| \geq \lambda) \leq 2 \mathbf{P}(\|B_t\| \geq \lambda).$$

*Démonstration.* — Considérons le processus  $(B'_t)$  défini par la relation  $X_t = x_0 + \frac{1}{2}(B_t + B'_t)$ . Puisque pour tout  $t \geq 0$

$$X_t = x_0 + \int_0^t p_s(dB_s)$$

et

$$B_t = \int_0^t \text{Id}(dB_s),$$

nous avons par linéarité de l'intégrale stochastique

$$B'_t = \int_0^t (\text{Id} - 2p_s)(dB_s).$$

La matrice de variation quadratique du processus  $(B'_t)$  est égale à

$$[B']_t = \int_0^t (\text{Id} - 2p_s)(\text{Id} - 2p_s)ds = t\text{Id}$$

puisque  $p_s$  est une projection orthogonale. Par un théorème de Lévy (Le Gall, 2013, Théorème 5.4), ceci implique que le processus  $(B'_t)$  est un mouvement brownien standard dans  $E$ . Nous avons donc, en écrivant  $\|X_t - x_0\| \leq \frac{1}{2}(\|B_t\| + \|B'_t\|)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\|X_t - x_0\| \geq \lambda) &\leq \mathbf{P}(\|B_t\| + \|B'_t\| \geq 2\lambda) \\ &\leq \mathbf{P}(\|B_t\| \geq \lambda) + \mathbf{P}(\|B'_t\| \geq \lambda) \end{aligned}$$

et le résultat en découle. □

PROPOSITION 3.5. — *Soit  $z \in E$  et  $a$  un réel. Notons*

$$\tau_1 := \inf\{t \geq 0 : \langle z, X_t \rangle = a\}$$

et

$$\tau_2 := \inf\{t \geq 0 : \langle z, x_0 + B_t \rangle = a\}.$$

Alors, pour tout réel  $T > 0$ ,

$$\mathbf{P}(\tau_1 \geq T) \geq \mathbf{P}(\tau_2 \geq T).$$

*Démonstration.* — Supposons sans perte de généralité que  $\|z\| = 1$ ,  $x_0 = 0$  et  $a > 0$ . Le processus stochastique scalaire  $(M_t)$  défini par  $M_t := \langle z, X_t \rangle$  est une martingale continue. Sa variation quadratique vérifie

$$[M]_t = \int_0^t \|p_s(z)\|^2 ds \leq \int_0^t \|z\|^2 ds = t.$$

Le théorème de Dambis–Dubins–Schwartz implique (quitte à agrandir l’espace de probabilité, voir Le Gall, 2013, Théorème 5.5) l’existence d’un mouvement brownien scalaire  $(\beta_t)$  tel que

$$M_t = \beta_{[M]_t}$$

pour tout réel  $\geq 0$ . Puisque  $[M]_t \leq t$ , nous avons

$$\forall t < T, \beta_t < a \implies \forall t < T, M_t < a.$$

L’événement de droite est l’événement  $\{\tau_1 \geq T\}$  et l’événement de gauche a même probabilité que l’événement  $\{\tau_2 \geq T\}$  puisque  $(\langle z, B_t \rangle)$  est un mouvement brownien scalaire.  $\square$

Enfin, explicitons une conséquence de la formule d’Itô.

PROPOSITION 3.6. — Soit  $\Omega$  un ouvert de  $E$  contenant  $\mathcal{C}$  et soit  $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Supposons que pour tout  $t > 0$  on ait

$$(i) \int_0^t \mathbf{E}[\|\nabla F(X_s)\|^2] ds < \infty, \quad (ii) \int_0^t \mathbf{E}[\|\nabla^2 F(X_s)\|] ds < \infty.$$

Alors la fonction  $g: t \mapsto \mathbf{E}[F(X_t)]$  est de classe  $C^1$  et vérifie pour tout  $t \geq 0$

$$g'(t) = \frac{1}{2} \mathbf{E} [\text{Tr}(\nabla^2 F(X_t)p_t)].$$

*Démonstration.* — La formule d’Itô s’écrit comme

$$F(X_t) = F(x_0) + \int_0^t \langle \nabla F(X_s), p_s(dB_s) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t [\text{Tr}(\nabla^2 F(X_s)p_s)] ds.$$

Le processus  $(M_t)$  défini par  $M_t := \int_0^t \langle \nabla F(X_s), p_s(dB_s) \rangle$  est une martingale locale. L’hypothèse (i) combinée au fait que  $p_s$  est une contraction implique que  $(M_t)$  est une martingale et donc que  $\mathbf{E}[M_t] = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . L’hypothèse (ii) garantit que  $g(t)$  est bien définie pour  $t \geq 0$  et vaut

$$g(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{E} [\text{Tr}(\nabla^2 F(X_s)p_s)].$$

Il découle de la preuve de la proposition 3.1 et de la remarque 3.3 que les points de discontinuité de la fonction  $t \mapsto p_t$  sont en nombre fini et que leur loi est diffuse. Puisque la fonction  $t \mapsto \nabla^2 F(X_t)$  est presque sûrement continue, ceci implique que la fonction

$t \mapsto \mathbf{E}[\mathrm{Tr}(\nabla^2 F(X_t)p_t)]$  est continue. Ainsi,  $g$  est de classe  $C^1$  et vérifie la formule annoncée.  $\square$

## 4. La preuve de Klartag

### 4.1. Préliminaires

L'ensemble  $\mathrm{Sym}_n$  des matrices symétriques réelles de taille  $n$  est un espace vectoriel de dimension  $n(n+1)/2$ . Munissons-le de la structure d'espace euclidien donnée par le produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB)$ . Pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathrm{Sym}_n$ , nous écrivons  $A \preceq B$  lorsque la matrice  $B - A$  est positive. Nous associons à toute matrice  $A$  symétrique définie positive l'ellipsoïde ouvert

$$\mathcal{E}_A := \{x \in \mathbf{R}^n : \langle Ax, x \rangle < 1\} = A^{-1/2}(B_n)$$

qui vérifie  $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_A) = \omega_n / \sqrt{\det(A)}$ . Sa frontière  $\partial\mathcal{E}_A$  est l'ensemble des vecteurs  $x$  de  $\mathbf{R}^n$  vérifiant  $\langle Ax, x \rangle = 1$ .

Étant donné un réseau  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ , considérons l'ensemble convexe fermé

$$\mathcal{C}_\Lambda := \{A \in \mathrm{Sym}_n : \langle Ax, x \rangle \geq 1 \text{ pour tout } x \in \Lambda^*\}.$$

Une matrice  $A$  symétrique définie positive appartient à  $\mathcal{C}_\Lambda$  si et seulement si l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_A$  ne contient aucun point de  $\Lambda^*$ . Le lemme suivant décrit l'ensemble  $V(A, \mathcal{C}_\Lambda)$  défini par (5).

LEMME 4.1. — *Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbf{R}^n$  et  $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ . Alors  $A$  est définie positive et vérifie l'inégalité*

$$(9) \quad \sqrt{\det(A)} \geq \frac{\omega_n 2^{-n}}{\delta_n^L \mathrm{covol}(\Lambda)}.$$

De plus,

$$V(A, \mathcal{C}_\Lambda) = \{M \in \mathrm{Sym}_n : \langle Mx, x \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \Lambda^* \cap \partial\mathcal{E}_A\}.$$

*Démonstration.* — La positivité de  $A$  se déduit du fait que l'ensemble  $\{x/\|x\| : x \in \Lambda^*\}$  est dense dans la sphère unité de  $\mathbf{R}^n$ . Si  $A$  est définie positive, l'inégalité (4) s'écrit

$$\delta_n^L \geq \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_A)}{\mathrm{covol}(\Lambda)} 2^{-n} = \frac{\omega_n / \sqrt{\det(A)}}{\mathrm{covol}(\Lambda)} 2^{-n}$$

d'où nous déduisons (9). Si  $A$  est a priori seulement supposée positive, la conclusion reste vraie en appliquant cet argument à  $A + \varepsilon \mathrm{Id}$  pour  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit.

Soit  $M \in V(A, \mathcal{C}_\Lambda)$ . Pour tout  $x \in \Lambda^* \cap \partial\mathcal{E}_A$ , nous avons  $\langle Ax, x \rangle = 1$ . La définition de  $V(A, \mathcal{C}_\Lambda)$  implique que  $\langle (A + tM)x, x \rangle \geq 1$  pour  $|t|$  assez petit, donc  $\langle Mx, x \rangle = 0$ .

Réciproquement, soit  $M \in \mathrm{Sym}_n$  telle que  $\langle Mx, x \rangle = 0$  pour tout  $x \in \Lambda^* \cap \partial\mathcal{E}_A$ . Puisqu'un réseau est discret et puisque  $A$  est définie positive, il existe  $\alpha > 1$  tel que

$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha$  pour tout  $x \in \Lambda^* \setminus \partial\mathcal{E}_A$ . Si  $t$  est un réel tel que  $|t|$  assez petit, nous avons  $\alpha^{-1}A \preceq A + tM$  et donc, pour tout  $x \in \Lambda^*$

$$\begin{aligned} \langle (A + tM)x, x \rangle &= 1 \quad \text{si } x \in \partial\mathcal{E}_A \\ \langle (A + tM)x, x \rangle &\geq \alpha^{-1} \langle Ax, x \rangle \geq 1 \quad \text{si } x \notin \partial\mathcal{E}_A \end{aligned}$$

ce qui implique que  $A + tM \in \mathcal{C}_\Lambda$ . Nous avons donc démontré que  $M \in V(A, \mathcal{C}_\Lambda)$ .  $\square$

Les matrices  $A \in \mathcal{C}_\Lambda$  de déterminant minimal, pour lesquelles il y a égalité dans (9), correspondent à un empilement d'ellipsoïdes  $\{\mathcal{E}_A + x : x \in 2\Lambda\}$  de densité optimale  $\delta_n^L$ . Puisque la fonction  $\log \circ \det$  est strictement concave sur  $\mathcal{C}_\Lambda$ , ces points de minimum sont des points extrémaux de  $\mathcal{C}_\Lambda$ .

## 4.2. Structure de la preuve

Fixons un mouvement brownien standard  $(W_t)_{t \geq 0}$  dans l'espace euclidien  $\text{Sym}_n$ . Nous allons considérer un processus d'exploration brownienne construit à partir de  $(W_t)$  comme dans la section 3.

Soit  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$  un réseau de norme minimale  $> 1$ , ce qui revient à dire que la matrice  $\text{Id}$  est dans l'intérieur de  $\mathcal{C}_\Lambda$ . Notons  $(A_t)$  le processus d'exploration brownienne de  $\mathcal{C}_\Lambda$  issu de  $\text{Id}$ . Pour alléger l'écriture, nous allons prétendre que les conclusions de la proposition 3.1 sont vraies en tout point de l'espace de probabilité sous-jacent ; l'argument devient rigoureux en ajoutant la locution « presque sûrement » à chaque phrase.

D'après la proposition 3.1, pour tout  $t$ , la matrice  $A_t$  est dans  $\mathcal{C}_\Lambda$ . Pour  $t$  suffisamment grand, c'est un point extrémal de  $\mathcal{C}_\Lambda$ . Le processus d'exploration brownienne « choisit » un empilement de sphères extrémal. Nous allons voir qu'il est possible de minorer la densité de cet empilement, ce qui revient à majorer  $\det(A_t)$ .

Puisque  $(A_t)$  est une martingale et que la fonction  $\log \circ \det$  est concave, la fonction  $g: t \mapsto \mathbf{E}[\log \det A_t]$  est décroissante. Nous allons estimer la vitesse de décroissance en fonction de la répartition des vecteurs de  $\Lambda$  de petite norme. Cela requiert quelques notations. Considérons la fonction de queue gaussienne  $\Phi$  définie pour un réel  $a$  comme

$$\Phi(a) := \int_a^\infty e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Autrement dit,  $\Phi(a)$  est la probabilité qu'une variable aléatoire gaussienne standard prenne une valeur  $\geq a$ . Définissons ensuite, pour un réel  $t > 0$ , une fonction radiale  $f_t: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  par la formule

$$f_t(x) := 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{\|x\|^2}\right)\right).$$

Enfin, étant donné un réseau  $\Lambda$ , posons

$$K_t(\Lambda) := \sum_{x \in \Lambda^* \cap D_t} f_t(x)$$

où  $D_t := \{x \in \mathbf{R}^n : (1 - 3\sqrt{tn})\|x\|^2 \leq 1\}$ .

Posons  $t_{\max} := \frac{20 \log n}{n^2}$ . Le théorème 1.1 se déduit des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 4.2. — Soit  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$  un réseau de norme minimale  $> 1$ . Soit  $(A_t)$  le processus d'exploration brownienne de  $\mathcal{C}_\Lambda$  issu de Id. La fonction  $g: t \mapsto \mathbf{E}[\log \det A_t]$  est de classe  $C^1$  et vérifie pour  $t \in [0, t_{\max}]$  l'inégalité

$$g'(t) \leq -\frac{n^2}{4} + K_t(\Lambda) + 3\sqrt{tn}^{5/2} + \varepsilon_n$$

où  $(\varepsilon_n)$  est une suite tendant vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

PROPOSITION 4.3. — Soit  $t \in [0, t_{\max}]$ . Si  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$  est un réseau aléatoire de covolume  $\omega_n$ , alors

$$\mathbf{E}[K_t(\Lambda)] \leq (2 + \varepsilon_n) \exp\left(\frac{n^2 t}{8}\right)$$

où  $(\varepsilon_n)$  est une suite tendant vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Montrons le théorème 1.1 en combinant ces deux propositions. Soit  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$  un réseau aléatoire de covolume  $\omega_n$ . Posons  $T := \frac{16 \log n}{n^2}$ . Ce nombre vérifie  $e^{n^2 T/8} = n^2$ .

D'après la proposition 4.3, nous avons (l'espérance faisant référence au réseau aléatoire  $\Lambda$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\int_0^T K_t(\Lambda) dt\right] &\leq (2 + \varepsilon_n) \int_0^T \exp\left(\frac{n^2 t}{8}\right) dt \\ &\leq (2 + \varepsilon_n) \frac{8}{n^2} \exp\left(\frac{n^2 T}{8}\right) = 8(2 + \varepsilon_n). \end{aligned}$$

Prenons  $n$  suffisamment grand pour que l'inégalité  $8(2 + \varepsilon_n) < 20$  soit vraie. L'inégalité de Markov implique

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T K_t(\Lambda) dt \geq 40\right) < \frac{1}{2}.$$

Rappelons par ailleurs qu'un réseau aléatoire de covolume  $\omega_n$  a une norme minimale  $> 1$  avec probabilité  $\geq \frac{1}{2}$ . Nous en déduisons qu'il existe un réseau  $\Lambda$  de covolume  $\omega_n$  et de norme minimale  $> 1$  pour lequel

$$\int_0^T K_t(\Lambda) dt \leq 40.$$

La proposition 4.2 appliquée à un tel réseau donne (l'espérance faisant référence au processus stochastique  $(A_t)$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\log \det A_T] = g(T) &= \int_0^T g'(t) dt \\ (10) \quad &\leq -\frac{n^2 T}{4} + \int_0^T K_t(\Lambda) dt + \int_0^T 3\sqrt{tn}^{5/2} dt + \varepsilon_n T \\ &\leq -4 \log(n) + 40 + 2T^{3/2} n^{5/2} + \varepsilon_n T \\ &\leq -4 \log(n) + C \end{aligned}$$

puisque  $T^{3/2}n^{5/2} = o(1)$ . Il existe donc une matrice  $A \in \mathcal{C}_\Lambda$  telle que

$$\det(A) \leq \exp(-4 \log(n) + C) = \frac{e^C}{n^4}$$

et donc, d'après (4)

$$\delta_n^L \geq \frac{2^{-n}}{\sqrt{\det(A)}} \geq cn^2 \cdot 2^{-n}.$$

### 4.3. Preuve de la proposition 4.2

Nous utiliserons des estimations de la norme d'opérateur (notée  $\|\cdot\|_{\text{op}}$ ) de matrices aléatoires. Rappelons que  $(W_t)$  est un mouvement brownien standard dans l'espace euclidien  $\text{Sym}_n$ . La loi de  $W_1$  est connue sous le nom d'Ensemble Gaussien Orthogonal (GOE). L'inégalité suivante est une conséquence de l'inégalité isopérimétrique dans l'espace gaussien (cf. l'équation (6.38) dans Aubrun et Szarek, 2017) : pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbf{P}(\|W_1\|_{\text{op}} \geq 2\sqrt{n} + \varepsilon) \leq \exp(-\varepsilon^2/2).$$

Pour tout  $t > 0$ , la variable aléatoire  $W_t/\sqrt{t}$  a même loi que  $W_1$ . La proposition 3.4 implique alors pour tout  $\varepsilon > 0$  l'inégalité

$$(11) \quad \mathbf{P}(\|A_t - \text{Id}\|_{\text{op}} \geq \sqrt{t}(2\sqrt{n} + \varepsilon)) \leq 2 \exp(-\varepsilon^2/2).$$

Nous tirerons deux conséquences de cette inégalité. Premièrement, pour tout entier naturel  $k$  et pour tout  $t > 0$

$$(12) \quad \int_0^t \mathbf{E} [\|A_s\|_{\text{op}}^k] ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t \mathbf{E} [\|A_s^{-1}\|_{\text{op}}^k] ds < \infty.$$

La première de ces inégalités est une conséquence de (11) puisque les variables aléatoires sous-gaussiennes ont tous leurs moments finis ; la seconde découle de la première en écrivant

$$\|A_t^{-1}\|_{\text{op}} \leq \frac{\|A_t\|_{\text{op}}^{n-1}}{\det(A_t)}$$

et en utilisant le fait, énoncé au lemme 4.1, que le déterminant est minoré par une valeur  $> 0$  sur  $\mathcal{C}_\Lambda$ .

Deuxièmement, elle va nous permettre de restreindre notre étude au cas où  $A_t$  est très proche de la matrice identité. Pour tout  $t > 0$ , introduisons l'événement « favorable »

$$G_t = \{\|A_t - \text{Id}\|_{\text{op}} \leq 3\sqrt{tn}\}.$$

Il découle de (11) que cet événement a une probabilité très proche de 1 puisque l'événement complémentaire vérifie

$$\mathbf{P}(\overline{G_t}) \leq 2e^{-n/2}.$$

Commençons maintenant la preuve de la proposition 4.2. Appliquons la formule d'Itô sous la forme de la proposition 3.6 à la fonction  $F = \log \circ \det$ . Pour  $A \in \mathcal{C}_\Lambda$  et  $B \in \text{Sym}_n$ , le développement limité

$$\begin{aligned} \log \det(A + \varepsilon B) &= \log \det A + \log \det(\text{Id} + \varepsilon A^{-1}B) \\ &= \log \det A + \varepsilon \text{Tr}(A^{-1}B) - \frac{\varepsilon^2}{2} \text{Tr}((A^{-1}B)^2) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

nous donne

$$\begin{aligned} \langle (\nabla F)(A), B \rangle &= \text{Tr}(A^{-1}B) \\ \langle (\nabla^2 F)(A)B, B \rangle &= -\text{Tr}(A^{-1}BA^{-1}B). \end{aligned}$$

En notant  $\|A\| := (\text{Tr } A^2)^{1/2}$ , nous avons donc  $\|\nabla F(A)\| \leq \|A^{-1}\| \leq \sqrt{n}\|A^{-1}\|_{\text{op}}$  et  $\|\nabla^2 F(A)\|_{\text{op}} \leq \|A^{-1}\|^2 \leq n\|A^{-1}\|_{\text{op}}^2$ . Il découle de (12) que les hypothèses de la proposition 3.6 sont vérifiées. Par conséquent, la fonction  $g$  est de classe  $C^1$  et vérifie pour  $t \geq 0$

$$g'(t) = \frac{1}{2} \mathbf{E} [\text{Tr}(\nabla^2 F(X_t)p_t)]$$

où  $p_t$  est la projection orthogonale sur le sous-espace  $V(A_t, \mathcal{C}_\Lambda)$ , dont nous notons  $N_t$  la dimension.

L'inégalité  $\text{Tr}(A^{-1}BA^{-1}B) \geq \|A\|_{\text{op}}^{-2} \text{Tr}(B^2)$  implique  $\nabla^2 F(A) \preceq -\|A\|_{\text{op}}^{-2} \text{Id}$ . Ainsi, pour  $t \geq 0$

$$g'(t) \leq -\frac{1}{2} \mathbf{E} [\|A_t\|_{\text{op}}^{-2} N_t] \leq -\frac{1}{2} \mathbf{E} [\mathbf{1}_{G_t} \|A_t\|_{\text{op}}^{-2} N_t].$$

Si l'événement  $G_t$  est satisfait, alors  $\|A_t\|_{\text{op}} \leq 1 + 3\sqrt{tn}$  et donc

$$\|A_t\|_{\text{op}}^{-2} \geq (1 + 3\sqrt{tn})^{-2} \geq 1 - 6\sqrt{tn}.$$

Nous avons alors, grâce à la majoration  $N_t \leq \dim \text{Sym}_n \leq n^2$ ,

$$g'(t) \leq -\frac{1}{2} \mathbf{E} [\mathbf{1}_{G_t} N_t] + 3\sqrt{tn}^{5/2}.$$

Soit  $\mathcal{E}_t := \mathcal{E}_{A_t}$  l'ellipsoïde associé à la matrice  $A_t$ . D'après le lemme 4.1,

$$V(A_t, \mathcal{C}_\Lambda) = \{x \otimes x : x \in \Lambda^* \cap \partial \mathcal{E}_t\}^\perp$$

et donc (le facteur  $\frac{1}{2}$  venant du fait que  $(-x) \otimes (-x) = x \otimes x$ ),

$$N_t \geq \dim \text{Sym}_n - \frac{1}{2} |\Lambda^* \cap \partial \mathcal{E}_t|.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} g'(t) &\leq -\frac{1}{2} \dim \text{Sym}_n \times \mathbf{P}(G_t) + \frac{1}{4} \mathbf{E} [\mathbf{1}_{G_t} |\Lambda^* \cap \partial \mathcal{E}_t|] + 3\sqrt{tn}^{5/2} \\ &\leq -\frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \mathbf{E} [\mathbf{1}_{G_t} |\Lambda^* \cap \partial \mathcal{E}_t|] + 3\sqrt{tn}^{5/2} + n^2 e^{-n/2}. \end{aligned}$$

Si l'événement  $G_t$  est satisfait, alors  $A_t \succcurlyeq (1 - 3\sqrt{tn})\text{Id}$  et par conséquent, tout  $x \in \Lambda^*$  vérifie  $\langle A_t x, x \rangle \geq (1 - 3\sqrt{tn})\|x\|^2$ . Ainsi, la condition  $x \in \partial\mathcal{E}_t$ , qui équivaut à  $\langle A_t x, x \rangle = 1$ , ne peut être réalisée que si  $x \in D_t$ . Nous avons donc

$$\mathbf{1}_{G_t} |\Lambda^* \cap \partial\mathcal{E}_t| = \sum_{x \in \Lambda^* \cap D_t} \mathbf{1}_{G_t} \mathbf{1}_{\{x \in \partial\mathcal{E}_t\}}$$

et par linéarité de l'espérance,

$$(13) \quad \mathbf{E} [\mathbf{1}_{G_t} |\Lambda^* \cap \partial\mathcal{E}_t|] \leq \sum_{x \in \Lambda^* \cap D_t} \mathbf{P}(x \in \partial\mathcal{E}_t).$$

Utilisons ensuite la remarque suivante : pour tout  $t > 0$  et  $x \in \Lambda^*$ ,

$$x \in \partial\mathcal{E}_t \iff \exists s \in [0, t] : \langle A_s x, x \rangle \leq 1.$$

Cette équivalence découle de deux faits. D'une part, si  $s \leq t$  alors  $V(A_t, \mathcal{C}_\Lambda) \subset V(A_s, \mathcal{C}_\Lambda)$  par la proposition 3.1(iii), ce qui fait que l'égalité  $\langle A_s x, x \rangle = 1$  implique l'égalité  $\langle A_t x, x \rangle = 1$ . D'autre part, puisque  $A_s \in \mathcal{C}_\Lambda$ , il est équivalent de dire que  $\langle A_s x, x \rangle \leq 1$  ou que  $\langle A_s x, x \rangle = 1$ .

Ceci nous permet d'écrire, à l'aide de l'inégalité de couplage prouvée dans la proposition 3.5 et en posant  $y := \frac{x}{\|x\|}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x \in \partial\mathcal{E}_t) &= \mathbf{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \langle A_s x, x \rangle \leq 1\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \langle (\text{Id} + W_s)x, x \rangle \leq 1\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \langle W_s y, y \rangle \leq \frac{1}{\|x\|^2} - 1\right). \end{aligned}$$

Le processus  $\beta_s := \langle W_s y, y \rangle$  est un mouvement brownien scalaire. Une conséquence du principe de réflexion (Le Gall, 2013, Théorème 2.4) est la formule suivante, pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbf{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \beta_s \leq -a\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \beta_s \geq a\right) = 2\mathbf{P}(|\beta_t| \geq a) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right).$$

Appliquée pour  $a = 1 - \|x\|^{-2}$ , cette formule implique l'inégalité

$$\mathbf{P}(x \in \partial\mathcal{E}_t) \leq 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{\|x\|^2}\right)\right) =: f_t(x).$$

Nous pouvons donc déduire de (13) que

$$\mathbf{E} [\mathbf{1}_{G_t} |\Lambda^* \cap \partial\mathcal{E}_t|] \leq \sum_{x \in \Lambda^* \cap D_t} f_t(x) =: K_t(\Lambda)$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 4.2.

#### 4.4. Preuve de la proposition 4.3

Nous pouvons supposer  $n$  suffisamment grand pour que  $3\sqrt{nt_{\max}} \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$  un réseau aléatoire de covolume  $\omega_n$ . Appliquons la formule de Siegel (3) à la fonction  $f_t \mathbf{1}_{D_t}$  pour écrire

$$\mathbf{E}[K_t(\Lambda)] = \frac{1}{\omega_n} \int_{D_t} f_t(x) \, dx = \frac{2}{\omega_n} \int_{D_t} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{\|x\|^2}\right)\right)$$

Après intégration en coordonnées polaires, nous avons

$$\mathbf{E}[K_t(\Lambda)] = 2n \int_0^{(1-3\sqrt{nt})^{-1/2}} r^{n-1} \Phi\left(\frac{1-r^{-2}}{\sqrt{t}}\right) \, dr.$$

Effectuons le changement de variables  $y = \frac{1-r^{-2}}{\sqrt{t}}$  pour obtenir

$$\mathbf{E}[K_t(\Lambda)] = n\sqrt{t} \int_{-\infty}^{3\sqrt{n}} \Phi(y)(1-y\sqrt{t})^{-\frac{n+2}{2}} \, dy.$$

Une intégration par parties donne alors

$$\mathbf{E}[K_t(\Lambda)] = 2\Phi(3\sqrt{n})(1-3\sqrt{nt})^{-n/2} + 2 \int_{-\infty}^{3\sqrt{n}} e^{-y^2/2}(1-y\sqrt{t})^{-n/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

En utilisant l'inégalité  $\frac{1}{1-x} \leq \exp(2x)$  valable pour  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  et l'inégalité  $\Phi(x) \leq \exp(-x^2/2)$  valable pour tout  $x \geq 0$ , il vient

$$\Phi(3\sqrt{n})(1-3\sqrt{nt})^{-n/2} \leq \exp(-4.5n + 3n^{3/2}\sqrt{t}).$$

Puisque  $t \leq t_{\max} = \frac{20 \log n}{n^2}$ , cette quantité tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Nous utilisons ensuite l'inégalité  $\frac{1}{1-x} \leq \exp(x+x^2)$  valable pour tout nombre réel  $x \leq \frac{1}{2}$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{3\sqrt{n}} e^{-y^2/2}(1-y\sqrt{t})^{-n/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} &\leq \int_{-\infty}^{3\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{ny\sqrt{t}}{2} + \frac{ny^2t}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2(1-nt)^{-1}} + \frac{ny\sqrt{t}}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-nt}} \exp\left(\frac{n^2t}{8(1-nt)}\right) \\ &= \frac{\exp\left(\frac{n^3t^2}{8(1-nt)}\right)}{\sqrt{1-nt}} \times \exp\left(\frac{n^2t}{8}\right). \end{aligned}$$

Ce calcul a utilisé la valeur de la transformée de Laplace des densités gaussiennes : pour  $\sigma = (1-nt)^{-1/2}$  et  $\alpha = n\sqrt{t}/2$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \exp(\alpha y) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \sigma \exp\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right).$$

Sous l'hypothèse  $t \leq t_{\max} = \frac{20 \log n}{n^2}$ , le facteur devant  $\exp(n^2t/8)$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini, ce qui achève la preuve de la proposition 4.3.

*Remerciements.* — Je remercie les participants du groupe de travail de probabilités de Lyon pour l'ensemble des exposés et discussions autour des empilements de sphères, et plus particulièrement Mikael de la Salle pour de précieuses remarques sur ce texte.

## Références

- Guillaume Aubrun et Stanisław J. Szarek (2017). *Alice and Bob meet Banach. The interface of asymptotic geometric analysis and quantum information theory*. T. 223. Math. Surv. Monogr. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS).
- Keith Ball (1992). « A lower bound for the optimal density of lattice packings », *Int. Math. Res. Not.* **1992** (10), p. 217-221.
- Yves Benoist (2009). « Five lectures on lattices in semisimple Lie groups », in : *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*. T. 18. Sémin. Congr. Soc. Math. France, Paris, p. 117-176.
- Hans F. Blichfeldt (1929). « The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres. » *Math. Ann.* **101**, p. 605-608.
- Marcelo Campos, Matthew Jenssen, Marcus Michelen et Julian Sahasrabudhe (2023). « A new lower bound for sphere packing », arXiv : [2302.09412](https://arxiv.org/abs/2302.09412) [math.MG].
- Zbigniew Ciesielski et Samuel J. Taylor (1962). « First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path », *Trans. Amer. Math. Soc.* **103**, p. 434-450.
- Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko et Maryna Viazovska (2017). « The sphere packing problem in dimension 24 », *Ann. Math. (2)* **185** (3), p. 1017-1033.
- Henry Cohn et Yufei Zhao (2014). « Sphere packing bounds via spherical codes », *Duke Math. J.* **163** (10), p. 1965-2002.
- John H. Conway et Neil J. A. Sloane (1999). *Sphere packings, lattices and groups*. Third. T. 290. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, New York, p. lxxiv+703.
- Harold Davenport et Claude A. Rogers (1947). « Hlawka's theorem in the geometry of numbers », *Duke Math. J.* **14**, p. 367-375.
- Mathieu Dutour Sikirić et Wessel van Woerden (2025). « The lattice packing problem in dimension 9 by Voronoi's algorithm », arXiv : [2508.20719](https://arxiv.org/abs/2508.20719) [math.NT].
- Thomas C. Hales (2005). « A proof of the Kepler conjecture », *Ann. Math. (2)* **162** (3), p. 1065-1185.
- Edmund Hlawka (1943). « Zur Geometrie der Zahlen », *Math. Z.* **49**, p. 285-312.
- Grigori A. Kabatyanskii et Vladimir I. Levenshtein (1978). « On bounds to packings on the sphere and in space », *Probl. Peredachi Inf.* **14** (1), p. 3-25.
- Boaz Klartag (2026). « Lattice packing of spheres in high dimensions using a stochastically evolving ellipsoid », *Inventiones mathematicae*, p. 1-29.

- Jean-François Le Gall (2013). *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. T. 71. Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]. Springer, Heidelberg, p. viii+176.
- Joseph Oesterlé (1990). « Empilements de sphères », in : Exposé no. 727, Séminaire Bourbaki, Volume 1989/90, Astérisque, no. 189-190, p. 375-397.
- (2000). « Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 (d’après Thomas C. Hales et Samuel P. Ferguson) », in : Exposé no. 863, Séminaire Bourbaki, Volume 1998/99, Astérisque, no. 266, p. 405-413.
- (2019). « Densité maximale des empilements de sphères en dimensions 8 et 24 (d’après Maryna S. Viazovska et al.) » In : Exposé no. 1133, Séminaire Bourbaki, Volume 2016/2017, Astérisque, no. 407, p. 455-478.
- Claude A. Rogers (1947). « Existence theorems in the geometry of numbers », *Ann. of Math. (2)* **48**, p. 994-1002.
- Naser Talebizadeh Sardari et Masoud Zargar (2024). « New upper bounds for spherical codes and packings », *Math. Ann.* **389** (4), p. 3653-3703.
- Carl Ludwig Siegel (1945). « A mean value theorem in geometry of numbers », *Ann. Math. (2)* **46**, p. 340-347.
- Stephanie Vance (2011). « Improved sphere packing lower bounds from Hurwitz lattices », *Adv. Math.* **227** (5), p. 2144-2156.
- Akshay Venkatesh (2013). « A note on sphere packings in high dimension », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (7), p. 1628-1642.
- Maryna Viazovska (2017). « The sphere packing problem in dimension 8 », *Ann. Math. (2)* **185** (3), p. 991-1015.

Guillaume Aubrun

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1  
*E-mail* : aubrun@math.univ-lyon1.fr