

INSTABILITÉ DANS LE PROBLÈME PLANÉTAIRE
[d'après Clarke, Fejoz et Guardia]

par **Abed Bounemoura**

Introduction

Le problème planétaire à $1 + n$ corps est un système d'équations différentielles modélisant l'évolution du système solaire, à savoir le mouvement de n planètes en interaction gravitationnelle autour d'un corps central plus massif (le Soleil). En première approximation, on peut négliger les interactions entre les planètes : leurs trajectoires sont alors des ellipses dont le soleil occupe un des foyers (il s'agit de la première loi de Kepler). Une seconde approximation restaure cette interaction mais ne tient compte que de sa partie principale : le théorème de stabilité de Laplace–Lagrange affirme que les solutions restent stables pour cette approximation, dans le sens où les demi grands axes des ellipses restent constants. Les mathématiciens et mathématiciennes et les astronomes ont alors cru pendant longtemps à la stabilité du problème planétaire, les interactions entre les planètes n'engendrant que de faibles variations des demi grands axes.

Or, depuis les travaux mathématiques de Poincaré et d'Arnold d'une part, et plus récemment les simulations numériques de Laskar d'autre part, on s'attend à ce que le problème planétaire soit instable, bien que cela ait résisté aux efforts des mathématiciens. Le but de l'exposé est d'expliquer, de manière informelle, des travaux de Clarke, Fejoz et Guardia qui affirment que pour le problème à $1 + n = 4$ corps (ou plus), il existe des mouvements dont le demi grand axe d'un des corps a une variation aussi grande que l'on veut. Ceci montrerait que la conclusion que l'on peut faire du théorème de stabilité de Laplace–Lagrange n'est pas valide pour le problème planétaire, et résoudrait en particulier une conjecture d'Arnold. La stratégie consiste à analyser un régime particulier (dit « lunaire » ou « hiérarchique ») où chaque corps est de plus en plus éloigné des corps précédents, sans faire d'hypothèse sur la petitesse du rapport des masses.

1. Le problème à $1 + n$ corps

On commence par une brève introduction au problème à $1 + n$ corps ; pour plus de détails, on pourra consulter Chenciner (2015) et Fejoz (2015). On considère le mouvement de $1 + n$ particules $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^3$ de masses respectives $m_0, m_1, \dots, m_n > 0$ en interaction gravitationnelle : les équations de Newton sont données par

$$\ddot{x}_j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} m_i \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

où \mathbb{R}^3 est muni de sa norme euclidienne usuelle. Il est commode (et courant) de dénoter le premier corps par l'indice 0 (et donc de parler de $1 + n$ corps) car, comme on le verra par la suite, l'évolution de x_1, \dots, x_n détermine celle de x_0 . En introduisant les variables conjuguées $y_j = m_j \dot{x}_j$, (appelées moments) le système devient hamiltonien :

$$\dot{x}_j = \partial_{y_j} H, \quad \dot{y}_j = -\partial_{x_j} H, \quad 0 \leq j \leq n$$

avec $H = H_{(1+n)\text{bp}}$ la fonction hamiltonienne du problème à $1 + n$ corps

$$H_{(1+n)\text{bp}} = \sum_{0 \leq j \leq n} \frac{\|y_j\|^2}{2m_j} - \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|x_j - x_i\|}$$

qui est une fonction bien définie sur l'espace cotangent $T^*U \simeq U \times \mathbb{R}^{3(1+n)}$ (espace des phases), où U est l'ouvert de $\mathbb{R}^{3(1+n)}$ définie par les relations de non-collision $x_j \neq x_i$ pour $j \neq i$ (espace des configurations). En toute généralité on a donc un système hamiltonien à $3(1 + n)$ degrés de liberté, ce qui correspond à un champ de vecteurs dans l'espace des phases de dimension $6(1 + n)$. Heureusement, le système possède 10 intégrales premières. Ce sont :

- le hamiltonien $H_{(1+n)\text{bp}}$;
- les 3 composantes du moment linéaire total

$$Y = \sum_{0 \leq j \leq n} y_j$$

- les 3 composantes du moment cinétique total

$$C = \sum_{0 \leq j \leq n} x_j \times y_j \in \mathbb{R}^3$$

qui est somme des produits vectoriels $C_j = x_j \times y_j \in \mathbb{R}^3$;

- les 3 composantes du centre de masse

$$\frac{1}{M} \sum_{0 \leq j \leq n} m_j x_j, \quad M = \sum_{0 \leq j \leq n} m_j.$$

Dans les trois premiers cas, l'existence de ces intégrales premières est naturellement liée à des symétries particulières des équations : l'invariance par l'action de \mathbb{R} par translation dans le temps pour $H_{(1+n)\text{bp}}$, par l'action de \mathbb{R}^3 par translation dans l'espace pour Y (invariance par translations) et par l'action du groupe orthogonal $SO(3, \mathbb{R})$ pour C (invariance par rotations). De ces 10 intégrales premières on peut en extraire 5 qui

sont indépendantes (dans le sens où leurs différentielles sont en tout point linéairement indépendantes). On obtient donc un système hamiltonien « réduit » à $3(1+n) - 5 = 3n - 2$ degrés de liberté. Ceci est largement suffisant pour intégrer le problème à 2 corps, mais pas pour 3 corps.

1.1. Le problème à 2 corps

On considère ici le cas $n = 1$, et on effectue le changement de variable linéaire symplectique (vis-à-vis de la forme symplectique canonique) suivant :

$$\begin{cases} q_0 = x_0 \\ q_1 = x_1 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = y_0 + y_1 = Y \\ p_1 = y_1. \end{cases}$$

L'invariance par translation implique que p_0 est constante, et en fixant le centre de masse, on se ramène au cas où $q_0 = p_0 = 0$. L'espace des phases réduit a donc pour coordonnées $(q_1, p_1) = (q, p)$ et on obtient ainsi l'équation de Kepler :

$$\ddot{q} = M \frac{q}{\|q\|^3}$$

où $M = m_0 + m_1$ est la masse totale. Cette dernière équation se représente par le hamiltonien F_{Kep} défini sur l'espace des phases $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \simeq (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ avec

$$F_{\text{Kep}} = \frac{\|p\|^2}{2m} - \frac{mM}{\|q\|}$$

où $m = m_0 m_1 / M$ est la masse réduite. Le problème à 2 corps se ramène donc au problème à 1 centre, également appelé problème de Kepler : on cherche à déterminer l'évolution d'un corps fictif de position q et de masse m en interaction avec un corps fixe à l'origine de masse M . Les solutions du problème de Kepler sont bien connues depuis longtemps (elles étaient connues avant même les équations). Pour une énergie négative $F_{\text{Kep}} < 0$ et un moment cinétique non-nul $C = q \times p \neq 0$, les trajectoires sont des ellipses, dont l'origine est un des foyers (première loi de Kepler), contenues dans le plan orthogonal à C (l'invariance de C implique directement la deuxième loi de Kepler, qui stipule que l'aire balayée par le vecteur $q(t)$ est proportionnelle à t). On ne considérera pas le cas des énergies nulles ou positives, pour lesquelles les trajectoires sont respectivement paraboliques ou hyperboliques. Des coordonnées symplectiques adaptées à ces trajectoires elliptiques, introduites par Delaunay, sont les suivantes :

$$(q, p) = (l, g, \theta, L, G, \Theta) \in T^*\mathbb{T}^3 \simeq \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$$

où :

- l est l'anomalie moyenne ;
- $L = m\sqrt{Ma}$, a étant le demi grand axe de l'ellipse ;
- g est l'argument du péricentre ;
- $G = L\sqrt{1-e} = \|C\|$ est la norme du moment cinétique C , e étant l'excentricité de l'ellipse ;
- θ est la longitude du nœud ;

- $\Theta = G \cos i$ est la composante verticale du moment cinétique C , i désignant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport au plan de référence $z = 0$. Une description des angles est contenue dans la figure 1.

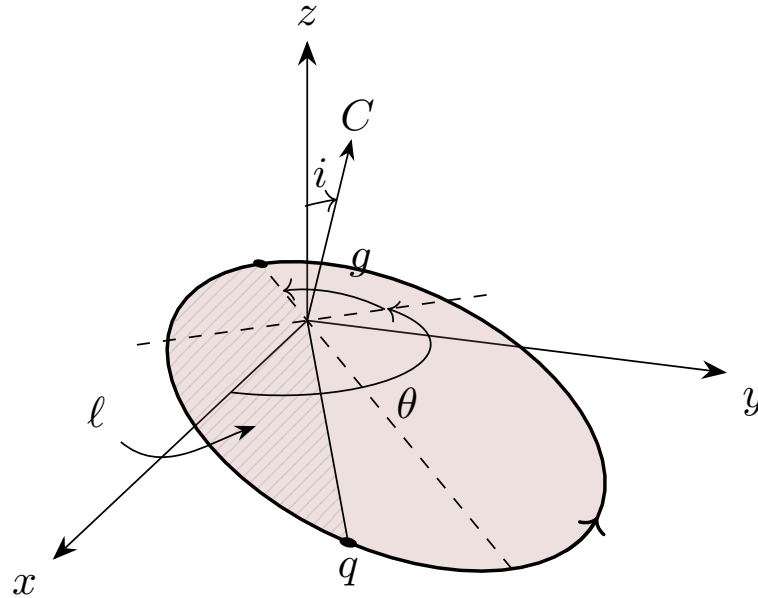


FIGURE 1. Ellipse képlérienne

Dans ces coordonnées, le hamiltonien s'écrit simplement de la manière suivante :

$$F_{\text{Kep}} = -\frac{m^3 M^2}{2L^2}.$$

Le fait que F_{Kep} ne dépende pas des angles (l, g, θ) (ce qui implique que les variables conjuguées L, G, Θ sont constantes) traduit le fait que les variables de Delaunay sont des variables « angle-action » ; le fait qu'il ne dépende pas des actions G, Θ (ce qui implique que les variables g, θ sont également constantes) montre la (double) dégénérescence du problème de Kepler, qui possède plus d'intégrables premières que nécessaire (5 au lieu de 3). L'évolution de l'anomalie moyenne, la seule variable non-constante, s'obtient trivialement :

$$l(t) = l(0) + tn, \quad n := \frac{\partial F_{\text{Kep}}}{\partial L} = \frac{m^3 M^2}{L^3} = \frac{\sqrt{M}}{a^{3/2}}$$

et l'on en déduit facilement la troisième et dernière loi de Kepler (le carré de la période est proportionnelle au cube du demi grand axe). Il est important de remarquer que les variables de Delaunay ne sont pas définies pour les ellipses planaires ($i = 0$) ou circulaires ($e = 0$) ; en effet, $T^*\mathbb{T}^3$ n'est pas difféomorphe à $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Lorsque l'on s'intéresse au voisinage des mouvements planaires et/ou circulaires (ce qui sera souvent le cas dans la suite), il est alors plus commode d'utiliser les coordonnées symplectiques de Poincaré

$$(l, g, \theta, L, G, \Theta) = (\lambda, \xi, \chi, \Lambda, \eta, \nu) \in \mathbb{T}^*(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{T} \times \mathbb{R}^5$$

qui se définissent de la manière suivante. On commence par le changement de variables linéaire symplectique :

$$\begin{cases} \lambda = l + g + \theta \\ h = -g - \theta \\ \zeta = -\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \Lambda = L \\ H = L - G \\ Z = G - \Theta \end{cases}$$

et on introduit les couples $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\chi, v) \in \mathbb{R}^2$ comme des variables cartésiennes associées aux variables polaires symplectiques $(h, H) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ et $(\zeta, Z) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{2H} \cos h \\ \chi = \sqrt{2Z} \cos \zeta \end{cases} \quad \begin{cases} \eta = \sqrt{2H} \sin h \\ v = \sqrt{2Z} \sin \zeta. \end{cases}$$

1.2. Le problème à plus de 3 corps : régime planétaire

Pour $1 + n \geq 3$ corps, le problème est en général considéré comme analytiquement « non-intégrable » (il n'y a malheureusement que peu de résultats explicites). Cependant, dans certaines situations, il est proche d'être intégrable, ce qui est le cas lorsque les masses m_1, \dots, m_n des n planètes sont beaucoup plus petites que la masse m_0 du corps 0 : c'est ce qu'on appelle le régime planétaire, que l'on peut donc considérer comme une modélisation du système solaire. Pour simplifier, on va se limiter au cas de 3 corps, mais l'extension au cas d'un nombre quelconque de corps est immédiate.

On considère un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et des masses positives

$$m_0 = \widetilde{m}_0, \quad m_1 = \varepsilon \widetilde{m}_1, \quad m_2 = \varepsilon \widetilde{m}_2$$

où les \widetilde{m}_j sont indépendants de ε . Soit $H_{3\text{bp}}^\varepsilon$ le hamiltonien associé au problème planétaire ; une façon de voir qu'il est proche d'être intégrable consiste à utiliser les coordonnées symplectiques héliocentriques de Poincaré, qui sont une généralisation immédiate du changement de variable linéaire utilisé pour la réduction des translations du problème à 2 corps. En introduisant

$$\begin{cases} q_0 = x_0 \\ q_1 = x_1 - x_0 \\ q_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = y_0 + y_1 + y_2 = Y \\ p_1 = y_1 \\ p_2 = y_2 \end{cases}$$

et respectivement les masses totales et réduites

$$\overline{M}_1 := m_0 + m_1, \quad \overline{M}_2 := m_0 + m_2, \quad \overline{m}_1 := \frac{m_0 m_1}{\overline{M}_1}, \quad \overline{m}_2 := \frac{m_0 m_2}{\overline{M}_2}$$

on se ramène à $q_0 = p_0 = 0$ et le hamiltonien s'écrit

$$H_{3\text{bp}}^\varepsilon = \left(\sum_{1 \leq j \leq 2} \frac{\|p_j\|^2}{2\overline{m}_j} - \frac{\overline{m}_j \overline{M}_j}{\|q_j\|} \right) + \left(\frac{p_1 \cdot p_2}{m_0} + \frac{m_2 m_1}{\|q_2 - q_1\|} \right) := F_{\text{Kep}}^\varepsilon + F_{\text{per}}^\varepsilon.$$

La première partie de ce hamiltonien, que l'on note $F_{\text{Kep}}^\varepsilon$, correspond à la somme de deux problèmes de Kepler indépendants, modélisant l'évolution des corps fictifs q_1 et q_2 de masse d'ordre ε , autour du centre fixe $q_0 = 0$, en ne tenant pas compte des interactions

entre les 2 corps; ce hamiltonien est évidemment intégrable. La seconde partie du hamiltonien, que l'on note $F_{\text{per}}^\varepsilon$ pour « fonction perturbatrice », restaure l'interaction entre les deux corps. Il reste à voir que $F_{\text{Kep}}^\varepsilon$ domine $F_{\text{per}}^\varepsilon$: en se rappelant que $m_0 \sim 1$ et $m_j \sim \varepsilon$, on a immédiatement $\overline{M}_j \sim 1$, $\overline{m}_j \sim \varepsilon$, $p_j \sim \varepsilon$ de sorte que, si l'on se restreint à un domaine D « d'ordre 1 » de l'espace des phases où l'on impose une version uniforme des conditions

$$\|q_1\| \sim 1, \quad \|q_2\| \sim 1, \quad \|q_2 - q_1\| \sim 1$$

pour éviter les collisions, on obtient

$$F_{\text{Kep}}^\varepsilon \sim \varepsilon, \quad F_{\text{per}}^\varepsilon \sim \varepsilon^2.$$

Donc $F_{\text{per}}^\varepsilon$ est bien une perturbation de $F_{\text{Kep}}^\varepsilon$. Notons que ce domaine de non-collision D peut également se caractériser à l'aide des éléments elliptiques des deux corps, à travers des conditions (toujours uniforme) de type

$$\sqrt{a_1} \sim 1, \quad 0 < \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} < 1, \quad 0 < e_1, e_2 < 1.$$

où l'on a préféré utiliser les racines carrées des demi grands axes, car ce sont ces quantités qui sont proportionnelles aux actions L_j . Remarquons enfin que la limite est singulière en ε dans le sens où $F_{\text{Kep}}^\varepsilon$ et $F_{\text{per}}^\varepsilon$ (et donc $H_{\text{3bp}}^\varepsilon$) tendent vers zéro avec ε . Néanmoins, le hamiltonien « remis à l'échelle » $\tilde{H}_{\text{3bp}}^\varepsilon := H_{\text{3bp}}^\varepsilon/\varepsilon$ a lui une limite régulière, et les orbites de $H_{\text{3bp}}^\varepsilon$ se déduisent de celles de $\tilde{H}_{\text{3bp}}^\varepsilon$ par un simple changement d'échelle de taille ε , soit dans le temps $\tilde{t} := t/\varepsilon$, soit dans les variables d'action $\tilde{L}_j = L_j/\varepsilon \sim \sqrt{a_j}$ qui sont d'ordre 1. Comme on le verra par la suite, le caractère perturbatif du régime planétaire va se révéler crucial pour obtenir des résultats mathématiques non triviaux; un des défauts de ces résultats sera de devoir supposer ε extrêmement petit, beaucoup plus petit que les rapports de masses de problèmes réalistes en mécanique céleste.

Un premier résultat dans cette direction est le théorème de stabilité de Laplace–Lagrange. Dans les variables de Delaunay

$$(q_j, p_j) = (l_j, g_j, \theta_j, L_j, G_j, \Theta_j) \quad 1 \leq j \leq 2$$

la partie képlérienne ne dépend que des actions L_1, L_2 :

$$F_{\text{Kep}}^\varepsilon = - \sum_{1 \leq j \leq 2} \frac{\overline{m}_j^3 \overline{M}_j^2}{2L_j^2}, \quad L_j = \overline{m}_j \sqrt{\overline{M}_j a_j},$$

tandis que $F_{\text{Pert}}^\varepsilon$ est une fonction (implicite) de toutes les variables, qui est un $O(\varepsilon^2)$ sur un domaine D approprié. Il est courant de dire que les variables d'actions L_j sont « non dégénérées » (et les angles conjugués l_j « rapides ») car elles apparaissent dans la partie principale $F_{\text{Kep}}^\varepsilon$, par opposition aux autres variables d'actions (qui dépendent en plus des excentricités et inclinaisons) qualifiées de « dégénérées » (les angles associés sont « lents »). On définit la partie séculaire comme la moyenne de $F_{\text{per}}^\varepsilon$ par rapport aux

angles rapides l_1, l_2 :

$$F_{\text{sec}}^\varepsilon := \int_{\mathbb{T}^2} F_{\text{per}}^\varepsilon dl_1 dl_2 := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} F_{\text{per}}^\varepsilon dl_1 dl_2$$

et le hamiltonien séculaire est alors

$$H_{\text{sec}}^\varepsilon := F_{\text{Kep}}^\varepsilon + F_{\text{sec}}^\varepsilon.$$

Puisque $H_{\text{sec}}^\varepsilon$ ne dépend pas des angles l_j , les variables d'actions L_j sont encore des intégrales premières pour $H_{\text{sec}}^\varepsilon$ et il s'ensuit que les demi grands axes a_j restent constants : c'est une formulation moderne du (premier) théorème de stabilité de Laplace–Lagrange. Il se trouve que le hamiltonien séculaire est une meilleure approximation de $H_{3\text{bp}}^\varepsilon$ que la seule partie képlérienne au sens suivant : dans l'ouvert de l'espace des phases où les mouvements moyens

$$n_j := \frac{\partial F_{\text{Kep}}^\varepsilon}{\partial L_j} = \frac{\bar{m}_j^3 \bar{M}_j^2}{L_j^3}$$

sont suffisamment loin des résonances (dans le sens où n_1/n_2 est suffisamment loin des rationnels de petit dénominateur), on peut transformer $\tilde{H}_{3\text{bp}}^\varepsilon = \tilde{F}_{\text{Kep}}^\varepsilon + \tilde{F}_{\text{sec}}^\varepsilon$, par un changement de variables symplectique (dont la distance à l'identité est un $O(\varepsilon)$), à un hamiltonien de la forme $\tilde{H}_{\text{sec}}^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. On remplace ainsi l'approximation képlérienne, intégrable mais dégénérée, par cette approximation séculaire, en général non intégrable mais potentiellement non dégénérée ; ceci sera le point de départ de divers résultats mathématiques de stabilité, mais également d'instabilité. Il est important de noter ici que ni l'approximation képlérienne ni l'approximation séculaire ne fournissent *a priori* des résultats de stabilité en temps longs pour la variation des actions L_j , et donc des demi grands axes a_j ; en effet, rien n'empêche les excentricités e_j d'avoir de fortes variations (dans un sous-intervalle $]0, 1[$) en un temps court d'ordre 1 menant à des orbites proches d'une collision (si e_j s'approche trop du bord supérieur) et donc à une sortie du domaine D (où l'on contrôle effectivement la taille de la perturbation). En revanche, on a bien un résultat conditionnel de stabilité : pour le hamiltonien $\tilde{H}_{\text{sec}}^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ (et donc pour le hamiltonien $\tilde{H}_{3\text{bp}}^\varepsilon$ loin des résonances) on a

$$|\tilde{L}_j(t) - \tilde{L}_j(0)| \sim |a_j(t) - a_j(0)| \lesssim \varepsilon, \quad \forall |t| \lesssim 1/\varepsilon$$

sous la condition que les excentricités restent loin de 1 pendant cet intervalle de temps.

1.3. Le problème à plus de 3 corps : régime hiérarchique

Le régime planétaire est le modèle qui a été le plus largement étudié ; le point de départ des travaux de Clarke, Fejoz et Guardia est de considérer un autre régime, dit lunaire ou hiérarchique, qui lui aussi présente un caractère perturbatif : en se limitant à 3 corps pour le moment, il s'agit de considérer la position de la deuxième planète x_2 comme étant très éloignée de celles des deux premiers corps x_0 et x_1 . Puisque la force d'interaction entre deux corps est inversement proportionnelle au carré de leur distance, il est intuitivement clair qu'en première approximation on retrouve encore une partie képlérienne, néanmoins cela sera bien plus subtil à mettre en évidence mathématiquement.

En particulier il va être ici beaucoup plus utile d'utiliser les coordonnées symplectiques de Jacobi, une variante des coordonnées héliocentriques, pour effectuer la réduction des translations. On écrit (en utilisant abusivement les mêmes notations que précédemment)

$$\begin{cases} q_0 = x_0 \\ q_1 = x_1 - x_0 \\ q_2 = x_2 - \sigma_1 x_1 - \sigma_0 x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = y_0 + y_1 + y_2 = Y \\ p_1 = y_1 + \sigma_2 y_2 \\ p_2 = y_2 \end{cases}$$

avec

$$\sigma_0 := \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \sigma_1 := \frac{m_1}{m_0 + m_1}$$

et le hamiltonien devient

$$H_{3\text{bp}} = \left(\sum_{1 \leq j \leq 2} \frac{\|p_j\|^2}{2\mu_j} - \frac{\mu_j M_j}{\|q_j\|} \right) + \left(\frac{\mu_2 M_2}{\|q_2\|} + \frac{m_2 m_0}{\|q_2 + \sigma_1 q_1\|} + \frac{m_2 m_1}{\|q_2 - \sigma_0 q_1\|} \right) := F_{\text{Kep}} + F_{\text{Pert}}$$

avec les masses totales et réduites

$$M_j = \sum_{i=0}^j m_i, \quad \mu_j^{-1} = M_{j-1}^{-1} + m_j^{-1}.$$

Remarquons que l'on a encore (abusivement) noté le hamiltonien $H_{3\text{bp}}$ (qui ne dépend ici d'aucun petit paramètre) comme somme d'une fonction képlérienne F_{Kep} et d'une fonction perturbatrice F_{per} ; F_{Kep} est encore une somme de deux problèmes de Kepler indépendants (associés aux masses totales et réduites M_j et μ_j d'ordre 1), mais F_{per} est maintenant de nature différente, de par le fait que nous avons utilisé ici les coordonnées de Jacobi et non les coordonnées héliocentriques. Pour décrire ce régime hiérarchique et établir le caractère perturbatif du hamiltonien, on peut montrer que pour $\|q_1\|/\|q_2\| < 1$, la fonction F_{per} s'écrit comme une série convergente

$$F_{\text{per}} = -\frac{\mu_1 m_2}{\|q_2\|} \sum_{n \geq 2} \sigma_n P_n(\zeta) \left(\frac{\|q_1\|}{\|q_2\|} \right)^n$$

où $\sigma_n := \sigma_0^{n-1} + (-1)^n \sigma_1^{n-1}$, P_n est le n -ème polynôme de Legendre et ζ l'angle entre q_1 et q_2 . On introduit alors un petit paramètre $\varepsilon_* > 0$, et en restriction à un domaine de non-collision D_{ε_*} défini par une version uniforme des conditions

$$\|q_1\| \sim 1, \quad \|q_2\| \sim \varepsilon_*^{-2},$$

on obtient

$$F_{\text{Kep}} \sim 1, \quad F_{\text{Pert}} \sim \varepsilon_*^6.$$

Le domaine D_{ε_*} se caractérise également à l'aide des éléments elliptiques de la manière suivante :

$$\sqrt{a_1} \sim 1, \quad \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} \sim \varepsilon_*, \quad 0 < e_1, e_2 < 1.$$

Dans ce régime hiérarchique les fréquences képlériennes vérifient

$$n_1 \sim \frac{1}{L_1^3} \sim \frac{1}{a_1^{3/2}} \sim 1, \quad n_2 \sim \frac{1}{L_2^3} \sim \frac{1}{a_2^{3/2}} \sim \varepsilon_*^3$$

et on voit apparaître ce qu'on appellera un système multi-échelle : la fréquence de la première planète est de taille 1, elle domine celle de la deuxième planète qui est de taille ε_*^3 , qui elle-même domine la perturbation de taille ε_*^6 . Cette structure aura une importance considérable dans la suite. Notons que contrairement au régime planétaire, où l'on introduit ε dans l'espace des paramètres (masses), ce qui conduit à considérer le hamiltonien $H_{3\text{bp}}^\varepsilon$ sur un certain domaine D d'ordre 1 où le rapport des demi grands axes a_1/a_2 reste à distance bornée de 0, le régime hiérarchique introduit un petit paramètre ε_* dans l'espace des phases et revient à considérer la restriction du hamiltonien $H_{3\text{bp}}$ sur un domaine D_{ε_*} où a_1/a_2 est d'ordre ε_*^2 . Il sera souvent beaucoup plus pratique de travailler dans un domaine de l'espace des phases où les actions sont d'ordre 1 ; c'est ce qu'on fait pour le régime planétaire lorsqu'on considère $\tilde{H}_{3\text{bp}}^\varepsilon$ muni des actions $\tilde{L}_j = L_j/\varepsilon \sim \sqrt{a_j} \sim 1$, et pour le régime hiérarchique, l'étude de la restriction de $H_{3\text{bp}}$ sur D_{ε_*} se ramène à l'étude d'un hamiltonien $\tilde{H}_{3\text{bp}}^{\varepsilon_*}$ sur le domaine $\tilde{D} = D$ si l'on définit les actions $\tilde{L}_1 \sim 1$, $\tilde{L}_2 \sim 1$ par

$$L_1 = \tilde{L}_1, \quad L_2 = \frac{1}{\varepsilon_*} + \tilde{L}_2.$$

De par le caractère multi-échelle de ce régime, on est automatiquement suffisamment loin des résonances pour ε_* suffisamment petit. Ainsi, le théorème de stabilité de Laplace–Lagrange est valable sur D_{ε_*} .

2. Théorie KAN (Kolmogorov–Arnold–Nekhoroshev)

Dans cette section nous allons énoncer les résultats fondamentaux de Kolmogorov (1954), Arnold (1964) (qui était un étudiant de Kolmogorov) et Nekhoroshev (1977) (qui était un étudiant d'Arnold) qui se complètent de façon naturelle, et que l'on qualifie donc de théorie KAN (par analogie à la théorie KAM, dont l'étude se concentre sur les améliorations et les applications du théorème de préservation des tores invariants de Kolmogorov). Ces résultats sont des aboutissements de travaux fondateurs de Poincaré (1892), et s'inscrivent dans le cadre général de la théorie des perturbations des systèmes hamiltoniens intégrables en coordonnées angle-action gouvernés par un hamiltonien de la forme

$$H_\varepsilon(\varphi, I) = h(I) + \varepsilon f_\varepsilon(\varphi, I)$$

où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \mathbb{T}^d$ sont les variables d'angle (on considère H_ε comme étant une fonction 2π -périodique par rapport à chaque φ_j), $I = (I_1, \dots, I_d) \in B \subseteq \mathbb{R}^d$ les variables d'action (B est un ouvert) et $\varepsilon \geq 0$ est un petit paramètre. C'est ce que Poincaré (1892) appelle le « problème général de la Dynamique » : on s'intéressera en particulier à la stabilité des variables d'actions $I(t)$ ce qui, pour les problèmes de mécanique céleste qui nous intéressent ici, se traduit par la stabilité des éléments elliptiques (plus précisément des demi grands axes). On va se limiter au cas de fonctions analytiques en φ et I ; il est cependant important de noter que pour le problème planétaire, on a également

analyticité en ε . Pour garantir le caractère perturbatif, on va supposer que sur le domaine $D = \mathbb{T}^d \times B$, des normes analytiques adéquates de h et f_ε sont majorées uniformément en ε , ce que nous notons

$$h \lesssim 1, \quad f_\varepsilon \lesssim 1.$$

Pour $\varepsilon = 0$, les équations de Hamilton s'intègrent immédiatement ; les variables d'action sont constantes et le mouvement des angles est un flot de translation

$$I(t) = I_0, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + t\omega, \quad \omega_0 := \nabla h(I_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Les solutions qui vérifient cette propriété, modulo un changement de variable homotope à l'identité, sont dites quasi-périodiques de vecteur fréquence $\omega_0 \in \Omega = \nabla h(B) \subseteq \mathbb{R}^d$ (la condition d'être homotope à l'identité permet de bien définir le vecteur fréquence ; la dimension de ce vecteur, ici d , sera le nombre de fréquences). Géométriquement, l'espace des phases $\mathbb{T}^d \times B$ se décompose en tores invariants $T_{I_0} = \mathbb{T}^d \times \{I = I_0\}$ pour $I_0 \in B$. La théorie KAN va nous fournir des informations importantes sur le comportement de ces solutions lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit.

2.1. Théorèmes abstraits

Le premier théorème fondamental est le théorème de préservation de tores invariants de Kolmogorov (1954).

THÉORÈME 2.1 (Kolmogorov). — *Soit $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ non dégénéré, c'est-à-dire que le déterminant de sa matrice Hessienne $\nabla^2 h(I_0)$ est non nul, uniformément en $I_0 \in B$. Alors pour tout ε suffisamment petit, il existe une partie $K_\varepsilon \subset \mathbb{T}^d \times B$ non vide invariante par H_ε formée de solutions quasi-périodiques à d fréquences. De plus, si B est borné, la mesure de Lebesgue de son complémentaire $(\mathbb{T}^d \times B) \setminus K_\varepsilon$ est d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$.*

Une version géométrique et un peu plus précise du théorème de Kolmogorov nous donne que

$$K_\varepsilon = \bigcup_{\omega_0 \in \Omega_\varepsilon} \Phi_{\omega_0, \varepsilon}(T_{I_0})$$

où Ω_ε est un ensemble fermé (totalement discontinu) défini par la condition que $\omega_0 = \nabla h(I_0)$ vérifie une certaine condition arithmétique (condition diophantienne de constante $\gamma \sim \sqrt{\varepsilon}$), et $\Phi_{\omega_0, \varepsilon}$ est un plongement (lagrangien mais non-exact) du tore T_{I_0} dans l'espace des phases $\mathbb{T}^d \times B$ (qui tend vers le plongement trivial lorsque ε tend vers zéro) dont l'image est invariante par H_ε et qui conjugue la dynamique restreinte au flot linéaire de fréquence ω_0 . Autrement dit, beaucoup de tores T_{I_0} invariants et quasi-périodiques pour $H_0 = h$ persistent en des tores invariants et quasi-périodiques, de même fréquence, pour H_ε , en étant seulement légèrement déformés. Une définition précise de Ω_ε (que nous ne donnerons pas ici) implique directement que son complémentaire dans Ω (borné si B l'est) est d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$, mais cela n'implique pas directement qu'il en est de même pour le complémentaire de K_ε dans l'espace des phases ; ce dernier point (énoncé par Kolmogorov) a en fait été démontré plus tard par Arnold (1963a). Dans ce même article, Arnold démontre également une variante importante du théorème

de Kolmogorov : en supposant h iso-énergétiquement non dégénéré dans le sens où le déterminant de la matrice de taille $d + 1$

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 h(I_0) & {}^t \nabla h(I_0) \\ \nabla h(I_0) & 0 \end{pmatrix}$$

est (uniformément) non nul, alors les conclusions du théorème de Kolmogorov restent vraies pour une partie A_ε , qui est de grande mesure dans l'espace des phases mais également en restriction à chaque niveau d'énergie (en revanche, les fréquences des tores perturbés ne sont que proportionnelles à celles des tores non perturbés). Dans les deux cas, la distance entre tores perturbés et non perturbés est (en projection dans l'espace des actions) d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$, et donc la plupart des solutions vérifient

$$\|I(t) - I(0)\| \lesssim \sqrt{\varepsilon}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas iso-énergétiquement non dégénéré pour $d = 2$, les tores invariants de dimension 2 disconnectent chaque niveau d'énergie de dimension 3 (pour la même raison que les courbes invariantes homotopiquement non triviales de l'anneau $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ le disconnectent), et de par la mesure des tores invariants dans les niveaux d'énergie, l'estimée de stabilité précédente est vraie pour toute solution. Pour $d \geq 3$, cette dernière propriété n'est plus vraie, comme l'a démontré Arnold (1964), ce qui constitue le deuxième résultat fondamental.

THÉORÈME 2.2 (Arnold). — *Pour $d = 3$, il existe un hamiltonien analytique $H_\varepsilon = h + \varepsilon f_\varepsilon$ avec h iso-énergétiquement non dégénéré, qui possède une solution $(\varphi(t), I(t))$ et un temps $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ telle que*

$$\|I(\tau) - I(0)\| \geq 1$$

pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

On donnera plus de détails sur le mécanisme sous-jacent à l'exemple d'Arnold, car il jouera un rôle crucial dans les résultats de Clarke, Fejoz et Guardia. Notons néanmoins que l'orbite (en fait l'ouvert d'orbites) construite par Arnold est globalement définie et vérifie

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|I(t) - I(0)\| = +\infty,$$

et qu'un énoncé plus précis (qu'on peut obtenir à l'aide d'un argument plus raffiné que celui qu'utilise Arnold) nous donne la propriété suivante : pour tout ε suffisamment petit, pour tous $N \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^*$ et $\delta > 0$, il existe des temps $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_N > 0$ et une solution $(\varphi(t), I(t)) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), I_0(t), I_1(t), I_2(t))$ qui vérifie

$$\|I_2(\tau_j) - a_j\| \leq \delta, \quad \forall 1 \leq j \leq N.$$

On dira que la dynamique (dans l'espace des actions I_2) peut être prescrite « de manière aléatoire ». Le théorème énoncé ci-dessus est alors une simple conséquence, si l'on choisit $a_N - a_0 > 1$ et δ suffisamment petit ; pour plus de simplicité, on se limitera à cet énoncé de type variation d'ordre 1 dans les actions. Le terme « diffusion d'Arnold » a été

introduit par Chirikov (1979) ; on est cependant très loin d’avoir de telles propriétés stochastiques, de même qu’on est loin d’avoir des résultats d’instabilité topologique plus fort de type transitivité dans des niveaux d’énergies (lorsque ceux-ci sont compacts, et pour un hamiltonien non dégénéré) comme conjecturé dans (Herman, 1998). Notons que nécessairement le temps d’instabilité $\tau(\varepsilon)$ est au moins de l’ordre ε^{-1} ; on verra sur l’exemple d’Arnold que ce temps est en fait exponentiellement grand en $\varepsilon^{-1/2}$, ce qui laisse la possibilité aux variables d’action de rester stables pendant un intervalle de temps du même ordre. Le troisième et dernier théorème fondamental, dû à Nekhoroshev (1977), montre que c’est effectivement le cas en général.

THÉORÈME 2.3 (Nekhoroshev). — *Pour un hamiltonien h « générique », il existe des constantes $0 < \alpha, \beta < 1/2$, $c > 0$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, toutes les solutions $(\varphi(t), I(t))$ vérifient*

$$\|I(t) - I(0)\| \lesssim \varepsilon^\alpha, \quad |t| \leq \exp(-c/\varepsilon^\beta).$$

On ne donnera pas plus de détails sur la condition précise que l’on requiert sur h , ni en quel sens elle est générique, car cela nous demanderait trop de temps (et malheureusement ces notions ne sont pas encore bien comprises). On se contentera de dire qu’une classe de hamiltoniens intégrables vérifiant le théorème de Nekhoroshev est formée des hamiltoniens (dits quasi-convexes) qui n’ont pas de points critiques ($\nabla h(I_0) \neq 0$ pour tout $I_0 \in B$) et tels que la restriction de la forme quadratique $\nabla^2 h(I_0)$ à l’hyperplan orthogonal à $\nabla h(I_0)$ est définie positive (ou négative) ; dans ce cas on sait que l’on peut choisir $\alpha = \beta = 1/2d$ (Lochak, 1992 ; Lochak et Neishtadt, 1992 ; Pöschel, 1993). Cette propriété sera satisfaite sur l’exemple d’Arnold, et aussi pour les fonctions strictement convexes (ou concaves) loin de leur minimum (ou maximum).

2.2. Applications en mécanique céleste

Revenons maintenant aux hamiltoniens explicites issus de la mécanique céleste, à savoir $H_{3\text{bp}}^\varepsilon$ (tout ce que l’on va dire s’applique de la même manière à $H_{(1+n)\text{bp}}^\varepsilon$, $n \geq 2$), mais également le hamiltonien $H_{3\text{bp}}$ dans les coordonnées de Jacobi restreint au domaine D_{ε^*} . Le hamiltonien $H_{3\text{bp}}^\varepsilon$, ou plus précisément sa version remise à l’échelle $\tilde{H}_{3\text{bp}}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} H_{3\text{bp}}^\varepsilon$, rentre dans le cadre du problème général de la dynamique, à un détail mineur près : la partie képlérienne $F_{\text{Kep}}^\varepsilon$, même divisée par ε , dépend encore de ε à travers les paramètres $\bar{M}_j = m_0 + \varepsilon \tilde{m}_j$; cependant, ces paramètres sont d’ordre 1 et ne poseront aucune difficulté. Il en est de même du hamiltonien $H_{3\text{bp}}$ sur D_{ε^*} , si l’on translate les actions et que l’on considère $H_{3\text{bp}}^{\varepsilon^*}$ sur un domaine de taille 1. Dans un cas comme dans l’autre, on a $d = 6$ après réduction des translations ($d = 3n$ pour $1 + n$ corps).

En revanche, un problème majeur vient de la dégénérescence du problème de Kepler : écrit dans les coordonnées angle-action de Delaunay, la partie intégrable ne dépend pas de toutes les actions $I = (L_j, G_j, \Theta_j)$ mais uniquement des L_j (seulement 2 actions sur 6, et n actions sur $3n$ pour $1 + n$ corps). Les théorèmes de Kolmogorov et de Nekhoroshev ne s’appliquent donc pas directement, car les conditions de non-dégénérescence ne sont

pas satisfaites sur le domaine D . Néanmoins, et c’est ici une des richesses des problèmes de mécanique céleste, on va pouvoir se localiser dans une certaine partie de D (un certain régime) pour pouvoir éliminer cette dégénérescence, comme l’a montré Arnold (1963b) pour l’existence de tores invariants (en raison de l’invariance par rotation, on aura au maximum 4 fréquences et non pas 6).

THÉORÈME 2.4 (Arnold). — *Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une partie $K \subseteq D$ de mesure positive qui est invariante par $H_{3\text{bp}}^\varepsilon$ et formée de solutions quasi-périodiques à 4 fréquences.*

Notons que bien que K soit de mesure positive, elle est en réalité contenue dans une toute petite partie de D . En effet, les mouvements képlériens co-planaires et circulaires s’identifient à une singularité elliptique du hamiltonien séculaire (c’est le second théorème de stabilité de Laplace–Lagrange), et si on note $E \subseteq D$ un petit voisinage de cette singularité, alors $K \subseteq E$. La preuve de ce théorème requiert diverses extensions du théorème abstrait de Kolmogorov (Théorème 2.1), en particulier au voisinage d’un point fixe elliptique non dégénéré (Arnold, 1961). Néanmoins, la preuve que donne Arnold de la non-dégénérescence du point fixe elliptique (ou plus exactement de sa forme normale de Birkhoff (1927)) pour le problème planétaire n’est complète que pour 3 corps dans le plan. La première preuve complète pour 3 corps dans l’espace est due à Robutel (1995), grâce à l’utilisation de coordonnées de Jacobi qui permettent une réduction complète des rotations (« élimination des nœuds »). Pour un nombre quelconque de corps, la première preuve est due à Fejoz (2004) (basé sur des résultats non publiés d’Herman) qui emploie une notion plus faible de non-dégénérescence suffisante pour une réduction partielle des rotations ; une preuve alternative, due à Chierchia et Pinzari (2011), utilise des coordonnées de Deprit (qu’on emploiera également plus tard) pour la réduction complète. Le théorème d’Arnold reste vrai pour le problème hiérarchique, comme l’a démontré Fejoz (2016) : il existe une partie $K_{\varepsilon_*} \subseteq D_{\varepsilon_*}$, de mesure positive dans un voisinage elliptique E_{ε_*} , invariante par $H_{3\text{bp}}$ et formée de solutions quasi-périodiques à 4 fréquences.

En ce qui concerne le théorème de Nekhoroshev, les choses sont relativement plus simples. La partie képlérienne est trivialement dégénérée par rapport aux variables (G_j, Θ_j) (elle n’en dépend tout simplement pas) mais sur le domaine D elle est (strictement, uniformément) quasi-convexe par rapport aux variables L_j ; une extension immédiate du théorème abstrait de Nekhoroshev (Théorème 2.3) montre de la stabilité exponentielle des variables \tilde{L}_j (et donc des demi grands axes a_j) pour peu que l’on soit capable de confiner les variables dégénérées (G_j, Θ_j) à rester dans l’espace des phases. Sur le domaine elliptique E considéré précédemment, la préservation de la norme du moment cinétique total $\|C\| = \|C_1 + C_2\|$ permet un tel confinement via le contrôle des excentricités, et l’on obtient donc une version du théorème de Nekhoroshev pour le problème planétaire, qui est également contenue dans (Nekhoroshev, 1977).

THÉORÈME 2.5 (Nekhoroshev). — *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, toute orbite de $\tilde{H}_{3\text{bp}}^\varepsilon$ dont la condition initiale appartient à E vérifie*

$$|\tilde{L}_j(t) - \tilde{L}_j(0)| \lesssim \varepsilon^\alpha, \quad |t| \lesssim \exp(-c/\varepsilon^\beta), \quad \alpha = \beta = 1/12.$$

Une preuve plus précise et beaucoup plus quantitative du théorème de Nekhoroshev est due à Niederman (1996). Notons que seules les variables d'action rapides (liées aux demi grands axes) ont une variation qui tend vers 0 avec ε ; les autres variables d'action dégénérées (liées aux excentricités et inclinaisons) ont une variation uniquement contrôlée par la taille du domaine E , qui est petite mais d'ordre 1 par rapport à ε . En réalité, le théorème de Nekhoroshev montre la chose suivante : pour une orbite donnée, soit $T \in]0, +\infty]$ le « temps de sortie » des variables dégénérées du domaine D , alors

$$|\tilde{L}_j(t) - \tilde{L}_j(0)| \lesssim \varepsilon^\alpha, \quad \forall |t| < \min\{T, C \exp(-1/\varepsilon^\beta)\}, \quad C > 0$$

et pour toute condition initiale dans E , la préservation du moment cinétique total garantit que $T > C \exp(-1/\varepsilon^\beta)$. Bien que cela n'ait pas été démontré, on s'attend à ce qu'une version du théorème de Nekhoroshev reste vraie dans le régime hiérarchique (avec une preuve même plus simple) : le fait que sur D_{ε_*} les fréquences képlériennes soient respectivement d'ordre 1 et ε_*^3 entraîne que le domaine est automatiquement non-résonant, la convexité n'est alors plus nécessaire (d'ailleurs, elle est ici non uniforme et donc non utilisable) et on peut montrer (puisque la perturbation est de taille ε_*^6) que pour toute orbite dont la condition initiale appartient à E_{ε_*} , on a pour les variables $\tilde{L}_j \sim 1$ de $\tilde{H}_{3\text{bp}}^{\varepsilon_*}$:

$$|\tilde{L}_j(t) - \tilde{L}_j(0)| \lesssim \varepsilon_*^3, \quad \forall |t| \lesssim \exp(-c/\varepsilon_*^3), \quad c > 0$$

ce qui implique, puisque $L_1(t) \sim 1$ et $L_2(t) \sim 1/\varepsilon_*$:

$$|a_1(t) - a_1(0)| \lesssim \varepsilon_*^3, \quad |a_2(t) - a_2(0)| \lesssim \varepsilon_*, \quad \forall |t| \lesssim \exp(-c/\varepsilon_*^3).$$

Comme précédemment, on a bien un résultat de stabilité conditionnelle pour toutes les orbites.

3. Travaux de Clarke, Fejoz et Guardia

Il reste donc à trouver un analogue du résultat d'instabilité d'Arnold (Théorème 2.2) pour le problème planétaire ou pour le problème hiérarchique. C'est ce qu'affirment les auteurs dans une série de travaux : les résultats principaux se trouvent dans (Clarke, Fejoz et Guardia, 2025) et (Clarke, Fejoz et Guardia, 2024) ; l'article (Clarke, Fejoz et Guardia, 2023) contient un résultat technique utile aux preuves, tandis que (Fejoz et Guardia, 2016) est un résultat préliminaire important des deux derniers auteurs.

Arnold conjecture que son mécanisme est applicable au problème planétaire ; néanmoins une des difficultés considérables à appliquer directement son mécanisme vient du fait que le hamiltonien H_ε qu'il construit n'est pas analytique par rapport au petit paramètre lorsque celui tend vers 0, contrairement au problème planétaire (ceci vient

du problème du « splitting » exponentiellement petit comme on le verra plus tard). Cette difficulté est même insurmontable si l'on suit la philosophie de l'exemple d'Arnold qui consiste à se localiser proche d'une résonance (képlérienne) simple. En considérant d'abord le régime hiérarchique mais pour 4 corps, Clarke, Fejoz et Guardia arrivent à contourner cette difficulté en exploitant de manière cruciale l'existence de variables dégénérées ; ces variables sont une obstruction évidente aux résultats de stabilité (KAM, Nekhoroshev), il semble donc naturel qu'elles puissent être utiles pour obtenir des résultats d'instabilité. Un résultat d'instabilité pour le problème planétaire se déduira facilement du régime hiérarchique ; mais c'est aussi une idée importante des auteurs que de considérer ce régime hiérarchique, où la structure multi-échelle permettra de construire des formes normales avec une simplicité étonnante.

Pour énoncer leur résultat principal de manière un peu plus précise, on introduit un second petit paramètre $\mu_* > 0$ et on considère le hamiltonien du problème à 4 corps H_{4bp} , écrit dans les coordonnées de Jacobi, sur le domaine D_{ε_*, μ_*} caractérisé par

$$L_1 \sim \sqrt{a_1} \sim 1, \quad \frac{L_1}{L_2} \sim \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} \sim \varepsilon_*, \quad \frac{L_2}{L_3} \sim \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3}} \sim \mu_*, \quad 0 < e_1, e_2, e_3 < 1.$$

On peut montrer que le théorème de Nekhoroshev se généralise dans un régime, qu'on peut qualifier d'*a priori* stable dans la direction de L_3 , défini par

$$\varepsilon_* \ll \mu_* \ll \varepsilon_*^{1/3}$$

le temps de stabilité étant alors exponentiellement grand par rapport à l'inverse du plus grand des petits paramètres $(\varepsilon_*/\mu_*)^3 \ll 1$ et $(\mu_*^3/\varepsilon_*) \ll 1$ (on n'énoncera pas plus précisément ce résultat). Ceci ne concerne que les actions non dégénérées L_1, L_2, L_3 ; pour les actions dégénérées liées aux excentricités et inclinaisons, comme G_2 qui contrôle l'excentricité de la planète 2, la dynamique est « *a priori* instable » et peut se développer en un temps polynomial. De plus, dans le régime *a priori* instable, à savoir

$$\mu_* \ll \varepsilon_*,$$

la variable d'action L_3 devient en réalité dégénérée et il n'y a plus aucune obstruction à son instabilité en un temps rapide. Le résultat principal de Clarke, Fejoz et Guardia (2024) affirme que L_3 (ainsi que d'autres variables dégénérées) est effectivement instable dans ce régime.

THÉORÈME 3.1 (Clarke–Fejoz–Guardia). — *Soit $m_0 \neq m_1$. Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < 1$, $p > 2$, tout $\varepsilon_* > 0$ suffisamment petit et $\mu_* = O(\varepsilon_*^p)$, il existe une orbite de H_{4bp} sur D_{ε_*, μ_*} et un temps $\tau = \tau(\mu)$ tels que*

$$|a_3(\tau) - a_3(0)| \geq \frac{1}{\varepsilon_* \mu_*} \quad |e_2(0)| \leq \delta, \quad |e_2(\tau)| \geq 1 - \delta, \quad 0 < \tau \lesssim \frac{1}{\mu_*^\beta}.$$

Je précise tout de suite que je n'ai malheureusement compris la preuve de ce résultat que si l'on remplace H_{4bp} par un hamiltonien séculaire H_{sec} , qui est une approximation de H_{4bp} à un ordre arbitrairement grand mais fini ; la différence majeure est que pour le hamiltonien séculaire, L_1 et L_2 sont des intégrales premières et il a donc deux degrés de

liberté en moins. C'est cette version simplifiée du théorème que j'expliquerai dans la suite (voir le Théorème 5.4). Le passage du hamiltonien séculaire H_{sec} au hamiltonien $H_{4\text{bp}}$ est plus subtil, et il me semble que l'argument présenté dans (Clarke, Fejoz et Guardia, 2024) contient une erreur, ainsi des détails supplémentaires seraient nécessaires.

Dans le régime *a priori* stable $\varepsilon_* \ll \mu_*$, le demi grand axe a_3 ne peut pas être instable en un temps polynomial mais cela reste possible pour e_2 , et c'est le résultat contenu dans (Clarke, Fejoz et Guardia, 2025).

THÉORÈME 3.2 (Clarke–Fejoz–Guardia). — *Soient $m_0 \neq m_1$ et $m_0 + m_1 \neq m_2$. Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < 1$, tout $\varepsilon_* > 0$ suffisamment petit et $\varepsilon_* \ll \mu_* \varepsilon_*^{5/6}$, il existe une orbite de $H_{4\text{bp}}$ sur D_{ε_*, μ_*} et un temps $\tau = \tau(\mu)$ tels que*

$$|e_2(0)| \leq \delta, \quad |e_2(\tau)| \geq 1 - \delta, \quad 0 < \tau \lesssim \frac{1}{\mu_*^\beta}.$$

Malheureusement, il me semble que la description du hamiltonien séculaire de Clarke, Fejoz et Guardia (2025) n'est pas justifiée (il est bien probable que le hamiltonien séculaire ait, dans ce régime, une expression plus compliquée que celle donnée par les auteurs), et je n'ai donc pas pu vérifier la preuve de ce théorème (comme précédemment, uniquement pour le hamiltonien séculaire associé).

Dans les deux cas, notons qu'il est remarquable que la planète 2 puisse passer d'une excentricité presque nulle à une excentricité proche de 1 ; en particulier l'orbite construite s'approche du bord du domaine de non-collision avec une précision arbitraire. De plus, il y a également instabilité de l'inclinaison entre les planètes 2 et 3, qui peut avoir de grandes variations. En revanche, par construction de l'orbite, l'excentricité de la planète 1 restera proche de 0, tandis que l'inclinaison entre les planètes 1 et 2 restera proche de $\pi/4$ (comme on le verra, ces conditions caractérisent un voisinage d'une singularité hyperbolique pour un hamiltonien séculaire). De plus, le demi grand axe a_1 de la planète 1 restera stable par conservation de l'énergie, tandis que l'excentricité de la planète 3 sera confiné par la préservation du moment cinétique total.

Revenons maintenant au régime planétaire, à savoir au hamiltonien $H_{4\text{bp}}^\varepsilon$. Le hamiltonien remis à l'échelle $\tilde{H}_{4\text{bp}}^\varepsilon$ muni de ses actions \tilde{I}_j d'ordre 1 (en ε) équivaut, par changement de temps $\tilde{t} = t/\varepsilon$, au hamiltonien « doublement remis à l'échelle » $\tilde{\tilde{H}}_{4\text{bp}}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \tilde{H}_{4\text{bp}}^\varepsilon$. Ce dernier a une partie séculaire, et donc des fréquences séculaires, d'ordre 1, tandis que sa partie képlérienne est grande d'ordre $1/\varepsilon$. En particulier, la fréquence képlérienne de L_3 est de l'ordre $\varepsilon^{-1} L_3^3$ et pour conserver le régime *a priori* instable où cette dernière est considérée comme séculaire, on doit imposer $\varepsilon^{-1} L_3^3 \sim 1$ et donc $L_3 \sim \varepsilon^{-1/3}$ tend vers l'infini lorsque ε tend vers 0. De plus, la condition $\mu_* = O(\varepsilon^p)$ pour $p > 2$ fixé implique $L_3 \sim L_2^{p+1}$ et donc $L_2 \sim \varepsilon^{-\frac{1}{3(p+1)}}$: on doit donc considérer un domaine $D_{\varepsilon, \varepsilon_*, p}$ défini par ($p > 2$ étant fixé)

$$L_1 \sim 1, \quad L_2 \sim \frac{1}{\varepsilon_*} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3(p+1)}}, \quad L_3 \sim \left(\frac{1}{\varepsilon_*} \right)^{p+1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad 0 < e_1, e_2, e_3 < 1$$

et sur ce domaine on a un analogue au Théorème 3.1 pour $H_{4\text{bp}}^\varepsilon$ (on pourrait, de même, énoncer un analogue au Théorème 3.2 pour $H_{4\text{bp}}^\varepsilon$).

THÉORÈME 3.3 (Clarke–Fejoz–Guardia). — *Soient*

$$0 < \varepsilon \leq 1, \quad p > 2, \quad \tilde{m}_0 = m_0 \neq m_1 = \varepsilon \tilde{m}_1.$$

Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < 1$ et tout $\varepsilon_ > 0$ suffisamment petit, il existe une orbite de $H_{4\text{bp}}^\varepsilon$ sur $D_{\varepsilon, \varepsilon_*, p}$ et un temps $\tau = \tau(\varepsilon, \varepsilon_*)$ tels que*

$$|a_3(\tau) - a_3(0)| \geq \frac{1}{\varepsilon_* \mu_*} \quad |e_2(0)| \leq \delta, \quad |e_2(\tau)| \geq 1 - \delta, \quad 0 < \tau \lesssim \frac{1}{(\varepsilon \varepsilon_*)^\beta}.$$

Ce théorème ne contredit pas le théorème de Nekhoroshev : sur un tel domaine $D_{\varepsilon, \varepsilon_*, p}$ la convexité dégénère et l’argument de la preuve n’est plus valide. En fait, le théorème de Nekhoroshev montre que le théorème précédent ne pourrait être valide sur un domaine de non-collision indépendant de ε .

4. Exemples de Poincaré et Arnold

4.1. Exemple de Poincaré : instabilité locale

On se donne deux petits paramètres $\varepsilon, \mu \geq 0$ et on considère le hamiltonien à 1 degré de liberté dépendant du temps $P_{\varepsilon, \mu} : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$P_{\varepsilon, \mu}(t, \varphi_1, I_1) := \frac{1}{2} I_1^2 + \varepsilon (\cos \varphi_1 - 1)(1 + \mu \cos t)$$

et qui s’écrit encore

$$P_{\varepsilon, \mu}(t, \varphi_1, I_1) = P_{\varepsilon, 0}(\varphi_1, I_1) + \varepsilon \mu F(t, \varphi_1), \quad F(t, \varphi_1) := (\cos \varphi_1 - 1) \cos t.$$

Il s’agit (aux notations et au choix explicite de F près) d’un hamiltonien introduit par Poincaré. Notons tout de suite que le petit paramètre « physique » est ici $\sqrt{\varepsilon}$ (où ε correspondrait à un rapport de masse dans le problème RCP) et que l’introduction d’un second paramètre « artificiel » μ sera une façon de contourner une difficulté essentielle qui va apparaître. Il sera parfois utile de considérer une version autonome de ce hamiltonien, qui consiste à noter $t = \varphi_0$ et à introduire une action $I_0 \in \mathbb{R}$ conjuguée de la manière suivante

$$\tilde{P}_{\varepsilon, \mu}(\varphi_0, \varphi_1, I_0, I_1) := I_0 + P_{\varepsilon, \mu}(\varphi_0, \varphi_1, I_1) = I_0 + \frac{1}{2} I_1^2 + \varepsilon (\cos \varphi_1 - 1)(1 + \mu \cos \varphi_0).$$

Inversement, $P_{\varepsilon, \mu}$ se déduit de $\tilde{P}_{\varepsilon, \mu}$ par le procédé (ici trivial) de réduction iso-énergétique. Il sera également utile, comme le fait Poincaré lui-même (dans un contexte plus général), de passer d’un champ de vecteurs en dimension 3 (ou en dimension 4 pour la version autonome) à un difféomorphisme en dimension 2 de la manière suivante : on se fixe $t_* \in \mathbb{T}$ et on introduit une section (de Poincaré)

$$\Sigma_* := \{t = t_*\} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

et on définit une application

$$\hat{P}_{\varepsilon,\mu} : \Sigma_* \simeq \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_* \simeq \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

comme application de premier retour sur Σ_* du flot (non autonome) associé à $P_{\varepsilon,\mu}$. Autrement dit, on suit le flot du temps t^* au temps $t_* + 2\pi$. Pour plus de détails sur la description de l'exemple qui suit, nous renvoyons à Sauzin (2001).

Commençons par le cas $\mu = 0$. Puisque

$$P_{\varepsilon,0}(t, \varphi_1, I_1) = P_{\varepsilon,0}(\varphi_1, I_1) = \frac{1}{2}I_1^2 + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1)$$

est un pendule avec un potentiel de taille ε , l'origine $(\varphi_1, I_1) = (0, 0)$, que l'on note O , est une singularité hyperbolique pour le champ hamiltonien associé à $P_{\varepsilon,0}$, et donc un point fixe hyperbolique pour le difféomorphisme $\hat{P}_{\varepsilon,0}$, de valeurs propres $e^{\pm 2\pi\sqrt{\varepsilon}}$. Pour le champ hamiltonien autonome associé à $\tilde{P}_{\varepsilon,0}$,

$$\mathbb{T} \times \{I_0 = e\} \times O, \quad e \in \mathbb{R}$$

est une orbite périodique contenue dans le niveau d'énergie e , dont les exposants de Floquet (ou Liapounov) sont $\{0, \pm\sqrt{\varepsilon}\}$; en prenant l'union de ces orbites périodiques lorsque e varie dans un intervalle, on obtient un anneau normalement hyperbolique. Dans la suite on notera $\mathbb{T} \times O$ l'orbite périodique d'énergie nulle $e = 0$, que l'on considère comme une orbite périodique hyperbolique pour le champ non autonome associé à $P_{\varepsilon,0}$. Les variétés stable et instable de O , qu'on note $W_\varepsilon^+(O)$ et $W_\varepsilon^-(O)$ et qui correspondent respectivement aux orbites de $\hat{P}_{\varepsilon,0}$ qui convergent (exponentiellement vite) vers O dans le futur (respectivement dans le passé), coïncident avec la séparatrice du pendule, que l'on peut écrire (en choisissant la branche supérieure) comme le graphe

$$W_\varepsilon^+(O) = W_\varepsilon^-(O) = \{(\varphi_1, I_1 = \nabla S_\varepsilon(\varphi_1)), \varphi_1 \in \mathbb{T}\}$$

associé à la fonction (dite génératrice)

$$S_\varepsilon(\varphi_1) := 4\sqrt{\varepsilon}(1 - \cos \varphi_1/2);$$

en effet, il suffit de résoudre l'équation (ici triviale) de Hamilton–Jacobi

$$P_{\varepsilon,0}(\varphi_1, \partial_{\varphi_1} S_\varepsilon(\varphi_1)) = 0$$

qui caractérise le fait que la séparatrice du pendule a la même énergie (nulle) que O . Pour le champ de vecteurs, les variétés stable et instable de l'orbite périodique hyperbolique $\mathbb{T} \times O$ sont trivialement données par $W_\varepsilon^\pm(\mathbb{T} \times O) = \mathbb{T} \times W_\varepsilon^\pm(O)$.

Passons maintenant au cas où $\mu > 0$. Puisque $P_{\varepsilon,\mu}$ apparaît comme une perturbation de $P_{\varepsilon,0}$ de taille $\varepsilon\mu$, on a que pour μ suffisamment petit (indépendamment de ε), $P_{\varepsilon,\mu}$ (respectivement $\hat{P}_{\varepsilon,\mu}$) possède une orbite périodique hyperbolique (respectivement un point fixe hyperbolique) proche de $\mathbb{T} \times O$ (respectivement O) : vu le choix de la perturbation, elle reste ici trivialement en l'origine. On pourrait alors appliquer le théorème de la variété stable et trouver des variétés stable et instable locales, μ -proche de $W_\varepsilon^\pm(O)$ au voisinage de l'origine. Néanmoins, puisque l'on perturbe un système intégrable pour lequel on connaît globalement (et explicitement) ses variétés stables et instables, on va

pouvoir obtenir des informations concernant les variétés stables et instables $W_{\varepsilon,\mu}^{\pm}(O)$ pas uniquement au voisinage de l'origine, mais sur des domaines aussi grands que l'on veut, suffisamment grands pour pouvoir étudier l'existence d'orbites homoclines, c'est-à-dire des intersections entre $W_{\varepsilon,\mu}^{+}(O)$ et $W_{\varepsilon,\mu}^{-}(O)$; c'est ici un avantage essentiel du cadre presque intégrable, pour lequel il sera plus commode de travailler avec les champs hamiltoniens. Plus précisément, on peut montrer que si l'on se fixe $0 < \delta < \pi$ (aussi petit que l'on veut) et qu'on note $K^{+} = [\delta, 2\pi]$, $K^{-} = [0, 2\pi - \delta]$, alors pour μ suffisamment petit, il existe des fonctions analytiques

$$S_{\varepsilon,\mu}^{\pm} : \mathbb{T} \times K^{\pm} \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que, pour le champ de vecteurs, on ait l'inclusion

$$W_{\varepsilon,\mu}^{\pm}(\mathbb{T} \times O) \supseteq \{(t, \varphi_1, I_1 = \partial_{\varphi_1} S_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1)) \mid t \in \mathbb{T}, \varphi_1 \in K^{\pm}\}.$$

Poincaré construit ces applications comme solution de l'équation de Hamilton–Jacobi

$$\partial_t S_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1) + P_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1, \partial_{\varphi_1} S_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1)) = 0 \iff \tilde{P}_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1, \nabla S_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1)) = 0$$

en les développant en puissance de μ :

$$S_{\varepsilon,\mu}^{\pm} = S_{\varepsilon,0} + \sum_{n \geq 1} S_{\varepsilon}^{\pm,n} \mu^n.$$

Il reste à étudier l'intersection des variétés invariantes, sur le domaine $K = K^{+} \cap K^{-}$ (qui contient un intervalle centré autour d'une valeur choisie $\varphi_1 = \pi$) où elles se représentent par des graphes. Pour ce faire, Poincaré revient au difféomorphisme $\hat{P}_{\varepsilon,\mu}$ et montre, par un argument géométrique basé sur la préservation de l'aire en dimension 2, que les variétés stable et instable $W_{\varepsilon,\mu}^{\pm}(O)$ se coupent nécessairement en $\varphi_1 = \pi$. Une version plus moderne de ce résultat (se basant sur le caractère hamiltonien, et qui peut se généraliser en toute dimension dans ce contexte perturbatif) est de montrer que les points critiques $t = t_*$ de la fonction périodique

$$t \in \mathbb{T} \rightarrow S_{\varepsilon,\mu}^{+}(t, \pi) - S_{\varepsilon,\mu}^{-}(t, \pi) \in \mathbb{R}$$

qui existent nécessairement (on a toujours un maximum et un minimum), donnent, pour μ suffisamment petit, des points critiques $(t, \varphi_1) = (t_*, \pi)$ de la fonction

$$(t, \varphi_1) \in \mathbb{T} \times K \rightarrow S_{\varepsilon,\mu}^{+}(t, \varphi_1) - S_{\varepsilon,\mu}^{-}(t, \varphi_1) \in \mathbb{R}$$

et ainsi des intersections entre $W_{\varepsilon,\mu}^{+}(\mathbb{T} \times O)$ et $W_{\varepsilon,\mu}^{-}(\mathbb{T} \times O)$ (les variétés stables et instables sont, dans l'espace des phases du hamiltonien autonome $\tilde{P}_{\varepsilon,\mu}$, des sous-variétés lagrangiennes exactes μ -proches). Et c'est ici qu'intervient la fameuse erreur de Poincaré (qu'il corrigera lui-même plus tard) de considérer que les variétés stable et instable coïncident encore pour $\mu > 0$ suffisamment petit. En effet Poincaré montre que $S_{\varepsilon,\mu}^{\pm}$ peuvent également se développer en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ et que tous les termes du développement, hormis le terme d'ordre 1 donné par $S_{\varepsilon}(\varphi_1) := 4\sqrt{\varepsilon}(1 - \cos \varphi_1/2)$, sont identiquement nuls. Si les fonctions $S_{\varepsilon,\mu}^{\pm}$ étaient analytiques en $\sqrt{\varepsilon}$, alors on aurait bien $S_{\varepsilon,\mu}^{\pm} = S_{\varepsilon}$ pour tout $\mu > 0$ suffisamment petit. Or, s'il est vrai que le développement en série par rapport à μ est convergent, celui par rapport à $\sqrt{\varepsilon}$ est lui divergent. Il s'ensuit que la

« distance » entre $W_{\varepsilon,\mu}^+(O)$ et $W_{\varepsilon,\mu}^-(O)$ en un point d'intersection (que l'on peut définir à l'aide de la hessienne de la différence des fonctions génératrices) est plus petit que toute puissance de $\sqrt{\varepsilon}$: c'est ce que Poincaré appelle un « infiniment petit d'ordre infini ». Formellement, cette distance est au plus de l'ordre $\exp(-c/\sqrt{\varepsilon})$ pour $c > 0$: c'est le phénomène du splitting exponentiellement petit.

Pour contourner cette difficulté, on va donc essayer de choisir le paramètre artificiel $\mu = \mu(\varepsilon)$ comme une fonction exponentiellement petite en $\sqrt{\varepsilon}$, en utilisant ce qu'on appelle la méthode de Poincaré–Melnikov (on utilise ici le point de vue des fonctions génératrices, proche de Poincaré (1892) mais qui diffère de celui de Melnikov (1963)). Elle consiste à étudier le premier ordre en μ de la différence

$$S_{\varepsilon,\mu}^+ - S_{\varepsilon,\mu}^- = \mu\Delta_\varepsilon + O(\mu^2), \quad \Delta_\varepsilon(t, \varphi_1) := S_\varepsilon^{+,1}(t, \varphi_1) - S_\varepsilon^{-,1}(t, \varphi_1).$$

On peut alors montrer que ce terme $\Delta_\varepsilon(t, \varphi_1)$ s'obtient en évaluant le terme d'ordre μ de la perturbation, à savoir εF qui ici laisse le point fixe hyperbolique en l'origine, le long de la paramétrisation

$$s \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi_1(s-t), I_1(s-t)) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

de l'orbite homocline non-perturbée (pour le pendule $P_{\varepsilon,0}$) pour laquelle $(\varphi_1(0), I_1(0))$ et (φ_1, I_1) coïncident : on a donc

$$\Delta_\varepsilon(t, \varphi_1) = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varphi_1(s-t)) ds$$

l'intégrale étant (exponentiellement) convergente par hyperbolicité. Cette intégrale est généralement appelée le potentiel de Poincaré–Melnikov. Dans l'exemple qui nous intéresse, on a

$$F(t, \varphi_1) = (\cos \varphi_1 - 1) \cos t, \quad \varphi_1(s-t) = 4 \arctan(e^{\sqrt{\varepsilon}(s-t)} \tan(\varphi_1/4))$$

et pour $\varphi_1 = \pi$, le potentiel de Poincaré–Melnikov se calcule (après changement de variable) par la méthode des résidus et on trouve alors

$$\Delta_\varepsilon(t) := \Delta_\varepsilon(\pi, t) = \frac{2\pi \cos t}{\sinh(\pi/(2\sqrt{\varepsilon}))}.$$

Cette fonction a un point critique non dégénéré en $t = 0$ (c'est un maximum) ; pour qu'il en soit de même pour la fonction $S_{\varepsilon,\mu}^+ - S_{\varepsilon,\mu}^-$ on doit choisir μ suffisamment petit pour que

$$\mu\Delta_\varepsilon(t) = \mu \frac{2\pi \cos t}{\sinh(\pi/(2\sqrt{\varepsilon}))} \sim \mu e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon}}} \gg \mu^2,$$

ce qui est vrai si, pour un $c > \pi/2$, on choisit

$$\mu \leq \mu(\varepsilon) := e^{-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Pour de telles valeurs de μ , il existe t^* proche de 0 tel que $t \mapsto S_{\varepsilon,\mu}^+(t, \pi) - S_{\varepsilon,\mu}^-(t, \pi)$ possède un point critique non dégénéré, ce qui, comme précédemment, nous donne une intersection entre $W_{\varepsilon,\mu}^+(\mathbb{T} \times O)$ et $W_{\varepsilon,\mu}^-(\mathbb{T} \times O)$ qui de plus est transverse. Ainsi, $P_{\varepsilon,\mu(\varepsilon)}$ possède, pour tout ε suffisamment petit, une orbite homocline transverse.

4.2. Exemple d'Arnold : instabilité globale

On considère maintenant le hamiltonien à 2 degrés de liberté dépendant du temps $A_{\varepsilon,\mu} : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$A_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2) := \frac{1}{2}I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2 + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1)(1 + \mu \cos \varphi_2 + \mu \cos t)$$

et qui s'écrit encore

$$A_{\varepsilon,\mu}(t, \varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2) = P_\varepsilon(\varphi_1, I_1) + T(I_2) + \varepsilon\mu F(t, \varphi_1, \varphi_2)$$

avec

$$P_\varepsilon(\varphi_1, I_1) := \frac{1}{2}I_1^2 + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1), \quad T(I_2) := \frac{1}{2}I_2^2,$$

et

$$F(t, \varphi_1, \varphi_2) := (\cos \varphi_1 - 1)(\cos \varphi_2 + \cos t).$$

C'est, à un détail près, l'exemple considéré par Arnold (1964) (il utilise $\sin \varphi_2$ au lieu de $\cos \varphi_2$). Si l'on « supprime » les variables (φ_2, I_2) , c'est exactement l'exemple de Poincaré. Comme précédemment, on peut introduire une version autonome $\tilde{A}_{\varepsilon,\mu}$ à 3 degrés de liberté, et signalons tout de suite que le hamiltonien H_ε du théorème d'Arnold (Théorème 2.2) sera donné par

$$H_\varepsilon = \tilde{A}_{\varepsilon,\mu(\varepsilon)}, \quad \mu(\varepsilon) := e^{-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

et on voit immédiatement le défaut d'analyticité par rapport au petit paramètre : la fonction $\mu(\varepsilon)$ est le prototype de fonction lisse (et même Gevrey) mais qui n'est pas analytique en $\sqrt{\varepsilon}$ lorsque celui-ci tend vers zéro, une telle construction n'est donc pas directement applicable pour des systèmes réalistes (qui eux sont analytiques par rapport aux petits paramètres).

Pour expliquer le mécanisme d'Arnold, on va se limiter à la version discrète

$$\hat{A}_{\varepsilon,\mu} : \Sigma_* \simeq \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma_* \simeq \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$$

qui est un difféomorphisme symplectique en dimension 4 dans les variables $(\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2)$ (pour plus de détails, on renvoie à Bernard (2011) qui traite de la version continue). Pour $\mu = 0$, le système est intégrable et découplé, c'est un pendule dans les variables (φ_1, I_1) et un twist trivialement intégrable $T(I_2)$ dans les variables (φ_2, I_2) ; ainsi pour toute valeur $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{T}_a := \{(\varphi_1 = 0, \varphi_2 \in \mathbb{T}, I_1 = 0, I_2 = a)\}$$

est un cercle invariant par $\hat{A}_{\varepsilon,\mu}$ qui est partiellement hyperbolique : ses variétés stable et instable $W_\varepsilon^\pm(\mathbb{T}_a)$ sont de dimension 3, elles sont données par le produit du cercle par les séparatrices du pendule et donc coïncident. On peut également considérer (ce que ne faisait pas Arnold)

$$\Lambda = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{T}_a$$

qui est un anneau de dimension 2 (de variables (φ_2, I_2)) invariant et normalement hyperbolique. Maintenant, pour $\mu = \mu(\varepsilon)$, Arnold montre par la méthode de Poincaré–Melnikov que tout \mathbb{T}_a possède une orbite homocline transverse : le potentiel de Poincaré–Melnikov est maintenant une fonction de t , φ_2 et $I_2 = a$, qui est donné par

$$\Delta_\varepsilon(t, \varphi_2, I_2) = \frac{2\pi \cos t}{\sinh(\pi/(2\sqrt{\varepsilon}))} + \frac{2\pi I_2 \cos \varphi_2}{\sinh(\pi I_2/(2\sqrt{\varepsilon}))}.$$

Mais de plus, pour des valeurs a et a' telles que la distance $|a - a'|$ est suffisamment petite par rapport à $\mu(\varepsilon)$, il existe une connexion hétérocline transverse entre \mathbb{T}_a et $\mathbb{T}_{a'}$, à savoir une intersection transverse entre $W_{\varepsilon, \mu}^-(\mathbb{T}_a)$ (respectivement $W_{\varepsilon, \mu}^-(\mathbb{T}_{a'})$) et $W_{\varepsilon, \mu}^+(\mathbb{T}_{a'})$ (respectivement $W_{\varepsilon, \mu}^+(\mathbb{T}_a)$). Si maintenant on se donne $N \geq 1$ et une suite $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^*$, alors on pourra trouver une orbite hétérocline qui relie un petit voisinage de \mathbb{T}_{a_0} à un petit voisinage de \mathbb{T}_{a_1} , une autre orbite qui relie un petit voisinage de \mathbb{T}_{a_1} à un petit voisinage de \mathbb{T}_{a_2} , et ainsi de suite : on a donc une pseudo-orbite qui relie un petit voisinage de \mathbb{T}_{a_0} à un petit voisinage de \mathbb{T}_{a_N} , et il faut maintenant justifier l'existence d'une vraie orbite proche de cette pseudo-orbite par un lemme de « pistage » (« shadowing »). Arnold introduit alors une propriété « d'obstruction » pour un cercle \mathbb{T}_a et montre (des détails sont contenus dans (Arnold et Avez, 1967)) qu'elle est satisfaite si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: cette propriété d'obstruction pour des cercles partiellement hyperboliques étant un peu technique, on se contentera de dire qu'il s'agit d'une forme faible de ce qu'on appelle aujourd'hui le λ -lemme (ou lemme d'inclinaison) pour les points fixes hyperboliques (mais il est important de remarquer que ce λ -lemme, tout comme les théories partiellement hyperbolique ou normalement hyperbolique, sont postérieures à l'article d'Arnold). Une suite de cercles $\mathbb{T}_{a_0}, \mathbb{T}_{a_1}, \dots, \mathbb{T}_{a_N}$ munis de connexions hétéroclines transverses et qui vérifient tous cette propriété d'obstruction constitue ce qu'Arnold appelle une chaîne de transition, et une telle chaîne implique l'existence d'une orbite qui relie des voisinages des deux tores aux extrémités. Puisque l'on peut choisir la distance entre a_0 et a_N aussi grande que l'on veut indépendamment de ε , on obtient ainsi une orbite (et par conséquent un ouvert d'orbites) définie pour tout temps qui est non bornée dans la direction I_2 . On voit aisément que le temps d'instabilité, à savoir le temps nécessaire pour avoir une variation d'ordre 1, est au moins d'ordre $1/\mu(\varepsilon) \sim e^{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}}$: en effet, chaque excursion hétérocline (transition entre deux tores consécutifs le long de la chaîne) ne produit qu'une variation d'ordre au plus $\mu(\varepsilon)$ de l'action I_2 (que le temps d'instabilité soit toujours exponentiellement long, indépendamment de l'exemple particulier, sera une conséquence du théorème de Nekhoroshev).

L'exemple d'Arnold a donné lieu à une littérature abondante, et on va se contenter ici de seulement donner quelques développements importants en lien avec les travaux de Clarke, Fejoz et Guardia.

Premièrement, tout comme dans l'exemple de Poincaré, on voit que l'on a seulement pu contourner le problème de perturbation singulière où l'hyperbolicité, qui joue un rôle crucial, s'annule avec le petit paramètre ε donnant lieu au phénomène du splitting exponentiellement petit. On peut alors en fait supposer $\varepsilon = 1$ et considérer μ comme le

seul petit paramètre, c'est ce qu'on appelle, en suivant la terminologie de Chierchia et Gallavotti (1994), le cas « *a priori* instable » (par opposition au cas « *a priori* stable » ou l'hyperbolicité est d'ordre ε). La méthode de Poincaré–Melnikov montre que le splitting est alors d'ordre μ , et le temps d'instabilité est alors polynomial en μ^{-1} (on peut montrer que le temps optimal est en fait de l'ordre $\mu^{-1} \ln(\mu^{-1})$). Comme on l'a déjà expliqué, les travaux de Clarke, Fejoz et Guardia reposent sur la découverte que dans le régime hiérarchique, les variables dégénérées relèvent de ce cas *a priori* instable. On suppose donc $\varepsilon = 1$ dans la suite.

Ensuite, il est apparu (à travers différents travaux de différents auteurs et autrices) que l'objet géométrique central est en réalité l'anneau normalement hyperbolique Λ et non pas la famille \mathbb{T}_a de tores partiellement hyperbolique qu'il contient (on peut voir l'anneau comme étant la variété centrale de chacun des tores). L'exemple d'Arnold est ici doublement particulier : pour tout $\mu > 0$, non seulement l'anneau reste invariant, mais la dynamique restreinte sur l'anneau reste une application twist trivialement intégrable (associé au hamiltonien $T(I_2)$). Une perturbation générale n'aura aucune de ces deux propriétés. Néanmoins, la théorie des variétés normalement hyperboliques (Fenichel, 1971 ; Hirsch, Pugh et Shub, 1977) permet de montrer, pour toute perturbation de taille μ , l'existence d'un anneau relativement compact normalement hyperbolique Λ_μ qui est μ -proche de Λ . Notons que Λ_μ est alors seulement « faiblement invariant » dans le sens où le champ de vecteurs est tangent à l'anneau (mais les orbites peuvent « s'échapper par les bords » qui ne sont pas invariants). De plus, même si la dynamique initiale est analytique, l'anneau est en général seulement de différentiabilité finie (arbitrairement grande mais pour μ arbitrairement petit). Ces deux points n'engendrent cependant que des difficultés d'ordre technique. La dynamique sur Λ_μ n'est en général plus intégrable, mais proche d'être intégrable et on peut ainsi appliquer la théorie KAM pour trouver une famille de tores $\mathbb{T}_{a,\mu}$ partiellement hyperboliques contenus dans Λ_μ , mais seulement pour $a \in K_\mu$, où K_μ est une partie fermée de grande mesure de Lebesgue. Une application directe de la théorie KAM montre que la mesure du complémentaire de K_μ (dans une partie bornée) est d'ordre $\sqrt{\mu}$, et donc l'écart entre deux tores invariants peut être supérieur à l'écart des variétés invariantes, qui lui est d'ordre μ , et il n'est *a priori* pas clair de pouvoir réaliser des excursions hétéroclines comme dans l'exemple d'Arnold. En réalité, en tenant compte du fait que la dynamique restreinte est de dimension 2, une application plus précise de la théorie KAM montre que la mesure du complémentaire de K_μ est plus petite que n'importe quelle puissance de μ : c'est la stratégie utilisée par Delshams, de la Llave et Seara (2006) pour résoudre ce « large gap problem » (qui n'en est donc pas un).

L'utilisation de l'anneau normalement hyperbolique Λ_μ permet également d'analyser les excursions hétéroclines de manière plus globale à l'aide des intersections transverses (dans un sens fort que l'on ne précisera pas) entre les variétés stable et instable de l'anneau (qui elles même se décomposent en feuilles fortement stables et fortement instables). C'est dans ce contexte que des versions plus modernes du λ -lemme (plus fortes

que la propriété d'obstruction introduite par Arnold) sont apparues (voir Sabbagh, 2015, pour la version la plus récente), et permettent de justifier, par exemple sur l'exemple d'Arnold, qu'il existe des connexions hétéroclines entre les tores situés aux extrémités de la chaîne de transition. Cette propriété reste vraie si la dynamique restreinte sur l'anneau n'est plus un twist intégrable comme sur l'exemple d'Arnold, mais seulement un twist presque intégrable : c'est le phénomène de « transversalité-torsion » introduit par Cresson (2000) (une version topologique et plus générale se trouve dans (Gidea et de la Llave, 2006) sur laquelle se base (Clarke, Fejoz et Guardia, 2023)). De plus, si les variétés invariantes de Λ_μ s'intersectent transversalement (hors de Λ_μ) le long d'un anneau homocline Γ_μ , qui est de plus transverse aux laminations fortement stable et instable (on parle alors de transversalité forte), on a une dynamique symbolique fibrée (Shil'nikov, 1968) : la dynamique au voisinage de Λ_μ est semi-conjugue à un produit croisé

$$\Sigma \times \Lambda_\mu \ni (y, x) \mapsto (\sigma(y), f_y(x)) \in \Sigma \times \Lambda_\mu$$

au dessus du shift σ sur un alphabet $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ à deux symboles, que l'on peut approcher par un produit croisé localement constant, qui s'identifie à l'itération aléatoire de deux difféomorphismes f_0 et f_1 de l'anneau (c'est ce qu'on appelle aussi un système de fonctions itérées IFS). Dans le cas qui nous intéresse, ces applications seront exact-symplectiques et Moeckel (2002) a montré que si f_0 a de la torsion, alors génériquement sur f_1 les deux applications n'ont pas de courbes invariantes communes et l'IFS associé à f_0 et f_1 a une orbite instable (ce qui fournit une pseudo-orbite instable pour la dynamique initiale). Le point de vue dominant, car plus explicite, sur cette dynamique symbolique est celui de Delshams, de la Llave et Seara (2008) qui parle de dynamique interne pour f_0 et de dynamique externe pour f_1 . La dynamique interne n'est rien d'autre que la restriction de la dynamique sur l'anneau (faiblement) invariant : dans l'exemple d'Arnold on a simplement

$$f_0(\varphi_2, I_2) = (\varphi_2 + I_2, I_2).$$

La dynamique externe, f_1 , ou application « scattering » S , correspond aux excursions homoclines de l'anneau : étant donné $x_- \in \Lambda_\mu$, on suit la variété instable le long de la feuille fortement instable associée à x_- jusqu'à un point de l'anneau homocline $x \in \Gamma_\mu$, puis on revient sur Λ_μ en suivant la variété stable le long d'une feuille fortement stable associée à un point x_+ (voir la figure 2 pour une illustration, c'est ici qu'on a besoin d'une transversalité forte), et on définit alors $S(x_-) = x_+$ (il est important de noter que cette application n'est, en général, que localement définie). En réalité, on a autant d'anneaux homoclines et donc d'applications externes que de points critiques non dégénérés du potentiel de Poincaré–Melnikov (au moins deux). Dans l'exemple d'Arnold, on peut montrer que les applications externes sont de la forme

$$S_\mu(\varphi_2, I_2) = (\varphi_2 - \mu \partial_{I_2} \mathcal{L}(\varphi_2, I_2) + O(\mu^2), I_2 + \mu \partial_{\varphi_2} \mathcal{L}(\varphi_2, I_2) + O(\mu^2))$$

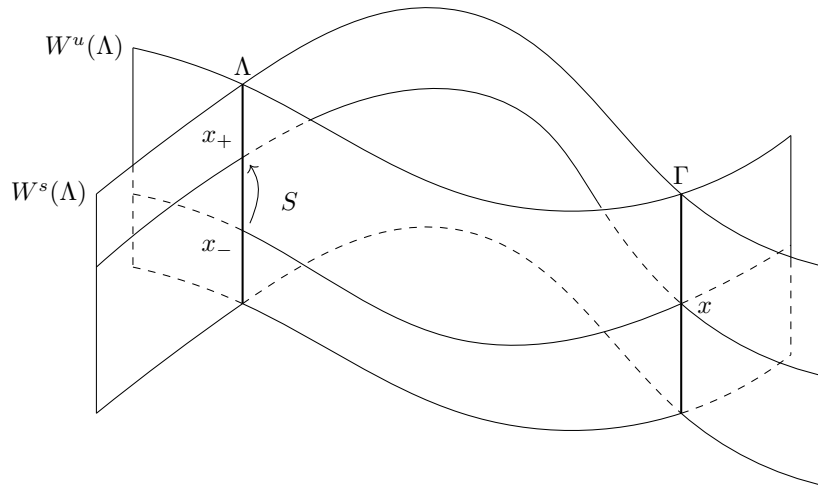


FIGURE 2. Application scattering

où la fonction \mathcal{L} est non triviale et se déduit du potentiel de Poincaré–Melnikov. En fait, on peut s’autoriser une dynamique interne presque-intégrable plus générale comme

$$f_0(\varphi_2, I_2) = (\varphi_2 + I_2 + O(\mu^k), I_2 + O(\mu^{k+1}))$$

voire même une torsion faible

$$f_0(\varphi_2, I_2) = (\varphi_2 + \mu^\tau I_2 + O(\mu^k), I_2 + O(\mu^{k+1}))$$

mais il faut alors que k soit suffisamment grand par rapport à l’exposant de torsion τ et l’exposant de transversalité de l’application externe (dans l’exemple ci-dessus ce dernier vaut 1) ; c’est essentiellement le résultat contenu dans (Clarke, Fejoz et Guardia, 2023).

5. Idées de la preuve

On va maintenant donner une idée de la preuve du Théorème 3.1 si l’on remplace le hamiltonien du problème à 4 corps par un hamiltonien séculaire.

Dans un premier temps, on expliquera le résultat de Fejoz et Guardia (2016), qui traite du problème à 3 corps $H_{3\text{bp}}$ dans le régime hiérarchique D_{ε_*} , et on verra en quoi le hamiltonien séculaire associé correspond à une version réaliste de l’exemple de Poincaré : après réduction des rotations, le hamiltonien séculaire a 2 degrés de liberté, on aura l’existence d’une orbite périodique hyperbolique (une dans chaque niveau d’énergie) et d’une orbite homocline transverse. Le caractère réaliste vient du fait que l’écart des variétés invariantes sera ici polynomial, et non pas exponentiel, en l’inverse du petit paramètre. Ceci est *a priori* possible car il s’agit du hamiltonien séculaire et donc des variables dégénérées ; que ce soit effectivement possible sera une conséquence de deux faits assez miraculeux. Cependant, comme dans l’exemple de Poincaré, il n’y pas

d'instabilité globale; ou dit autrement, on aura des homoclines transverses mais pas d'hétéroclines transverses.

Pour avoir de l'instabilité globale, il faut ajouter des dimensions, mais contrairement à Arnold qui ajoute seulement un degré de liberté à l'exemple de Poincaré, il faut ici ajouter une planète et donc 3 degrés de liberté supplémentaires. Dans un second temps on considère donc le problème à 4 corps $H_{4\text{bp}}$ dans le régime hiérarchique D_{ε_*, μ_*} , que l'on voit comme une perturbation du problème à trois corps; en mettant formellement $\mu_* = 0$, on retrouve $H_{3\text{bp}}$ dans le régime hiérarchique D_{ε_*} . Après réduction, le hamiltonien séculaire aura 5 degrés de liberté car la planète 3 est tellement loin que son action L_3 devient séculaire. Après réduction à un niveau d'énergie et section de Poincaré, on obtient un difféomorphisme symplectique en dimension 8, qui possède un anneau normalement hyperbolique de dimension 6 qui s'intersecte transversalement le long d'un anneau homocline de la même dimension. Une analyse détaillée de la dynamique interne et externe (rendue possible en particulier par l'existence de plusieurs échelles caractéristiques du régime hiérarchique) permet de mettre en évidence un phénomène de transversalité-torsion et donc l'existence d'orbites instables (on aura également une chaîne de transition au sens d'Arnold associé à des tores partiellement hyperbolique de dimension 3). Ceci justifiera l'instabilité du système séculaire.

5.1. Moyennisation multi-échelle

On commence par expliquer un résultat technique, qui est utilisé de manière essentielle à plusieurs reprises par les auteurs (bien que parfois de manière implicite) et qui justifie que pour un système à plusieurs échelles, les mouvements quasi-périodiques sont très bien approchés par des mouvements périodiques, ce qui va considérablement simplifier l'analyse (la construction de formes normales) à divers endroits de la preuve.

Soit $d \geq 1$ et ε un petit paramètre (l'extension à plusieurs petits paramètres est immédiate). On considère un hamiltonien $H_\varepsilon: \mathbb{T}^d \times B \rightarrow \mathbb{R}$, où $B \subseteq \mathbb{R}^d$, de la forme

$$H_\varepsilon(\varphi, I) = h_\varepsilon(I) + f_\varepsilon(\varphi, I)$$

avec

$$h_\varepsilon(I) = h_1(I_1) + \varepsilon h_2(I_1, I_2) + \cdots + \varepsilon^{d-1} h_d(I_1, I_2, \dots, I_d)$$

et

$$f_\varepsilon(\varphi, I) = \varepsilon^d f_d(\varphi, I) + O(\varepsilon^{d+1}).$$

On suppose toutes les fonctions analytiques en (φ, I) , formelles en ε et de plus

$$\partial_{I_1} h_1(I_1) \neq 0, \quad \partial_{I_2} h_2(I_1, I_2) \neq 0, \quad \dots \quad \partial_{I_d} h_d(I_1, I_2, \dots, I_d) \neq 0$$

uniformément en $I = (I_1, \dots, I_d) \in B$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (vis-à-vis des conditions ci-dessus), il existe un difféomorphisme exact symplectique $(\varphi, I) \mapsto \Phi_\varepsilon(\varphi, I)$, analytique en (φ, I) et formel en ε (la distance à l'identité est $O(\varepsilon^d)$) tel que

$$H_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon(\varphi, I) = \bar{h}_\varepsilon(I), \quad \bar{h}_\varepsilon(I) = h_\varepsilon(I) + \varepsilon^d \int_{\mathbb{T}^n} f_d(\varphi, I) d\varphi + O(\varepsilon^{d+1}).$$

Autrement dit, le hamiltonien H_ε possède une forme normale formelle intégrable. On peut bien sûr, et c'est ce qu'on fera systématiquement dans la suite, tronquer la forme normale à un ordre fini mais aussi grand que l'on veut pour avoir une forme normale polynomiale en ε modulo un reste arbitrairement petit. De plus, si H_ε est analytique en ε , un choix optimal de la troncature permet d'avoir une forme normale intégrable modulo un reste exponentiellement petit en ε^{-1} (la forme normale formelle, ainsi que la conjugaison formelle, sont en fait 1-Gevrey). Bien que ce résultat soit élémentaire, il est remarquable dans le sens où c'est, à notre connaissance, le seul résultat de forme normale formelle pour un système non linéaire sur un ouvert de l'espace des phases. Néanmoins, il faut remarquer que le système est très particulier : on est seulement en train de perturber (de manière hiérarchique) le système trivialement intégrable $h_1(I_1)$ à 1 degré de liberté et ce dernier ne possède que des orbites périodiques, ce qui explique pourquoi les approximations périodiques apparaissent de manière naturelle.

Pour conclure, mentionnons trois extensions immédiates de ce procédé de moyennisation, qui seront utilisées dans la suite :

- premièrement, on peut aisément considérer des perturbations $f_\varepsilon(\varphi, I, z)$ qui dépendent également de variables symplectiques dégénérées z (non présentes dans la partie intégrable), la forme normale dépend de ces variables dégénérées, vues comme de simples paramètres ;
- deuxièmement, il est possible de ne faire qu'une moyennisation partielle des j premiers angles $\varphi_1, \dots, \varphi_j$ pour $1 \leq j < d$; il s'agit d'un cas particulier du point précédent, qui consiste à considérer les autres variables $(\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_d, I_{j+1}, \dots, I_d) = z$ comme dégénérées, on a alors besoin que la perturbation soit d'ordre ε^j (la forme normale dépendant évidemment des $d - j$ derniers angles)
- enfin, dans le cas d'une moyennisation totale sans variables dégénérées, et uniquement dans ce cas-là, on peut s'autoriser une perturbation plus générale de la forme suivante :

$$f_\varepsilon(\varphi, I) = \varepsilon f_1(\varphi_1, I_1) + \varepsilon^2 f_2(\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2) + \dots + \varepsilon^d f_d(\varphi, I) + O(\varepsilon^{d+1}).$$

Autrement dit, il suffit que chaque angle φ_j apparaisse à une échelle plus petite que son action conjuguée I_j (mais il peut apparaître à une échelle plus grande que d'autres actions).

5.2. Instabilité locale dans un problème à 3 corps

Revenons au problème à 3 corps dans le régime hiérarchique. Au lieu d'utiliser les variables de Delaunay

$$(l_j, g_j, \theta_j, L_j, G_j, \Theta_j) \quad 1 \leq j \leq 2$$

pour les planètes 1 et 2, nous allons utiliser les variables de Deprit

$$(l_j, \gamma_j, \psi_j, L_j, \Gamma_j, \Psi_j) \quad 1 \leq j \leq 2$$

où $\Gamma_j = G_j = \|C_j\|$ est la norme du moment cinétique de la planète j , et (en notant k_3 le dernier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3)

$$\Psi_1 = \|C_1 + C_2\| = \|C\|, \quad \Psi_2 = C \cdot k_3.$$

Autrement dit, Ψ_1 est la norme du moment cinétique total et Ψ_2 sa composante verticale. L'avantage de ces coordonnées est de permettre la réduction complète des rotations, puisque Ψ_1 et Ψ_2 sont des intégrales premières en involution (l'inconvénient est que la définition des angles γ_j et ψ_j , que l'on ne donnera pas, est assez obscure). Le hamiltonien $H_{3\text{bp}}$ a alors 4 degrés de liberté dans les coordonnées $(l_1, l_2, \gamma_1, \gamma_2, L_1, L_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ (Ψ_1 et Ψ_2 sont des paramètres), et après moyennisation des angles l_1 et l_2 , le hamiltonien séculaire F_{sec} a 2 degrés de liberté dans les coordonnées $(\gamma_1, \gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$. On introduit des actions $\tilde{L}_1 \sim 1, \tilde{L}_2 \sim 1$ par

$$L_1 = 1 + \tilde{L}_1, \quad L_2 = \frac{1}{\varepsilon_*} + \tilde{L}_2,$$

de sorte que le hamiltonien $\tilde{H}_{3\text{bp}}^{\varepsilon_*}$ sur un domaine de taille 1 s'écrit

$$\tilde{H}_{3\text{bp}}^{\varepsilon_*} = F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*} + F_{\text{per}}^{\varepsilon_*}.$$

Dans ce régime, la fréquence képlérienne de la planète 1 est d'ordre 1, celle de la planète 2 est d'ordre ε_*^3 et $F_{\text{per}}^{\varepsilon_*} = O(\varepsilon_*^6)$ admet un développement convergent en puissance de ε^* qui se déduit du développement en polynômes de Legendre :

$$F_{\text{per}} = -\frac{\mu_1 m_2}{\|q_2\|} \sum_{n \geq 2} \sigma_n P_n(\zeta) \left(\frac{\|q_1\|}{\|q_2\|} \right)^n.$$

Le résultat de moyennisation multi-échelle (dans sa version tronquée) s'applique : pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, on peut conjuguer $\tilde{H}_{3\text{bp}}^{\varepsilon_*}$ par un difféomorphisme symplectique, analytique y compris en ε_* et ε_*^3 -proche de l'identité, au hamiltonien

$$F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*} + F_{\text{sec},k}^{\varepsilon_*} + F_{\text{res},k}^{\varepsilon_*}$$

où le hamiltonien séculaire

$$F_{\text{sec},k}^{\varepsilon_*} = \int_{\mathbb{T}^2} F_{\text{per}}^{\varepsilon_*} dl_1 dl_2 + O(\varepsilon_*^9)$$

est un polynôme en ε_* de degré au plus $6 + 3k$, dont les coefficients sont des fonctions qui ne dépendent pas de l_1, l_2 , tandis que le reste

$$F_{\text{res},k}^{\varepsilon_*} = O(\varepsilon_*^{6+3k})$$

est arbitraire. Pour simplifier, on suppose $k \geq 1$ fixé (arbitrairement grand) et on le supprime des notations. On veut étudier le hamiltonien séculaire $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*}$ pour lequel les actions L_1 et L_2 sont constantes. Sans perte de généralité, on fixe donc $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2 = 0$, de sorte que $L_1 = 1, L_2 = 1/\varepsilon_*$, et on obtient ainsi un hamiltonien

$$F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*}(\gamma_1, \gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$$

à deux degrés de liberté. Le résultat principal de Fejoz et Guardia (2016) peut s'énoncer comme suit.

THÉORÈME 5.1 (Fejoz–Guardia). — *Pour tout $\varepsilon_* > 0$ suffisamment petit, le hamiltonien séculaire $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*}$ possède une famille à 1 paramètre d’orbites périodiques hyperboliques, et, pour toute valeur du paramètre dans un compact sauf un nombre fini, elles sont munies d’orbites homoclines transverses.*

La preuve de ce théorème repose sur les deux propositions ci-dessous, qui sont dans un sens assez miraculeuses. Mais d’abord remarquons que Γ_1 est de taille 1 tandis que Γ_2 est de taille $1/\varepsilon_*$, il sera alors plus commode, pour avoir des quantités d’ordre 1, de faire le changement de variable linéaire symplectique

$$\tilde{\Gamma}_2 = \Psi_1 - \Gamma_2, \quad \tilde{\gamma}_2 = -\gamma_2$$

en se rappelant que Ψ_1 (le moment cinétique total) est également de taille $1/\varepsilon$: la variable $\tilde{\Gamma}_2$ est donc maintenant de taille 1 (et on pourra supposer que $\tilde{\Gamma}_2 > 0$). On écrit

$$F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*} = c + \sum_{6 \leq i \leq 6+3k} \varepsilon_*^i F_i.$$

On note que les deux premiers termes (d’ordre ε_*^6 et ε_*^7) ne dépendent que de ce qu’on appelle le hamiltonien quadripolaire, qui est la moyenne (par rapport à l_1, l_2) du premier terme du développement de F_{per} :

$$F_{\text{quad}} = \int_{\mathbb{T}^2} \sigma_2 P_2(\zeta) \left(\frac{\|q_1\|}{\|q_2\|} \right)^2 dl_1 dl_2.$$

Le terme suivant (d’ordre ε_*^8) dépend aussi de ce qu’on appelle le hamiltonien octupolaire, qui est la moyenne (par rapport à l_1, l_2) du second terme du développement de F_{per} :

$$F_{\text{oct}} = \int_{\mathbb{T}^2} \sigma_3 P_3(\zeta) \left(\frac{\|q_1\|}{\|q_2\|} \right)^3 dl_1 dl_2.$$

Il est important de noter que F_6 , F_7 et F_8 sont les seuls termes qui peuvent se lire de manière explicite sur la perturbation. Le premier miracle est le suivant.

PROPOSITION 5.2. — *Le hamiltonien quadripolaire F_{quad} est intégrable : dans les variables $(\gamma_1, \tilde{\gamma}_2, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2)$, il ne dépend pas de $\tilde{\gamma}_2$.*

Ce fait semble avoir été remarqué la première fois par Harrington (1968) : notons que F_{quad} a 2 degrés de liberté, il n’a donc aucune raison d’être intégrable. De plus, le premier terme non trivial de

$$F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*} = c + \varepsilon_*^6 F_6 + O(\varepsilon_*^7)$$

a une expression raisonnable que l’on peut étudier (rappelons que l’on a fixé $L_1 = 1$, mais il sera commode de le laisser dans les expressions) :

$$F_6(\gamma_1, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2) = \alpha_6 \left(1 - \frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} \right) \left[2 - 5 \left(1 - \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{\Gamma_1^2} \right) \sin^2 \gamma_1 \right] + \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{L_1^2}$$

avec une constante explicite $\alpha_6 \neq 0$. Clairement, $\tilde{\Gamma}_2$ est une intégrale première : on peut montrer que si

$$0 < \tilde{\Gamma}_2 < L_1 \sqrt{3/5},$$

alors F_6 possède (deux) singularités hyperboliques associées à un mouvement circulaire $\Gamma_1 = L_1 = 1$ (donc $e_1 = 0$) et aux deux valeurs de $\gamma_1 \in]0, \pi[$ vérifiant

$$\sin^2 \gamma_1 = \frac{2}{5 \left(1 - \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{L_1^2}\right)}.$$

Les variables de Deprit (tout comme celles de Delaunay) sont singulières pour une excentricité nulle. Il est alors plus commode d'utiliser les variables elliptiques de Poincaré (ξ, η) au lieu de (γ_1, Γ_1) : le hamiltonien intégrable F_6 devient

$$F_6(\xi, \eta, \tilde{\Gamma}_2) = \alpha_6 \frac{1}{L_1} \left[2\xi^2 - \left(3 - 5 \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{L_1^2}\right) \eta^2 \right] + \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{L_1^2} + O_2(\xi^2 + \eta^2).$$

L'origine $(\xi, \eta) = (0, 0)$ (qui correspond à $\Gamma_1 = L_1$) devient alors l'unique singularité hyperbolique, pour $\tilde{\Gamma}_2$ fixé, dont les variétés stable et instable coïncident : on a également une paramétrisation explicite de la connexion homocline (qu'on ne donnera pas) mais qui sera nécessaire pour pouvoir calculer le potentiel de Poincaré–Melnikov. En faisant varier $\tilde{\Gamma}_2$ dans son intervalle de valeurs admissibles, on obtient un anneau normalement hyperbolique que l'on note

$$\Lambda_0 = \left\{ (\xi, \eta, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2) : (\xi, \eta) = (0, 0), \tilde{\gamma}_2 \in \mathbb{T}, \tilde{\Gamma}_2 \in [\zeta_1, \zeta_2] \right\}$$

avec ζ_1, ζ_2 telles que

$$0 < \zeta_1 < \zeta_2 < L_1 \sqrt{\frac{3}{5}}$$

dont les variétés invariantes coïncident. Notons que cette condition d'admissibilité entre $\tilde{\Gamma}_2$ et L_1 est satisfaite si l'inclinaison entre les planètes 1 et 2 est relativement grande (plus grande que $\pi/4$). Remarquons également que la restriction de $F_6(\xi, \eta, \tilde{\Gamma}_2)$ à l'anneau Λ_0 est donné par le hamiltonien $\tilde{\Gamma}_2^2/L_1^2$; en particulier la période de chaque orbite périodique est une fonction monotone du paramètre $\tilde{\Gamma}_2$.

Le second terme du développement F_7 est lui aussi intégrable (car ne provenant que du hamiltonien quadripolaire) mais le terme F_8 , qui est le dernier terme explicite du hamiltonien séculaire, ne l'est plus. Le second miracle est le suivant.

PROPOSITION 5.3. — *Pour tout $\varepsilon_* > 0$ suffisamment petit, le hamiltonien*

$$P_{\varepsilon_*} = \varepsilon_*^6 F_6 + \varepsilon_*^7 F_7 + \varepsilon_*^8 F_8$$

possède une famille à 1 paramètre d'orbites périodiques hyperboliques, et, pour toute valeur du paramètre sauf un nombre fini, elles sont munies d'orbites homoclines transverses.

Le Théorème 5.1 se déduira directement de cette proposition, car le hamiltonien séculaire $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*}$ est une perturbation de P_{ε_*} (on a même égalité si $k = 1$). Précisons que le miracle n'est pas tant que le premier terme *a priori* non-intégrable détruit l'intégrabilité, car on peut s'y attendre, mais c'est de pouvoir calculer aussi efficacement dans un problème concret. Voici la formule explicite pour F_8 dans les variables de Deprit, avec une constante explicite $\alpha_8 \neq 0$:

$$F_8 = \alpha_8 \sqrt{1 - \frac{\Gamma_1^2}{L_1^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_1 \cos \tilde{\gamma}_2 \left[\frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} \left(5 \left(1 - \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{\Gamma_1^2} \right) (6 - 7 \cos^2 \gamma_1) - 3 \right) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - 35 \sin^2 \gamma_1 \left(1 - \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{\Gamma_1^2} \right) + 7 \right] \\ + \frac{\tilde{\Gamma}_2}{\Gamma_1} \sin \gamma_1 \sin \tilde{\gamma}_2 \left[\frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} \left(5 \left(1 - \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{\Gamma_1^2} \right) (4 - 7 \cos^2 \gamma_1) - 3 \right) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - 35 \sin^2 \gamma_1 \left(1 - \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{\Gamma_1^2} \right) + 7 \right] \end{array} \right\}$$

et on imagine bien que le calcul du potentiel de Poincaré–Melnikov sera plus compliqué que pour le simple pendule perturbé. Notons que l'anneau normalement hyperbolique Λ_0 , qui est une union d'orbites périodiques pour $\varepsilon_*^6 F_6$, persiste en un anneau normalement hyperbolique pour P_{ε_*} de la manière suivante : il existe une fonction analytique

$$\rho_{\varepsilon_*} : \mathbb{T} \times [\zeta_1, \zeta_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

de la forme

$$\rho_{\varepsilon_*}(\gamma_2, \tilde{\Gamma}_2) = \rho_1(\tilde{\Gamma}_2) + \rho_2(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2), \quad \rho_1 = O(\varepsilon_*), \quad \rho_2 = O(\varepsilon_*^2)$$

telle que

$$\Lambda_{\varepsilon_*} = \left\{ \left(\rho_{\varepsilon_*}(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2), \tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2 \right) : \tilde{\gamma}_2 \in \mathbb{T}, \tilde{\Gamma}_2 \in [\zeta_1, \zeta_2] \right\}$$

soit invariant et normalement hyperbolique pour P_{ε_*} . Bien sûr, l'intersection de Λ_{ε_*} avec chaque niveau d'énergie de P_{ε_*} est une orbite périodique hyperbolique, et ce résultat est une conséquence assez directe du théorème des fonctions implicites (si on utilise une section de Poincaré). On veut montrer que les variétés invariantes ont maintenant une intersection transverse : en se fixant une section $\gamma_1 = \pi/2$, l'intégrale de Poincaré–Melnikov est une fonction $\Delta(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2)$ qui peut se calculer (avec beaucoup de calculs, en utilisant une paramétrisation de la connexion homocline non-perturbée et l'expression explicite du terme F_8) et on obtient

$$\Delta(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2) = A(\tilde{\Gamma}_2) \sin \tilde{\gamma}_2$$

où $A(\tilde{\Gamma}_2)$ est une fonction analytique non-constante : en particulier elle est non nulle sauf en un nombre fini de $\tilde{\Gamma}_2 \in [\zeta_1, \zeta_2]$, et hormis pour ces valeurs de paramètres, on obtient des points critiques non dégénérés de la fonction $\tilde{\gamma}_2 \mapsto \Delta(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2)$.

Pour conclure, notons que l'on a bien une instabilité locale mais pas d'instabilité globale : les valeurs de $\tilde{\Gamma}_2$ ne peuvent pas varier par préservation de l'énergie. Dit autrement, on a un anneau normalement hyperbolique de dimension 2 avec des intersections

transverses mais pour un flot (comme pour l'exemple de Poincaré) et non pas pour un difféomorphisme (comme dans l'exemple d'Arnold) : la dynamique interne est trivialement intégrable (car c'est une ε_* -perturbation de $\tilde{\Gamma}_2^2/L_1^2$ dans un domaine où ce dernier n'a pas de points critiques) et la dynamique externe est également intégrable (car on n'a que des connexions homoclines et pas de connexions hétéroclines).

5.3. Instabilité globale dans un problème à 4 corps

Passons maintenant au problème à 4 corps dans le régime hiérarchique D_{ε_*, μ_*} . La réduction des translations se fait à l'aide des coordonnées de Jacobi

$$\begin{cases} q_0 = x_0 \\ q_1 = x_1 - x_0 \\ q_2 = x_2 - \sigma_{01} x_0 - \sigma_{11} x_1 \\ q_3 = x_3 - \sigma_{02} x_0 - \sigma_{12} x_1 - \sigma_{22} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \\ p_1 = y_1 + \sigma_{11} y_2 + \sigma_{11} y_3 \\ p_2 = y_2 + \sigma_{22} y_3 \\ p_3 = y_3 \end{cases}$$

où

$$M_j = \sum_{i=0}^j m_i, \quad \sigma_{ij} = \frac{m_i}{M_j}.$$

Le hamiltonien devient

$$H_{4bp} = F_{\text{Kep}} + F_{\text{per}},$$

avec la partie képlérienne

$$F_{\text{Kep}} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{p_j^2}{2\mu_j} - \frac{\mu_j M_j}{\|q_j\|} \right),$$

et la fonction perturbatrice

$$\begin{aligned} F_{\text{per}} = & \sum_{j=2}^3 \frac{\mu_j M_j}{\|q_j\|} - \frac{m_0 m_2}{\|q_2 + \sigma_{11} q_1\|} - \frac{m_0 m_3}{\|q_3 + \sigma_{22} q_2 + \sigma_{11} q_1\|} - \frac{m_1 m_2}{\|q_2 - \sigma_{01} q_1\|} \\ & - \frac{m_1 m_3}{\|q_3 + \sigma_{22} q_2 + (\sigma_{11} - 1) q_1\|} - \frac{m_2 m_3}{\|q_3 + (\sigma_{22} - 1) q_2\|} \end{aligned}$$

et où les masses réduites μ_j sont définies par

$$\mu_j^{-1} = M_{j-1}^{-1} + m_j^{-1}.$$

La fonction perturbatrice est désormais plus complexe, mais on peut la décomposer de la manière suivante : en notant

$$\tilde{\sigma}_{1,n} = \sigma_{01}^{n-1} + (-1)^n \sigma_{11}^{n-1}, \quad \tilde{\sigma}_{2,n} = (\sigma_{02} + \sigma_{12})^{n-1} + (-1)^n \sigma_{22}^{n-1},$$

on a

$$F_{\text{per}} = F_{\text{per}}^{12} + F_{\text{per}}^{23} + O\left(\frac{1}{a_3}\right)$$

avec

$$F_{\text{per}}^{12} = -\frac{\mu_1 m_2}{\|q_2\|} \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\sigma}_{1,n} P_n(\cos \zeta_1) \left(\frac{\|q_1\|}{\|q_2\|} \right)^n$$

les interactions entre les planètes 1 et 2 et

$$F_{\text{per}}^{23} = -\frac{\mu_2 m_3}{\|q_3\|} \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\sigma}_{2,n} P_n(\cos \zeta_2) \left(\frac{\|q_2\|}{\|q_3\|} \right)^n$$

celles entre les planètes 2 et 3 (le reste des interactions entre les planètes est beaucoup plus petit, contenue dans le terme $O(a_3^{-3})$). Pour pouvoir utiliser le résultat précédent d'instabilité locale du problème à 3 corps, le régime qui va nous intéresser est celui où F_{per}^{12} domine suffisamment F_{per}^{23} : en effet, on va supposer $\mu_* \ll \varepsilon_*$ ce qui implique en particulier (mais on aura plus)

$$F_{\text{per}}^{12} = O(\varepsilon_*^6) \gg F_{\text{per}}^{23} = O(\varepsilon_*^2 \mu_*^6).$$

Comme précédemment, pour la réduction des rotations on utilise les variables de Deprit

$$(l_j, \gamma_j, \psi_j, L_j, \Gamma_j, \Psi_j) \quad 1 \leq j \leq 3$$

où $\Gamma_j = G_j = \|C_j\|$ est la norme du moment cinétique de la planète j , et

$$\Psi_1 = \|C_1 + C_2\|, \quad \Psi_2 = \|C_1 + C_2 + C_3\| = \|C\|, \quad \Psi_3 = C \cdot k_3.$$

Désormais ce sont Ψ_2 et Ψ_3 qui sont des intégrables premières, tandis que Ψ_1 a une évolution non triviale.

Afin d'utiliser des variables d'action d'ordre 1, on effectue les changements de variables affines symplectiques suivants : on commence par

$$L_1 = 1 + \tilde{L}_1, \quad L_2 = \frac{1}{\varepsilon_*} + \tilde{L}_2, \quad L_3 = \frac{1}{\varepsilon_* \mu_*} + \tilde{L}_3, \quad l_3 = \tilde{l}_3$$

puis

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_1 = \Psi_1 - \delta_1 L_2, & \tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \gamma_2 \\ \tilde{\Gamma}_2 = \Psi_1 - \Gamma_2, & \tilde{\gamma}_2 = -\gamma_2 \\ \tilde{\Gamma}_3 = \Psi_2 - \Gamma_3 - \delta_3 L_2, & \tilde{\gamma}_3 = -\gamma_3 \end{cases}$$

et l'on suppose (les paramètres ζ_1 et ζ_2 étant définis dans le problème à 3 corps)

$$\tilde{\Gamma}_2 \in [\zeta_1, \zeta_2], \quad \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3 \in [-1, 1].$$

On note

$$\tilde{H}_{4\text{bp}}^{\varepsilon_*, \mu_*} = F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, \mu_*} + F_{\text{per}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$$

le hamiltonien écrit dans ces variables. On remarque que la partie képlérienne se décompose

$$F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, \mu_*} = F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, 0} + O(\varepsilon_*^3 \mu_*^3)$$

où le premier terme est la partie képlérienne des planètes 1 et 2, tandis que la partie képlérienne de la planète 3 se trouve dans le $O(\varepsilon_*^3 \mu_*^3)$, et de même, la fonction perturbatrice se décompose

$$F_{\text{per}}^{\varepsilon_*, \mu_*} = F_{\text{per}}^{\varepsilon_*, 0} + O(\varepsilon_*^2 \mu_*^6), \quad F_{\text{per}}^{\varepsilon_*, 0} = O(\varepsilon_*^6)$$

où le premier terme est la fonction perturbatrice du problème à 3 corps des planètes 1 et 2, et donc la dépendance vis-à-vis des variables de la planète 3 se trouve dans le

$O(\varepsilon_*^2 \mu_*^6)$. Le Théorème 3.1, pour le hamiltonien séculaire $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ que l'on va décrire ci-dessous, sera une conséquence du théorème à peine plus formel suivant.

THÉORÈME 5.4 (Clarke–Fejoz–Guardia). — *Soit $m_0 \neq m_1$. Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon_* > 0$ suffisamment petit et tout $\mu_* \ll \varepsilon_*^2$, il existe une orbite de $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ pour laquelle les variables d'actions $\tilde{L}_3, \tilde{\Psi}_1$ et $\tilde{\Gamma}_3$ sont instables en un temps $\tau = O(\mu_*^{-\beta})$.*

Par instable on sous-entend une variation indépendante des petits paramètres (en réalité la variation de chaque action n'est limitée que par la taille de leur intervalle de définition) : l'instabilité de \tilde{L}_3 entraîne celle du demi grand axe a_3 , l'instabilité de $\tilde{\Psi}_1$ entraîne celle de l'excentricité e_2 (pour simplifier on verra que l'on peut oublier $\tilde{\Gamma}_2$) et enfin l'instabilité de $\tilde{\Gamma}_3$ entraîne celle de l'inclinaison entre la planète 2 et 3. Pour le hamiltonien séculaire, l'hypothèse que μ_* soit polynomial en ε_* n'est pas nécessaire. Comme Clarke, Fejoz et Guardia (2024) on énonce le résultat pour $\mu_* \ll \varepsilon_*^2$, néanmoins il semble que la preuve ne requiert en réalité que $\mu_* \ll \varepsilon_*$. Enfin on ne verra pas apparaître explicitement l'hypothèse sur les masses $m_0 \neq m_1$: elle est nécessaire pour s'assurer qu'un certain terme du hamiltonien séculaire est non nul.

5.3.1. Dynamique séculaire. — Dans un premier temps on a besoin d'avoir suffisamment d'informations explicites sur le système séculaire : comme on l'a déjà expliqué, on va seulement moyenner les angles rapides l_1 et l_2 mais pas l_3 , de sorte que la partie képlérienne de la planète 3 fera partie du système séculaire et que l'action \tilde{L}_3 devra être ainsi considérée comme dégénérée au même titre que $\tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1$ et $\tilde{\Gamma}_3$.

Puisque $\mu_* \ll \varepsilon_*$ (et c'est ici que cette hypothèse intervient de manière essentielle), on a $\varepsilon_*^2 \mu_*^6 \ll \varepsilon_*^8$ et donc les trois termes dominants d'ordre $\varepsilon_*^6, \varepsilon_*^7$ et ε_*^8 de $F_{\text{per}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ ne proviennent que de $F_{\text{per}}^{\varepsilon_*, 0}$. On peut alors appliquer la moyennisation multi-échelle, par rapport à l_1 et l_2 , et on trouve, vis-à-vis de la partie képlérienne $F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, 0}$, un hamiltonien séculaire

$$F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*} = c + (F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, \mu_*} - F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, 0}) + \sum_{i,j} \varepsilon_*^i \mu_*^j \tilde{F}_{i,j} = c + \sum_{i,j} \varepsilon_*^i \mu_*^j F_{i,j}$$

qui ne dépend effectivement que des variables $(\gamma_1, \Gamma_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{\ell}_3, \tilde{L}_3)$ (il est indépendant de l_1 et l_2 , et les autres variables éventuellement présentes sont des intégrales premières donc on les considère comme des paramètres). Comme précédemment, le hamiltonien séculaire consiste en une somme finie (mais arbitrairement grande) de termes, et ainsi $\tilde{H}_{4\text{bp}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ est conjuguée à $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ modulo un reste d'ordre $O(\varepsilon_*^l) + O(\mu_*^l \varepsilon_*^l)$, où l est un entier suffisamment et arbitrairement grand. Les informations suivantes seront cruciales pour la suite :

- les premiers termes du hamiltonien séculaire (provenant de la perturbation) sont $F_{6,0}, F_{7,0}$ et $F_{8,0}$, et ce sont exactement les mêmes que pour le problème à 3 corps : on a des expressions explicites de $F_{6,0}(\gamma_1, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2)$, $F_{7,0}(\gamma_1, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1)$ et $F_{8,0}(\gamma_1, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\gamma}_2)$;

- le terme $F_{3,3}$ (plus petit que $F_{6,0}$, mais éventuellement plus grand que $F_{7,0}$) n'est rien d'autre que la somme de la partie képlérienne de la planète 3

$$F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, \mu_*} - F_{\text{Kep}}^{\varepsilon_*, 0}$$

et d'un terme $R_{1,2}$ (on utilisera cette notation pour désigner un hamiltonien implicite ne dépendant que des variables des planètes 1 et 2) ;

- le terme $F_{2,6}$ est la somme d'un terme explicite

$$H_0^{2,3}(\tilde{\gamma}_3, \tilde{\psi}_1, \tilde{l}_3)$$

et d'un terme $R_{1,2}$;

- le terme $F_{3,6}$ est la somme d'un terme explicite

$$\tilde{\Gamma}_3 \tilde{H}_3(\tilde{\gamma}_3, \tilde{\psi}_1, \tilde{l}_3) + \tilde{H}_4(\tilde{\gamma}_3, \tilde{\psi}_1, \tilde{l}_3, \tilde{\Psi}_1) + H_1^{2,3}(\tilde{\gamma}_3, \tilde{\psi}_1, \tilde{l}_3, \tilde{\gamma}_2, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2)$$

et d'un terme $R_{1,2}$.

Pour $\mu_* = 0$, nous avons exactement le problème à 3 corps que nous avons étudié précédemment, qui possède un anneau normalement hyperbolique Λ_{ε_*} que l'on étend trivialement dans l'espace des phases de toutes les variables séculaires :

$$\Lambda_{\varepsilon_*} = \left\{ \left(\rho_{\varepsilon_*}(\gamma_2, \tilde{\Gamma}_2), \tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{l}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3 \right) \right\},$$

où

$$\gamma_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{l}_3 \in \mathbb{T}, \quad \tilde{\Gamma}_2 \in [\zeta_1, \zeta_2], \quad \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3 \in [-1, 1].$$

Pour $\mu_* > 0$ suffisamment petit, $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ est une perturbation de $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, 0}$ et on peut appliquer le théorème de persistance des variétés normalement hyperboliques : $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ possède un anneau normalement hyperbolique, localement invariant et de différentiabilité arbitrairement grande mais finie. On peut l'écrire

$$\Lambda_{\varepsilon_*, \mu_*} = \left\{ \left(\rho_{\varepsilon_*, \mu_*}(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{l}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3), \tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{l}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3 \right) \right\}$$

avec une fonction

$$\rho_{\varepsilon_*, \mu_*} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5$$

de la forme

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_1(\tilde{\Gamma}_2) = O(\varepsilon_*) \\ \rho_2 = \rho_2(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1) = O(\varepsilon_*^2) \\ \rho_3 = \rho_3(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{l}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1) = O(\varepsilon_*^{-4} \mu_*^6) \\ \rho_4 = \rho_4(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{l}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3) = O(\varepsilon_*^{-3} \mu_*^6) \\ \rho_5 = \rho_5(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{l}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3) = O(\varepsilon_*^{-3} \mu_*^7). \end{cases}$$

On a maintenant un anneau invariant de dimension 8 pour le hamiltonien séculaire, et on va pouvoir analyser la dynamique interne et la dynamique externe qui, contrairement au problème à 3 corps, n'ont aucune raison d'être triviales.

5.3.2. Dynamique interne. — La restriction du hamiltonien séculaire $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ à l'anneau $\Lambda_{\varepsilon_*, \mu_*}$ nous donne ce qu'on appelle le hamiltonien interne, qu'on note $F_{\text{int}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$: il a un degré de liberté de moins que le hamiltonien séculaire $F_{\text{sec}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ car il ne dépend plus des variables (γ_1, Γ_1) qui sont maintenant fixés par l'anneau. Cependant, en raison de la persistance de l'anneau $\Lambda_{\varepsilon_*, \mu_*}$, la forme symplectique restreinte n'est plus la forme canonique (elle est modifiée par la fonction ρ définissant l'anneau $\Lambda_{\varepsilon_*, \mu_*}$). On peut alors énoncer le résultat principal sur la dynamique interne de la manière suivante.

Pour tout $k \geq 1$, il existe un changement de variable symplectique « contrôlé »

$$\left(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\ell}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3 \right) \mapsto \left(\hat{\gamma}_2, \hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Gamma}_2, \hat{\Psi}_1, \hat{\Gamma}_3, \hat{L}_3 \right)$$

de différentiabilité finie mais grande, tel que :

- la forme symplectique est sous forme canonique

$$\Omega|_{\Lambda_{\varepsilon_*, \mu_*}} = d\hat{\Gamma}_2 \wedge d\hat{\gamma}_2 + d\hat{\Psi}_1 \wedge d\hat{\psi}_1 + d\hat{\Gamma}_3 \wedge d\hat{\gamma}_3 + d\hat{L}_3 \wedge d\hat{\ell}_3;$$

- le hamiltonien interne est trivialement intégrable à une précision polynomiale en μ_* arbitraire :

$$F_{\text{int}}^{\varepsilon_*, \mu_*} \left(\hat{\gamma}_2, \hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Gamma}_2, \hat{\Psi}_1, \hat{\Gamma}_3, \hat{L}_3 \right) = K_{\text{int}}^{\varepsilon_*, \mu_*} \left(\hat{\Gamma}_2, \hat{\Psi}_1, \hat{\Gamma}_3, \hat{L}_3 \right) + O(\mu_*^m),$$

où m est arbitrairement grand ;

- le hamiltonien intégrable $K_{\text{int}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ est non dégénéré et iso-énergétiquement non dégénéré.

Le mot « contrôlé » ci-dessus signifie que l'on contrôle la distance à l'identité de la transformation, dans l'espace des actions, en fonctions des petits paramètres ε_* et μ_* . La preuve se décompose en plusieurs étapes. La première consiste à effectuer un premier changement de variables pour redresser la forme symplectique restreinte ; on utilise ici la méthode des chemins (« astuce de Moser »). La seconde étape consiste à utiliser la moyennisation multi-échelle (la version moyennisation de tous les angles sans variables dégénérés, car ce sont maintenant les variables dégénérées que l'on élimine). En particulier, il suffit que la variable d'angle apparaisse à une échelle plus petite que la variable d'action associée : c'est vrai pour $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\ell}_3$ mais au vu de la description du hamiltonien séculaire, ce n'est *a priori* pas vrai pour la variable $\tilde{\gamma}_3$. Cependant si l'on élimine d'abord $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\ell}_3$ alors la dépendance en $\tilde{\gamma}_3$ se retrouve à une échelle plus petite que l'action $\tilde{\Gamma}_3$. Il s'agit ici d'une vérification un peu fastidieuse, qui consiste à montrer d'abord que c'est vrai pour le hamiltonien séculaire restreint à Λ_0 (qui est l'anneau invariant pour $\varepsilon_*^6 F_{6,0}$) car lorsqu'on prend la moyenne des termes $H_0^{2,3}$, \tilde{H}_3 , \tilde{H}_4 et $H_1^{2,3}$ par rapport à $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\ell}_3$ alors il n'y a plus de dépendance en $\tilde{\gamma}_3$, et ensuite à vérifier que cela reste vrai sur $\Lambda_{\varepsilon_*, \mu_*}$ (il faut analyser le développement de la fonction ρ). Enfin pour vérifier la non-dégénérescence de $K_{\text{int}}^{\varepsilon_*, \mu_*}$, on procède de même en calculant les dérivées d'ordre 1 et 2 dans les actions du hamiltonien séculaire restreint à Λ_0 .

On a donc une dynamique interne, avec une torsion de la partie intégrable petite (une puissance fixe de ε_* et μ_*) mais non nulle, donc très grande devant la partie non intégrable qui est d'ordre μ_*^k avec k aussi grand que l'on veut. On pourrait par exemple appliquer

la théorie KAM (ce que ne font pas les auteurs, car cela n'est pas nécessaire) et avoir une densité aussi grande que l'on veut de tores partiellement hyperboliques contenus dans l'anneau normalement hyperbolique.

Pour revenir à une dynamique discrète (comme dans l'exemple d'Arnold), on peut réduire à un niveau d'énergie et prendre une section de Poincaré dans les variables $(\hat{\gamma}_2, \hat{\Gamma}_2)$. On a maintenant un difféomorphisme local dans les variables $(\hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Psi}_1, \hat{\Gamma}_3, \hat{L}_3)$, que l'on note

$$G_{\text{int}}^{\varepsilon_*, \mu_*} = G_{\text{int}}^{\varepsilon_*, \mu_*} \left(\hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Psi}_1, \hat{\Gamma}_3, \hat{L}_3 \right),$$

et qui est aussi proche que l'on veut d'un difféomorphisme global trivialement intégrable qui a une torsion non nulle. Comme on l'a déjà expliqué, il suffit de montrer l'instabilité de $\hat{\Psi}_1$ pour avoir instabilité de l'excentricité e_2 , et on peut donc ignorer les variables $(\hat{\gamma}_2, \hat{\Gamma}_2)$.

5.3.3. Dynamique externe. — On doit maintenant étudier la dynamique externe. Pour ce faire, on doit d'abord calculer les termes principaux du potentiel de Poincaré–Melnikov, qui est de la forme

$$\Delta^{\varepsilon_*, \mu_*} = \Delta^{\varepsilon_*, \mu_*} \left(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\ell}_3, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{L}_3 \right),$$

et qui se développe en puissances des petits paramètres :

$$\Delta^{\varepsilon_*, \mu_*} = c + \sum_{i,j} \varepsilon_*^i \mu_*^j \Delta_{i,j}.$$

Le premier terme non trivial est

$$\Delta_{8,0}(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\Gamma}_2) = A(\tilde{\Gamma}_2) \sin \tilde{\gamma}_2;$$

il s'agit exactement de celui du problème à 3 corps. Le second terme non trivial est

$$\Delta_{3,6}(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\psi}_1, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\ell}_3, \tilde{\Gamma}_2)$$

et il a lui aussi une expression explicite qui se déduit du terme $H_1^{2,3}$ (tout comme ce dernier, il ne contient que deux harmoniques en $\tilde{\gamma}_2$, avec des coefficients qui sont des fonctions explicites des autres angles). On a donc deux anneaux homoclines (un pour chaque point critique non dégénéré du potentiel), ce qui nous permet de définir deux applications externes $S_{\pm}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ dans les variables tildes. La mise en évidence des termes principaux de $S_{\pm}^{\varepsilon_*, \mu_*}$ est un peu fastidieuse, mais elle est encore grandement facilitée par le caractère multi-échelle du système qui se comporte effectivement de manière périodique et non quasi-périodique. Il faut ensuite revenir dans les variables chapeaux que l'on a utilisées pour la dynamique interne (en se rappelant que l'on peut « contrôler » ce changement de variable). La conclusion de tout ceci est que dans ces variables, les applications externes s'écrivent

$$S_{\pm}^{\varepsilon_*, \mu_*} : \left(\hat{\gamma}_2, \hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Gamma}_2 \hat{\Gamma}_3, \hat{\Psi}_1, \hat{L}_3 \right) \longmapsto \left(\hat{\gamma}_2^*, \hat{\psi}_1^*, \hat{\gamma}_3^*, \hat{\ell}_3^*, \hat{\Gamma}_2^*, \hat{\Gamma}_3^*, \hat{\Psi}_1^*, \hat{L}_3^* \right),$$

où (en oubliant l'évolution de $\hat{\Gamma}_2$)

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_1^* = \hat{\Psi}_1 + \varepsilon_*^{-3} \mu_*^6 S_1^\pm (\hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Gamma}_2) + O(\varepsilon_*^{-3} \mu_*^6), \\ \hat{\Gamma}_3^* = \hat{\Gamma}_3 + \varepsilon_*^{-3} \mu_*^6 S_2^\pm (\hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Gamma}_2) + O(\varepsilon_*^{-3} \mu_*^6), \\ \hat{L}_3^* = \hat{L}_3 + \varepsilon_*^{-3} \mu_*^6 S_3^\pm (\hat{\psi}_1, \hat{\gamma}_3, \hat{\ell}_3, \hat{\Gamma}_2) + O(\varepsilon_*^{-3} \mu_*^6), \end{cases}$$

avec des expressions explicites (et non triviales) des S_j^\pm .

5.3.4. Conclusion. — On a désormais tout ce qu'il faut pour conclure en suivant Clarke, Fejoz et Guardia (2023) : torsion de la dynamique interne, splitting des variétés invariantes et transversalité de l'application externe, ce qui nous donne de l'instabilité des variables d'action en un temps polynomial en μ_*^{-1} . Pour conclure, on remarque que l'on peut appliquer la théorie KAM à l'intérieur du cylindre et construire un ensemble suffisamment dense de tores KAM partiellement hyperboliques (pas de « large gap ») et on pourrait aussi conclure en remarquant que ces tores forment une chaîne de transition au sens d'Arnold.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Jacques Fejoz et Marcel Guardia pour avoir répondu à mes nombreuses questions, ainsi que de m'avoir fourni les figures présentes dans ce texte. Merci également à N. Bourbaki pour toutes les suggestions visant à améliorer le texte.

Références

- V. I. Arnold (1964). « Instability of dynamical systems with many degrees of freedom », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **156**, p. 9-12.
- V. I. Arnold et A. Avez (1967). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Monographies internationales de math. modernes, vol. 9. Gauthier-Villars. 243 p.
- V.I. Arnold (1961). « The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case », *Sov. Math., Dokl.* **2**, p. 247-249.
- (1963a). « Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations », *Russ. Math. Surv.* **18** (5), p. 9-36.
- (1963b). « Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics », *Russ. Math. Surv.* **18** (6), p. 85-191.
- P. Bernard (2011). « Arnold's diffusion : from the a priori unstable to the a priori stable case », in : *Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM 2010), Hyderabad, India, August 19–27, 2010. Vol. III : Invited lectures*, p. 1680-1700.

- G. D. Birkhoff (1927). *Dynamical systems*. T. 9. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI.
- A. Chenciner (2015). « Poincaré and the three-body problem », in : *Henri Poincaré, 1912–2012*. Basel : Birkhäuser/Springer, p. 51-149.
- L. Chierchia et G. Gallavotti (1994). « Drift and diffusion in phase space », *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* **60** (1), p. 1-144.
- L. Chierchia et G. Pinzari (2011). « The planetary N -body problem : symplectic foliation, reductions and invariant tori », *Invent. Math.* **186** (1), p. 1-77.
- B.V. Chirikov (1979). « A universal instability of many-dimensional oscillator systems », *Phys. Reports* **52**, p. 263-379.
- A. Clarke, J. Fejoz et M. Guardia (2023). « Topological shadowing methods in Arnold diffusion : weak torsion and multiple time scales », *Nonlinearity* **36** (1), p. 426-457.
- (2024). « A counterexample to the theorem of Laplace-Lagrange on the stability of semimajor axes », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **248** (2), p. 73.
- (2025). « Why are inner planets not inclined? », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **141**, p. 1-98.
- J. Cresson (2000). « A λ -lemma for partially hyperbolic tori », *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.* **331** (1), p. 65-70.
- A. Delshams, R. de la Llave et T. M. Seara (2006). « A geometric mechanism for diffusion in Hamiltonian systems overcoming the large gap problem : heuristics and rigorous verification on a model », *Mem. Amer. Math. Soc.* **179** (844).
- (2008). « Geometric properties of the scattering map of a normally hyperbolic invariant manifold », *Adv. Math.* **217** (3), p. 1096-1153.
- J. Fejoz (2004). « Démonstration du ‘théorème d’Arnold’ sur la stabilité du système planétaire (d’après Herman) », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (5), p. 1521-1582.
- (2015). « Celestial Mechanics », in : *Encyclopedia of life support systems*. Unesco-EOLSS. Chap. The N -body problem.
- (2016). « Introduction to KAM theory, with a view to celestial mechanics », in : *Geometric control and related fields*. Sous la dir. de J.-B. Caillau et T. Haberkorn. Radon Series on Comput. and Applied Math. (de Gruyter), vol. 18.
- J. Fejoz et M. Guardia (2016). « Secular instability in the three-body problem », *Archive for rational mechanics and analysis* **221** (1), p. 335-362.
- N. Fenichel (1971). « Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows », *Math. J., Indiana Univ.* **21**, p. 193-226.
- M. Gidea et R. de la Llave (2006). « Topological methods in the instability problem of Hamiltonian systems », *Discrete & Continuous Dynamical Systems* **14** (2), p. 295.
- R. S. Harrington (1968). « Dynamical evolution of triple stars », *Astronom. J.* **73** (3), p. 190-194.
- M. Herman (1998). *Some open problems in dynamical systems*. Doc. Math., J. DMV, Extra Vol. ICM Berlin 1998, vol. II.
- M.W. Hirsch, C.C. Pugh et M. Shub (1977). *Invariant Manifolds*. Berlin : Springer.

- A.N. Kolmogorov (1954). « On the preservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function », *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **98**, p. 527-530.
- P. Lochak (1992). « Canonical perturbation theory via simultaneous approximation. » *Russ. Math. Surv.* **47** (6), p. 57-133.
- P. Lochak et A.I. Neishtadt (1992). « Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian », *Chaos* **2** (4), p. 495-499.
- V.K. Melnikov (1963). « On the stability of a center for time-periodic perturbations », *Tr. Mosk. Mat. Obs.* **12**, p. 3-52.
- R. Moeckel (2002). « Generic drift on Cantor sets of annuli », in : *Celestial mechanics (Evanston, IL, 1999)*. Contemp. Math. (AMS), vol. 292, p. 163-171.
- N.N. Nekhoroshev (1977). « An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems », *Russian Math. Surveys* **32** (6), p. 1-65.
- L. Niederman (1996). « Stability over exponentially long times in the planetary problem », *Nonlinearity* **9** (6), p. 1703-1751.
- H. Poincaré (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars.
- J. Pöschel (1993). « Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems », *Math. Z.* **213**, p. 187-216.
- P. Robutel (1995). « Stability of the planetary three-body problem. II. KAM theory and existence of quasiperiodic motions », *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **62** (3), p. 219-261.
- L. Sabbagh (2015). « An inclination lemma for normally hyperbolic manifolds with an application to diffusion », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **35** (7), p. 2269-2291.
- D. Sauzin (2001). « A new method for measuring the splitting of invariant manifolds », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **34** (2), p. 159-221.
- L. P. Shil'nikov (1968). « Structure of the neighborhood of a homoclinic tube of an invariant torus », *Sov. Math., Dokl.* **9**, p. 624-628.

Abed Bounemoura

CNRS, LMAP, UPPA

E-mail : abed.bounemoura@univ-pau.fr