Séminaire BOURBAKI Janvier 2026
78e année, 2025–2026, n° 1248

LA CONJECTURE DE HODGE POUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES DE DIMENSION AU PLUS 5 [d'après Markman]

par **Claire Voisin**

1. Introduction

La conjecture de Hodge concerne les variétés algébriques projectives lisses X définies sur le corps des nombres complexes et leurs contre-parties analytiques X_{an}, qui sont des variétés complexes, c'est-à-dire des variétés différentiables munies d'un atlas de cartes holomorphes. Dans chaque carte, on dispose de coordonnées locales à valeurs complexes $z_1, \ldots, z_n$, $n = \dim X$, dites holomorphes, telles que les changements de coordonnées $z'_i = \phi_i(z_1, \ldots, z_n)$ sur l'intersection de deux cartes soient holomorphes. Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est définie par des équations algébriques et donc localement dans la topologie de Zariski par des équations polynomiales, la variété X_{an} est la sous-variété complexe de $\mathbb{CP}^N$ définie localement par les mêmes équations polynomiales, vues comme des fonctions holomorphes. Un théorème important dû à Chow (1949) dit qu'inversement toute sous-variété complexe fermée de $\mathbb{CP}^N$ est algébrique, c'est-à-dire est l'analytisée X_{an} d'une sous-variété algébrique X de $\mathbb{P}^N$, définie par des équations polynomiales homogènes.

La variété X_{an} est aussi un espace topologique auquel on associe ses groupes de cohomologie de Betti $H^i(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$. Les théorèmes de de Rham permettent de calculer les groupes

$$H^i(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = H^i(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$$

via les formes différentielles

$$H^i(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \cong \frac{\mathrm{Ker}\,(d\colon A^i(X_{\mathrm{an}}) \to A^{i+1}(X_{\mathrm{an}}))}{\mathrm{Im}\,(d\colon A^{i-1}(X_{\mathrm{an}}) \to A^i(X_{\mathrm{an}}))},$$

où $A^i(X_{\mathrm{an}})$ est l'espace des formes différentielles de degré i, de classe C^∞ et à coefficients complexes sur la variété différentiable sous-jacente à X_{an}. La structure de variété complexe de X_{an} permet de définir les formes de type (p, q) sur X_{an}. Ce sont celles qui s'écrivent localement dans des coordonnées holomorphes sous la forme

$$\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

où les fonctions $\alpha_{I,J}$ sont de classe C^∞ à valeurs complexes.

Le théorème fondamental de décomposition de Hodge est le résultat suivant. La variété X étant projective lisse complexe, soit

$$H^{p,q}(X_{\mathrm{an}}) \subset H^{p+q}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

le sous-espace des classes de formes différentielles fermées de type (p, q) sur X_{an}. Alors

$$H^k(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = H^k(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X_{\mathrm{an}}). \tag{1}$$

Définition 1.1. — *L'espace* $\mathrm{Hdg}^{2k}(X, \mathbb{Q})$ *des classes de Hodge rationnelles de* X *de degré* $2k$ *est l'intersection*

$$\mathrm{Hdg}^{2k}(X, \mathbb{Q}) \coloneqq H^{2k}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \cap H^{k,k}(X_{\mathrm{an}}),$$

prise dans l'espace vectoriel complexe $\mathrm{H}^{2k}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$.

Si X est une variété projective lisse complexe et $Z \subset X$ est un fermé algébrique de codimension c, donc défini localement par des équations algébriques et tel qu'un ouvert de Zariski dense de Z soit une sous-variété algébrique lisse de codimension c de X, on dispose d'un fermé analytique correspondant

$$Z_{\mathrm{an}} \subset X_{\mathrm{an}}.$$

(Toujours d'après Chow, les fermés analytiques de X_{an} sont en fait en bijection avec les fermés algébriques de X.) Même lorsque Z est singulier, on sait depuis Borel et Haefliger (1961) construire la classe de cycle

$$[Z] \coloneqq [Z_{\mathrm{an}}] \in H^{2c}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$$

et *a fortiori* la classe de cohomologie rationnelle correspondante qui nous intéressera ici. Le point important est que $[Z]$ est une classe de Hodge, ce qui se voit soit en introduisant suivant Lelong (1957) le courant d'intégration sur Z, soit en utilisant la résolution d'Hironaka, qui donne une variété algébrique lisse $\widetilde{Z}$ et un morphisme $\tau\colon \widetilde{Z} \to Z$ propre, holomorphe et birationnel. On a alors un morphisme composé

$$\tilde{j}\colon \widetilde{Z} \to Z \to X,$$

tel que

$$[Z] = \tilde{j}_*(1_{\widetilde{Z}}) \text{ dans } H^{2c}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}),$$

où $\tilde{j}_*\colon H^0(\widetilde{Z}_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) \to H^{2c}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ est le morphisme de Gysin.

La conjecture de Hodge est l'énoncé suivant.

Conjecture 1.2. — *Toute classe de Hodge rationnelle sur une variété projective lisse complexe* X *est une combinaison à coefficients rationnels de classes* $[Z]$ *de fermés algébriques de* X.

De telles classes seront appelées des classes de cycles et dites « classes algébriques ». Dans la suite de ce texte, on ne distinguera plus la variété projective X sur $\mathbb{C}$ et la variété complexe associée X_{an}, et on notera $H^i(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) =: H^i(X, \mathbb{C})$. Grâce au principe GAGA de Serre (1955b) les constructions de géométrie algébrique (telles que les faisceaux cohérents et leur cohomologie ou plus généralement leurs images directes) peuvent se faire de façon équivalente dans le cadre analytique, ce qui autorise cette confusion.

Le travail présenté ici concerne la conjecture de Hodge pour une classe très particulière de variétés projectives lisses, à savoir les variétés abéliennes (de dimension ≤ 5). La définition la plus simple consiste à dire que ce sont les variétés projectives également munies d'une structure de groupe commutatif compatible avec la structure de variété algébrique. Les variétés complexes correspondantes sont alors des tores complexes.

Le théorème présenté ici et dû à Eyal Markman (2025) est le suivant.

Théorème 1.3. — *La conjecture de Hodge est satisfaite par les variétés abéliennes de dimension* ≤ 5.

Une variété abélienne "très générale" ne possède pas de classes de Hodge autres que les puissances de la classe d'une section hyperplane, qui sont évidemment algébriques. Le sujet des contraintes (dites de Mumford–Tate) imposées aux variétés abéliennes par l'existence d'autres classes de Hodge a été abondamment étudié, en particulier par Deligne (1982), Tankeev (1982) et Moonen et Zarhin (1995, 1999). Le travail de Markman concerne en fait les variétés abéliennes de Weil, qui sont des variétés abéliennes possédant un automorphisme satisfaisant certaines conditions. Une construction formelle permet d'en déduire l'existence de classes de Hodge exceptionnelles, dites de Weil, dans la cohomologie de telles variétés. Les travaux mentionnés ci-dessus permettent de ramener le théorème 1.3 à l'énoncé suivant.

Théorème 1.4 (Markman, 2025). — *La conjecture de Hodge est satisfaite par les classes de Weil sur les variétés abéliennes de Weil de dimension 6 et de discriminant* 1.

Les variétés abéliennes de Weil admettent l'action par isogénies d'un corps quadratique K. Leur discriminant est un invariant numérique lié à leur polarisation (choisie compatible avec l'action de K et généralement unique à un coefficient multiplicatif près). Je renvoie à la section 2 (voir aussi van Geemen, 1994) pour la définition des variétés abéliennes de Weil, leurs classes de Weil et leur discriminant.

Des résultats similaires antérieurs avaient été obtenus par Markman (2023), établissant l'analogue du théorème 1.4 pour les variétés abéliennes de Weil de dimension 4 et discriminant 1. Une autre démonstration de ce résultat, reposant également sur la géométrie hyper-kählérienne, a été obtenue ultérieurement par Floccari et Fu (2025). Ce même énoncé avait été établi par Schoen (1988, 2007) pour des corps K spécifiques.

Dans les paragraphes qui suivent, je présente quelques résultats classiques sur la conjecture de Hodge, de façon à situer l'énoncé de Markman par rapport à l'ensemble du sujet.

1.1. Classes de cycles, classes de Chern et classes de Hodge

Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et F un fibré vectoriel algébrique sur X. On peut considérer les classes de Chern $c_i(F) \in H^{2i}(X, \mathbb{Q})$. La donnée d'un tel fibré F est équivalente à celle de son faisceau $\mathcal{F}$ de sections locales, qui est cohérent et localement libre. On peut également considérer les classes de Chern de faisceaux cohérents (non nécessairement localement libres) sur X. Les faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur X admettent des résolutions finies par des faisceaux cohérents localement libres

$$0 \to \mathcal{F}_n \to \ldots \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F} \to 0,$$

et on a l'égalité de classes de Chern totales (voir Borel et Serre, 1958)

$$c(\mathcal{F}) := \prod_i c(\mathcal{F}_i)^{\epsilon_i}, \ \ \epsilon_i := (-1)^i.$$

Ceci montre que les classes de Chern de faisceaux cohérents et celles des fibrés vectoriels sur X engendrent le même $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ pour tout i.

Il est connu depuis Grothendieck (1958), Borel et Serre (1958) que pour formuler la conjecture de Hodge, on peut remplacer les classes de cycles par les classes de Chern introduites ci-dessus. Cette construction est cruciale dès la codimension 1, où l'on associe classiquement à une hypersurface $D \subset X$ un fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$ muni d'une section s_D, dont D est le lieu des zéros. Partant d'un fibré vectoriel E sur X de rang k, quitte à le tordre par un fibré en droites suffisamment ample, on peut supposer qu'il est engendré par N sections globales, et donc provient d'un fibré vectoriel sur une Grassmannienne $G(k, N)$ via un morphisme $\phi_E \colon X \to G(k, N)$. La cohomologie entière de $G(k, N)$ étant engendrée par des classes de cycles algébriques (variétés de Schubert), les classes $c_i(E)$ sont donc des classes algébriques sur X.

Dans l'autre direction, si on part d'un fermé algébrique $Z \subset X$ de codimension k, le faisceau cohérent $\mathcal{O}_Z$ a la propriété que $c_i(\mathcal{O}_Z) = 0$ pour $i < k$, et

$$c_k(\mathcal{O}_Z) = (-1)^{k-1}(k-1)![Z] \text{ dans } H^{2k}(X, \mathbb{Z}).$$

On voit donc qu'à coefficients rationnels ces différentes constructions engendrent les mêmes classes de Hodge. Le point de vue des faisceaux est souvent plus performant comme on le verra ci-dessous et dans toute la suite.

1.1.1. *Faisceaux tordus.* — Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion de rang r ou un fibré vectoriel sur une variété projective complexe X. Si le fibré en droites $\det \mathcal{E}$ est divisible par r dans $\operatorname{Pic} X$, c'est-à-dire qu'il existe un fibré en droites L sur X tel que $L^{\otimes r} \cong \det \mathcal{E}$, le faisceau cohérent ou fibré vectoriel

$$\mathcal{F} := \mathcal{E} \otimes L^{-1}$$

satisfait $\det \mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. De plus les classes de Chern à coefficients rationnels de $\mathcal{F}$ ne dépendent pas du choix de L et sont calculées formellement à partir de celles de $\mathcal{E}$ du fait que le caractère de Chern est multiplicatif sous le produit tensoriel, ce qui donne

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = \mathrm{ch}(\mathcal{E})\mathrm{ch}(L^{-1}) = \mathrm{ch}(\mathcal{E})\exp\Big(-\frac{c_1(\mathcal{E})}{r}\Big). \tag{2}$$

On observe maintenant que le terme de droite fournit en général un élément de $H^{2*}(X,\mathbb{Q})$, qui a son terme de degré 2 nul, définissant

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}\otimes(\det\mathcal{E})^{\frac{-1}{r}}) := \mathrm{ch}(\mathcal{E})\exp(c_1(\mathcal{E}))^{\frac{-1}{r}}$$

sans l'hypothèse de divisibilité de $\det\mathcal{E}$. Sans cette hypothèse, le fibré en droites L n'existe que de façon “fractionnaire”, c'est-à-dire dans $(\operatorname{Pic}X)\otimes\mathbb{Q}$. Pour donner un sens géométrique à $\mathcal{E}\otimes L^{-1}$, pensons à L comme à une racine r-ième de $\det\mathcal{E}$. Le fibré en droites $\det\mathcal{E}^{-1}$ admet des trivialisations holomorphes

$$t_i\colon \det\mathcal{E}^{-1}_{|U_i}\cong\mathcal{O}_{U_i}$$

dans des ouverts (pour la topologie analytique) U_i couvrant X, et les fonctions inversibles $t_{ij}:=t_i\circ t_j^{-1}$ sur $U_i\cap U_j$ satisfont la condition de cocycle

$$t_{ij}t_{jk}t_{ki}=1$$

sur $U_i\cap U_j\cap U_k$. Quitte à restreindre les ouverts U_i, on peut choisir des racines r-ièmes s_{ij} de t_{ij} sur $U_i\cap U_j$, et on obtient

$$s_{ij}s_{jk}s_{ki}=\alpha_{ijk} \tag{3}$$

sur $U_i\cap U_j\cap U_k$, où les α_{ijk} sont des racines r-ièmes de l'unité et fournissent un 2-cocycle à valeurs dans le groupe μ_r des racines r-ièmes de l'unité, soit une “classe de Brauer”

$$\alpha\in H^2(X,\mu_r).$$

Étant donnée une classe $\alpha\in H^2(X,\mu_r)$, on a la notion de « faisceau tordu par α » : les faisceaux cohérents localement libres de rang s tordus par α sont trivialisés dans les ouverts U_i d'un recouvrement ouvert adéquat de X, et leurs matrices M_{ij} de transition sur $U_{ij}=U_i\cap U_j$, doivent satisfaire la condition de cocycle *tordue*

$$M_{ij}\circ M_{jk}\circ M_{ki}=\alpha_{ijk}1_s,$$

où (α_{ijk}) est un cocycle représentant la classe α pour ce recouvrement.

Ce formalisme permet de donner un sens à $\mathcal{E}\otimes L^{-1}$ comme faisceau tordu par α lorsque $L=(\det\mathcal{E})^{\frac{1}{r}}$ n'existe que de façon fractionnaire : les matrices de transition M_{ij} de $\mathcal{E}$ sont remplacées par $s_{ij}M_{ij}$. On dispose d'une catégorie des faisceaux cohérents tordus par α, et on peut faire la théorie de leurs déformations. Notons que la description a été donnée ici dans le contexte analytique (du fait de la nécessité de trivialiser localement et de prendre des racines r-ièmes de fonctions holomorphes), mais l'utilisation de la topologie étale aurait permis de définir la classe de Brauer et les faisceaux cohérents tordus dans le contexte algébrique (un principe GAGA s'applique également ici). Les classes de Chern d'un faisceau tordu $\mathcal{F}$ relativement à une classe de Brauer α sont données par la formule (2) lorsque $\mathcal{F}=\mathcal{E}\otimes(\det\mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$ comme ci-dessus. En général on peut utiliser une variété de Brauer–Severi $f\colon X'\to X$ sur laquelle la classe de Brauer devient triviale, de sorte que le tiré en arrière $f^*\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X', et définir les classes de Chern de $\mathcal{F}$ en utilisant celles de $f^*\mathcal{F}$, qu'on descend sur X par une formule de projection. Ces classes de Chern sont des classes de Hodge rationnelles qui sont en fait algébriques à coefficients rationnels.

Bien que cette construction puisse paraître artificielle, elle est essentielle pour améliorer le champ d'application de la théorie de la semi-régularité décrite dans la section 5, intervenant dans l'approche variationnelle de la conjecture de Hodge. En effet, le faisceau tordu $\mathcal{E} \otimes (\det \mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$ est à déterminant trivial. Il peut donc très bien se déformer avec X sans que la classe de Chern $c_1(\mathcal{E})$ reste algébrique, ce qui n'est évidemment pas le cas de $\mathcal{E}$. Cette observation est particulièrement importante dans la théorie des variétés hyper-kählériennes (voir Charles et Markman, 2013, Markman, 2020).

1.2. Cas connus de la conjecture de Hodge et exemples classiques de classes de Hodge

On peut dire qu'à part les cas triviaux $k = 0$, où $H^0(X, \mathbb{Q})$ est engendré par la classe de X lui-même, et $k = n \coloneqq \dim X$, où $H^{2n}(X, \mathbb{Q})$ est engendré par la classe d'un point de X, le seul cas connu de la conjecture de Hodge est celui où $k = 1$, pour lequel le point de vue des faisceaux est fondamental.

Théorème 1.5 (Théorème de Lefschetz sur les classes $(1, 1)$)
Soit X une variété projective lisse complexe et $\gamma \in \mathrm{Hdg}^2(X, \mathbb{Z})$ une classe de Hodge entière. Alors γ est algébrique sur X et plus précisément :

(i) Il existe un fibré en droites algébrique L sur X tel que $c_1(L) = \gamma$.

(ii) Il existe un cycle à coefficients entiers $D = \sum_i n_i D_i$, où les $D_i \subset X$ sont des fermés algébriques de codimension 1 de X, tel que $[D] \coloneqq \sum_i n_i [D_i] = \gamma$.

Il se trouve que ce cas entraîne grâce à l'isomorphisme de Lefschetz un second cas, à savoir celui des classes de courbes :

Théorème 1.6. — *Soit X une variété projective lisse complexe de dimension n et soit $\gamma \in \mathrm{Hdg}^{2n-2}(X, \mathbb{Q})$ une classe de Hodge rationnelle de degré $2n - 2$. Alors il existe un cycle $Z = \sum_i n_i Z_i$ de codimension $n-1$ de X, où $n_i \in \mathbb{Q}$ et les $Z_i \subset X$ sont des courbes, tel que $[Z] \coloneqq \sum_i n_i [Z_i] = \gamma$.*

A priori, il est difficile de construire des classes de Hodge intéressantes sur les variétés algébriques, qui ne soient pas évidemment algébriques. Cependant, il existe des classes de Hodge construites par des opérations formelles sur la cohomologie des variétés algébriques. Les classes de Weil étudiées par Markman entrent dans cette catégorie, mais aussi d'autres classes que nous décrivons ci-dessous. L'algébricité de certaines de ces classes fait l'objet des conjectures standard (voir Kleiman, 1968), très importantes dans la théorie des motifs.

Exemple 1.7 (Conjecture de Künneth standard). — Soit X une variété projective lisse complexe de dimension n et soit $\Delta_X \subset X \times X$ sa diagonale. La diagonale Δ_X est un fermé algébrique de $X \times X$ et sa classe $\delta_X \coloneqq [\Delta_X] \in H^{2n}(X \times X, \mathbb{Z})$ est donc une classe algébrique, et en particulier de Hodge. La cohomologie à coefficients rationnels $H^{2n}(X \times X, \mathbb{Q})$ admet la décomposition de Künneth

$$H^{2n}(X \times X, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{p+q=2n} H^p(X, \mathbb{Q}) \otimes H^q(X, \mathbb{Q})$$

et on voit formellement que chaque composante de Künneth $\delta_{p,q} \in H^p(X, \mathbb{Q}) \otimes H^q(X, \mathbb{Q})$ de δ_X est une classe de Hodge sur $X \times X$. Lorsque $n \geq 3$, la conjecture de Hodge pour ces classes n'est pas connue en général.

Exemple 1.8. — Soit X une variété projective lisse complexe et $k \geq 0$ un entier. Soit $b_k \coloneqq \dim H^k(X, \mathbb{Q})$. On a une inclusion composée

$$\bigwedge^{b_k} H^k(X, \mathbb{Q}) \subset H^k(X, \mathbb{Q})^{\otimes b_k} \subset H^{kb_k}(X^{b_k}, \mathbb{Q})$$

et on voit de façon formelle que le sous-espace de rang 1

$$\bigwedge^{b_k} H^k(X, \mathbb{Q}) \subset H^{kb_k}(X^{b_k}, \mathbb{Q})$$

est engendré par une classe de Hodge. L'algébricité de cette classe n'est pas connue en général.

Exemple 1.9 (Conjecture de Lefschetz standard). — Si X est une variété projective lisse complexe de dimension n et L est un fibré en droites ample sur X, la première classe de Chern $l = c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Q})$ est une classe de Kähler sur X_{an} et le théorème de Lefschetz difficile dit que pour tout $k \leq n$, on a un isomorphisme donné par le cup-produit

$$l^{n-k} \cup \colon H^k(X, \mathbb{Q}) \to H^{2n-k}(X, \mathbb{Q}). \tag{4}$$

Le morphisme $l^{n-k}\cup$ est un morphisme de structures de Hodge et fournit par dualité de Poincaré et décomposition de Künneth une classe de Hodge $\gamma_k \in \mathrm{Hdg}^{4n-2k}(X \times X, \mathbb{Q})$ telle que pour tout $\alpha \in H^k_B(X, \mathbb{Q})$

$$l^{n-k} \cup \alpha = \gamma_{k*}(\alpha) \coloneqq \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^* \alpha \cup \gamma_k).$$

Supposant L très ample, il est immédiat de voir que la classe γ_k peut être construite comme la classe du cycle $Z_k \subset \Delta_X \subset X \times X$ défini comme l'intersection, dans $\Delta_X \cong X$, de $n - k$ hypersurfaces de X de classe l. Considérons maintenant l'isomorphisme réciproque

$$(l^{n-k} \cup)^{-1} \colon H^{2n-k}(X, \mathbb{Q}) \to H^k(X, \mathbb{Q}) \tag{5}$$

de (4). Cet isomorphisme est donné par l'action d'une classe de Hodge

$$\gamma^k \in \mathrm{Hdg}^{2k}(X \times X, \mathbb{Q}).$$

La conjecture de Hodge prédit donc que cet isomorphisme est induit par l'action de la classe $[Z^k] = \gamma^k$ d'un cycle de codimension k dans $X \times X$. Cette conjecture est d'une importance capitale dans la théorie des motifs et est essentiellement ouverte, bien que connue pour certains types de variétés algébriques, telles que les variétés abéliennes

(Lieberman, 1968) et certaines variétés hyper-kählériennes (Charles et Markman, 2013, Voisin, 2022, Ancona, Cavicchi, Laterveer et Saccà, 2025).

1.3. Déformations des variétés algébriques et lieux de Hodge

La plupart des variétés projectives lisses complexes X admettent des déformations, c'est-à-dire qu'elles apparaissent comme fibre $\mathcal{X}_0 \cong X$ au-dessus de $0 \in B$ d'un morphisme projectif lisse $f\colon \mathcal{X} \to B$, où $\mathcal{X}$ et B sont quasi-projectives et B est irréductible. (Un fait remarquable dû à la théorie des variétés de Chow, ou du schéma de Hilbert, est qu'il existe un ensemble dénombrable de tels morphismes $f\colon \mathcal{X} \to B$, tel que toute variété projective lisse soit isomorphe à une fibre de f pour au moins un f.) Soit $f\colon \mathcal{X} \to B$ un tel morphisme et supposons maintenant que $X = \mathcal{X}_0$ admet une classe de Hodge $\gamma \in \mathrm{Hdg}^{2k}(X, \mathbb{Q})$. Le morphisme correspondant $f_{\mathrm{an}}\colon \mathcal{X}_{\mathrm{an}} \to B_{\mathrm{an}}$ de variétés complexes étant propre et lisse, le théorème d'Ehresmann dit que c'est une fibration C^∞, et en particulier topologique. La classe γ admet donc dans un voisinage $B_{\mathrm{an},0}$ de $0 \in B_{\mathrm{an}}$ une extension $\tilde{\gamma}_0 \in \Gamma(B_{\mathrm{an},0}, R^{2k} f_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q})$ et on peut définir le lieu de Hodge

$$B_{\gamma,0} = \{t \in B_{\mathrm{an},0},\ \tilde{\gamma}_{0,t} \in \mathrm{Hdg}^{2k}(\mathcal{X}_t, \mathbb{Q})\}.$$

Grâce aux travaux de Griffiths sur les variations de structures de Hodge, il est facile de voir que $B_{\gamma,0}$ est un fermé analytique de $B_{\mathrm{an},0}$ (Voisin, 2002b, section 17.3.1). Un résultat majeur, qui constitue un argument fort en faveur de la conjecture de Hodge, est le suivant.

Théorème 1.10 (Cattani, Deligne et Kaplan, 1995). — *Le germe d'espace analytique $B_{\gamma,0} \subset B_{\mathrm{an}}$ est ouvert dans une branche d'un fermé algébrique B_γ de B. De plus, il existe un morphisme algébrique fini $r\colon \widetilde{B}_\gamma \to B_\gamma$ tel que la section locale $r^*\tilde{\gamma}_0$ s'étende en une section globale $\tilde{\gamma}$ du système local tiré en arrière $r^{-1}(R^{2k} f_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q})$. La section $\tilde{\gamma}$ est partout de Hodge, au sens où, pour tout $t \in \widetilde{B}_\gamma$, $\tilde{\gamma}_t \in \mathrm{Hdg}^{2k}(\mathcal{X}_{r(t)})$.*

Les travaux de Deligne (1971) sur la théorie de Hodge mixte permettent de donner une version plus forte de la seconde assertion. En effet, ils entraînent le résultat suivant.

Théorème 1.11. — *Dans la situation du théorème 1.10, soit $\tilde{f}\colon \widetilde{\mathcal{X}}_\gamma \to \widetilde{B}_\gamma$ le produit fibré $\mathcal{X} \times_B \widetilde{B}_\gamma$ et soit Y une compactification lisse projective de $\widetilde{\mathcal{X}}_\gamma$. Alors il existe une classe de Hodge $\gamma_Y \in \mathrm{Hdg}^{2k}(Y, \mathbb{Q})$ induisant la section $\tilde{\gamma}$, i.e. $\tilde{\gamma}_t = \gamma_{Y|\widetilde{\mathcal{X}}_t}$ pour tout t dans $\widetilde{B}_\gamma$.*

Ces résultats constituent la première étape de l'étude variationnelle de la conjecture de Hodge. Soit X une variété projective lisse complexe et soit $\gamma \in \mathrm{Hdg}^*(X)$ une classe de Hodge sur X. Soit $f\colon \mathcal{X} \to B$ un morphisme propre et lisse de fibre $\mathcal{X}_0 = X$, et avec les notations ci-dessus, soit $f_\gamma\colon \mathcal{X}_{\gamma,0} \to B_{\gamma,0}$ la restriction de f au-dessus du lieu de Hodge $B_{\gamma,0}$.

Conjecture 1.12 (Conjecture de Hodge variationnelle). — *Si la classe γ est algébrique sur X, alors pour tout $t \in B_{\gamma,0}$, la classe de Hodge $\tilde{\gamma}_{0,t}$ est algébrique sur $\mathcal{X}_t$.*

Grâce aux théorèmes 1.10 et 1.11, la conjecture de Hodge variationnelle est en fait équivalente à la conjecture suivante.

Conjecture 1.13. — *Soit $f\colon Y \to S$ un morphisme projectif, avec Y lisse projective et S irréductible. Soit $S^0 \subset S$ l'ouvert au-dessus duquel f est lisse. Soit $\gamma \in \mathrm{Hdg}^{2k}(Y, \mathbb{Q})$. S'il existe un point $t_0 \in S^0$ tel que $\gamma_{|Y_{t_0}}$ est algébrique, alors pour tout point $t \in S^0$, $\gamma_{|Y_t}$ est algébrique.*

La conjecture 1.12 est presque complètement ouverte mais nous présenterons dans la section 5 la théorie de la semi-régularité, qui fournit des critères permettant de l'établir. On sait par des généralités sur les variétés de Chow relatives que l'ensemble $S^0_{\gamma-\mathrm{alg}}$ des points $t \in S^0$ tels que $\gamma_{|Y_t}$ est algébrique, est une union dénombrable de fermés algébriques de S^0. On sait, grâce à la construction par Kollár de contre-exemples à la conjecture de Hodge entière (voir Kollár, 1990), que la conjecture 1.12 devient fausse si on la formule pour les classes de Hodge entières. On sait aussi (voir par exemple André, 2006) que la conjecture de Lefschetz standard (Exemple 1.9) entraîne la conjecture 1.13 et donc la conjecture de Hodge variationnelle 1.12. Finalement Deligne (1982) et André (1996) étudient systématiquement les classes de Hodge $\gamma_{|Y_t}$ apparaissant dans la conjecture 1.13, qui ont par hypothèse la propriété de se spécialiser en une classe algébrique sur au moins une fibre. Ces classes sont généralisées par André sous la forme des “classes de Hodge motivées”, et par Deligne sous la forme des “classes de Hodge absolues”. Il est montré par Deligne (1982) que les classes de Hodge sur les variétés abéliennes sont engendrées par des classes de Hodge satisfaisant cette propriété.

1.4. Stratégie de la démonstration

Je renvoie à la section 2.3 pour la réduction du théorème 1.3 au théorème 1.4. Pour la preuve du théorème 1.4, Markman utilise la spécialisation déjà utilisée par Deligne (1982). Une variété abélienne de Weil de dimension $2n$ se spécialise sur un produit $X \times X$, où X est une variété abélienne de dimension n très générale (voir section 3.1). De plus, sous cette spécialisation, les classes de Weil deviennent algébriques (comme le sont toutes les classes de Hodge sur un produit $X \times X$, avec X très générale). Markman étudie alors la conjecture de Hodge variationnelle (conjecture 1.12) pour les classes de Weil spécialisées. Dans le cas qui nous intéresse, on a $n = 3$ et les variétés abéliennes X (qu'on peut choisir principalement polarisées grâce à l'hypothèse de discriminant 1) sont donc des jacobiennes de courbes. La variété abélienne X étant principalement polarisée et donc isomorphe à sa duale $\widehat{X}$, Markman construit explicitement sur un quotient Y de $X \times \widehat{X}$ un faisceau cohérent sans torsion de rang r tordu $\mathcal{E}_Y \otimes (\det \mathcal{E}_Y)^{\frac{-1}{r}}$ qui satisfait la condition de semi-régularité de Buchweitz–Flenner, et dont les classes de Chern en degré 6 sont des *classes de Hodge–Weil*, c'est-à-dire des combinaisons des classes de Weil et des puissances de la polarisation. Ce sont aussi les classes de Hodge sur $X \times X$ qui restent de Hodge lorsque $X \times X$ se déforme comme variété abélienne de Weil. On notera $\mathrm{HW}(A)$ l'espace des classes de Hodge–Weil pour une variété abélienne de Weil A projective.

La théorie de la semi-régularité (voir section 5) a été initiée par Bloch (1972). C'est *a priori* l'outil idéal pour attaquer la conjecture de Hodge variationnelle mais elle a été quelque peu délaissée du fait du manque d'objets semi-réguliers fournissant des applications. Si on prend le cas le plus simple d'une sous-variété $Z \subset W$, où W est projective lisse, la semi-régularité de Z introduite par Bloch est une condition cohomologique garantissant que pour toute déformation d'ordre fini, c'est-à-dire toute déformation $W_A \to \operatorname{Spec} A$ de W paramétrée par un schéma de longueur finie, telle que la classe $[Z]$ de $Z \subset W$ reste une classe de Hodge sur W_A, il existe un sous-schéma $Z_A \subset W_A$ plat au-dessus de $\operatorname{Spec} A$ et étendant $Z \subset W$. Cela permet donc d'établir une version formelle de la conjecture de Hodge variationnelle pour $\gamma = [Z]$. On conclut finalement par le théorème d'algébrisation d'Artin (1969) que la conjecture de Hodge variationnelle est satisfaite par $\gamma = [Z]$. Markman a recours à la théorie analogue de la semi-régularité développée par Buchweitz et Flenner (2003) pour les faisceaux et l'étend au cas des faisceaux tordus, au moins sur les variétés abéliennes. La preuve de la propriété de semi-régularité pour le faisceau $\mathcal{E}_Y$ sur le quotient Y de $X \times \widehat{X}$ repose sur le fait que X est la jacobienne d'une courbe C de genre 3, et que l'idéal de C dans X est semi-régulier (lemme 5.3).

Les variétés de Weil spécialisées $X \times \widehat{X}$ possèdent beaucoup plus de classes de Hodge que les classes de Hodge–Weil. Les classes de Hodge–Weil sont caractérisées par leur invariance sous un certain groupe de spineurs agissant sur $H^*(X \times \widehat{X}, \mathbb{Q})$. L'invariance des classes de Chern du faisceau tordu $\mathcal{E}_Y \otimes (\det \mathcal{E}_Y)^{\frac{-1}{r}}$ sous ce groupe de spineurs résulte de l'étude cohomologique du foncteur d'Orlov (voir section 3.2) utilisé par Markman pour construire $\mathcal{E}_Y$ en partant d'un faisceau très simple sur $X \times X$. Cette construction sera présentée dans la section 3.3.

Remarque 1.14. — Il est nécessaire ici de travailler avec les classes de Hodge–Weil et pas seulement avec les classes de Weil. Il n'est pas possible en effet de construire des faisceaux tordus semi-réguliers sur $X \times \widehat{X}$ dont les classes de Chern soient des classes de Weil. Ceci entraînerait que les classes de Weil sur $X \times \widehat{X}$ restent des classes de Chern de faisceaux analytiques tordus sur une déformation générale de $X \times \widehat{X}$ comme tore complexe de Weil. Or il est prouvé par Voisin (2002a) que les classes de Weil sur un tore complexe de Weil très général de dimension ≥ 4 ne sont pas analytiques.

Remerciements. *Je remercie Eyal Markman pour sa patience et la clarté de ses réponses à mes questions parfois très naïves au cours de la préparation de cet exposé.*

2. Variétés abéliennes de Weil et classes de Weil

2.1. Tores complexes

Soit A une variété abélienne de dimension n sur $\mathbb{C}$, qu'on voit ici comme une variété complexe. Le point de vue de la géométrie analytique permet d'appliquer l'uniformisation et de conclure que A est un tore complexe

$$A \cong \mathbb{C}^n/\Gamma,$$

où $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ est un réseau cocompact, donc $\Gamma \cong \mathbb{Z}^{2n}$. Ce point de vue permet de décrire explicitement la topologie de A et la décomposition de Hodge sur ses groupes de cohomologie. En effet on a des isomorphismes canoniques

$$\Gamma \cong H_1(A,\mathbb{Z}),\ H^i(A,\mathbb{Z}) \cong \bigwedge^i \Gamma^*,$$

et l'inclusion $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ s'étend en une application surjective

$$\beta\colon \Gamma_{\mathbb{C}} \coloneqq \Gamma \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$$

d'espaces vectoriels complexes, de noyau Γ'. On a alors

$$\Gamma^*_{\mathbb{C}} = H^1(A,\mathbb{C}),\ H^{1,0}(A) = (\Gamma')^{\perp} = \beta^*((\mathbb{C}^n)^*) \subset H^1(A,\mathbb{C}), \tag{6}$$

et $(\Gamma')^* \cong H^{0,1}(A) = \overline{H^{1,0}(A)}$. Finalement

$$H^1(A,\mathbb{C}) = H^{1,0}(A) \oplus H^{0,1}(A) \tag{7}$$

$$H^{p,q}(A) = \bigwedge^p H^{1,0}(A) \otimes \bigwedge^q H^{0,1}(A) \subset \bigwedge^{p+q} H^1(A,\mathbb{C}) = H^{p+q}(A,\mathbb{C}). \tag{8}$$

La principale difficulté de ce point de vue est que les objets et constructions décrits ici ne voient pas la structure algébrique de A, mais seulement sa structure de tore complexe. L'algébricité de A se traduit, grâce au théorème de plongement de Kodaira (1954), par l'existence d'une classe de Kähler entière $\theta \in H^2(A,\mathbb{Z}) \cong \bigwedge^2 \Gamma^*$, qui fournit donc une forme d'intersection alternée non dégénérée sur Γ, satisfaisant des conditions, dites de Hodge–Riemann, de positivité et de compatibilité avec la décomposition (7). Cette donnée, appelée une polarisation, introduit un invariant discret, le type de la polarisation qui décrit la classe d'isomorphisme de la forme d'intersection alternée entière sur Γ (voir Debarre, 1999, Chapitre IV.1). En fait, lorsqu'on s'intéresse aux variétés abéliennes seulement à isogénie près, ce qui est le cas pour l'étude de la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes, on remplace les données précédentes par le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Gamma_{\mathbb{Q}} \coloneqq \Gamma \otimes \mathbb{Q}$ munie de sa forme alternée à coefficients rationnels, et le seul invariant discret qui subsiste est le discriminant, un nombre rationnel bien défini modulo les carrés.

2.2. Variétés abéliennes de Weil, classes de Weil et polarisations

Une variété abélienne de Weil est une variété abélienne A de dimension paire $2n$ admettant un endormorphisme $\phi\colon A \to A$ tel que $\phi^2 = -d\,\mathrm{Id}_A$ pour un entier $d > 0$ et satisfaisant de plus une condition que nous décrivons maintenant. L'endomorphisme ϕ agit par tiré en arrière sur la cohomologie de degré 1 de A. L'endomorphisme

$$\phi^*\colon H^1(A,\mathbb{C}) \to H^1(A,\mathbb{C})$$

préserve le sous-espace $H^{1,0}(A) \subset H^1(A, \mathbb{C})$ qui est de dimension $2n$, et satisfait l'équation

$$(\phi^*)^2 = -d \,\mathrm{Id}_{H^1(A,\mathbb{C})}.$$

La condition de Weil est que ϕ^* agissant sur $H^{1,0}(A)$ ait exactement n valeurs propres égales à $i\sqrt{d}$ et n valeurs propres égales à $-i\sqrt{d}$. Soit $W^+ \subset H^1(A, \mathbb{C})$ le sous-espace propre de ϕ^* associé à la valeur propre $i\sqrt{d}$ et soit $W^- \subset H^1(A, \mathbb{C})$ son conjugué complexe, qui est le sous-espace propre de ϕ^* associé à la valeur propre $-i\sqrt{d}$. Ces deux espaces vectoriels sont de dimension $2n$.

Lemme 2.1. — *Sous la condition de Weil, les sous-espaces vectoriels de dimension* 1

$$\bigwedge^{2n} W^+ \subset \bigwedge^{2n} H^1(A, \mathbb{C}) = H^{2n}(A, \mathbb{C}),$$

$$\bigwedge^{2n} W^- \subset \bigwedge^{2n} H^1(A, \mathbb{C}) = H^{2n}(A, \mathbb{C})$$

sont contenus dans $H^{2n,2n}(A)$.

Démonstration. — En effet comme ϕ^* préserve la décomposition de Hodge (7), on a $W^+ = W^{+1,0} \oplus W^{+0,1}$, où $W^{+1,0} := W^+ \cap H^{1,0}(A)$, et $W^{+0,1} := W^+ \cap H^{0,1}(A)$. On sait par hypothèse (condition de Weil) que chacun des deux espaces $W^{+1,0}$, $W^{+0,1}$ est de dimension n. En effet $W^{+1,0}$ est l'espace propre associé à la valeur propre $i\sqrt{d}$ pour l'action de ϕ^* sur $H^{1,0}(A)$. Donc

$$\bigwedge^{2n} W^+ = \bigwedge^{n} W^{+1,0} \otimes \bigwedge^{n} W^{+0,1} \subset H^{n,n}(A),$$

et de même $\bigwedge^{2n} W^- \subset H^{n,n}(A)$. □

Soit K le corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. On verra K comme contenu dans $\mathbb{C}$, $\sqrt{-d} \in K$ étant envoyé sur $i\sqrt{d} \in \mathbb{C}$. On note que les espaces $\bigwedge^{2n} W^+$, $\bigwedge^{2n} W^-$ ci-dessus sont en fait définis sur K dans le sens suivant :

Lemme 2.2. — *Il existe un K-sous-espace vectoriel W_K^+ de rang* 1 *de* $\bigwedge^{2n} H^1(A, K)$ *tel que*

$$W_K^+ \otimes \mathbb{R} = \bigwedge^{2n} W^+ \subset \bigwedge^{2n} H^1(A, \mathbb{C}) = \bigwedge^{2n} H^1(A, K) \otimes \mathbb{R}.$$

Cela résulte en effet du fait que les espaces W^+ et W^- sont définis sur K, étant des espaces propres de ϕ^* pour des valeurs propres qui sont dans K.

Corollaire 2.3. — *Il existe un sous-espace vectoriel*

$$W_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{Hdg}^{2n}(A, \mathbb{Q})$$

de dimension 2, *tel que*

$$W_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigwedge^{2n} W^+ \bigoplus \bigwedge^{2n} W^-.$$

Démonstration. — On prend pour $W_{\mathbb{Q}}$ la trace $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}} W_K^+$, qui est de dimension 2 par le lemme 2.2. Par le lemme 2.1, $W_{\mathbb{Q}}$ est contenu dans $H^{2n,2n}(A)$ et donc est contenu dans l'espace des classes de Hodge. □

La construction décrite ci-dessus n'a fait intervenir que le tore complexe A, et on peut donc parler de tores complexes de Weil et de leurs classes de Weil. Les variétés abéliennes de Weil sont des variétés projectives, admettant donc un fibré en droites ample L de classe $\theta = c_1(L) \in \mathrm{Hdg}^2(A, \mathbb{Q})$. Comme $\phi^2 = -d\,\mathrm{Id}_A$, l'action

$$\phi^* \colon H^2(A, \mathbb{Q}) \to H^2(A, \mathbb{Q})$$

de ϕ sur $H^2(A, \mathbb{Q}) = \bigwedge^2 H^1(A, \mathbb{Q})$ satisfait

$$(\phi^*)^2 = d^2 \mathrm{Id}_{H^2(A,\mathbb{Q})}.$$

L'espace vectoriel $H^2(A, \mathbb{Q})$ est donc la somme directe

$$H^2(A, \mathbb{Q}) = H^2(A, \mathbb{Q})_d \bigoplus H^2(A, \mathbb{Q})_{-d}$$

des espaces propres associés aux valeurs propres d et $-d$. Chacun de ces sous-espaces est une sous-structure de Hodge de $H^2(A, \mathbb{Q})$, c'est-à-dire, est stable sous la décomposition (1).

Lemme 2.4. — *Pour toute variété abélienne de Weil, il existe une polarisation ω de A qui est dans $H^2(A, \mathbb{Q})_d$, c'est-à-dire satisfait*

$$\phi^*\omega = d\,\omega. \tag{9}$$

Démonstration. — Si $\theta_0 = c_1(L)$ est une polarisation, $\omega := d\,\theta_0 + \phi^*\theta_0$ est aussi une polarisation, qui satisfait (9). □

Une telle polarisation ω sera dite compatible avec l'action de K. On peut montrer (voir van Geemen, 1994) que le nombre de Picard d'une variété abélienne de Weil très générale est égal à 1, c'est-à-dire que la polarisation ω ci-dessus est unique à un multiple près. Le discriminant d'une telle variété abélienne polarisée est un élément (positif) de $\mathbb{Q}^*/\mathrm{Nm}(K^*)$, où $\mathrm{Nm}(K^*)$ est le sous-groupe de $\mathbb{Q}^*$ constitué des normes d'éléments de K^*. Il est obtenu en associant à la polarisation $\omega \in H^2(A, \mathbb{Q})$ invariante sous ϕ la forme hermitienne h_ω sur l'espace vectoriel $H_1(A, \mathbb{Q})$ vu comme un K-espace vectoriel, définie par

$$h_\omega(u, v) = -\omega(u, \phi_* v) + \sqrt{-d}\,\omega(u, v).$$

Le discriminant est défini comme le déterminant de la matrice de cette forme hermitienne dans une K-base de $H_1(A, \mathbb{Q})$. Le corps K étant donné, le discriminant est l'unique invariant discret des variétés abéliennes de Weil pour K à *isogénie* près (la classification à *isomorphisme* près étant évidemment plus compliquée). Si on fixe d, n, ϕ_* agissant sur Γ et la classe d'isomorphisme à coefficients entiers de la polarisation compatible ω, il existe une famille connexe paramétrant les variétés abéliennes de Weil A avec action de ϕ_* sur le réseau $H_1(A, \mathbb{Z})$ et polarisation compatible ω du type fixé. En effet, comme variété projective, A est déterminée par la variété complexe A munie de sa polarisation ω et comme tore complexe, A est déterminée par le sous-espace vectoriel de dimension n complexe $H_{1,0}(A) \subset H_1(A, \mathbb{C})$ (noté Γ' dans (6)), qui doit être invariant sous ϕ_*. Introduisant comme ci-dessus les espaces propres

$$W_+,\, W_- \subset H_1(A, \mathbb{C})$$

pour ϕ_*, A est déterminée par le choix des deux sous-espaces vectoriels complexes de dimension n,

$$W_{+(1,0)} \subset W_+,\, W_{-(1,0)} \subset W_- \tag{10}$$

puisque

$$H_{1,0}(A) = W_{+(1,0)} \bigoplus W_{-(1,0)}.$$

Les deux espaces (10) déterminent respectivement par conjugaison complexe

$$W_{-(0,1)} \subset W_-,\ W_{+(0,1)} \subset W_+.$$

Mais par ailleurs la condition que ω polarise A entraîne que $W_{+(1,0)}$ est orthogonal à $W_{-(1,0)} \subset W_-$ relativement à $\omega \in \bigwedge^2 H^1(A, \mathbb{C})$. Donc $W_{+(1,0)}$ détermine $W_{-(1,0)}$ par la formule

$$W_{-(1,0)} = W_- \cap W_{+(1,0)}^{\perp\omega},$$

du fait que par l'invariance (9), les deux espaces W_+ et W_- sont lagrangiens et duaux pour ω. Finalement, l'espace $W_{+(1,0)}$ n'est pas arbitraire dans la grassmannienne $G(n, W_+)$, car

$$W_{+(1,0)} \bigoplus W_{-(1,0)} = H_{1,0}(A) \subset H_{1,B}(A, \mathbb{C})$$

doit satisfaire également les secondes relations bilinéaires de Hodge–Riemann (voir Debarre, 1999, Chapitre IV.1 ou Voisin, 2002b, section 7.2.2) relatives à ω, disant que la forme hermitienne $h'_\omega(u, v) \coloneqq i\omega(u, \overline{v})$ est définie positive sur $H_{1,0}(A)$. Cette condition définit un ouvert de la grassmannienne $G(n, W_+)$. On obtient de cette manière une uniformisation de l'espace de modules des variétés abéliennes de Weil relatives à K par une variété complexe connexe, les invariants numériques entiers de la polarisation étant fixés.

2.3. Réduction aux classes de Weil

Une variété abélienne complexe A a une algèbre de cohomologie très riche, à savoir

$$H^*(A, \mathbb{Q}) \cong \bigwedge^* H^1(A, \mathbb{Q}).$$

L'ensemble des classes de Hodge

$$\mathrm{Hdg}^{2*}(A, \mathbb{Q}) \subset H^{2*}(A, \mathbb{Q})$$

est une sous-algèbre, qui contient par ailleurs au minimum les puissances θ^i, $i = 1, \ldots, g$ d'une polarisation $\theta = c_1(L)$. Les classes de Hodge γ agissent par cup-produit sur $H^*(A, \mathbb{Q})$ et les morphismes induits

$$\gamma\cup\colon H^i(A, \mathbb{Q}) \to H^{i+2c}(A, \mathbb{Q}),\ 2c = \deg \gamma,$$

sont des morphismes de structure de Hodge (i.e. sont compatibles avec la décomposition de Hodge (1)), réduisant fortement le *groupe de Mumford–Tate* $\mathrm{MT}(A)$ (voir Deligne, 1982). On peut définir ce dernier comme le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathrm{End}(H^1(A,\mathbb{Q}))$ contenant (après extension à $\mathbb{R}$) la copie du sous-groupe $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ des nombres complexes de module 1, agissant sur $a = a^{1,0} + a^{0,1} \in H^1(A,\mathbb{R})$ par

$$z \cdot a = za^{1,0} + \overline{z}a^{0,1}$$

et donc déterminant la décomposition de Hodge (7, 8). Son lien avec les classes de Hodge est que les classes de Hodge de A sont clairement invariantes sous $\mathrm{MT}(A)$ (puisqu'elles le sont sous $\mathbb{S}^1$) et qu'inversement $\mathrm{MT}(A)$ peut être défini comme le sous-groupe algébrique de $\mathrm{End}(H^1(A,\mathbb{Q}))$ laissant invariantes les classes de Hodge sur les puissances A^k pour tout k. L'étude du groupe de Mumford–Tate $\mathrm{MT}(A)$ a donné lieu à de nombreux résultats (voir entre autres Tankeev, 1982, Moonen et Zarhin, 1995, Hazama, 1989). Par exemple, Tankeev (1982) montre le résultat suivant :

Théorème 2.5. — *Soit A une variété abélienne simple sur $\mathbb{C}$, dont la dimension g est un nombre premier. Alors la $\mathbb{Q}$-algèbre des classes de Hodge de A est engendrée par les classes de Hodge de degré 2 de A.*

On dit ici que A est simple si elle n'est pas isogène à un produit non trivial de variétés abéliennes. Comme la conjecture de Hodge est connue en degré 2 (théorème 1.5), il en résulte que sous les hypothèses du théorème 2.5, A satisfait la conjecture de Hodge. En dimension 5, seules les variétés abéliennes non simples nécessitent une analyse supplémentaire. Pour les applications au théorème de Markman, l'article de Moonen et Zarhin (1999) fournit exactement la réduction désirée de la conjecture de Hodge au cas des classes de Weil.

Théorème 2.6 (Moonen et Zarhin, 1999, Theorem 0.1 et Theorem 0.2)
Soit X une variété abélienne sur $\mathbb{C}$, avec $\dim X \leq 5$. Alors la $\mathbb{Q}$-algèbre des classes de Hodge rationnelles de X est engendrée par les classes de Hodge de degré 2 et par des classes de Weil sur certains facteurs de X admettant un endomorphisme quadratique.

Remarque 2.7. — Dans *loc. cit.*, les auteurs donnent également la liste des groupes de Mumford–Tate possibles, ce qui revient à analyser les classes de Hodge sur les puissances A^k.

Corollaire 2.8. — *La conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes de dimension au plus 5 est entraînée par la conjecture de Hodge pour les classes de Weil sur les variétés abéliennes de Weil de dimension ≤ 4.*

Comme on l'a vu plus haut, une variété abélienne de Weil a un corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ associé et un discriminant $\delta \in \mathbb{Q}^{*+}/\mathrm{Nm}(K^*)$.

Lemme 2.9. — *Le produit $A_1 \times A_2$ de deux variétés abéliennes de Weil de même corps K associé et de discriminants respectifs δ_1, δ_2 est une variété abélienne de Weil de discriminant $\delta_1\delta_2$. De plus, si la conjecture de Hodge est satisfaite par les classes de Weil sur A_1 et par les classes de Weil sur $A_1 \times A_2$, alors elle l'est par les classes de Weil sur A_2.*

Démonstration. — L'ensemble des classes de Weil sur $A_1 \times A_2$ est un sous-espace vectoriel $W(A_1 \times A_2)$ de dimension 2 non dégénéré de $W(A_1) \otimes W(A_2)$. La restriction de la forme d'intersection de $H^{2g_1}(A_1, \mathbb{Q})$, $g_1 := \dim A_1$, à l'espace $W(A_1)$ des classes de Weil sur A_1 est non dégénérée. Partant d'une classe de Weil $w_2 \in W(A_2)$, on peut donc écrire w_2 de la façon suivante

$$w_2 = \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^* w_1 \cup w),$$

où $w \in W(A_1 \times A_2)$, et $w_1 \in W(A_1)$. Dans cette formule, les classes w_1 et w sont par hypothèse algébriques, et donc w_2 est algébrique. $\square$

On déduit de ce corollaire, en utilisant le théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$ (Théorème 1.5) lorsque $\dim A_1 = 2$, le résultat suivant.

Corollaire 2.10. — *Le corps K étant donné, la conjecture de Hodge pour les classes de Weil sur les variétés abéliennes de Weil pour le corps K, de dimension 6 et de discriminant 1, entraîne la conjecture de Hodge pour les classes de Weil sur les variétés abéliennes de Weil pour le corps K, de dimension 4 et de discriminant arbitraire. Elle entraîne donc également la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes de dimension ≤ 5 par le corollaire 2.8.*

3. Foncteur d'Orlov et faisceaux sur $X \times \widehat{X}$

3.1. Spécialisation des variétés abéliennes de Weil

Soit X une variété abélienne de dimension n et soit $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Soit $A := X \times X$. Soit ϕ l'endomorphisme de A défini par

$$\phi(a, b) = (-b, d\,a). \tag{11}$$

De toute évidence, on a $\phi^2 = -d\,\mathrm{Id}_A$. Vérifions que A est une variété abélienne de Weil. L'action de ϕ^* sur $H^{1,0}(A) = \mathrm{pr}_1^* H^{1,0}(X) \oplus \mathrm{pr}_2^* H^{1,0}(X)$ est donnée par la formule

$$\phi^*(\alpha, \beta) = (d\,\beta, -\alpha).$$

L'espace propre associé à la valeur propre $i\sqrt{d}$ de ϕ^* agissant sur $H^{1,0}(A)$ est donc isomorphe à $H^{1,0}(X)$ et de dimension n. La variété abélienne A est donc une variété abélienne de Weil, associé au corps K. Ces variétés abéliennes de Weil sont des spécialisations de variétés abéliennes de Weil générales. C'est la spécialisation utilisée par Markman en dimension 6, X étant alors de dimension 3. Notons que cette spécialisation est utilisée également par Deligne (1982) pour montrer que les classes de Hodge sur les variétés abéliennes se spécialisent sur des classes algébriques. En effet, lorsque la variété X est une variété abélienne très générale, toutes les classes de Hodge sur $X \times X$ sont algébriques. L'action ϕ^* de ϕ sur

$$H^2(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{pr}_1^* H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{pr}_2^* H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{pr}_1^* H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{pr}_2^* H^1(X, \mathbb{Z})$$

est donnée par

$$\phi^*(\mathrm{pr}_1^*\omega) = \mathrm{pr}_2^*\omega,\ \phi^*(\mathrm{pr}_2^*\omega) = d^2\mathrm{pr}_1^*\omega,\ \phi^*(\mathrm{pr}_1^*\alpha \wedge \mathrm{pr}_2^*\beta) = -d\,\mathrm{pr}_2^*\alpha \wedge \mathrm{pr}_1^*\beta. \tag{12}$$

Si X est très générale de polarisation θ_X, il résulte de (12) que les polarisations invariantes de $A = X \times X$ sont de la forme

$$\omega = d\,\mathrm{pr}_1^*\theta_X + \mathrm{pr}_2^*\theta_X. \tag{13}$$

Si de plus θ_X est unimodulaire (de sorte que (X, θ_X) est une variété abélienne principalement polarisée), le discriminant de ω est une puissance de d, qui est une norme de K et donc les variétés abéliennes de Weil obtenues en partant d'une variété abélienne X principalement polarisée sont de discriminant 1. Dans ce cas, X est aussi isomorphe à sa variété abélienne duale $\widehat{X} = \mathrm{Pic}^0(X)$.

Une variété abélienne de Weil A pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ et de discriminant 1 se spécialise (après isogénie) sur un produit $X \times X$ comme ci-dessus. On connaît l'algèbre des classes de Hodge sur le produit $X \times X$ pour X très générale. Elle est engendrée par $\mathrm{Hdg}^2(X \times X, \mathbb{Q})$, qui est de dimension 3. Nous aborderons dans la section 4 la question suivante : quelles sont les spécialisations sur $X \times X$ des classes de Weil sur A ? En fait, comme déjà mentionné, c'est l'espace $\mathrm{HW}(X \times X)$ des classes de Hodge–Weil, combinaisons linéaires des classes de Weil et des puissances de la polarisation qui nous intéresse pour cette question.

3.2. Foncteur d'Orlov

Soit X une variété abélienne complexe, et $\widehat{X} = \mathrm{Pic}^0(X)$ sa variété abélienne duale. Les tores complexes correspondants X et $\widehat{X}$ sont donc duaux au sens où les décompositions de Hodge sur $H^1(X, \mathbb{Z})$ et $H^1(\widehat{X}, \mathbb{Z}) = H^1(X, \mathbb{Z})^*$ sont duales. Soit

$$\mathcal{P} \in \mathrm{Pic}(X \times \widehat{X})$$

le fibré de Poincaré, c'est-à-dire le fibré en droites uniquement déterminé par le fait que

$$\mathcal{P}_{|X \times \{\hat{o}\}} = \mathcal{O}_X,\ \mathcal{P}_{|\{o\} \times \widehat{X}} = \mathcal{O}_{\widehat{X}},$$

où o, $\hat{o}$ sont les origines des variétés X, $\widehat{X}$, et $c_1(\mathcal{P}) \in \mathrm{Hdg}^2(X \times \widehat{X}, \mathbb{Z})$ est donnée par

$$\mathrm{Id}_{H^1(X,\mathbb{Z})^*} \in \mathrm{Hom}(H^1(X, \mathbb{Z})^*, H^1(X, \mathbb{Z})^*) = H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes H^1(\widehat{X}, \mathbb{Z}) \subset H^2(X \times \widehat{X}, \mathbb{Z}).$$

La restriction de $\mathcal{P}$ à la fibre $X \times \{L\}$, $L \in \widehat{X}$, est (avec un abus de notation) le fibré en droites L. On note $D^b(Y)$ la catégorie dérivée d'une variété algébrique lisse Y. C'est la catégorie des complexes de faisceaux cohérents bornés à gauche de Y, considérés à quasi-isomorphisme près. Le foncteur de Fourier–Mukai $\mathcal{P}$

$$D^b(X) \to D^b(\widehat{X})$$

associé à $\mathcal{P}$ est une équivalence de catégories définie par Mukai (1981) comme

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}) = R\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}). \tag{14}$$

Le foncteur de Fourier–Mukai agit sur la cohomologie à coefficients rationnels par la formule

$$\Phi_{\mathcal{P}*}(\alpha) = \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^*\alpha \cup \exp(c_1(\mathcal{P})). \tag{15}$$

Il n'est pas difficile de voir que $\Phi_{\mathcal{P}*}$ préserve la structure entière et est en fait l'isomorphisme

$$H^*(X, \mathbb{Z}) \cong H^*(X, \mathbb{Z})^* \cong H^*(\widehat{X}, \mathbb{Z})$$

où le premier isomorphisme est donné par la dualité de Poincaré. Notons que par le théorème de Grothendieck–Riemann–Roch (Borel et Serre, 1958), les formules (14) et (15) sont compatibles au sens où

$$\mathrm{ch}(\Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})) = \Phi_{\mathcal{P}*}(\mathrm{ch}(\mathcal{E})).$$

Le foncteur d'Orlov est une équivalence de catégories

$$\Phi\colon D^b(X \times X) \to D^b(X \times \widehat{X})$$

introduite par Orlov (2002) et définie de la façon suivante. Soit $\tilde{\mu}\colon X \times X \to X \times X$ l'automorphisme défini par

$$\tilde{\mu}(u, v) = (u + v, v).$$

Soient pr_{12}, pr_{13}, pr_{23} les trois projections de $X \times X \times \widehat{X}$ sur $X \times X$ et $X \times \widehat{X}$.

$$\Phi(\mathcal{F}) = R\mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}_{12}^*(\tilde{\mu}^*\mathcal{F}) \otimes \mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{P}). \tag{16}$$

Partons du cas (qui sera celui qui nous intéresse) où $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent de la forme

$$\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \coloneqq \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}_2.$$

Alors la restriction du faisceau $\mathrm{pr}_{12}^*(\tilde{\mu}^*(\mathcal{F}))$ à la fibre $\{u\} \times X \times \{L\}$ de pr_{13} au-dessus de (u, L), est égale à

$$t_{u*}\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$

et la restriction de $\mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{P}$ à cette même fibre est isomorphe à L. Le complexe $\Phi(\mathcal{F})$ sur $X \times \widehat{X}$ encode donc la cohomologie des faisceaux

$$t_{u*}\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes L,\ u \in X,\ L \in \widehat{X} \tag{17}$$

sur X.

Le foncteur Φ est une équivalence de catégories car il est aussi la composée des équivalences de catégories $\tilde{\mu}^*\colon D^b(X \times X) \to D^b(X \times X)$ et du foncteur de type Fourier–Mukai

$$D^b(X \times X) \to D^b(X \times \widehat{X})$$

associé à $\mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{P}$ sur $X \times X \times \widehat{X}$, qui est aussi une équivalence de catégories par les mêmes arguments que dans Mukai (1981).

3.3. Construction d'un faisceau tordu

Soit C une courbe de genre 3 non hyperelliptique. Choisissons un plongement $C \subset X \coloneqq J(C)$, où $J(C)$ est la jacobienne de C. Soient G_1, G_2 deux sous-groupes cycliques d'ordre $d+1$ de $J(C)$, agissant sur X par translation. Le nombre d qui apparaît ici est celui qui déterminera le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ plus tard. Pour des choix génériques de C, de son plongement dans X et de G_1, G_2, les translatés

$$C_i \coloneqq C + s_i \subset X,\ G_1 = \{o,\ s_1, \dots,\ s_d\}$$

sont disjoints deux à deux et les translatés

$$C'_j \coloneqq -C + t_j \subset X,\ G_2 = \{\hat{o},\ t_1, \dots,\ t_d\}$$

sont disjoints deux à deux. De plus $C_i \cap C'_j = \emptyset$ pour tous i, j.

Avec ces notations, soient

$$\mathcal{F}_1 \coloneqq \mathcal{I}_{\cup_{i=0}^d C_i}(\Theta) \subset \mathcal{O}_X(\Theta),\ \mathcal{F}_2 \coloneqq \mathcal{I}_{\cup_{j=0}^d C'_j}(\Theta) \subset \mathcal{O}_X(\Theta), \tag{18}$$

où Θ est un diviseur Thêta fixé de $J(C)$. Considérons l'objet

$$\mathcal{G} \coloneqq \Phi(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \in D^b(X \times \widehat{X}).$$

A priori c'est un complexe, mais sous des hypothèses de généricité, c'est en fait le dual (au sens dérivé) d'un faisceau cohérent et même réflexif sur $X \times \widehat{X}$.

Théorème 3.1 (Markman, 2025, Proposition 9.2.2). — *Si C et les groupes G_i sont génériquement choisis, les faisceaux de cohomologie $\mathcal{G}^i$ de $\mathcal{G}$ satisfont aux propriétés suivantes : $\mathcal{G}^0 = 0$, $\mathcal{G}^3 = 0$, le faisceau $\mathcal{G}^2$ est de torsion supporté sur un fermé de codimension 4 de $X \times \widehat{X}$ et, notant $\mathcal{E} \coloneqq (\mathcal{G}^1)^*$, on a*

i) Le faisceau cohérent $\mathcal{E}$ est réflexif et $\mathcal{G}^1 \cong \mathcal{E}^*$.

ii) Le complexe $\mathcal{G}$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{E}xt(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X\times\widehat{X}})[1]$. En particulier

$$\mathcal{G}^1 \cong \mathcal{E}^*,\ \mathcal{G}^2 \cong \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X\times\widehat{X}}),$$

et $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X\times\widehat{X}}) = 0$ pour $i \geq 2$.

Commentons tout d'abord les conditions de généricité. Elles concernent les intersections entre la courbe $C_\bullet \coloneqq \bigcup_{i=0}^d C_i$ et les translatés de la courbe $C'_\bullet \coloneqq \bigcup_j C'_j$. On notera $C'_u = t_u(C')$ le translaté de C' par $u \in J(C)$.

Lemme 3.2. — *Si l'intersection $C \cap C'_u$, pour $u \in J(C)$, est non vide, alors elle est constituée de deux points (ou d'un point de multiplicité 2). Cette condition est satisfaite pour u dans un diviseur $\Theta_{CC'} \subset J(C)$.*

Démonstration. — En effet, soit $z \in \mathrm{Pic}^1(C)$ donnant le plongement $C \subset J(C) = \mathrm{Pic}^0(C)$. Pour $u \in J(C) = \mathrm{Pic}^0(C)$, un point de $C \cap C'_u$ est un point $x \in C$ tel que

$$x - z = -x' + z + u \text{ dans } \mathrm{Pic}^0(C),$$

pour un point x' de C. Ceci équivaut au fait que $x+x' = 2z+u$ dans $\mathrm{Pic}^2(C)$, équation symétrique en x et x', et réalisée pour u dans une hypersurface de $J(C)$, qui est un diviseur Thêta (c'est-à-dire un translaté de $C^{(2)} \subset J(C)$). $\square$

La première condition est la suivante

(A) (Markman, 2025, Assumption 9.1.1) On a $H^0(X, \mathcal{I}_{C_\bullet}(2\Theta + L)) = 0$ pour tout $L \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Cette hypothèse est évidemment satisfaite si d est suffisamment grand, ce qu'on peut supposer quitte à remplacer d par $m^2 d$ pour m grand.

Une autre condition imposée est que les courbes translatées C_i soient disjointes deux à deux, ce qui est facile à réaliser, au moins pour C générique.

La seconde condition est la suivante

(B) (Markman, 2025, Assumption 9.2.1.) Les $(d+1)^2$ surfaces $\Theta_{ij} := C_i - C'_j$ (qui sont des translatés de diviseurs Thêta comme expliqué ci-dessus) sont en position générale, au sens où leurs intersections triples sont de dimension 0 et leurs intersections quadruples sont vides.

Une dernière condition facile à réaliser est que le groupe $G_1 \times G_2$ s'injecte dans X.

Preuve du théorème 3.1. — Rappelons que par (16) et (18), on a

$$\mathcal{G} = R\mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}_{12}^* \tilde{\mu}^*(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{pr}_{23}^* \mathcal{P}), \tag{19}$$

où le faisceau $\mathcal{F}$ sur $X \times X$ est défini par

$$\mathcal{F} = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{I}_{C_\bullet}(\Theta) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{I}_{C'_\bullet}(\Theta). \tag{20}$$

Soit $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathrm{pr}_{12}^* \tilde{\mu}^*(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{pr}_{23}^* \mathcal{P}$. Le faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ est plat au-dessus de $X \times \widehat{X}$, via le morphisme pr_{13}. Pour tout $t = (u, L) \in X \times \widehat{X}$, notons X_t la fibre $\{u\} \times X \times \{L\}$ de pr_{13} au-dessus de t.

En un point $t = (u, L) \in X \times \widehat{X}$ tel que $t_u(C_i) \cap C'_j = \emptyset$ pour tous i, j, on a

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t} = \mathcal{I}_{t_u(C_\bullet) \cup C'_\bullet}(\Theta + \Theta_u + L), \tag{21}$$

où $\Theta_u := t_u(\Theta)$. On montre en utilisant (21) et la condition (A) que l'on a

$$h^0(\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t}) = 0,\ h^3(\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t}) = 0$$

pour $t \in X \times \widehat{X}$ général, mais il n'est pas difficile d'établir en fait ces annulations pour tout $t \in X \times \widehat{X}$. Il en résulte immédiatement que $\mathcal{G}^0 = 0 = \mathcal{G}^3$. Par la théorie du changement de base, il existe alors deux fibrés vectoriels K^1, K^2 sur $X \times \widehat{X}$ et un morphisme

$$\delta \colon K^1 \to K^2 \tag{22}$$

tels que

$$\mathcal{G}^1 \cong \mathrm{Ker}\, \delta,\ \mathcal{G}^2 \cong \mathrm{Coker}\, \delta. \tag{23}$$

En utilisant la condition (B) et (21), on va montrer ensuite que $h^2(\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t}) = 0$ pour tout $t = (u, L) \in X \times \widehat{X}$ en dehors d'un fermé Σ de codimension 4 de $X \times \widehat{X}$. Il résulte alors de la théorie du changement de base que le faisceau $\mathcal{G}^2$ est de torsion, supporté sur le fermé Σ que nous décrivons maintenant.

Comme sur chaque composante C_i ou C'_j de l'union $t_u(C_\bullet)\cup C'_\bullet$, le degré de $\Theta_u+\Theta+L$ est 6, on a

$$H^1(t_u(C_\bullet)\cup C'_\bullet, L(\Theta_u+\Theta)_{|t_u(C_\bullet)\cup C'_\bullet})=0,$$

en tout point $t=(u,L)\in X\times\widehat{X}$ tel que $t_u(C_i)\cap C'_j=\emptyset$ pour tous i, j, et donc on a sous cette hypothèse

$$H^2(X_t,\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t})=H^2(X_t,\mathcal{I}_{t_u(C_\bullet)\cup C'_\bullet}\otimes L(\Theta_u+\Theta))=0.$$

La situation est plus compliquée quand $t_u(C_i)\cap C'_j\neq\emptyset$ pour une paire (i,j). Dans ce cas, $\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t}$ a de la torsion (supportée aux points d'intersection des courbes $t_u(C_\bullet)$ et $C'_\bullet$) mais l'isomorphisme (21) reste vrai modulo la torsion de $\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t}$. Le fermé Σ supportant $\mathcal{G}^2$ paramètre les paires $(u,L)\in X\times\widehat{X}$ telles que pour au moins un couple (i,j), $t_u(C_i)\cap C'_j\neq\emptyset$ (donc $u\in\Theta_{ij}$) et $L\in\mathrm{Pic}^0(X)$ a la propriété que

$$H^1(t_u(C_i)\cup C'_j, L(\Theta_u+\Theta)_{|t_u(C_i)\cup C'_j})\neq 0. \tag{24}$$

La courbe réductible mais connexe $t_u(C_i)\cup C'_j$ étant de genre 7 par le lemme 3.2, et le degré de $\Theta_u+\Theta+L$ sur cette courbe étant 12, le fibré $L\in\mathrm{Pic}^0(X)$ est uniquement déterminé par la condition (24) qui implique que $L(\Theta+\Theta_u)_{|t_u(C_i)\cup C'_j}=K_{t_u(C_i)\cup C'_j}$. On obtient donc dans $X\times\widehat{X}$ une réunion finie de surfaces $\widehat{\Theta}_{ij}$, chacune isomorphe au diviseur Θ_{ij}. En fait, il faut aussi étudier ce qui se passe sur les intersections de deux surfaces Θ_{ij}, c'est-à-dire lorsque le couple (i,j) n'est pas unique, ce qui est fait soigneusement par Markman (2025). Le fermé $\Sigma\subset X\times\widehat{X}$ est donc $\bigcup_{ij}\widehat{\Theta}_{ij}$ qui est de codimension 4.

Le morphisme δ de (22) est donc surjectif génériquement et son transposé

$${}^t\delta\colon (K^2)^*\to(K^1)^*$$

est un morphisme injectif de conoyau $\mathcal{E}$. En écrivant la suite exacte

$$0\to(K^2)^*\xrightarrow{{}^t\delta}(K^1)^*\to\mathcal{E}\to 0 \tag{25}$$

et en utilisant (23), on voit que $\mathcal{G}\cong\mathcal{E}xt(\mathcal{E},\mathcal{O}_{X\times\widehat{X}})[1]$. La réflexivité de $\mathcal{E}$ résulte de (25) et du fait que $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E},\mathcal{O}_{X\times\widehat{X}})\cong\mathcal{G}^2$ est supporté en codimension ≥ 4. □

Le faisceau $\mathcal{E}$ a les premières propriétés numériques suivantes.

Lemme 3.3. — *Le rang de $\mathcal{E}$ est $8d$.*

Démonstration. — D'après la démonstration précédente, le rang de $\mathcal{E}$ est égal à celui de $\mathcal{G}^1$ qui par la théorie du changement de base et par (21) pour $t=(o,\hat{o})$ (qui sous nos hypothèses n'est pas dans le fermé Σ) est égal à

$$h^1(\widetilde{\mathcal{F}}_{|X_t})=h^0(C_\bullet\cup C'_\bullet,\mathcal{O}_{C_\bullet\cup C'_\bullet}(2\Theta))-h^0(X,\mathcal{O}_X(2\Theta)). \tag{26}$$

On a $h^0(X, \mathcal{O}_X(2\Theta)) = 8$ et

$$h^0(C_\bullet \cup C'_\bullet, \mathcal{O}_{C_\bullet \cup C'_\bullet}(2\Theta)) = 2(d+1) \cdot 4$$

puisqu'on a $2d+2$ courbes disjointes de genre 3 sur lesquelles le diviseur Thêta est de degré 3. Donc le rang de $\mathcal{E}$ est $8d$ par (26). □

Comme on le verra dans la section 4, le caractère de Chern tordu

$$\kappa(\mathcal{E}) \coloneqq \mathrm{ch}(\mathcal{E} \otimes \det(\mathcal{E})^{-\frac{1}{r}})$$

du faisceau tordu $\mathcal{E} \otimes \det(\mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$ est fait de classes de Hodge–Weil, qui restent donc de Hodge pour toute déformation de $X \times \widehat{X}$ comme variété abélienne de Weil. Cependant le faisceau tordu $\mathcal{E} \otimes \det(\mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$ n'est pas encore l'objet géométrique cherché. En effet, il ne satisfait pas la condition de semi-régularité énoncée dans la section 5 (voir la sous-section 5.3), qui garantirait que ses classes de Chern restent algébriques le long de ces déformations.

Markman corrige ce défaut de la façon suivante. Rappelons qu'à un décalage près, le dual au sens dérivé de $\mathcal{E}$ est le complexe

$$\mathcal{G} \coloneqq \Phi(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \in D^b(X \times \widehat{X}),$$

où $\Phi\colon D^b(X \times X) \to D^b(X \times \widehat{X})$ est le foncteur d'Orlov et

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{I}_{C_\bullet}(\Theta),\ \mathcal{F}_2 = \mathcal{I}_{C'_\bullet}(\Theta).$$

En particulier $\mathcal{E} = (\mathcal{G}^1)^*$. On peut aussi écrire

$$\mathcal{G} = \Psi(\mathcal{I}_{C_\bullet} \boxtimes \mathcal{I}_{C'_\bullet}), \tag{27}$$

où l'équivalence de catégories Ψ est la composition de Φ et de l'autoéquivalence de catégories de $D^b(X \times X)$ donnée par le produit tensoriel avec $\mathcal{O}_X(\Theta) \boxtimes \mathcal{O}_X(\Theta)$.

Or par construction le faisceau $\mathcal{I}_{C_\bullet}$ sur X est invariant sous l'action de G_1 par translations et le faisceau $\mathcal{I}_{C'_\bullet}$ sur X est invariant sous l'action de G_2 par translations. Donc le faisceau $\mathcal{I}_{C_\bullet} \boxtimes \mathcal{I}_{C'_\bullet}$ sur $X \times X$ est invariant sous l'action de $G_1 \times G_2$ par translations. Il en résulte que $\mathcal{G} \in D^b(X \times \widehat{X})$ est invariant sous l'action de $G_1 \times G_2$ sur $D^b(X \times \widehat{X})$ donnée pour $u \in G_1 \times G_2$ par

$$M \mapsto T_u(M) \coloneqq \Psi \circ t_{u*} \circ \Psi^{-1}(M), \tag{28}$$

où t_{u*} est l'action induite par la translation t_u sur $D^b(X \times X)$. L'action (28) n'est pas induite par une action de translation sur la base $X \times \widehat{X}$. Markman la calcule explicitement :

Proposition 3.4 (Markman, 2025, Equation (9.3.1)). — *Pour $u = (u_1, u_2) \in G_1 \times G_2$, $\mathcal{F} \in D^b(X \times \widehat{X})$, on a*

$$T_u = ((\mathrm{pr}_1^* L_{u_1} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{P}_{u_2}) \otimes) \circ (t_{u_1 - u_2}, t_{L_{u_1} + L_{u_2}})_*, \tag{29}$$

où pour $u \in G_i \subset X$, $L_u \coloneqq \mathcal{O}_X(\Theta_u - \Theta) \in \mathrm{Pic}^0(X)$, la translation t_{L_u} est la translation par L_u sur $\widehat{X}$, et $\mathcal{P}_u = \mathcal{P}_{|\{u\} \times \widehat{X}} \in \mathrm{Pic}(\widehat{X})$.

Corollaire 3.5. — *Si $G_1 \cap G_2 = \{0\}$, l'action de $G_1 \times G_2$ sur $X \times \widehat{X}$ induite par T est fidèle.*

On notera $\widehat{G_1 \times G_2}$ le groupe $G_1 \times G_2$ agissant par translations sur $X \times \widehat{X}$, par la formule

$$(u_1, u_2) \mapsto t_{\widehat{(u_1,u_2)}} := (t_{u_1 - u_2}, t_{L_{u_1} + L_{u_2}}).$$

Le faisceau $\mathcal{E}_Y$ qui va nous intéresser est *grosso modo* obtenu en descendant $\mathcal{E}$ sur le quotient

$$Y := X \times \widehat{X} / \widehat{G_1 \times G_2}. \tag{30}$$

La formule (29) et l'invariance de $\mathcal{G}^1 = \mathcal{E}^*$ sous T_u, pour $u \in G_1 \times G_2$, disent que pour tout $u = (u_1, u_2) \in G_1 \times G_2$, on a canoniquement

$$t_{\widehat{(u_1,u_2)}*}(\mathcal{E}) \cong \mathrm{pr}_1^* L_{u_1} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{P}_{u_2} \otimes \mathcal{E}. \tag{31}$$

Ceci ne dit pas cependant que $\mathcal{E}$ est invariant sous les translations $t_{\widehat{u_1,u_2}}$ du fait du coefficient multiplicatif apparaissant à droite. Pour obtenir un objet $\widehat{G_1 \times G_2}$-invariant à partir de $\mathcal{E}$, Markman demande que d soit pair (ce qu'on peut toujours supposer vu que $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-4d})$). Il montre alors :

Lemme 3.6 (Markman, 2025, Lemma 9.3.5). — *Si d est pair, il existe un fibré en droites D sur $X \times \widehat{X}$ tel que $D \otimes \mathcal{E}$ soit $\widehat{G_1 \times G_2}$-linéarisable.*

Le fibré en droites D est tel que pour $(u_1, u_2) \in G_1 \times G_2$,

$$t_{\widehat{(u_1,u_2)}*}(D) = (\mathrm{pr}_1^* L_{u_1} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{P}_{u_2})^{-1} \otimes D. \tag{32}$$

Les formules (31) et (32) montrent que $D \otimes \mathcal{E}$ est invariant par translations sous $\widehat{G_1 \times G_2}$, et en fait il est même $\widehat{G_1 \times G_2}$-linéarisable. Il descend donc en un faisceau cohérent $\mathcal{E}_Y$ sur la variété Y, tel que, notant $q \colon X \times \widehat{X} \to Y$ l'application quotient,

$$q^* \mathcal{E}_Y \cong \mathcal{E}. \tag{33}$$

Le faisceau $\mathcal{E}_Y$ sur Y, ou plus précisément le faisceau tordu associé $\mathcal{E}_Y \otimes (\det \mathcal{E}_Y)^{-\frac{1}{8d}}$, fournit la paire désirée.

4. Les classes de Chern de $\mathcal{E} \otimes (\det \mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$ sont de Hodge–Weil

Rappelons que nous appelons classes de Hodge–Weil les classes de Hodge existant sur une variété abélienne de Weil très générale, pour un corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ fixé et de discriminant 1, ou leurs spécialisations $X \times \widehat{X}$, vues comme variétés abéliennes de Weil comme dans la section 3.1. En les degrés $2k \neq 2n$, ces classes sont des puissances de la polarisation ω compatible avec l'action de K (c'est-à-dire satisfaisant à (9)). En degré $2n$, l'espace des classes de Hodge–Weil est de dimension 3, engendré par les classes de Weil elles-mêmes et la puissance ω^n.

Théorème 4.1. — *Supposons* $\dim X = 3$. *Soit* $\mathcal{E}$ *le faisceau sur* $X \times \widehat{X}$ *de rang* $r = 8d$ *construit dans le théorème 3.1. Alors*

(i) (Markman, 2025, Remark 6.2.4) *Les classes* $\kappa_i(\mathcal{E}) \coloneqq \mathrm{ch}^i(\mathcal{E} \otimes (\det\mathcal{E})^{-\frac{1}{r}})$ *sont de Hodge–Weil sur* $X \times \widehat{X}$.

(ii) (Markman, 2025, Lemma 8.3.1) *La classe* $\kappa_3(\mathcal{E})$ *n'est pas proportionnelle à* ω^3.

Les classes de Hodge sur un produit $X \times X$, où X est une variété abélienne très générale munie d'une polarisation θ, sont toutes obtenues comme des polynômes en les trois classes de Hodge de degré 2

$$\theta_1 \coloneqq \mathrm{pr}_1^*\theta,\ \theta_2 \coloneqq \mathrm{pr}_2^*\theta,\ \theta_3 \coloneqq \mu^*\theta, \tag{34}$$

où $\mu\colon X \times X \to X$ est l'application somme. Il n'y a pas de relations polynomiales $P(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$ non triviales dans $H^{2k}(X \times X, \mathbb{Q})$ lorsque le degré k de P (supposé homogène) est $\leq n \coloneqq \dim X$. Lorsque $k \leq n$, les classes de Hodge–Weil sur $X \times X$, munie d'une structure de variété abélienne de Weil relative à un corps quadratique K, forment donc un sous-espace de dimension 1 (en degré $2k < 2n$) ou 3 en degré $2k = 2n$, dans un espace vectoriel de dimension $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Markman (2025) commence par caractériser ce sous-espace afin de démontrer le théorème 4.1. Les sections 4.1 et 4.1.2 décrivent cette caractérisation. La section 4.2 conclut la preuve du théorème 4.1 par l'analyse cohomologique du foncteur d'Orlov.

4.1. K-sécantes de la variété des spineurs et variétés abéliennes de Weil

Soit (X, θ_X) une variété abélienne principalement polarisée sur $\mathbb{C}$ et soit $\widehat{X}$ sa duale (qui est donc isomorphe à X). Soit

$$V \coloneqq H^1(X \times \widehat{X}, \mathbb{Q}) = H^1(X, \mathbb{Q}) \oplus H^1(X, \mathbb{Q})^* \tag{35}$$

$$S \coloneqq \bigwedge^{*} H^1(X, \mathbb{Q}) = H^*(X, \mathbb{Q}). \tag{36}$$

L'espace vectoriel V est muni de la forme bilinéaire symétrique $(\ ,\ )$ définie par

$$\big((x, e), (x', e')\big) = e'(x) + e(x').$$

Notons $x \mapsto \hat{x}$ et $v \mapsto \hat{v}$ les isomorphismes

$$X \cong \widehat{X},\ \ H^1(X, \mathbb{Q}) \cong H^1(\widehat{X}, \mathbb{Q})^*$$

donnés par la polarisation θ_X. L'endomorphisme $\phi\colon X \times X \to X \times X$ de (11), défini par $\phi(a, b) = (-b, d\,a)$, et satisfaisant

$$\phi^2 = -d\,\mathrm{Id}_{X\times X}$$

induit un endomorphisme ϕ' de $X \times \widehat{X}$, défini par

$$\phi'(x, \hat{y}) = (-y, d\,\hat{x}) \tag{37}$$

qui satisfait également $\phi'^2 = -d\,\mathrm{Id}_{X\times\widehat{X}}$. De plus on a la formule suivante pour le tiré en arrière agissant sur V

$$\phi'^*(v,\hat{w}) = (d\,w, -\hat{v}). \tag{38}$$

Soit

$$W \subset H^1(X\times\widehat{X},\mathbb{C}) = H^1(X,\mathbb{C})\oplus H^1(X,\mathbb{C})^*$$

le sous-espace propre associé à la valeur propre $i\sqrt{d}$ de ϕ'^*.

Lemme 4.2. — *W est un sous-espace totalement isotrope maximal de $H^1(X,\mathbb{C})\oplus H^1(X,\mathbb{C})^*$ muni de la forme bilinéaire $(\ ,\ )$.*

Démonstration. — Les éléments γ de W sont de la forme

$$\gamma = (v,\hat{w}) + \frac{1}{i\sqrt{d}}\phi'^*(v,\hat{w})$$

pour tous $v\in H^1(X,\mathbb{C})$, $\hat{w}\in H^1(X,\mathbb{C})^*$, c'est-à-dire, en utilisant (38)

$$\gamma = (v,\hat{w}) + \frac{1}{i\sqrt{d}}(d\,w,-\hat{v}). \tag{39}$$

On obtient donc pour γ, $\gamma'\in W$

$$(\gamma,\gamma') = \Big((v,\hat{w}) + \frac{1}{i\sqrt{d}}(d\,w,-\hat{v}), (v',\hat{w}') + \frac{1}{i\sqrt{d}}(d\,w',-\hat{v}')\Big)$$

$$= \hat{w}'(v)+\hat{w}(v')+\frac{1}{i\sqrt{d}}(-\hat{v}'(v)+d\,\hat{w}(w'))+\frac{1}{i\sqrt{d}}(d\,\hat{w}'(w)-\hat{v}(v'))-\frac{1}{d}(-d\hat{v}'(w)-d\hat{v}(w')).$$

Ceci vaut 0 du fait que l'isomorphisme $H^1(X,\mathbb{Q})\cong H^1(X,\mathbb{Q})^*$, $v\mapsto\hat{v}$, est alterné, c'est-à-dire $\hat{v}(w) = -\hat{w}(v)$ pour tous v, $w\in H^1(X,\mathbb{Q})$. □

On rappelle qu'étant donné un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V muni d'une forme quadratique $q(x) = (x,x)$, l'algèbre de Clifford $C(V)$ est définie comme le quotient

$$C(V) = V^{\otimes *}/I$$

où I est l'idéal de l'algèbre tensorielle $V^{\otimes *}$ engendré par les tenseurs

$$x_1\otimes x_2 + x_2\otimes x_1 - (x_1,x_2)1$$

pour x_1, $x_2\in V$. On note $C(V)^+$ la sous-algèbre engendrée par les tenseurs de degré pair. L'algèbre $C(V)$ admet une anti-involution $*$ définie par

$$(x_1\ldots x_r)^* = (-1)^r x_r\ldots x_1.$$

Le groupe $\mathrm{Spin}(V)$ est défini par

$$\mathrm{Spin}(V) = \{x\in C(V)^+,\ xx^* = 1,\ \text{et } xVx^*\subset V\}. \tag{40}$$

Les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels V et S étant définis comme dans (35) et (36), l'algèbre de Clifford $C(V)$ agit sur S : un élément $(u,\hat{v})$ de $V = S^1\oplus(S^1)^*$ agit sur $S = \bigwedge^* S^1$ par produit extérieur par u et produit intérieur par $\hat{v}$. On note $m_v\in\mathrm{End}(S)$ l'action de $v\in C(V)$ sur S. L'algèbre S se décompose selon la parité du degré en $S = S^+\oplus S^-$. Le groupe $\mathrm{Spin}(V)\subset C(V)^+$ agit d'une part sur V par définition (voir (40)), et donc aussi sur ses puissances extérieures (on notera $g \mapsto \rho_g$ cette action) et d'autre part sur S^+ par multiplication de Clifford comme ci-dessus (on notera $g \mapsto m_g$ cette action). Un élément $\xi \in S^+_{\mathbb{C}}$ est appelé un « spineur pair pur »si

$$m_\xi\colon V_{\mathbb{C}} \to S^-,\ v \mapsto m_v(\xi)$$

a pour noyau un sous-espace vectoriel isotrope maximal de $V_{\mathbb{C}}$. Inversement un tel sous-espace détermine à un coefficient près l'unique spineur pair pur dont il est le noyau. Si ξ est un spineur pur pair de noyau K, et $g \in \mathrm{Spin}(V)$, le noyau de $m_g(\xi)$ est $\rho_g(K)$. La grassmannienne isotrope $\mathrm{IG}(2n, 4n)$ des sous-espaces vectoriels isotropes maximaux de $V_{\mathbb{C}}$ est donc plongée dans $\mathbb{P}(S^+_{\mathbb{C}})$. Le lemme 4.2 combiné avec les considérations précédentes montre que l'action de K définie ci-dessus sur V fournit un spineur pair pur ξ_W (défini sur K) associé à W, son conjugué complexe étant le spineur pair pur $\xi_{\overline{W}}$. Le plan

$$P = \langle \xi_W, \xi_{\overline{W}} \rangle \subset S^+_{\mathbb{C}} \tag{41}$$

est clairement défini sur $\mathbb{Q}$. La droite projective associée est une droite sécante de la variété des spineurs $\mathrm{IG}(2n, 4n) \subset \mathbb{P}(S^+)$. Le plan P est calculé explicitement de la façon suivante.

Lemme 4.3 (Markman, 2025, Equation (2.4.5)). — *Soit* $u \coloneqq i\sqrt{d}\,\theta_X \in \mathrm{Hdg}^2(X) \otimes \mathbb{C}$. *Alors on a*

$$P \otimes \mathbb{C} = \langle \exp(u), \exp(\overline{u}) \rangle_{\mathbb{C}} \tag{42}$$

$$P = \left\langle \mathrm{Re}(\exp(u)), \frac{\mathrm{Im}(\exp(u))}{\sqrt{d}} \right\rangle_{\mathbb{Q}}. \tag{43}$$

Démonstration. — Si $\eta \in \bigwedge^2 H^1(X, \mathbb{C})$, le cup-produit avec $\exp(\eta)$ est un automorphisme de l'algèbre $S_{\mathbb{C}} = \bigwedge^* H^1(X, \mathbb{C})$ qui est de la forme $m_{\exp(\eta)}$ pour un élément $\exp(\eta) \in \mathrm{Spin}(V)_{\mathbb{C}}$ dont la représentation spinorielle $\rho_{\exp(\eta)}$ sur $V_{\mathbb{C}}$ est donnée par

$$\rho_{\exp(\eta)}(w, \hat{w}') = (w - \hat{w}' \lrcorner \eta,\ \hat{w}'). \tag{44}$$

Ceci se voit en écrivant η comme une somme de bivecteurs décomposables $\eta' \coloneqq x_1 \wedge x_2$. Supposons pour simplifier que $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 2$ et x_1, x_2 est une base de $H^1(X, \mathbb{C})$, avec base duale x_i^*. Alors l'élément de $\mathrm{Spin}(V)$ correspondant est $\exp(\eta') = 1 + x_1 x_2 \in C(V)^+$ et on trouve que dans $C(V)$, $(1 + x_1 x_2) x_i (1 + x_2 x_1) = x_i$ et

$$(1 + x_1 x_2) x_1^* (1 + x_2 x_1) = x_1^* - x_1,\ (1 + x_1 x_2) x_2^* (1 + x_2 x_1) = x_2^* + x_1,$$

expliquant la formule (44).

En posant $\eta = u = i\sqrt{d}\,\theta_X$, on trouve que

$$\rho_{\exp(u)}(w, \hat{w}') = (w - i\sqrt{d}\,w',\ \hat{w}') \tag{45}$$

puisque par définition $\hat{w}' \lrcorner \theta_X = w'$.

L'élément $1 \in S^+$ est un spineur pur de noyau $H^1(X, \mathbb{C})^*$. Le spineur $\exp(u) = m_{\exp(u)}(1) \in S_{\mathbb{C}}$ est donc un spineur pur dont le noyau est $\rho_{\exp(u)}(H^1(X, \mathbb{C})^*)$. D'après

(45), l'espace isotrope maximal $W \subset H^1(X,\mathbb{C}) \oplus H^1(X,\mathbb{C})^*$ associé au spineur pur $\exp(u)$ est donc

$$W = \rho_{\exp(u)}(H^1(X,\mathbb{C})^*) = \{(-i\sqrt{d}\,w', \hat{w}'),\ \hat{w}' \in H^1(X,\mathbb{C})^*\}. \tag{46}$$

Finalement, on note que l'espace W défini ci-dessus est le même que l'espace W considéré dans (39), si l'on pose $w' = w - \frac{1}{i\sqrt{d}}v$. □

L'importance du lemme 4.3 vient du corollaire suivant. On reprend les notations et la construction de la section 3.3.

Corollaire 4.4. — *Les faisceaux $\mathcal{F}_1 = \mathcal{I}_{\cup_{i=0}^d C_i}(\Theta) \subset \mathcal{O}_X(\Theta)$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{I}_{\cup_{j=0}^d C'_j}(\Theta) \subset \mathcal{O}_X(\Theta)$ de (18) ont la propriété que*

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}_i) \in P. \tag{47}$$

Démonstration. — Le caractère de Chern est multiplicatif. De plus, les C_i étant disjointes, on a $\mathcal{I}_{C_\bullet} = \bigotimes_i \mathcal{I}_{C_i}$ et de même pour $C'_\bullet$. On a donc

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1) = \mathrm{ch}(\mathcal{O}_X(\Theta)) \prod_{i=0}^d \mathrm{ch}(\mathcal{I}_{C_i}),\ \ \mathrm{ch}(\mathcal{F}_2) = \mathrm{ch}(\mathcal{O}_X(\Theta)) \prod_{j=0}^d \mathrm{ch}(\mathcal{I}_{C'_j}).$$

On a $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X(\Theta)) = \exp(\theta_X)$. Par ailleurs, le théorème de Grothendieck–Riemann–Roch appliqué à l'inclusion i_C de C ou C' dans $X = J(C)$ donne

$$\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{C_i}) = i_{C*}(\mathrm{ch}(T_{C_i})) = \frac{\theta_X^2}{2} - 2[\mathrm{pt}],$$

où [pt] est la classe d'un point de X. Comme le caractère de Chern est additif, on en déduit

$$\mathrm{ch}(\mathcal{I}_{C_i}) = 1 - \frac{\theta_X^2}{2} + 2[\mathrm{pt}],$$

d'où

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1) = \mathrm{ch}(\mathcal{F}_2) = \exp(\theta_X)\Big(1 - \frac{\theta_X^2}{2} + 2[\mathrm{pt}]\Big)^{d+1}.$$

Comme on est en dimension 3, on obtient $(1-\frac{\theta_X^2}{2}+2[\mathrm{pt}])^{d+1} = 1-(d+1)\frac{\theta_X^2}{2}+2(d+1)[\mathrm{pt}]$ et donc

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1) = \exp(\theta_X) - (d+1)\frac{\theta_X^2}{2} + 2(d+1)[\mathrm{pt}] - (d+1)\frac{\theta_X^3}{2}.$$

Comme $\theta_X^3 = 6[\mathrm{pt}]$, il vient

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1) = \exp(\theta_X) - (d+1)\frac{\theta_X^2}{2} - (d+1)\frac{\theta_X^3}{6} = 1 + \theta_X - d\frac{\theta_X^2}{2} - d\frac{\theta_X^3}{6}. \tag{48}$$

Par ailleurs, la formule (43), où $u = i\sqrt{d}\,\theta_X$, montre que P est engendré sur $\mathbb{Q}$ par

$$1 - d\frac{\theta_X^2}{2},\ \ \theta_X - d\frac{\theta_X^3}{6}.$$

□

4.1.1. *Polarisation de $X \times \widehat{X}$ comme variété abélienne de Weil.* — Les notations précédentes permettent aussi de décrire commodément la polarisation sur la variété abélienne de Weil sur $X \times \widehat{X}$ (relativement au corps K). En effet, l'isomorphisme $X \cong \widehat{X}$ est donné par une polarisation θ_X sur X, c'est-à-dire une 2-forme

$$\theta_X \in \bigwedge^2 H^1(X, \mathbb{Q})$$

telle que $\hat{v}(u) = \theta_X(u, v)$ pour u, $v \in H_1(X, \mathbb{Q})$ et satisfaisant les conditions de Hodge–Riemann

$$\theta_X(\alpha, \beta) = 0,\ \forall \alpha,\ \beta \in H_{1,0}(X),\ \ i\theta_X(\alpha, \overline{\alpha}) > 0,\ \ \forall \alpha \in H_{1,0}(X),\ \alpha \neq 0. \tag{49}$$

Considérons la forme bilinéaire ω sur $V^* = H_1(X, \mathbb{Q} \oplus H_1(X, \mathbb{Q})^*$ définie par

$$\omega(w, w') := (w, \phi'_*(w')) \tag{50}$$

Pour $w = (u, \hat{v})$, $w' = (u', \hat{v}') \in V^*$, on a $\phi'_* w' = (-v', d\,\hat{u}')$, d'où

$$\begin{aligned} \omega(w, w') &= (w, \phi'_*(w')) = d\,\hat{u}'(u) - \hat{v}(v') \\ &= d\,\hat{u}'(u) + \hat{v}'(v) = d\,\theta_X(u, u') + \theta_X(v, v'). \end{aligned} \tag{51}$$

Ainsi la forme ω de (50) est une polarisation K-compatible de $X \times \widehat{X}$ qui coïncide avec la forme donnée en (13).

4.1.2. *Caractérisation spinorielle des classes de Hodge–Weil.* — Avec les notations de la section précédente, $P = \langle \xi_W, \xi_{\overline{W}} \rangle$ étant le plan correspondant à une droite K-sécante de la variété des spineurs $IG(2n, 4n) \subset \mathbb{P}(S^+)$, on définit le groupe $\mathrm{Spin}(V)_P \subset \mathrm{Spin}(V)$ comme étant le sous-groupe des éléments $g \in \mathrm{Spin}(V)$ tels que $m_g(p) = p$, $\forall p \in P$. Rappelons que le groupe $\mathrm{Spin}(V)$ agit par ailleurs sur $\bigwedge^* V = H^*(X \times \widehat{X}, \mathbb{Q})$ par la représentation ρ. Markman établit la caractérisation suivante des classes de Hodge–Weil.

Proposition 4.5. — *Les classes de Hodge–Weil de $X \times \widehat{X}$ sont les classes invariantes sous la ρ-action de $\mathrm{Spin}(V)_P$.*

Cette proposition résulte de l'énoncé suivant.

Lemme 4.6 (Markman, 2025, Lemma 2.2.7). — *L'espace $(\bigwedge^* V)^{\mathrm{Spin}(V)_P}$ des invariants de $\bigwedge^* V$ sous $\mathrm{Spin}(V)_P$ est réduit à 0 en degré $*$ impair, de dimension 1 et engendré par la puissance ω^k de la polarisation compatible ω de (51) en degré $2k \neq 2n$, et de dimension 3 en degré $2n$, engendré sur $\mathbb{C}$ par les classes $\bigwedge^{2n} W$, $\bigwedge^{2n} \overline{W}$ et ω^n.*

Ces résultats peuvent être obtenus également en utilisant le groupe de Mumford–Tate d'une variété abélienne de Weil très générale, déformation de $(X \times \widehat{X}, K, \omega)$ (voir van Geemen, 1994, Section 6). Ce dernier groupe est en effet le sous-groupe du groupe orthogonal $\mathrm{SO}(V, (\ ,\ ))$ constitué des automorphismes K-linéaires. Le formalisme spinoriel va par contre être fortement utilisé dans la démonstration du théorème 4.1.

4.2. Preuve du théorème 4.1

D'après la proposition 4.5, pour démontrer le théorème 4.1(i), il suffit de montrer l'invariance sous $\mathrm{Spin}(V)_P$ de $\kappa(\mathcal{E})$. Rappelons (voir section 3.3) que

$$\mathcal{E}^\vee = \mathcal{G}[-1],\ \mathcal{G} = \Phi(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) = R\mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}_{12}^*(\tilde{\mu}^*(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2)) \otimes \mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{P}),$$

où $\Phi\colon D^b(X \times X) \cong D^b(X \times \widehat{X})$ est l'équivalence de catégories dérivées d'Orlov et où le dual $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{E}xt(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X\times\widehat{X}})$ doit être pris au sens dérivé puisque $\mathcal{E}$ n'est pas localement libre.

Il suffit donc de montrer que $\kappa(\mathcal{G})$ est $\mathrm{Spin}(V)_P$-invariant. Par le théorème de Grothendieck–Riemann–Roch, en utilisant le fait que le fibré tangent relatif de pr_{23} est trivial, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\mathcal{G}) &= \mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}_{12}^*(\tilde{\mu}^*(\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2)))\mathrm{pr}_{23}^*(\mathrm{ch}(\mathcal{P})) \\ &=: \Phi_{\mathrm{coh}}(\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2)).\end{aligned} \tag{52}$$

On a vu dans le corollaire 4.4 que le caractère de Chern de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est un élément de $P \subset S$ et donc invariant sous $\mathrm{Spin}(V)_P \times \mathrm{Spin}(V)_P$. Malheureusement le morphisme

$$\Phi_{\mathrm{coh}}\colon S \otimes S = H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \to \overset{*}{\bigwedge} V$$

défini dans (52) n'est pas équivariant sous les diverses actions du groupe $\mathrm{Spin}(V)$. (Plus précisément, le groupe $\mathrm{Spin}(V)$ agit à gauche sur S par la multiplication de Clifford $g \mapsto m_g$ et à droite par sa transposée $g \mapsto m_g^\dagger$. Par ailleurs il agit sur $\bigwedge^* V = \bigoplus_i \bigwedge^i V$ par la représentation ρ.) Ce défaut d'équivariance est analysé par Markman (2025). Soit

$$\rho_g' \coloneqq \Phi_{\mathrm{coh}} \circ (m_g \times m_g^\dagger) \circ \Phi_{\mathrm{coh}}^{-1}\colon \overset{*}{\bigwedge} V \to \overset{*}{\bigwedge} V.$$

La différence entre ρ_g et ρ_g' mesure le défaut de $\mathrm{Spin}(V)$-équivariance de Φ_{coh}.

La formule suivante est établie par Orlov (2002). Pour tout $g \in \mathrm{Spin}(V)$, on a

$$\rho_g' = \exp(c_1(N_g)) \cup \rho_g, \tag{53}$$

où N_g est un fibré en droites topologique (c'est-à-dire une classe entière de degré 2) sur $X \times \widehat{X}$.

Markman (2025, Proposition 6.1.2) établit une formule explicite pour $c_1(N_g)$:

$$c_1(N_g) = \frac{1}{2}(c_1(\mathcal{P}) - \rho_g(c_1(\mathcal{P}))). \tag{54}$$

Preuve du théorème 4.1(i). — Le caractère de Chern

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) = \mathrm{ch}(\mathcal{F}_1)\mathrm{ch}(\mathcal{F}_2) \in S \otimes S$$

est invariant sous $m_g \times m_g^\dagger$ pour $g \in \mathrm{Spin}(V)_P$ et donc

$$\mathrm{ch}(\mathcal{G}) = \Phi_{\mathrm{coh}}(\mathrm{ch}(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2))$$

est invariant sous ρ_g', pour $g \in \mathrm{Spin}(V)_P$. D'après (53), on conclut que pour tout $g \in \mathrm{Spin}(V)_P$,

$$\exp(c_1(N_g)) \cup \rho_g(\mathrm{ch}(\mathcal{G})) = \mathrm{ch}(\mathcal{G}). \tag{55}$$

Comme $\mathrm{ch}^0(\mathcal{G}) = -8d \neq 0$ par le lemme 3.3, on obtient

$$-8d\, c_1(N_g) = \mathrm{ch}^1(\mathcal{G}) - \rho_g(\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})). \tag{56}$$

De plus, d'après (56), on a pour tout $g \in \mathrm{Spin}(V)_P$,

$$\kappa(\mathcal{G}) = \exp\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)\mathrm{ch}(\mathcal{G}) = \exp(c_1(N_g))^{-1}\exp\Big(\rho_g\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)\Big)\mathrm{ch}(\mathcal{G})$$

et donc, en utilisant (55)

$$\begin{aligned}\rho_g(\kappa(\mathcal{G})) &= \exp(\rho_g(c_1(N_g)))^{-1}\exp\Big(\rho_g^2\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)\Big)\rho_g(\mathrm{ch}(\mathcal{G})) \\ &= \exp(\rho_g(c_1(N_g)))^{-1}\exp\Big(\rho_g^2\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)\Big)\exp(c_1(N_g))^{-1}\mathrm{ch}(\mathcal{G}) \\ &= \exp(\rho_g(c_1(N_g)))^{-1}\exp\Big(\rho_g^2\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)\Big)\exp(c_1(N_g))^{-1}\exp\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)^{-1}\kappa(\mathcal{G}).\end{aligned} \tag{57}$$

Finalement, (56) entraîne que

$$\exp(\rho_g(c_1(N_g)))^{-1}\exp\Big(\rho_g^2\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)\Big)\exp(c_1(N_g))^{-1}\exp\Big(\frac{\mathrm{ch}^1(\mathcal{G})}{8d}\Big)^{-1} = 1,$$

et donc $\kappa(\mathcal{G})$ est $\mathrm{Spin}(V)_P$-invariant d'après (57). □

Remarque 4.7. — Notons que d'après (56) et (54), $c_1(\mathcal{E}) = \mathrm{ch}^1(\mathcal{G})$ n'est pas invariant sous $\mathrm{Spin}(V)_P$, d'où la nécessité de travailler avec le faisceau tordu $\mathcal{E} \otimes (\det\mathcal{E})^{\frac{-1}{8d}}$.

Preuve du théorème 4.1(ii). — La démonstration du fait que $\kappa_3(\mathcal{G})$ n'est pas proportionnel à ω^3 repose sur les calculs précédents et sur l'analyse de l'action d'un groupe $\mathrm{Spin}(V)_{\xi_W,\xi_{\overline{W}}}$ légèrement plus gros que $\mathrm{Spin}(V)_P$. Le groupe $\mathrm{Spin}(V)_{\xi_W,\xi_{\overline{W}}}$ est le sous-groupe de $\mathrm{Spin}(V)$ qui fixe (via la représentation m) chaque élément $\xi_W, \xi_{\overline{W}}$ à un coefficient près. Ce groupe agit trivialement (via la représentation ρ) sur les puissances de la polarisation ω, mais pas sur les classes de Weil. En utilisant (54), Markman montre que ce groupe ne laisse pas $\kappa_3(\mathcal{G})$ invariant. □

5. Semi-régularité

5.1. Semi-régularité de Bloch

La théorie de la semi-régularité pour les sous-variétés ou sous-schémas fournit un critère permettant d'étudier la question suivante de déformation des paires.

Question 1. *Soit X une variété projective lisse et soit $f\colon \mathcal{X} \to B$ un morphisme lisse de fibre $\mathcal{X}_0 \cong X$. Soit $Z \subset X$ une sous-variété ou un sous-schéma. Existe-t-il un sous-schéma $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ plat sur B tel que $\mathcal{Z}_0 = Z$?*

Cette question peut être posée dans le cadre analytique complexe ou dans le cadre algébrique. Dans les deux cas, il est naturel d'étudier ce problème d'abord à l'ordre fini (arbitrairement grand), c'est-à-dire lorsque $B = \operatorname{Spec} A$ est un schéma artinien local, i.e. de longueur finie supporté en un point. Si l'étude formelle ne rencontre pas d'obstructions, des méthodes analytiques difficiles permettent de répondre à la question en géométrie complexe localement sur la base (Kodaira, 1963) et dans le cadre algébrique, le principe d'algébrisation d'Artin (1969) permet de répondre à la question globalement mais après un changement de base.

Le critère suivant est établi par Kodaira (1963).

Théorème 5.1. — *Soit X une variété complexe compacte et $Z \subset X$ une sous-variété complexe. Supposons que le fibré vectoriel holomorphe $N_{Z/X}$ sur Z satisfait*

$$H^1(Z, N_{Z/X}) = 0.$$

Alors la réponse à la question 1 est oui (dans le cadre formel, ou analytique local).

On note cependant que la question ci-dessus est trop naïve pour avoir une réponse satisfaisante. En effet, s'il existe une déformation $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ de Z, la classe $[Z]$ de Z reste une classe de cycle et a fortiori de Hodge dans les fibres voisines $\mathcal{X}_t$, pour $t \in B$ proche de 0. Ici, on pense au morphisme lisse f comme à un morphisme analytique qui est donc localement topologiquement trivial par Ehresmann, ce qui permet de transporter la classe $[Z] \in H^{2c}(X, \mathbb{Z})$ en une classe $[Z]_t \in H^{2c}(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$, pour $t \in B$. Comme déjà mentionné, c'est en fait le cas d'une base formelle ou artinienne B qui est intéressant, mais on peut là aussi donner un sens à la condition que la classe $[Z] \in H^{2c}(X, \mathbb{Z})$ reste une classe de Hodge sur les fibres $\mathcal{X}_t$, grâce à la connexion de Gauss–Manin et aux fibrés de Hodge (voir Voisin, 2002b, section 17.3 par exemple). Même dans le cas très simple des surfaces projectives lisses (par exemple les surfaces S de degré $d \geq 4$ dans $\mathbb{P}^3$ étudiées par Noether), on sait bien que des classes de courbes $C \subset S$ ne restent pas en général des classes de Hodge dans toutes les déformations S_t de S.

La semi-régularité de Bloch étudie donc la question raffinée suivante.

Question 2. *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et soit $f : \mathcal{X} \to B$ un morphisme lisse de fibre $\mathcal{X}_0 \cong X$. Soit $Z \subset X$ une sous-variété ou un sous-schéma de codimension c. On suppose que la classe $[Z] \in H^{2c}(X, \mathbb{Z})$ reste une classe de Hodge sur les fibres $\mathcal{X}_t$, $t \in B$. Existe-t-il un sous-schéma $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ plat sur B tel que $\mathcal{Z}_0 = Z$?*

Supposons que $Z \subset X$ est localement intersection complète de codimension c, de sorte que son fibré normal

$$N_{Z/X} = (\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2)^*$$

est localement libre sur Z. L'application de semi-régularité

$$\delta_Z : H^1(Z, N_{Z/X}) \to H^{c+1}(X, \Omega_X^{c-1}) \tag{58}$$

est introduite par Bloch (1972). Elle est définie comme la transposée, relativement à la dualité de Serre, de l'application de restriction

$$H^{n-c-1}(X, \Omega_X^{n-c+1}) \to H^{n-c-1}(Z, N^*_{Z/X} \otimes K_Z),\ n := \dim X$$

induite par le morphisme naturel de faisceaux $\Omega_X^{n-c+1} \to N^*_{Z/X} \otimes K_Z$. Le sous-schéma $Z \subset X$ est dit semi-régulier si l'application δ_Z de (58) est injective. Bloch montre le résultat suivant.

Théorème 5.2 (Bloch, 1972). — *Si l'application de semi-régularité δ_Z est injective, la réponse à la question 2 est affirmative pour Z, sur toute base artinienne B.*

Le théorème 5.2 est une extension naturelle du théorème 5.1. En effet, la théorie de Griffiths des variations de structure de Hodge et l'étude des lieux de Hodge montrent que l'espace $H^{c+1}(X, \Omega_X^{c-1})$ contient les obstructions successives à tous les ordres à ce que la classe $[Z]$ reste de Hodge sous la déformation $\mathcal{Z} \to B$. Si celle-ci reste de Hodge, les obstructions successives à tous les ordres à étendre Z lui-même sont donc annulées par δ_Z. Les démonstrations de ces théorèmes ont été rendues plus conceptuelles et élégantes par la théorie du relèvement T^1 de Ran (1995).

Bien que le théorème 5.2 puisse paraître enthousiasmant, il est limité par la difficulté de construire des sous-variétés semi-régulières. Pour les diviseurs, la semi-régularité est satisfaite lorsque les diviseurs sont suffisamment amples (la condition précise est l'annulation $H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$, qui est satisfaite par (Serre, 1955a), quitte à remplacer D par $D + kH$ où $k >> 0$ et H est une section hyperplane de X). Par contre, on peut remarquer que si X est une variété de dimension $n \geq 4$ à fibré canonique trivial ou de dimension $n \geq 3$ à fibré canonique ample, et telle que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, une courbe lisse

$$C \subset X$$

de genre ≥ 2 n'est pas semi-régulière. En effet comme $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, la semi-régularité signifierait dans ce cas que $H^1(C, N_{C/X}) = 0$. Or la formule de Riemann–Roch et la formule d'adjonction donnent

$$\chi(C, N_{C/X}) = -\deg K_{X|C} + 2g - 2 + (n-1)(1-g) = -\deg K_{X|C} + (n-3)(1-g).$$

Sous les hypothèse indiquées, on trouve $\chi(C, N_{C/X}) < 0$ et donc $h^1(C, N_{C/X}) \neq 0$, de sorte que C n'est pas semi-régulière dans X. Si on prend par exemple une hypersurface très générale de dimension ≥ 3 et de degré $d \geq 2n - 1$ dans $\mathbb{P}^n$ avec $n \geq 4$, on sait grâce à Clemens (1986) que toutes les courbes $C \subset X$ sont de genre au moins 2 et toutes les hypothèses ci-dessus sont satisfaites. Cette absence de courbes semi-régulières est cohérente avec le fait que la conjecture de Hodge variationnelle à coefficients entiers n'est pas satisfaite par de telles variétés, au moins pour des degrés adéquats, voir Kollár (1990).

Le succès de la stratégie de Markman repose directement sur le fait suivant, qui concerne les variétés abéliennes de dimension 3 principalement polarisées (en particulier à fibré canonique trivial).

Lemme 5.3. — *Soit C une courbe lisse de genre 3 et non-hyperelliptique et $X = J(C)$ sa jacobienne. Alors $C \subset X$ est semi-régulière au sens de Bloch.*

Démonstration. — Écrivons la suite exacte normale

$$0 \to T_C \to T_{X|C} \to N_{C/X} \to 0.$$

Il en résulte que

$$H^1(C, N_{C/X}) \cong H^1(C, T_{X|C})/H^1(C, T_C).$$

Or comme T_X est trivial et $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong H^1(C, \mathcal{O}_C)$, on a

$$H^1(C, T_{X|C}) = H^1(X, T_X).$$

Comme C est de genre 3 et n'est pas hyperelliptique, l'application

$$H^1(C, T_C) \to H^1(X, T_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes H^0(X, T_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes H^1(X, \mathcal{O}_X),$$

où l'isomorphisme $H^0(X, T_X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est donné par le produit intérieur avec la classe $\theta_X \in H^1(X, \Omega_X)$ du diviseur Θ de X, a exactement pour image $\mathrm{Sym}^2 H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Son conoyau $H^1(C, N_{C/X})$ est donc naturellement isomorphe à $\bigwedge^2 H^1(X, \mathcal{O}_X)$. On vérifie finalement que le composé

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong \bigwedge^2 H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong H^1(C, N_{C/X}) \xrightarrow{\delta_C} H^3(X, \Omega_X)$$

est l'isomorphisme de Lefschetz $H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong H^3(X, \Omega_X)$ donné par le cup-produit par la classe θ_X. Donc l'application de semi-régularité δ_C est injective. $\square$

5.2. Semi-régularité de Buchweitz–Flenner

Nous présentons une transposition due à Buchweitz et Flenner des résultats de Bloch à un autre problème de déformation des paires, qui concerne cette fois les déformations des paires (X, E), où E est un faisceau cohérent sur une variété projective lisse X. Étant données une telle paire et une déformation de X donnée par un morphisme projectif lisse

$$f\colon \mathcal{X} \to B,\ \mathcal{X}_0 \cong X,$$

existe-t-il un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{X}$, plat sur B, tel que $\mathcal{E}_{|\mathcal{X}_0} \cong E$? La discussion concernant la base B (munie du point 0) est la même que dans la section précédente. L'étude se concentre donc sur le cas formel. Une condition nécessaire est que les classes de Chern de E restent des classes de Hodge sur les fibres $\mathcal{X}_t$, (ce qui comme précédemment a un sens même lorsque la base est artinienne, à l'aide des variations de structures de Hodge). La vraie question est donc :

Question 3. *Étant donnés une variété projective complexe lisse X, un faisceau cohérent E sur X, et une déformation de X donnée par un morphisme projectif lisse*

$$f\colon \mathcal{X} \to B,\ \mathcal{X}_0 \cong X,$$

telle que toutes les classes de Chern $c_i(E)$ restent de Hodge sur les fibres $\mathcal{X}_t$, $t \in B$, existe-t-il un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{X}$, plat sur B, tel que $\mathcal{E}_{|\mathcal{X}_0} \cong E$?

La réponse apportée par Buchweitz et Flenner (2003) fait intervenir la classe d'Atiyah de E. Supposons d'abord que E est localement libre (i.e. E est le faisceau des sections d'un fibré vectoriel). La classe d'Atiyah $\mathrm{at}^1(E) \in \mathrm{Ext}^1(E, E \otimes \Omega_X)$ a été introduite à l'origine par Atiyah. Dans le contexte analytique, E admet une connexion ∇ de Chern, dont la courbure R_∇ est une forme fermée de type $(1,1)$ à coefficients dans $\mathrm{End}\, E$, fournissant une classe de cohomologie de Dolbeault $\mathrm{at}^1(E) \in H^1(X, \Omega_X \otimes \mathcal{E}nd\, E)$. En fait la construction peut se faire de façon beaucoup plus formelle et algébrique, en introduisant le faisceau $P_1(E)$ des jets de sections de E à l'ordre 1. On a une suite exacte

$$0 \to \Omega_X \otimes E \to P_1(E) \to E \to 0,$$

qui fournit la classe d'extension voulue $\mathrm{at}^1(E) \in \mathrm{Ext}^1(E, \Omega_X \otimes E)$. Cette construction s'étend ensuite à tout complexe et donc tout faisceau cohérent sur une variété projective lisse. On note

$$\mathrm{at}(E) = \exp(\mathrm{at}^1(E)) \in \bigoplus_i \mathrm{Ext}^i(E, \Omega_X^i \otimes E).$$

La classe d'Atiyah $\mathrm{at}(E)$ permet de calculer les classes de Chern $c_i(E)$ (ou du moins leur version « Dolbeault »dans $H^i(X, \Omega_X^i)$. (Il faut en principe prêter attention à la différence entre les versions algébrique et analytique des classes de Chern dans $H^i(X, \Omega_X^i)$, qui diffèrent par des puissances de $2i\pi$, du fait de la compatibilité voulue dans le second cas avec les classes de Chern en cohomologie de Betti, mais nous n'entrerons pas dans ces détails ici). On a en effet la formule suivante (voir Buchweitz et Flenner, 2000) :

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{Tr}(\exp(\mathrm{at}^1(E))) = \mathrm{Tr}(\mathrm{at}(E)) \text{ dans } \bigoplus_i H^i(X, \Omega_X^i). \tag{59}$$

Le caractère de Chern $\mathrm{ch}(E) \in \bigoplus_i H^i(X, \Omega_X^i)$ d'un fibré vectoriel E de rang r et somme directe de fibrés en droites $L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ étant défini par

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^r \exp(c_1(L_i)) \text{ dans } \bigoplus_i H^i(X, \Omega_X^i),$$

avec $c_1(L_i) = \mathrm{at}^1(L_i)$, on obtient immédiatement la formule (59).

Buchweitz et Flenner (2000) construisent l'application de semi-régularité

$$\delta_E \colon \mathrm{Ext}^2(E, E) \to \bigoplus_{i \geq 0} H^{i+2}(X, \Omega_X^i),$$

pour un faisceau cohérent E. L'application δ_E est obtenue par composition avec la classe $\mathrm{at}(E)$ suivie de la trace. On dira que E est semi-régulier (au sens de Buchweitz–Flenner) si δ_E est injective. On a alors

THÉORÈME 5.4 (Buchweitz et Flenner, 2003). — *Soit E un faisceau cohérent semi-régulier sur une variété projective lisse X. Alors la réponse à la question 3 est affirmative, au moins sur toute base formelle.*

Une petite déformation X_t de X sur laquelle les classes de Chern $c_i(E)$ restent de Hodge, possède donc un faisceau cohérent qui est une déformation E_t de E. En particulier les classes de Chern $c_i(E)$ restent algébriques sur X_t.

Le passage du cas formel au cas analytique local (dans la seconde partie de l'énoncé) ou au cas algébrique (après revêtement fini) se fait par les méthodes de Kodaira (1963) ou Artin (1969).

On utilisera le résultat suivant :

Lemme 5.5. — *Soit C une courbe de genre 3 non hyperelliptique et soit $X := J(C)$, de sorte que C est plongée dans X par l'application d'Abel. Alors le faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}_C$ sur X est semi-régulier* (Markman, 2025, Lemma 8.3.7(3)).

Ceci se montre en effet en utilisant le lemme 5.3. Il faut noter cependant que la semi-régularité d'une sous-variété $Y \subset X$ n'est pas en général équivalente à celle du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$. L'exemple le plus simple est celui des diviseurs $D \subset X$. Pour qu'un tel diviseur soit semi-régulier, il faut que $H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$, tandis qu'un fibré vectoriel de rang 1, et en particulier le faisceau $\mathcal{O}_X(-D)$, est toujours semi-régulier au sens de Buchweitz–Flenner.

5.3. Cas des faisceaux tordus

La classe d'Atiyah et l'application de semi-régularité sont définies pour un faisceau cohérent tordu relativement à une classe $\alpha \in H^2(W, \mu_r)$ sur une variété W, de la même manière que pour le cas non tordu décrit dans la section précédente (Markman, 2025, Definition 7.3.5), c'est-à-dire via la classe d'extension du faisceau tordu des 1-jets associé.

Lemme 5.6. — *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion de rang r sur une variété projective lisse W. Alors $\mathcal{E}$ est semi-régulier si et seulement si le faisceau tordu $\mathcal{E} \otimes (\det \mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$ est semi-régulier. Plus généralement, $\mathcal{E}$ est semi-régulier si et seulement si le faisceau tordu $\mathcal{E} \otimes H$ est semi-régulier pour tout fibré en droites fractionnaire H (voir section 1.1.1).*

Démonstration. — On a

$$\operatorname{at}^1(\mathcal{E} \otimes H) = \operatorname{at}^1(\mathcal{E}) + \operatorname{at}^1(H)\mathrm{Id}_E \tag{60}$$

dans $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \Omega_W) = \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E} \otimes H, \mathcal{E} \otimes H \otimes \Omega_W)$ et

$$\operatorname{at} \mathcal{E} = \exp(\operatorname{at}^1(\mathcal{E})), \ \operatorname{at}(\mathcal{E} \otimes H) = \exp(\operatorname{at}^1(\mathcal{E} \otimes H)). \tag{61}$$

Notons que $\operatorname{at}^1(H) = c_1(H) \in H^1(W, \Omega_W)$. Par ailleurs

$$\operatorname{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \operatorname{Ext}^2(\mathcal{E} \otimes H, \mathcal{E} \otimes H).$$

Par (60) et (61), les applications de semi-régularité $\delta_{\mathcal{E}}$ pour $\mathcal{E}$ et $\delta_{\mathcal{E}\otimes H}$ pour $\mathcal{E} \otimes H$ satisfont

$$\delta_{\mathcal{E}\otimes H} = (\exp(c_1(H))\cup) \circ \delta_{\mathcal{E}} \colon \operatorname{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \to \bigoplus_i H^{i+2}(W, \Omega_W^i).$$

L'application $\exp(c_1(H))\cup\colon \bigoplus_i H^{i+2}(W,\Omega_W^i) \to \bigoplus H^{i+2}(W,\Omega_W^i)$ est clairement un isomorphisme et donc $\delta_{\mathcal{E}\otimes H}$ est injective si et seulement si $\delta_{\mathcal{E}}$ l'est. □

Markman montre dans son article l'analogue du théorème 5.4 pour les faisceaux tordus $\mathcal{E} \otimes (\det \mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$, dans le cas des variétés abéliennes. Rappelons la notation

$$\kappa(\mathcal{E}) \coloneqq \mathrm{ch}(\mathcal{E})\exp\Big(-\frac{1}{r}\mathrm{ch}^1(\mathcal{E})\Big).$$

Théorème 5.7 (Markman, 2025, Section 7.4). — *Si un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ est semi-régulier sur une variété abélienne X, les déformations du faisceau tordu $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes (\det \mathcal{E})^{-\frac{1}{r}}$ sont non obstruées le long d'une déformation de X préservant les classes de Hodge $\kappa_i(\mathcal{E})$. Une petite déformation X_t de X sur laquelle les classes $\kappa_i(\mathcal{E})$ restent de Hodge possède donc un faisceau tordu qui est une déformation $\mathcal{E}'_t$ de $\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^{-\frac{1}{r}}$. En particulier les classes $\kappa_i(\mathcal{E})$ restent algébriques le long d'une telle déformation (supposée projective).*

Remarque 5.8. — Si $\det \mathcal{E}^{-\frac{1}{r}}$ est un fibré en droites, $\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^{-\frac{1}{r}}$ est un faisceau cohérent semi-régulier par le lemme 5.6 et le théorème 5.7 est obtenu en appliquant le théorème 5.4 à ce dernier.

Remarque 5.9. — Le théorème 5.7 n'est pas entraîné par le théorème 5.4. En effet, les déformations de X considérées dans ces théorèmes ne sont pas les mêmes. Dans le théorème 5.4, on considère les déformations de X pour lesquelles toutes les classes de Chern de $\mathcal{E}$ restent de Hodge. Dans le théorème 5.7, l'hypothèse ne concerne que les $\kappa_i(\mathcal{E})$, et en particulier, on ne demande pas que la première classe de Chern $c_1(\mathcal{E})$ reste de Hodge. Les déformations de $\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^{-\frac{1}{r}}$ obtenues grâce au théorème 5.7 ne sont pas en général induites par une déformation de $\mathcal{E}$.

6. Conclusion de la preuve et une remarque

6.1. Semi-régularité du faisceau tordu $\mathcal{E}_Y$

Dans la section 3.3, nous avons construit suivant Markman un faisceau cohérent semi-régulier $\mathcal{E}_Y$ sur une variété abélienne de Weil Y obtenue comme un quotient

$$X \times \widehat{X}/\widehat{G_1 \times G_2},$$

où $X = J(C)$ est une variété abélienne principalement polarisée générale de dimension 3. Le faisceau $\mathcal{E}_Y$ satisfait l'équation

$$q^*\mathcal{E}_{\mathcal{Y}} = D \otimes \mathcal{E} \tag{62}$$

où le faisceau $\mathcal{E}$ sur $X \times \widehat{X}$ est construit dans le théorème 3.1, $q\colon X \times \widehat{X} \to Y$ est l'application quotient, et D est un fibré en droites sur $X \times \widehat{X}$ tel que $D \otimes \mathcal{E}$ est $\widehat{G_1 \times G_2}$-linéarisé. L'application q est une isogénie, Y est donc une variété abélienne de Weil de dimension 6 et discriminant 1, l'application $q^*\colon H^*(Y,\mathbb{Q}) \to H^*(X\times\widehat{X},\mathbb{Q})$ induisant un isomorphisme entre les espaces de classes de Hodge–Weil. D'après le théorème 4.1 et (62), le caractère de Chern corrigé $\kappa(\mathcal{E}_Y)$ de $\mathcal{E}_Y$ satisfait

$$\kappa(\mathcal{E}_Y) \in \mathrm{HW}^*(Y).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 5.7, il suffit donc de montrer le résultat suivant.

Théorème 6.1 (Markman, 2025, Lemma 9.3.11). — *Le faisceau $\mathcal{E}_Y$ est semi-régulier au sens de Buchweitz–Flenner.*

Le théorème 5.7(i) entraîne alors que la classe $\kappa_3(\mathcal{E}_Y)$ reste algébrique sur une déformation générale Y_t de Y comme variété abélienne de Weil projective. Comme $\kappa_3(\mathcal{E}_Y)$ n'est pas proportionnelle à ω_Y^3 par le théorème 4.1(ii), il en résulte (en considérant l'action du corps K sur $\mathrm{HW}(Y)$) que toutes les classes de Hodge–Weil sur Y sont algébriques, ce qui conclut la preuve du théorème 1.4.

Preuve du théorème 6.1. — On note que comme q est une isogénie, l'application

$$q^*\colon \bigoplus_{i\geq 0} H^{i+2}(Y,\Omega_Y^i) \to \bigoplus_{i\geq 0} H^{i+2}(X\times\widehat{X},\Omega^i_{X\times\widehat{X}})$$

est un isomorphisme. Par ailleurs, grâce à (62) et au lemme 5.6, l'application

$$q^*\colon \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_Y,\mathcal{E}_Y) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

induit un isomorphisme

$$q^*\colon \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_Y,\mathcal{E}_Y) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})^{\widehat{G_1\times G_2}}$$

où l'action de $\widehat{G_1\times G_2}$ sur le terme de droite est induite par celle de $G_1\times G_2$ sur $D^b(X\times\widehat{X})$, décrite dans la proposition 3.4. La compatibilité des applications q^* ci-dessus avec les applications de semi-régularité $\delta_{\mathcal{E}_Y}$ et $\delta_{\mathcal{E}}$ montre alors que l'injectivité de $\delta_{\mathcal{E}_Y}$ résulte du lemme 6.2 ci-dessous. □

Lemme 6.2. — *L'application de semi-régularité $\delta_{\mathcal{E}}$, restreinte à $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})^{\widehat{G_1\times G_2}}$, est injective.*

Démonstration. — Rappelons avec les notations de la section 3.3 que $\mathcal{E}^* = \mathcal{G}[1]$, avec

$$\mathcal{G} = \Phi(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) = \Psi(\mathcal{I}_{C_\bullet} \boxtimes \mathcal{I}_{C'_\bullet}),$$

où $\Psi\colon D^b(X\times X) \to D^b(X\times\widehat{X})$ est l'équivalence de catégories introduite dans (27). Le lemme 6.2 résulte alors de l'énoncé analogue pour le faisceau $\mathcal{I}_{C_\bullet}\boxtimes\mathcal{I}_{C'_\bullet}$, qui est invariant sour le groupe $G_1\times G_2$: La restriction de l'application de semi-régularité $\delta_{\mathcal{I}_{C_\bullet}\boxtimes\mathcal{I}_{C'_\bullet}}$ à la partie invariante $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_{C_\bullet}\boxtimes\mathcal{I}_{C'_\bullet},\mathcal{I}_{C_\bullet}\boxtimes\mathcal{I}_{C'_\bullet})^{G_1\times G_2}$ est injective. Ce dernier énoncé résulte du lemme 5.5. □

6.2. Remarque sur la conjecture de Hodge généralisée

Considérons un tore complexe T de dimension n muni d'un endomorphisme

$$\phi\colon T \to T$$

satisfaisant une équation quadratique $\phi^2 = -d\,\mathrm{Id}_T$, pour un certain entier $d > 0$. L'action

$$\phi^*\colon H^1(T, \mathbb{C}) \to H^1(T, \mathbb{C})$$

donne une décomposition

$$H^1(T, \mathbb{C}) = W^+ \oplus W^-,$$

en sous-espaces propres associés aux valeurs propres respectives $i\sqrt{d}$, $-i\sqrt{d}$. Chacun de ces espaces est de dimension n et stable sous la décomposition de Hodge

$$W^+ = W^{+1,0} \oplus W^{+0,1},\ W^- = W^{-1,0} \oplus W^{-0,1}, \tag{63}$$

où (du fait de la symétrie de Hodge) la seconde décomposition se déduit de la première par conjugaison complexe. La condition de Weil est que $n = 2m$ est pair et que

$$\dim W^{+1,0} = m = \dim W^{+0,1}.$$

On discute dans cette section ce qui se passe lorsqu'on omet cette condition et les conséquences du théorème de Markman. Notons

$$k \coloneqq \dim W^{+1,0} = \dim W^{-0,1}, \tag{64}$$

d'où

$$n - k = \dim W^{+0,1} = \dim W^{-1,0}.$$

On peut bien sûr supposer $n - k \geq k$, quitte à changer le choix des valeurs propres. On dit qu'une structure de Hodge de poids m sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel L, donnée par une décomposition

$$L_\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=m} L^{p,q},\ L^{q,p} = \overline{L^{p,q}},$$

est de niveau $\leq r$ si on a $L^{p,q} = 0$ pour $|p - q| > r$. Le niveau est le plus petit nombre positif r tel que, quitte à décaler tous les bidegrés par un bidegré (s, s) tel que $r = m-2s$, on ait

$$L_\mathbb{C} = L^{r,0} \oplus \cdots \oplus L^{0,r},$$

avec $L^{r,0} \neq 0$.

Une sous-structure de Hodge $L_1 \subset L_2$ est la donnée d'un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel stable sous la décomposition de Hodge, i.e.

$$L_{1\mathbb{C}} = \oplus L^{p,q}_{1\mathbb{C}},\ L^{p,q}_{1\mathbb{C}} \coloneqq L_{1\mathbb{C}} \cap L^{p,q}_{2\mathbb{C}}.$$

Lemme 6.3. — *Le sous-espace vectoriel de dimension* 2

$$L_K \coloneqq \bigwedge_K^n H^1(T, \mathbb{Q}) \subset H^n(T, \mathbb{Q}) \tag{65}$$

tel que

$$L_{K,\mathbb{C}} = \bigwedge^n W^+ \oplus \bigwedge^n W^-, \tag{66}$$

et introduit dans le lemme 2.2 est une sous-structure de Hodge de $H^n(T,\mathbb{Q})$, de niveau $n-2k$.

Démonstration. — En effet, d'après (63), $\bigwedge^n W^+$ est de type de Hodge $(k, n-k)$ et $\bigwedge^n W^-$ est de type de Hodge $(n-k,k)$. Donc L_K est une sous-structure de Hodge par (66), et ses nombres de Hodge non nuls sont en bidegrés $(k,n-k)$ et $(n-k,k)$. □

Une version de la conjecture de Hodge généralisée formulée par Grothendieck (1969) est la suivante.

Conjecture 6.4. — *Soit X une variété projective complexe lisse de dimension n et soit $L \subset H^m(X,\mathbb{Q})$ une sous-structure de Hodge de niveau r, avec $m-r=2c$ (c est aussi appelé le coniveau de L). Alors il existe une variété projective lisse Y de dimension r, et un cycle algébrique $Z \subset Y \times X$ de dimension $n-c$ tel que*

$$L \subset \mathrm{Im}([Z]_*\colon H^r(Y,\mathbb{Q}) \to H^m(X,\mathbb{Q})). \tag{67}$$

Étant donné une variété abélienne A (i.e. un tore complexe algébrique) de dimension n munie d'un endomorphisme quadratique ϕ comme ci-dessus, la conjecture 6.4 prédit l'existence d'une variété projective Y de dimension $r=n-2k$ et d'une correspondance Z satisfaisant (67), pour la sous-structure de Hodge $L \subset H^n(A,\mathbb{Q})$ de niveau $n-2k$ exhibée dans le lemme 6.3.

Proposition 6.5. — *Si la conjecture de Hodge est satisfaite pour les classes de Weil sur les variétés abéliennes de Weil de dimension $2n-2k$, la conjecture de Hodge généralisée 6.4 est satisfaite pour les sous-structures de Hodge L de niveau $n-2k$ décrites ci-dessus sur les variétés abéliennes de dimension n munies d'un endomorphisme quadratique ϕ, l'entier $k \le n-k$ associé étant défini dans (64).*

Démonstration. — Étant donnés A et ϕ, on peut construire une variété abélienne B de dimension $n-2k$, munie d'un endomorphisme quadratique ψ tel que $\psi^2 = -d\,\mathrm{Id}$ et la variété abélienne $B \times A$ munie de l'endomorphisme (ψ,ϕ) est une variété abélienne de Weil. Il suffit pour cela que l'endomorphisme ψ agissant par ψ^* sur $H^{1,0}(B)$ ait la valeur propre $i\sqrt{d}$ avec la multiplicité $n-2k$ (et donc n'ait pas la valeur propre $-i\sqrt{d}$). Alors (ψ,ϕ) agissant par $(\psi,\phi)^* = (\psi^*,\phi^*)$ sur $H^{1,0}(B\times A)$ a la valeur propre $i\sqrt{d}$ avec la multiplicité $n-k$, et donc a la valeur propre $-i\sqrt{d}$ avec la multiplicité $n-k$, puisque $\dim(B\times A) = 2n-2k$. La variété $B\times A$ munie de l'endomorphisme quadratique (ψ,ϕ) est donc bien une variété abélienne de Weil. Supposant satisfaite la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes de Weil de dimension $\le 2n-2k$, on en conclut que les classes de Weil sur $B\times A$ sont algébriques, ce qui donne des sous-variétés algébriques $Z_i \subset B\times A$ de dimension $n-k$ telles que les classes de Weil sur $B\times A$ soient des combinaisons linéaires des $[Z_i]$. On conclut alors la démonstration avec

Lemme 6.6. — *Soit* $0 \neq \alpha \in H^{2n-2k}(B \times A, \mathbb{Q})$ *une classe de Weil. Alors*

$$\mathrm{Im}(\alpha_* \colon H^{n-2k}(B, \mathbb{Q}) \to H^n(A, \mathbb{Q}))$$

contient la sous-structure de Hodge L_K *de (65).*

Démonstration. — Cela résulte en effet du fait que si l'on adopte la notation L_K^A, L_K^B, $L_K^{B\times A}$ pour les sous-structures de Hodge de rang 2 associées comme dans le lemme 6.3 aux actions respectives de ϕ, ψ, (ψ, ϕ), on a par définition

$$L_K^{B\times A} \subset L_K^B \otimes L_K^A \subset H^{2n-2k}(B \times A, \mathbb{Q}),$$

et l'espace $L_K^{B\times A}$ est l'espace des classes de Weil de $B \times A$. Le reste de l'argument est formel et utilise la décomposition de Künneth et la dualité de Poincaré. □

□

Remarque 6.7. — La construction utilisée dans cette démonstration apparaît sous une forme plus générale dans l'article van Geemen (2001).

Lorsque $n = 2k$, la proposition 6.5 est vide. Lorsque $2k < n$, la variété B est de dimension positive et on peut choisir sa polarisation de façon que $B \times A$ ait une polarisation de discriminant 1. De ce fait, on peut améliorer la proposition 6.5 en supposant $2k < n$ et en demandant seulement que la conjecture de Hodge soit satisfaite par les classes de Weil sur les variétés abéliennes de Weil de dimension $2n - 2k$ et de discriminant 1. En appliquant le théorème principal de Markman (théorème 1.4) qui concerne les variétés abéliennes de Weil de dimension 6 et de discriminant 1, on obtient donc les conséquences suivantes du théorème 1.4.

Corollaire 6.8. — *Soit* A *une variété abélienne de dimension* n *munie d'un endomorphisme quadratique* ϕ *comme ci-dessus, et soit* $k \leq n - k$ *l'entier de (64). Si* $k < n - k$ *et* $2n - 2k \leq 6$*, la conjecture de Hodge généralisée est satisfaite par la sous-structure de Hodge* L *de niveau* $n - 2k$ *du lemme 6.3.*

Le cas $k = 0$ est vide mais les cas $k = 1$, $n = 4$, et $k = 2$, $n = 5$ sont des énoncés non triviaux.

Références

Giuseppe Ancona, Mattia Cavicchi, Robert Laterveer et Giulia Saccà (2025). « Relative and absolute Lefschetz standard conjectures for some Lagrangian fibrations », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **111** (4), Paper No. e70133, 27.

Yves André (1996). « Pour une théorie inconditionnelle des motifs », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (83), p. 5-49.

——— (2006). « Déformation et spécialisation de cycles motivés », *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (4), p. 563-603.

Michael Artin (1969). « Algebraic approximation of structures over complete local rings », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (36), p. 23-58.

Spencer Bloch (1972). « Semi-regularity and de Rham cohomology », *Invent. Math.* **17**, p. 51-66.

Armand Borel et André Haefliger (1961). « La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique », *Bull. Soc. Math. France* **89**, p. 461-513.

Armand Borel et Jean-Pierre Serre (1958). « Le théorème de Riemann-Roch », *Bull. Soc. Math. France* **86**, p. 97-136.

Ragnar-Olaf Buchweitz et Hubert Flenner (2000). « The Atiyah-Chern character yields the semiregularity map as well as the infinitesimal Abel-Jacobi map », in : *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998).* T. 24. CRM Proc. Lecture Notes. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 33-46.

——— (2003). « A semiregularity map for modules and applications to deformations », *Compositio Math.* **137** (2), p. 135-210.

Eduardo Cattani, Pierre Deligne et Aroldo Kaplan (1995). « On the locus of Hodge classes », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (2), p. 483-506.

François Charles et Eyal Markman (2013). « The standard conjectures for holomorphic symplectic varieties deformation equivalent to Hilbert schemes of $K3$ surfaces », *Compos. Math.* **149** (3), p. 481-494.

Wei-Liang Chow (1949). « On compact complex analytic varieties », *Amer. J. Math.* **71**, p. 893-914.

Herbert Clemens (1986). « Curves on generic hypersurfaces », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (4), p. 629-636.

Olivier Debarre (1999). *Tores et variétés abéliennes complexes.* T. 6. Cours Spécialisés. Société Mathématique de France, Paris ; EDP Sciences, Les Ulis, p. vi+125.

Pierre Deligne (1971). « Théorie de Hodge. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (40), p. 5-57.

——— (1982). « Hodge Cycles on Abelian Varieties (notes by J. S. Milne) », in : *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties.* T. 900. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, p. 9-100.

Salvatore Floccari et Lie Fu (2025). *The Hodge conjecture for Weil fourfolds with discriminant 1 via singular OG6-varieties.* arXiv : 2504.13607 [math.AG].

Bert van Geemen (1994). « An introduction to the Hodge conjecture for abelian varieties », in : *Algebraic cycles and Hodge theory (Torino, 1993).* T. 1594. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 233-252.

——— (2001). « Half twists of Hodge structures of CM-type », *J. Math. Soc. Japan* **53** (4), p. 813-833.

Alexandre Grothendieck (1958). « La théorie des classes de Chern », *Bull. Soc. Math. France* **86**, p. 137-154.

——— (1969). « Hodge's general conjecture is false for trivial reasons », *Topology* **8**, p. 299-303.

Fumio Hazama (1989). « Algebraic cycles on nonsimple abelian varieties », *Duke Math. J.* **58** (1), p. 31-37.

Steven L. Kleiman (1968). « Algebraic cycles and the Weil conjectures », in : *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. T. 3. Adv. Stud. Pure Math. North-Holland, Amsterdam, p. 359-386.

Kunihiko Kodaira (1954). « On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties) », *Ann. of Math. (2)* **60**, p. 28-48.

——— (1963). « On stability of compact submanifolds of complex manifolds », *Amer. J. Math.* **85**, p. 79-94.

János Kollár (1990). « Lemma p. 134 », in : *Classification of irregular varieties*. T. 1515. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin.

Pierre Lelong (1957). « Intégration sur un ensemble analytique complexe », *Bull. Soc. Math. France* **85**, p. 239-262.

David I. Lieberman (1968). « Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds », *Amer. J. Math.* **90**, p. 366-374.

Eyal Markman (2020). « The Beauville-Bogomolov class as a characteristic class », *J. Algebraic Geom.* **29** (2), p. 199-245.

——— (2023). « The monodromy of generalized Kummer varieties and algebraic cycles on their intermediate Jacobians », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **25** (1), p. 231-321.

——— (2025). *Cycles on abelian 2n-folds of Weil type from secant sheaves on abelian n-folds*. arXiv : 2502.03415 [math.AG].

Ben J. J. Moonen et Yuri G. Zarhin (1995). « Hodge classes and Tate classes on simple abelian fourfolds », *Duke Math. J.* **77** (3), p. 553-581.

——— (1999). « Hodge classes on abelian varieties of low dimension », *Math. Ann.* **315** (4), p. 711-733.

Shigeru Mukai (1981). « Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves », *Nagoya Math. J.* **81**, p. 153-175.

Dmitri O. Orlov (2002). « Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them », *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **66** (3), p. 131-158.

Ziv Ran (1995). « Hodge theory and deformations of maps », *Compositio Math.* **97** (3), p. 309-328.

Chad Schoen (1988). « Hodge classes on self-products of a variety with an automorphism », *Compositio Math.* **65** (1), p. 3-32.

——— (2007). « A family of surfaces constructed from genus 2 curves », *Internat. J. Math.* **18** (5), p. 585-612.

Jean-Pierre Serre (1955a). « Faisceaux algébriques cohérents », *Ann. of Math. (2)* **61**, p. 197-278.

——— (1955b). « Géométrie algébrique et géométrie analytique », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **6**, p. 1-42.

Sergei G. Tankeev (1982). « Cycles on simple abelian varieties of prime dimension », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1), p. 155-170, 192.

Claire Voisin (2002a). « A counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties », *Int. Math. Res. Not.* (20), p. 1057-1075.

——— (2002b). *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* T. 10. Cours Spécialisés [Specialized Courses]. Société Mathématique de France, Paris, p. viii+595.

——— (2022). « On the Lefschetz standard conjecture for Lagrangian covered hyper-Kähler varieties », *Adv. Math.* **396**, Paper No. 108108, 29.

Claire Voisin

Institut de mathématiques de
Jussieu-Paris rive gauche,
4 Place Jussieu, 75005 Paris
E-mail : `claire.voisin@imj-prg.fr`