

# Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 29 MARS 2025

Exposé n° 1237

Javier FRESÁN

## Stabilité homologique et moments de fonctions $L$

---

Une des questions fondamentales de la théorie analytique des nombres est de comprendre la distribution des valeurs centrales d'une famille de fonctions  $L$ , par exemple  $L(\frac{1}{2}, \chi)$  lorsque  $\chi$  parcourt tous les caractères de Dirichlet quadratiques. Dans ce cas, une conjecture de Conrey–Farmer–Keating–Rubinstein–Snaith prédit le comportement asymptotique de leurs moments. Je présenterai des travaux récents de Bergström–Diaconu–Petersen–Westerland et Miller–Pazt–Petersen–Randal-Williams établissant l'analogie de cette conjecture sur les corps de fonctions. Dans ce cadre, la formule de traces de Grothendieck–Lefschetz réduit l'étude des moments à celle de la cohomologie d'un espace de modules de courbes hyperelliptiques à coefficients dans un système local symplectique, et il s'agit alors de démontrer un théorème de stabilité homologique du même style que la conjecture de Mumford (théorème de Madsen–Weiss) pour l'espace de modules de toutes les courbes. J'expliquerai les grandes lignes des arguments de topologie algébrique qui permettent de le faire, notamment le rôle des « applications de scanner ».

## Homological stability and moments of $L$ functions

---

One of the fundamental questions in analytic number theory is to understand the distribution of central values of a family of  $L$  functions, for example  $L(\frac{1}{2}, \chi)$  when  $\chi$  varies among the quadratic Dirichlet characters. In this case, a conjecture of Conrey–Farmer–Keating–Rubinstein–Snaith predicts the asymptotic behaviour of their moments. I will present recent works by Bergström–Diaconu–Petersen–Westerland and Miller–Pazt–Petersen–Randal-Williams establishing the analogue of this conjecture for function fields. In this context, the trace formula of Grothendieck–Lefschetz reduces the study of moments to that of the cohomology of a moduli space of hyperelliptic curves with coefficients in a local symplectic system, and it is then a question of proving a homological stability theorem in the same style as Mumford's conjecture (Madsen–Weiss theorem) for the moduli space of all curves. I will explain the main lines of the algebraic topology arguments which allow this to be done, in particular the role of "scanner applications".

---

*Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.  
The text of the talk will be made available after the Seminar.*