Séminaire BOURBAKI Mars 2025
77e année, 2024–2025, nº 1236

HYPOELLIPTICITÉ DE POLYNÔMES DE CHAMPS DE VECTEURS ET CONJECTURES DE HELFFER ET NOURRIGAT [d'après I. Androulidakis, O. Mohsen, R. Yuncken]

par **Claire Debord**

Introduction

Un opérateur différentiel D sur une variété M est dit *hypoelliptique* si l'équation différentielle $Du = f$ satisfait la propriété de régularité suivante : pour tout ouvert U de M, si $f|_U$ est une fonction lisse, alors la distribution $u|_U$ est également une fonction lisse.

Cette condition de régularité est notamment satisfaite par les opérateurs elliptiques, tels que le Laplacien. Dans son célèbre théorème des sommes de carrés, Hörmander (1967) a montré que si $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une famille de champs de vecteurs satisfaisant la condition dite des crochets de Hörmander, alors l'opérateur différentiel $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ est hypoelliptique, bien qu'il ne soit généralement pas elliptique. Ce théorème a été le point de départ du développement de la théorie des opérateurs *hypoelliptiques maximaux*, notamment à travers les travaux de Folland et Stein (1974), Rothschild et Stein (1976) et Helffer et Nourrigat (1985).

La *condition des crochets de Hörmander* porte sur l'existence d'un entier N tel que tout vecteur tangent à M en un point x peut s'écrire comme une combinaison linéaire des évaluations en x des champs $X_1, \dots, X_n$ et de leurs crochets de profondeur au plus N. On dit alors que la famille $\{X_1, \dots, X_n\}$ induit une *structure sous-riemannienne* sur la variété M. On peut noter que sous ces conditions, tout opérateur différentiel peut s'écrire comme un polynôme non commutatif à coefficients dans $C^\infty(M)$ en $X_1, \dots, X_n$.

L'objet du travail présenté ici est l'étude de l'*hypoellipticité maximale* des opérateurs différentiels obtenus comme polynômes en les éléments d'une famille de champs de vecteurs $\{X_1, \dots, X_n\}$ satisfaisant la condition des crochets de Hörmander. Cette notion plus fine étend la propriété de régularité qui caractérise les opérateurs différentiels hypoelliptiques en termes de régularité Sobolev, offrant ainsi un parallèle, en géométrie sous-riemannienne, aux opérateurs elliptiques.

Dans leur article, Helffer et Nourrigat (1979) ont proposé une conjecture caractérisant l'hypoellipticité maximale, généralisant le théorème principal de régularité des opérateurs elliptiques. Cette conjecture a été récemment confirmée grâce à des outils de

géométrie non commutative. Un élément central de ce travail est une généralisation naturelle du groupoïde tangent de Connes (1994), introduite en géométrie sous-riemannienne par Mohsen (2022, 2024), dans lequel apparaissent tous les cônes tangents, ingrédients clés du travail de Helffer et Nourrigat. Ce travail s'appuie également sur la construction du calcul pseudodifférentiel à partir de l'action naturelle de $\mathbb{R}_+^*$ sur le groupoïde tangent (Debord et Skandalis, 2014 ; van Erp et Yuncken, 2019).

Dans leur article, Androulidakis, Mohsen et Yuncken (2022) ont développé un calcul pseudodifférentiel dans ce contexte de géométrie sous-riemannienne, introduisant notamment la notion de symbole principal. Ils ont démontré que l'inversibilité de ce symbole équivaut à l'hypoellipticité maximale, validant ainsi la conjecture.

Il faudrait un livre pour expliquer en détail tous les prérequis et les résultats développés dans l'article de Androulidakis, Mohsen et Yuncken (2022), ainsi qu'une immense bibliographie pour évoquer tous les mathématiciens ayant contribué, d'une façon ou d'une autre, aux résultats présentés ici. Je me contenterai de donner les grandes lignes (d'une partie réduite) des travaux d'Androulidakis, Mohsen et Yuncken, et je prie par avance les nombreux auteurs que je n'ai pas mentionnés de bien vouloir m'excuser.

L'article est organisé comme suit :

- La conjecture de Helffer et Nourrigat est présentée dans la première section.
- La seconde section offre un aperçu de l'approche par les groupoïdes du calcul pseudodifférentiel classique.
- La dernière section est consacrée à la description du groupoïde tangent dans le contexte de la géométrie sous-riemannienne et à la présentation des résultats clés permettant d'établir le théorème de régularité des opérateurs différentiels hypoelliptiques maximaux. L'article se termine par l'application de ces résultats à un exemple détaillé.

Je me suis appuyée sur de nombreux documents fournis par Androulidakis, Mohsen et Yuncken pour rédiger ce texte, et je les remercie pour l'aide apportée. Cet article s'inspire fortement du mémoire d'habilitation de Mohsen, des discussions que nous avons eues et des nombreuses questions (petites ou grandes) auxquelles il a répondu. Enfin, je remercie Omar Mohsen et Georges Skandalis pour leur relecture attentive de ce document.

Avant-propos

Les résultats obtenus par Androulidakis, Mohsen et Yuncken (2022) sont très généraux et tolèrent en particulier l'adjonction de « poids » sur les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$. Nous en présentons ici une version simplifiée en passant sous silence autant que possible les difficultés techniques. En particulier :

- Dans toute la suite, M est une variété lisse compacte et $\mathcal{X}(M)$ désigne le $C^\infty(M, \mathbb{R})$-module des champs de vecteurs réels lisses sur M.

- Nous considérerons des fonctions à valeurs complexes, mais, la plupart du temps, on pourrait également considérer des fonctions à valeurs dans un fibré (en particulier dans la définition des opérateurs pseudodifférentiels ou pour définir l'intégration sans ambiguïté).
- Nous ne justifierons pas que les intégrales utilisées ont un sens. Suivant ses préférences, on pourra supposer :
  — avoir choisi la mesure de Lebesgue si l'on travaille sur $\mathbb{R}^n$;
  — avoir fait le choix d'une forme volume pour une variété orientable ;
  — que les fonctions considérées prennent leurs valeurs dans un fibré de densité bien choisi dans le cas général.

  Lorsque l'on n'utilise pas les densités, des termes correctifs liés aux changements de cartes doivent être pris en compte dans les formules.
- Les espaces de Sobolev seront considérés avec des indices entiers, mais ils peuvent être étendus (ainsi que les résultats correspondants) aux indices réels via les techniques classiques de dualité et d'interpolation. Il en va de même pour l'ordre des opérateurs pseudodifférentiels.

1. Opérateurs différentiels hypoelliptiques maximaux

Dans cette section, nous donnons quelques rudiments de géométrie sous-riemannienne nécessaires à la suite. Nous rappelons ensuite le théorème de régularité des opérateurs différentiels elliptiques, puis présentons les opérateurs hypoelliptiques ainsi que la conjecture de Helffer et Nourrigat.

1.1. Quelques mots sur les cônes tangents en géométrie sous-riemannienne

Dans toute la suite, $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une famille de champs de vecteurs sur M satisfaisant la condition des crochets de Hörmander. On note $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1$ le sous-module de $\mathcal{X}(M)$ engendré par $X_1, \dots, X_n$, puis pour $i \geq 1$, $\mathcal{F}^{i+1}$ celui engendré par $\mathcal{F}^i$ et $[\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^i]$. La *condition de Hörmander* dit précisément qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{F}^N = \mathcal{X}(M)$.
Le *sous-espace horizontal* en $x \in M$ est l'image $F_x := \mathrm{vect}(X_1(x), \dots, X_n(x))$ de $\mathcal{F}$ dans T_xM.

Ce cadre induit une métrique intrinsèque sur M, appelée métrique de *Carnot–Carathéodory*, que nous décrivons ci-après. L'idée est de mesurer la distance entre deux points en suivant uniquement des chemins tangents aux sous-espaces horizontaux. On parle alors de *structure sous-riemannienne* sur M. L'essentiel de ce qui est présenté dans cette partie provient de l'article de Bellaïche (1996).

Pour $x \in M$ et $v \in F_x$, on définit

$$\|v\| := \inf\Big\{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}\ ;\ v = \sum_{i=1}^n v_i X_i(x)\Big\}.$$

Un chemin absolument continu $\gamma\colon [0,1] \to M$ est dit *horizontal* si pour presque tout t, $\gamma'(t) \in F_{\gamma(t)}$. Sa *longueur* est donnée par la formule

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Le théorème de Chow–Rashevskii assure que deux points de M sont toujours reliés par un chemin horizontal. On définit alors :

Définition 1.1. — *La distance de* Carnot–Carathéodory *entre les points x et y de M est*

$$d_{CC}(x,y) = \inf\{\ell(\gamma)\ ;\ \gamma \textit{ chemin horizontal tel que } \gamma(0) = x \textit{ et } \gamma(1) = y\}$$

Notons que cette distance engendre la topologie usuelle de M.

Rappelons que la *distance de Gromov–Hausdorff* mesure à quel point deux espace métriques compacts sont non isométriques [(1)].
On dira qu'un espace métrique (T,d) admet un *cône tangent* en $x \in T$ si les boules $B(x,\varepsilon)$ munies de la distance d/ε, convergent au sens de Gromov–Hausdorff lorsque ε tend vers 0.

Par exemple, si M est une variété riemannienne, son cône tangent en un point x est son espace tangent T_xM avec sa métrique euclidienne.

On sait depuis la généralisation des travaux de Mitchell (1985) par Bellaïche (1996) que, dans le cas d'une variété sous-riemannienne M munie de la métrique de Carnot–Carathéodory d_{CC}, la limite en 0 au sens de Gromov–Hausdorff pointée de $(M, d_{CC}/\varepsilon, x)$ est unique et qu'il s'agit d'un espace homogène d'un groupe de Lie nilpotent.

Précisément, notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie libre engendrée par n éléments notés $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ ayant pour relations que les itérations de crochets de longueur strictement plus grande que N s'annulent. Il s'agit d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie. Notons G le groupe de Lie nilpotent simplement connexe qui l'intègre.

Bellaïche (1996) exhibe, pour tout x de M, un sous-groupe simplement connexe G_x de G de codimension $\dim(M)$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(M, d_{CC}/\varepsilon, x) = (G/G_x, d_{G/G_x}, G_x)$$

où d_{G/G_x} est une métrique de Carnot–Carathéodory sur l'espace homogène G/G_x.

Les travaux de Mohsen (2024) révèlent qu'il existe d'autres cônes tangents à considérer et nous verrons dans la section 3.1 comment les obtenir tous.

1. Pour deux espace métriques A et B, $d_{HG}(A,B) = \inf\{d_H(f(A), g(B))\}$ où (f,g,Z) parcourent l'ensemble des couples de plongements isométriques $f\colon A \to Z$, $g\colon B \to Z$ et d_H est la distance de Hausdorff.

1.2. Opérateurs différentiels hypoelliptiques maximaux

Une *distribution* sur la variété compacte lisse M est un élément du dual topologique de $C^\infty(M)$, c'est-à-dire une forme linéaire $u\colon C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ continue pour la topologie naturelle : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que u s'étend en une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $C^k(M)$. Le plus petit tel k est appelé l'*ordre* de la distribution u. On note $C^{-\infty}(M)$ l'espace des distributions sur M.

Le choix d'une 1-densité dx sur M permet de plonger $C^\infty(M)$ dans $C^{-\infty}(M)$: la fonction $f \in C^\infty(M)$ définit la distribution $g \in C^\infty(M) \mapsto \int_M f(x)g(x)dx$.

Un opérateur différentiel D sur M s'étend naturellement en un endomorphisme linéaire encore noté D de l'espace des distributions $C^{-\infty}(M)$.

Un tel opérateur D est dit *hypoelliptique* si, pour tout ouvert U de M et toute fonction lisse f en restriction à U, la solution u de l'équation $Du = f$ est elle aussi lisse sur U.

Exemple 1.2. — On se place sur $\mathbb{R}^2$.

1. Le *Laplacien* : $P = \partial_x^2 + \partial_y^2$ est hypoelliptique.
2. L'opérateur de *la chaleur* : $P = \partial_t - \partial_x^2$ est hypoelliptique.
3. L'opérateur *d'Alembertien* associé à l'équation des ondes : $P = \partial_t^2 - \partial_x^2$ n'est pas hypoelliptique.
4. Le *Laplacien hypoelliptique* : $P = -\partial_x^2 - x\partial_y$ est hypoelliptique.
5. Le sous-Laplacien de Grushin : $P_\lambda = -\partial_x^2 - x^2\partial_y^2 + \lambda\partial_y$ est hypoelliptique si et seulement si $\lambda \notin \{(2k+1)i, k \in \mathbb{Z}\}$.

✧*Rappel sur le théorème de régularité des opérateurs différentiels elliptiques.* —

Le Laplacien est un exemple d'opérateur différentiel elliptique. Les opérateurs différentiels elliptiques bénéficient de propriétés de régularités très fortes énoncées plus bas qui garantissent, en particulier qu'ils sont hypoelliptiques.

Rappelons qu'un opérateur différentiel $D\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ d'ordre k s'écrit localement $\sum_{|\alpha|\leq k} f_\alpha \partial^\alpha$ où si m désigne la dimension de la variété M, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ est un multi-indice de longueur $|\alpha| = \sum \alpha_i$ et $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_m}}{(\partial x_1)^{\alpha_m}}$.

On définit localement le *symbole principal* de D par

$$\sigma(D, x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha(x) i^k \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_m^{\alpha_m}.$$

On vérifie que cette formule est indépendante du choix de coordonnées et que le symbole principal défini une fonction lisse $\sigma(D)\colon T^*M \to \mathbb{C}$ homogène de degré k.

Les résultats suivant s'obtiennent à l'aide du calcul pseudodifférentiel classique (Hörmander, 1985).

Théorème 1.3. — *Soit D un opérateur différentiel d'ordre k sur la variété compacte et lisse M. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur D est* elliptique, *c'est-à-dire que pour tout $(x,\xi) \in T^*M \setminus M \times \{0\}$, $\sigma(D,x,\xi) \neq 0$.*
2. *Pour tout (ou un) $s \in \mathbb{N}$ et toute distribution u sur M, si $Du \in H^s(M)$ alors $u \in H^{s+k}(M)$.*
3. *Pour tout opérateur différentiel P d'ordre inférieur ou égal à k, il existe $C > 0$ tel que*
$$\|P(f)\|_{L^2(M)} \leq C\Big(\|D(f)\|_{L^2(M)} + \|f\|_{L^2(M)}\Big),\ \forall\ f \in C^\infty(M).$$
4. *Pour tout (ou un) $s \in \mathbb{N}$, l'opérateur $D\colon H^{s+k}(M) \to H^s(M)$ est un opérateur de Fredholm*[(2)].

Puisque $C^\infty(M) = \bigcap_{s\in\mathbb{N}} H^s(M)$, on en déduit que si D est elliptique, il est hypoelliptique.

Un ingrédient important dans la théorie des opérateurs elliptiques et qu'ils admettent des *paramétrix*, c'est-à-dire des « inverses à régularisant près ». Un paramétrix pour l'opérateur D est un opérateur $Q\colon C^{-\infty}(M) \to C^{-\infty}(M)$ tel que :

- ✧ $Q(C^\infty(M)) \subset C^\infty(M)$,
- ✧ les opérateurs $QD - Id$ et $DQ - Id$ sont *régularisants*, c'est à dire :
  $(QD - Id)(C^{-\infty}(M)) \subset C^\infty(M)$ et $(DQ - Id)(C^{-\infty}(M)) \subset C^\infty(M)$.

✧ *Théorème de régularité des opérateurs différentiels hypoelliptiques maximaux et conjecture de Helffer et Nourrigat.* —

Considérons à nouveau la famille de champs de vecteurs $\{X_1, \ldots, X_n\}$ sur M satisfaisant la condition des crochets de Hörmander. Cette dernière condition garantit que tout opérateur différentiel D peut s'obtenir sous la forme $D = P(X_1, \ldots, X_n)$ où P est un polynôme non commutatif à coefficients dans $C^\infty(M)$.
Nous renvoyons aux travaux de Helffer et Nourrigat (1985) pour les détails concernant cette partie.

Définition 1.4. — 1. *L'*ordre de Hörmander *d'un opérateur différentiel D est le plus petit degré de polynôme P tel que $D = P(X_1, \ldots, X_n)$. On notera $DO^k(\mathcal{F}^\bullet)$ l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre de Hörmander k.*

2. *On considère les espaces de Sobolev définis pour $s \in \mathbb{N}$ par :*
$$\tilde{H}^s(M) := \{u \in L^2(M)\ :\ Du \in L^2(M) \text{ pour tout } D \text{ d'ordre de Hörmander } \leq s\}$$

On a encore $C^\infty(M) = \bigcap_{s\in\mathbb{N}} \tilde{H}^s(M)$.

Exemple 1.5. — Dans $\mathbb{R}^2$, avec $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = x\partial_y$, l'ordre de Hörmander de ∂_y est 2 car $\partial_y = [X_1, X_2]$.

2. M compact est nécessaire ici.

Il s'agit maintenant de définir un symbole principal dans ce cadre.
On considère à nouveau $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie libre engendrée par n éléments notés $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ ayant pour relations que les itérations de crochets de longueur strictement plus grande que N s'annulent. On note G le groupe de Lie nilpotent simplement connexe qui l'intègre et $\Xi\colon \mathfrak{g} \to G$ l'application exponentielle, qui est un difféomorphisme ici.

Soit $\pi\colon G \to U(H)$ une représentation unitaire irréductible de G.
On note $C^\infty(\pi)$ le sous-espace de H des *vecteurs lisses*, c'est-à-dire des vecteurs $v \in H$ tels que $g \in G \mapsto \pi(g)v \in H$ est lisse.

Rappelons que la différentielle de π :

$$d\pi\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}\Big(C^\infty(\pi)\Big)$$

est donnée par la formule $d\pi(X)v = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\pi(\Xi(tX))v - v}{t}$.

Considérons un opérateur différentiel $D \in DO^k(\mathcal{F}^\bullet)$ et un polynôme P de degré k tel que $D = P(X_1, \dots, X_n)$. On définit :

$$\sigma(D, x, \pi) = P_{\max,x}(d\pi(\tilde{X}_1), \dots, d\pi(\tilde{X}_n)) \in \operatorname{End}\Big(C^\infty(\pi)\Big)$$

où $P_{\max,x}$ est obtenu en ne gardant que la partie homogène de degré k de P et en évaluant les fonctions coefficients en x.

À priori, $\sigma(D, x, \pi)$ dépend du choix du polynôme P. Dans leur article, Helffer et Nourrigat (1979) construisent, à l'aide de la méthode des orbites de Kirillov, un ensemble $\mathcal{T}_x$ de représentations unitaires, appelé *ensemble de Helffer–Nourrigat*, qui ne dépend que des champs de vecteurs $\{X_1, \dots, X_n\}$ et pour lequel l'application ci-dessus ne dépend pas du choix du polynôme de degré k qui définit l'opérateur D. On donnera une description des $\mathcal{T}_x$ en 3.1 et leur lien avec les cônes tangents.

On peut énoncer le théorème de régularité des opérateurs différentiels hypoelliptiques maximaux (Androulidakis, Mohsen et Yuncken, 2022) :

Théorème 1.6. — *Soit une famille de champs de vecteurs $\{X_1, \dots, X_n\}$ sur la variété compacte et lisse M satisfaisant la condition des crochets de Hörmander et D un opérateur différentiel sur M d'ordre de Hörmander k.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout $x \in M$ et $\pi \in \mathcal{T}_x \setminus \{1_G\}$, $\sigma(D, x, \pi)$ est injective.*
2. *Pour tout (ou un) $s \in \mathbb{N}$ et toute distribution u sur M, si $Du \in \tilde{H}^s(M)$ alors $u \in \tilde{H}^{s+k}(M)$.*
3. *Pour tout opérateur différentiel P d'ordre de Hörmander inférieur ou égal à l'ordre de Hörmander de D, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|P(f)\|_{L^2(M)} \leq C\Big(\|D(f)\|_{L^2(M)} + \|f\|_{L^2(M)}\Big),\ \forall\ f \in C^\infty(M)$$

4. *Pour tout (ou un)* $s \in \mathbb{N}$*, l'opérateur* $D\colon \tilde{H}^{s+k}(M) \to \tilde{H}^s(M)$ *est inversible à gauche modulo les opérateurs compacts*[3].

Un opérateur différentiel satisfaisant ces conditions est dit *hypoelliptique maximal*. Puisque $C^\infty(M) = \bigcap_{s\in\mathbb{N}} \tilde{H}^s(M)$, un tel opérateur est en particulier hypoelliptique.

Ce théorème était essentiellement conjecturé par Helffer et Nourrigat (1979) jusqu'aux travaux de Androulidakis, Mohsen et Yuncken (2022). Précisément, on peut noter :

— L'implication de (2) vers (1) a été montrée par Helffer et Nourrigat (1985) en toute généralité.

— L'implication de (1) vers (2) a été montrée dans certains cas particuliers (rang 2 ou équirégulier) par Rothschild et Stein (1976), Rothschild (1979), Helffer et Nourrigat (1985).

— Street (2014) montre que si l'inégalité (3) est vraie pour la norme L^2 alors elle est vraie pour n'importe quelle norme L^p, $p \in]1, +\infty[$.

— Les résultats de Helffer et Nourrigat sont obtenus sans paramétrix. De nombreux auteurs ont construit des calculs pseudodifférentiels dans différentes généralités qui contiennent les paramétrix mais pour lesquels le symbole principal est difficile à calculer. Le livre de Helffer et Nourrigat (1985) fournit un panorama de ces travaux ainsi qu'une bibliographie complète. Concernant des travaux plus récents, citons : Beals et Greiner (1988), Epstein, Melrose et Mendoza (1991), Christ, Geller, Głowacki et Polin (1992), Ponge (2008), Bahouri, Fermanian-Kammerer et Gallagher (2012), Fischer et Ruzhansky (2014, 2016), van Erp et Yuncken (2019), Fermanian-Kammerer et Fischer (2020) et Cren (2024).

Remarque 1.7. — Si, pour tout $x \in M$, $F_x = \mathrm{vect}(X_1(x), \dots, X_n(x)) = T_xM$ alors les théorèmes 1.3 et 1.6 sont les mêmes.

2. Groupoïdes de Lie et calculs pseudodifférentiels classique

Dans les années 80, deux contributions majeures presque simultanées ont imposé les groupoïdes dans le monde de la géométrie non commutative. D'une part, la construction par Renault (1980) de la C^*-algèbre d'un groupoïde localement compact. D'autre part, la construction par Connes (1979, 1982) de la C^*-algèbre d'un feuilletage, basée sur son groupoïde d'holonomie ainsi que d'un calcul pseudodifférentiel longitudinale « porté » par ce même groupoïde. Suivra la construction du *groupoïde tangent* de Connes (1994) qui permet de construire l'indice analytique des opérateurs (pseudo)différentiels sans utiliser le calcul pseudodifférentiel et de fournir une preuve alternativee du théorème d'indice d'Atiyah–Singer.

3. M compact est nécessaire ici.

Le calcul pseudodifférentiel sur les groupoïdes, la construction de l'indice analytique et le groupoïde tangent de Connes ont inspiré de nombreux travaux où ces idées ont été généralisées à des contextes géométriques variés, nous renvoyons à la bibliographie très complète qui se trouve dans l'article de synthèse (Debord et Skandalis, 2019).

Plus récemment, nous avons montré avec Skandalis comment obtenir directement les opérateurs pseudodifférentiels en utilisant l'action canonique de $\mathbb{R}_+^*$ sur le groupoïde tangent (Debord et Skandalis, 2014). Une construction alternative reposant sur la même idée a été ensuite développée par van Erp et Yuncken (2019).

Dans ce préambule, nous rappelons les définitions de groupoïdes de Lie, de leurs C^*-algèbres et des opérateurs pseudodifférentiels associés.

2.1. Groupoïdes

Définition 2.1. — *Un* groupoïde *est une petite catégorie dont toutes les flèches sont inversibles. Autrement dit, un* groupoïde *est donné par :*

- *Un ensemble d'*unités *(d'objets)* $G^{(0)}$*, un ensemble de* flèches *(morphismes)* $G^{(1)}$ *noté aussi* G*.*
- *Une application unité injective* $u\colon G^{(0)} \to G$*.*
  On identifie $G^{(0)}$ *à son image dans* G*.*
- *Des applications* source *et* but $r, s\colon G \to G^{(0)}$ *telles que* $s \circ u = r \circ u = Id$*.*
- *Un* produit *partiel* $G^{(2)} := \{(\gamma, \eta) \in G \mid s(\gamma) = r(\eta)\} \to G,\ (\gamma, \eta) \mapsto \gamma \cdot \eta$ *qui vérifie :*
  — $s(\gamma \cdot \eta) = s(\eta)$ *et* $r(\gamma \cdot \eta) = r(\gamma)$*,*
  — *le produit est associatif :* $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ *dès que* $s(\gamma_1) = r(\gamma_2)$ *et* $s(\gamma_2) = r(\gamma_3)$*,*
  — *compatible avec les unités :* $\gamma \cdot s(\gamma) = r(\gamma) \cdot \gamma = \gamma$*.*
- *Une application* inverse *:* $G \to G, \gamma \mapsto \gamma^{-1}$ *qui est involutive et satisfait :*
  — $s(\gamma^{-1}) = r(\gamma)$*,*
  — $\gamma \cdot \gamma^{-1} = r(\gamma)$*.*

On note alors $G \rightrightarrows G^{(0)}$*.*

Remarque 2.2. — Le groupoïde induit une relation d'équivalence sur l'espace des unités $G^{(0)}$:

$$\text{pour } x,\ y \text{ dans } G^{(0)} : x \sim y \iff \exists \gamma \in G \ :\ s(\gamma) = x \text{ et } r(\gamma) = y.$$

Pour $x \in G^{(0)}$, l'*orbite* de G passant par x est $\mathcal{O}_x = r(s^{-1}(x)) = s(r^{-1}(x))$. On note $G^{(0)}/G$ l'*espace des orbites*.

Le *groupe d'isotropie* en x : $G_x^x := s^{-1}(x) \cap r^{-1}(x)$ est un groupe d'unité x.
Le groupe G_x^x agit sur $G_x := s^{-1}(x)$ par multiplication à droite et sur $G^x := r^{-1}(x)$ par multiplication à gauche :

$$G_x/G_x^x \simeq \mathcal{O}_x \simeq G^x/G_x^x$$

On parle de *groupoïde localement compact* lorsque $G^{(0)}$ et G sont des espaces topologiques tels que :

- ✧ G et $G^{(0)}$ sont des espaces localement compacts à base dénombrable,
- ✧ toutes les applications de structure (unité, source but, produit, inverse) sont continues et la source et le but sont ouvertes.

Un groupoïde localement compact $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est un *groupoïde de Lie* lorsque G et $G^{(0)}$ sont des variétés lisses, $G^{(0)}$, s et r sont des submersions surjectives (donc $G^{(2)}$ est une variété), le produit et l'inverse sont lisses et u est un plongement.

Remarque 2.3. — La définition usuelle de groupoïde de Lie autorise la variété G a être une variété non séparée. Cette situation est fréquente lorsque l'on s'intéresse aux groupoïdes de feuilletages. Les constructions de C^*-algèbres et d'opérateurs pseudodifférentiels qui sont présentées dans la suite s'adaptent au cas non séparé. Cependant nous ne considérerons pas ce cas ici, tous les groupoïdes rencontrés étant séparés.

Exemple 2.4. —

1. M un ensemble est un groupoïde, $M \rightrightarrows M$ avec $s = r = Id$, $M^{(2)} = M$. Une variété est un groupoïde de Lie.
2. G un groupe d'unité e est un groupoïde : $G \rightrightarrows \{e\}$, $G^{(2)} = G \times G$ et le produit est le produit usuel. C'est un groupoïde de Lie lorsque G est un groupe de Lie.
3. Un fibré en groupes $\pi\colon E \to M$ est un groupoïde : $E \rightrightarrows M$, $s = r = \pi$, $E^{(2)} = \sqcup_{x\in M} E_x \times E_x \to E$ avec le produit standard. En particulier, un fibré vectoriel lisse est un groupoïde de Lie.
4. M un ensemble, le *groupoïde des couples* est $M \times M \rightrightarrows M$ avec

$$s(x,y) = y,\ r(x,y) = x,\ (x,y)\cdot(y,z) = (x,z),\ u(x) = (x,x),\ (x,y)^{-1} = (y,x)$$

   L'espace des orbites est réduit à un point : $\mathcal{O}_x = M$ pour tout $x \in M$.
   C'est un groupoïde de Lie lorsque M est une variété.

   Plus généralement, le graphe d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur M :

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in M \times M\ ;\ x\mathcal{R}y\} \rightrightarrows M$$

   avec la même structure que précédemment est un groupoïde.
   Dans ce cas, l'espace des orbites est $M/\mathcal{R}$.
5. *Action de groupe*

   Soit H un groupe de neutre e agissant sur un ensemble M à gauche, le groupoïde de l'action est : $H \ltimes M \rightrightarrows M$ où :
   $H \ltimes M = H \times M$, $s(h,x) = x$, $r(h,x) = h.x$, $u(x) = (x,e)$, $(g,hx)\cdot(h,x) = (gh,x)$ et $(h,x)^{-1} = (h^{-1},hx)$.

   Les orbites, l'espace des orbites et l'isotropie de $H \ltimes M$ coïncident avec ceux de l'action de H sur M. Une fois encore, si H est un groupe de Lie, M une variété lisse et que l'action est lisse, le groupoïde $H \ltimes M \rightrightarrows M$ est de Lie.

6. Soit M une variété.

$\Pi(M) = \{[\gamma]\ ;\ \text{ classe d'homotopie à extrémités fixes de } \gamma\colon [0,1] \to M \text{ continu } \} \rightrightarrows M$

— $s([\gamma]) = \gamma(0)$, $r([\gamma]) = \gamma(1)$,
— $u(x) = [C_x]$ où C_x est le chemin constant en x,
— $[\gamma]\cdot[\eta] = [\gamma\cdot\eta]$ lorsque $\gamma(0) = \eta(1)$ où $\gamma\cdot\eta = \begin{cases} \eta(2t) \text{ pour } t \in [0,1/2] \\ \gamma(2t-1) \text{ pour } t \in [1/2,1] \end{cases}$
— $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ où $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

On munit naturellement $\Pi(M)$ d'une structure de variété de dimension $2\dim M$ pour laquelle $\Pi(M)$ est un groupoïde de Lie, $\Pi(M)$ est un revêtement de $M\times M$.

Pour $x \in M$, $\mathcal{O}_x$ est la composante connexe de x, $\Pi(M)_x^x = \pi_1(M,x)$ est le groupe d'homotopie en x et $\Pi(M)_x$ un revêtement universel.

Le pendant infinitésimal des groupoïdes de Lie sont les *algébroïdes de Lie*.

Définition 2.5. — *Un* algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, \natural, [\ ,\ ])$ *sur une variété M est un fibré vectoriel $\mathcal{A} \to M$ tel que l'espace de ses sections lisses* $(\Gamma(\mathcal{A}), [\ ,\ ])$ *est une algèbre de Lie et $\natural\colon \mathcal{A} \to TM$ est un morphisme de fibré appelé* ancre, *dont l'application induite sur les sections des fibrés $\natural\colon \Gamma(\mathcal{A}) \to \mathcal{X}(M)$ satisfait :*

1. $\natural([X,Y]) = [\natural(X), \natural(Y)]$,
2. $[X, fY] = f[X,Y] + (\natural(X)f)Y$,

lorsque X et Y sont deux sections lisses de $\mathcal{A}$ et f est une fonction lisse sur M.

Si $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est un groupoïde de Lie, notons qu'il peut être considéré comme la famille paramétrée par $G^{(0)}$ des variétés $G_x := \{\gamma \in G\ ;\ s(\gamma) = x\}$, $x \in G^{(0)}$.
La *translation à droite* donnée pour tout $\gamma \in G$ avec $y = r(\gamma)$ et $x = s(\gamma)$, par $R_\gamma\colon G_y \to G_x$, $\eta \mapsto \eta\cdot\gamma$ agit sur la famille $(G_x)_{x\in G^{(0)}}$.
On construit l'algébroïde de Lie du groupoïde $G \rightrightarrows G^{(0)}$ de la façon suivante (voir Mackenzie, 2005).

- Le fibré vectoriel $\mathfrak{A}G \to G^{(0)}$ est la restriction aux unités, $G^{(0)}$, du noyau de la différentielle Ts de l'application source s. Ainsi $\mathfrak{A}G = \cup_{x\in G^{(0)}} T_x G_x$ est la réunion des espaces tangents en les unités aux fibres de s.
- L'ancre est la restriction de la différentielle Tr de l'application but r.
- Si Z est une section de $\mathcal{A}$, on lui associe un *champ invariant à droite*, $\tilde{Z}$ défini par
$$\tilde{Z}(\eta) = TR_\eta(Z(r(\eta))$$
où $R_\eta\colon G_{r(\eta)} \to G_{s(\eta)}$ est la multiplication à droite par η.
Le crochet de Lie est alors donné par :
$$\begin{array}{rccc} [\ ,\ ]\colon & \Gamma(\mathfrak{A}G)\times\Gamma(\mathfrak{A}G) & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{A}G) \\ & (Z_1, Z_2) & \longmapsto & [\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}]_{G^{(0)}} \end{array}$$
où $[\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}]_{G^{(0)}}$ désigne la restriction du crochet usuel $[\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}]$ aux unités $G^{(0)}$.

Par construction l'image de $\Gamma(\mathfrak{A}G)$ par l'ancre est la réunion des espaces tangents aux orbites de G.

Exemple 2.6. —

1. L'algébroïde de Lie d'un groupe de Lie est l'algèbre de Lie du groupe.
2. L'algébroïde de Lie du groupoïde des couples $M \times M \rightrightarrows M$ sur une variété M est TM avec l'identité pour ancre.
3. Lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage régulier sur la variété M, $T\mathcal{F}$ avec l'identité pour ancre est un algébroïde de Lie. Le *groupoïde d'holonomie* de $\mathcal{F}$ est le « plus petit » groupoïde de Lie dont $T\mathcal{F}$ est l'algébroïde de Lie.

2.1.1. *C^*-algèbre.* — Dans la suite $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est un groupoïde de Lie (séparé).

✧*Systèmes de Haar.* — On considère un analogue de la mesure de Haar des groupes localement compacts.

Définition 2.7. — *Un* système de Haar *sur le groupoïde de Lie $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est une famille $\mu = \{\mu_x \ ; \ x \in G^{(0)}\}$ de mesures de Lebesgue μ_x sur G_x satisfaisant les conditions suivantes :*

Support : *Pour tout $x \in G^{(0)}$, le support de μ_x est G_x.*

Invariance : *Pour tout $\gamma \in G$, $y = r(\gamma)$ et $x = s(\gamma)$, l'opérateur de translation $R_\gamma \colon G_y \to G_x$ préserve la mesure. C'est-à-dire, pour tout $f \in C_c^\infty(G)$:*

$$\int_{G_x} f(\eta) d\mu_x(\eta) = \int_{G_y} f(\eta \cdot \gamma) d\mu_y(\eta).$$

Différentiabilité : *Pour tout $f \in C_c^\infty(G)$, l'application suivante est lisse :*

$$G^{(0)} \to \mathbb{C} \ ; \ x \mapsto \int_{G_x} f(\gamma) d\mu_x(\gamma).$$

✧*Algèbre de convolution.* — Munis d'un système de Haar μ sur le groupoïde G, on équipe $C_c^\infty(G)$, l'espace vectoriel des fonctions lisses à support compact sur G, d'une structure d'algèbre de convolution donnée par :

Involution : Pour $f \in C_c^\infty(G)$, $\gamma \in G$, $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$.

Produit de convolution : Pour $f \in C_c^\infty(G)$, $\gamma \in G$ et $x = s(\gamma)$

$$f * g(\gamma) = \int_{\eta \in G_x} f(\gamma \cdot \eta^{-1}) g(\eta) d\mu_x(\eta).$$

✧*Normes et représentations.* — On définit la norme suivante sur $C_c^\infty(G)$:

$$\|f\|_I = \sup_{x\in G^{(0)}} \Big\{ \max\Big(\int_{G_x} |f(\gamma)| d\mu_x(\gamma), \int_{G_x} |f(\gamma^{-1})| d\mu_x(\gamma) \Big) \Big\}.$$

Définition 2.8. — *Une représentation* non dégénérée *de $C_c^\infty(G)$ est un morphisme d'algèbres involutives $\pi\colon C_c^\infty(G) \to \mathcal{L}(H)$ où H est un espace de Hilbert tel que l'ensemble $\{\pi(f)\cdot\xi \ ; \ f \in C_c(G), \ \xi \in H\}$ est dense dans H.*

On dit que π est bornée *lorsque pour tout $f \in C_c^\infty(G)$, $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_I$.*

On définit la *norme maximale* de $f \in C_c^\infty(G)$, par

$$\|f\|_{\max} = \sup_{\pi \text{ bornée}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

On peut définir une autre norme en considérant la *famille des représentations régulières* : pour $x \in G^{(0)}$, $\pi_x\colon C_c^\infty(G) \to \mathcal{L}(L^2(G_x, \mu_x))$ est donnée par

$$\pi_x(f)(\xi)(\gamma) = \int_{\eta\in G_x} f(\gamma\cdot\eta^{-1})\xi(\eta) d\mu_x(\eta).$$

Pour tout $x \in G^{(0)}$ et $f \in C_c^\infty(G)$, $\pi_x(f)$ est borné (i.e. dans $\mathcal{L}(L^2(G_x, \mu_x))$ et π_x est une représentation non dégénérée et bornée de $C_c^\infty(G)$).
On définit la *norme minimale* de $f \in C_c^\infty(G)$, par

$$\|f\|_{\min} = \sup_{x\in G^{(0)}} \|\pi_x(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(G_x,\mu_x))}.$$

La *C^*-algèbre réduite* de G est la complétion de $C_c^\infty(G)$ pour la norme minimale : $C_r^*(G) = \overline{C_c^\infty(G)}^{\min}$. La *$C^*$-algèbre maximale* de G est la complétion de $C_c^\infty(G)$ pour la norme maximale $C^*(G) = \overline{C_c^\infty(G)}^{\max}$.

Les groupoïdes que nous considérerons dans la suite sont *moyennables*, dans ce cas les C^*-algèbres réduites et maximales sont égales.

Exemple 2.9. —

1. Le groupoïde des couples $M \times M \rightrightarrows M$ est moyennable et sa C^*-algèbre est l'algèbre $\mathcal{K}(L^2(M))$ des opérateurs compacts sur $L^2(M)$.
2. Un fibré vectoriel lisse $E \to M$ est un groupoïde moyennable et sa C^*-algèbre est isomorphe via la transformée de Fourier à l'algèbre $C_0(E^*)$ des fonctions continues nulles à l'infini sur E^*.
3. Dans le cas d'un groupe de Lie, on retrouve les notions usuelles de C^*-algèbres (maximale ou réduite) de groupe.

Remarque 2.10. — Il est possible de se soustraire au choix d'un système de Haar et d'obtenir une définition canonique de la convolution et de l'involution en remplaçant l'espace $C_c^\infty(G)$ par l'espace des sections à support compact d'un fibré (en droites) de demi-densités sur le groupoïde G. Choisir un système de Haar, c'est choisir une trivialisation de ce fibré. Nous conviendrons dans la suite, sans plus de détail, que l'intégration le long des fibres (de la source ou du but) d'un groupoïde de Lie a un sens.

✧*Et si G n'est pas tout à fait un groupoïde de Lie ?* —

Notons que la régularité essentielle dans la construction présentée plus haut est la différentiabilité des fibres $G_x = s^{-1}(x)$ du groupoïde G, lorsque $x \in G^{(0)}$. Ainsi, on peut appliquer cette construction aux *familles continues de groupoïdes* (ou groupoïdes $C^{\infty,0}$) introduites par Paterson (2000). Un groupoïde localement compact $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est $C^{\infty,0}$ lorsque G_x est lisse pour tout $x \in G^{(0)}$ et la structure lisse varie continument avec x. En outre pour tout $\eta \in G$, la multiplication à droite $R_\eta \colon G_{r(\eta)} \to G_{s(\eta)}$ est un difféomorphisme et ces difféomorphismes varient continument avec η.

Pour définir proprement de telles structure, on « remplace » les fonctions lisses par des fonctions de type $C^{\infty,0}$.

Définition 2.11. — *Si M et N sont des espaces topologiques, $g \colon \mathbb{R}^n \times M \to \mathbb{R}^m$ et $h \colon M \to N$ deux applications continues, on dira que l'application $f = (g, h) \colon \mathbb{R}^n \times M \to \mathbb{R}^m \times N$ est $C^{\infty,0}$ lorsque pour tout $x \in M$, $g(\cdot, x)$ est lisse et toutes les différentielles partielles de g en les variables de $\mathbb{R}^n$ sont continues.*

2.2. Groupoïde tangent et calcul pseudodifférentiel classique

Historiquement, les opérateurs pseudodifférentiels sur un groupoïde ont été définis comme des familles d'opérateurs pseudodifférentiels (classiques) sur les fibres G_x du groupoïde G invariants par G. Ils ont été introduits par Connes (1979) dans le cadre des feuilletages réguliers, puis étendus à tout groupoïde de Lie indépendamment par Monthubert et Pierrot (1997) et par Nistor, Weinstein et Xu (1999).

La façon la plus naturelle de définir les opérateurs pseudodifférentiels sur un groupoïde est de les voir comme des distributions sur G conormales à $G^{(0)}$ au sens de Hörmander (1985). La présentation que nous en faisons ici est principalement issue de notre article (Debord et Skandalis, 2014) dont on peut trouver une exposition détaillée dans la thèse de Naraghi (2024). Pour une étude approfondie des distributions conormales dans le cadre des groupoïdes, nous renvoyons aux travaux de Lescure, Manchon et Vassout (2017).

2.2.1. *Déformation au cône normal, zooming action et éclatement.* —

Soit $\mathcal{M}$ une variété lisse et V une sous-variété. Notons $\mathcal{N}_V^{\mathcal{M}}$ le fibré normal de l'inclusion de V dans $\mathcal{M}$.

✧*Déformation au cône normal.* — La *déformation au cône normal* de V dans $\mathcal{M}$ est :

$$\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V) = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^* \cup \mathcal{N}_V^{\mathcal{M}} \times \{0\}.$$

On équipe $\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V)$ d'une structure de variété lisse en demandant que :

- ✧ la projection naturelle de $\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V)$ sur $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ est lisse,

✧ si $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse sur $\mathcal{M}$ qui s'annule sur V alors la fonction $f^{dnc}\colon \mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V) \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\begin{cases} f^{dnc}(x,t) = \dfrac{f(x)}{t} \text{ pour } (x,t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^*, \\ f^{dnc}(x,X,0) = df(x,X) \text{ pour } (x,X,0) \in \mathcal{N}_V^{\mathcal{M}} \times \{0\} \end{cases}$$

est lisse.

On peut également décrire cette structure de variété en choisissant une métrique riemannienne sur $\mathcal{M}$ qui permet d'identifier $\mathcal{N}_V^{\mathcal{M}}$ à un voisinage tubulaire $\mathcal{U}$ de V dans $\mathcal{M}$ via un difféomorphisme $\theta\colon \mathcal{N}_V^{\mathcal{M}} \to \mathcal{U}$. On recolle alors les structures de variétés usuelles sur $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^*$ et sur $\mathcal{N}_V^{\mathcal{M}} \times \{0\}$ à l'aide de la carte :

$$\begin{array}{rccc} \Theta\colon & \mathcal{N}_V^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \Theta(\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V)) \\ & (x,X,t) & \longmapsto & \begin{cases} (\theta(x,tX),t) & \text{si } t \neq 0 \\ (x,X,t) & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

Remarque 2.12. — La construction DNC est fonctorielle.

Définition 2.13. — *L'action naturelle de* $\mathbb{R}^*$ *sur* $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^*$ *s'étend en une action naturelle sur* $\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V)$ *appelée* zooming action *:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V) \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V) \\ (z,t,\lambda) & \longmapsto & (z, \lambda t) \textit{ pour } t \neq 0 \\ (x,X,0,\lambda) & \longmapsto & (x, \frac{1}{\lambda}X, 0) \textit{ pour } t = 0. \end{array}$$

✧*Eclatement.* — La zooming action est libre et propre en dehors de $V \times \mathbb{R}$ vu dans $\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V)$ par le plongement naturel. On définit l'*éclatement* de V dans $\mathcal{M}$ par :

$$\mathrm{Blup}(\mathcal{M}, V) = \Big(\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V) \setminus V \times \mathbb{R}\Big)/\mathbb{R}^* = \mathcal{M} \setminus V \cup \mathbb{P}(\mathcal{N}_V^{\mathcal{M}})$$

et l'*éclatement sphérique* de V dans $\mathcal{M}$ par :

$$\mathrm{SBlup}(\mathcal{M}, V) = \Big(\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V) \setminus V \times \mathbb{R}\Big)/\mathbb{R}_+^* = (\mathcal{M} \setminus V)_+ \cup (\mathcal{M} \setminus V)_- \cup \mathbb{S}(\mathcal{N}_V^{\mathcal{M}}) \ .$$

Remarquons que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V) & \longrightarrow & \mathrm{DNC}(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, V \times \{0\}) \\ = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^* \cup \mathcal{N}_V^{\mathcal{M}} \times \{0\} & & = \mathcal{M} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \cup \mathcal{N}_V^{\mathcal{M}} \times \{0\} \\ (z,t) & \longmapsto & (z,t,t) \text{ pour } t \neq 0 \\ (x,X,0) & \longmapsto & (x,(X,1),0) \text{ pour } t = 0 \end{array}$$

a son image dans $\mathrm{DNC}(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, V \times \{0\}) \setminus V \times \{0\} \times \mathbb{R}$ et qu'elle induit un plongement de $\mathrm{DNC}(\mathcal{M}, V)$ dans $\mathrm{SBlup}(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, V \times \{0\})$.

2.2.2. *Distributions conormales.* —
On notera $\mathrm{DNC}(\mathcal{M},V)_+$ la sous variété à bord $\mathcal{M}\times\mathbb{R}_+^*\cup\mathcal{N}_V^{\mathcal{M}}\times\{0\}$ de $\mathrm{DNC}(\mathcal{M},V)$.

L'espace $\mathcal{S}_c(M,V)$ des *fonctions de Schwartz* sur $\mathrm{DNC}(\mathcal{M},V)_+$ est l'espace des fonctions f à support compact qui se prolongent par 0 en une fonction lisse sur $\mathrm{SBlup}(\mathcal{M}\times\mathbb{R},V\times\{0\})$.

Le sous-espace $\mathcal{J}(\mathcal{M},V)\subset\mathcal{S}_c(\mathcal{M},V)$ est l'espace constitué des fonctions $f=(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ telles que la famille $(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ s'annule à tout les ordres en 0 comme distribution sur $\mathcal{M}$, ce qui signifie que pour tout $g\in C^\infty(\mathcal{M})$, la fonction $t\mapsto\langle f_t,g\rangle=\int_{\mathcal{M}}f_t(x)g(x)dx$ s'étend en une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ qui est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple 2.14. — L'exemple fondamental à considérer est celui d'un fibré vectoriel réel lisse $q\colon E\to V$ muni d'une métrique. On identifie V à la section nulle de E. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\Theta} & \mathrm{DNC}(E,V) \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathbb{S}_{E\times\mathbb{R}}\times\mathbb{R} & \xrightarrow[\tilde\Theta]{} & \mathrm{SBlup}(E\times\mathbb{R},V\times\{0\}), \end{array}$$

où i est le plongement mentionné plus haut et Θ est le difféomorphisme

$$\begin{array}{ccc} E\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\Theta} & \mathrm{DNC}(E,V) \\ (x,X,t) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l}(x,tX,t)\text{ lorsque }t\neq 0\\ (x,X,0)\text{ lorsque }t=0.\end{array}\right. \end{array}$$

Le difféomorphisme $\tilde\Theta$ est construit de façon analogue à Θ (pour le fibré $E\times\mathbb{R}\to V\times\{0\}$) et l'application φ est le plongement donné par $\varphi(x,X,t)=\Big(x,\frac{1}{\sqrt{\|X\|^2+1}}(X,1),\sqrt{\|X\|^2+1}\;t\Big)$.

Notons $S_c(E\times\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de Schwartz sur le fibré $E\times\mathbb{R}\to V\times\mathbb{R}$ à support compact dans la direction $V\times\mathbb{R}$ et $\mathcal{J}^+_{E\times\mathbb{R}}$ les fonctions f de $S_c(E\times\mathbb{R})$ telles que pour tout $g\in C^\infty(E)$, la fonction $t\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\langle f_t,g\rangle=\int_E f_t(x)g(x)dx$ s'étend en une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ qui s'annule sur $\mathbb{R}_-$. Cette dernière condition est équivalente à ce que pour tout $g\in C^\infty(E)$ la fonction $t\mapsto\langle f_t,g\rangle$ s'annule à tous les ordres lorsque t tends vers 0 où encore que la transformée de Fourier $\hat f$ s'annule à tous les ordres sur la section nulle $V\times\{0\}\subset E^*\times\mathbb{R}$.

Une fonction $f\in C^\infty(\mathrm{DNC}(E,V))$ est dans $\mathcal{J}(E,V)$ si et seulement si $f\circ\Theta$ est dans $\mathcal{J}^+_{E\times\mathbb{R}}$.

Notons pour tout $m\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{I}_c^m(\mathcal{M},V)$ l'espace des distributions conormales de Hörmander (1971) d'ordre m. On montre dans Debord et Skandalis (2014) le théorème suivant.

Théorème 2.15. — *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{I}_c^m(\mathcal{M}, V)$ est l'ensemble des distributions de la forme $\int_{\mathbb{R}^+} t^{-\dim M} k_t \frac{dt}{t^{1+m}}$ où $k = (k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ parcourt $\mathcal{J}(\mathcal{M}, V)$* [4].

2.2.3. *Groupoïde tangent.* — Soit M une variété compacte et lisse, le *groupoïde tangent* de M (Connes, 1994) est la déformation au cône normal $\mathrm{DNC}(M \times M, \Delta M)_+$ où $M \times M \rightrightarrows M$ est le groupoïde des couples et $\Delta M = \{(x, x)\ ; x \in M\}$ l'espace de ses unités. La construction DNC étant fonctorielle, on obtient un groupoïde de Lie :

$$\mathbb{T} = M \times M \times \mathbb{R}_+^* \sqcup TM \times \{0\} \rightrightarrows M \times M \times [0, +\infty)$$

où

- $\mathbb{T}$ est la réunion des groupoïdes des couples $M \times M \times \{t\} \rightrightarrows M \times \{t\}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et du fibré vectoriel (vu comme groupoïde) $TM \times \{0\} \rightrightarrows M \times \{0\}$.
- La structure de Lie est obtenue en recollant les structures de variété usuelles sur $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ et sur $TM \times \{0\}$ comme précédemment.
  La topologie obtenue est telle qu'une suite $(y_n, x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ converge vers $(x, X, 0) \in TM$ lorsque la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers x et dans une carte la suite $(\frac{y_n - x_n}{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers X.

Calcul pseudodifférentiel. — La structure de groupoïde permet de montrer que $S_c(\mathbb{T}) := S_c(M \times M, \Delta M) \subset C^\infty(\mathbb{T})$ est une algèbre de convolution dont $\mathcal{J} := \mathcal{J}(M \times M, \Delta M)$ est un idéal. De plus le théorème 2.15 devient :

Théorème 2.16. — *L'idéal $\mathcal{J}$ de $S_c(\mathbb{T})$ est tel que pour tout $k = (k_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{J}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ si :*

$$P(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{-\dim(M)} k_t(x, y) \frac{dt}{t^{1-m}} \quad \text{et} \quad \sigma(P) \colon (x, \xi) \in T^*M \mapsto \int_0^{+\infty} \hat{k}_0(x, t\xi) \frac{dt}{t^{1-m}}$$

alors le noyau P détermine un opérateur pseudodifférentiel (classique) d'ordre $-m$ sur M de symbole principal $\sigma(P)$.
De plus tout opérateur pseudodifférentiel d'ordre négatif est de cette forme.

Remarque 2.17. — Plus généralement, étant donné un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows G^{(0)}$, on peut considérer le *groupoïde adiabatique* :

$$G_{ad} = \mathrm{DNC}(G, G^{(0)})_+ = G \times \mathbb{R}_+^* \cup \mathfrak{A}G \times \{0\} \rightrightarrows G^{(0)} \times \mathbb{R}_+$$

et définir de la même façon un calcul pseudodifférentiel sur G.
Les opérateurs pseudodifférentiels ainsi obtenus forment une algèbre de convolution. De plus :

- Les opérateurs d'ordre $m < 0$ sont dans $C^*(G)$,
- Les opérateurs d'ordre $m \leq 0$ sont des multiplicateurs (des opérateurs à droite et à gauche bornés) de $C^*(G)$.

4. Le facteur $t^{-\dim M}$ n'apparaît pas si l'on considère des densités.

On désigne par $\Psi^*(G)$ la fermeture de l'algèbre des opérateurs d'ordre 0 dans la C^*-algèbre des multiplicateurs de $C^*(G)$. On obtient une suite exacte de C^*-algèbre :

$$0 \longrightarrow C^*(G) \longrightarrow \Psi^*(G) \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{S}\mathfrak{A}^*G) \longrightarrow 0$$

où $\mathbb{S}\mathfrak{A}^*G$ est le fibré en sphère du fibré dual de l'algébroïde de Lie $\mathfrak{A}G$ et σ l'application symbole principal.

Depuis les travaux précurseurs de Connes de nombreux auteurs ont prolongé ces idées pour définir ou redéfinir des calculs pseudodifférentiels dans des contextes variés. Dans un cadre assez proche de celui qui nous concerne ici, citons les travaux de Ponge (2008) et van Erp (2010a,b).

3. Groupoïde tangent en géométrie sous-riemannienne et calcul pseudodifferentiel

Comme vu précédemment, le groupoïde tangent permet de définir le calcul pseudodifférentiel classique. La démarche d'Androulidakis, Mohsen, Yuncken consiste à appliquer une construction analogue sur un groupoïde tangent adapté au contexte de la géométrie sous-riemannienne. Nous présentons dans cette partie la construction de ce groupoïde telle qu'elle apparaît dans Mohsen (2022, 2024). Ce groupoïde servira de support, comme précédemment, à la construction d'un calcul pseudodifférentiel.

Considérons à nouveau la variété M, la famille de champs de vecteurs $X_1, \dots, X_n$ satisfaisant la condition de Hörmander et $N \in \mathbb{N}$ tel que le nombre de commutateurs pour engendrer T_xM est majoré par N indépendant de x. On note $\mathcal{F}$ le sous-module de $\mathcal{X}(M)$ engendré par $X_1, \dots, X_n$ et d_{CC} la distance de Carnot–Carathéodory correspondante (définition 1.1). Pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$ et $x \in M$, $\exp(X)x$ désigne le flot au temps 1 partant de x du champ X.
Comme dans la section 1.1, $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie libre engendrée par $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ avec pour relations que les suites de crochets de longueur strictement plus grande que N s'annulent. Il s'agit d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie. On note G le groupe de Lie nilpotent simplement connexe qui intègre $\mathfrak{g}$.
La formule de Baker–Campbell–Hausdorff offre une correspondance bijective entre les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ et les sous-groupes simplement connexes de G. Pour H un tel sous-groupe, on notera $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et la bijection réciproque $\Xi(\mathfrak{h}) = H$.

3.1. Groupoïde tangent en géométrie sous-riemannienne

Une des idées essentielles dans le travail de Mohsen trouve sa source dans l'observation suivante. Fixons $x \in M$, les travaux de Bellaïche (1996) permettent d'identifier un sous-groupe simplement connexe $G_x \subset G$ de codimension $\dim M$ tel que

$$\lim_{t \to 0^+} (M, t^{-1} d_{CC}, x) = (G/G_x, d_{G/G_x}, G_x)$$

où d_{G/G_x} est la métrique de Carnot–Carathéodory sur l'espace homogène G/G_x.
Cette limite n'étant pas uniforme en x, elle ne suffit pas à définir l'« espace tangent » à la structure sous-riemannienne dans sa globalité. En effet, si $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $M \times \mathbb{R}_+$ telle que (x_n, t_n) converge vers $(x, 0)$, quitte à prendre une sous-suite, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(M, t_n^{-1}d_{CC}, x_n)$ existe et est de la forme $(G/H, d_{G/H}, H)$ où $H \subset G$ est un sous-groupe de Lie simplement connexe, mais en général $H \neq G_x$.
Enfin, moyennant l'identification des sous-groupes simplement connexes de G avec leur algèbre de Lie, il apparaît que tous ces cônes tangents sont à chercher dans la variété Grassmannienne des sous-espaces de codimension $\dim M$ de $\mathfrak{g}$; nous noterons $\mathrm{Grass}(\mathfrak{g})$ cet espace.

On peut noter, que cette difficulté n'apparaît pas dans le cas *équirégulier* pour lequel le théorème de Helffer et Nourrigat était connu. On dit que la famille $\{X_1, \dots, X_k\}$ est équirégulière si pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dimension du sous-espace de T_xM obtenu en évaluant $\mathcal{F}^k$ en x est localement constante. Dans ce cas, il n'y a pour chaque $x \in M$ qu'un seul cône tangent.

✧*L'espace des unités* $\mathbb{G}^{(0)}$. — Notons $\natural\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M)$ l'application linéaire qui envoie chaque $\tilde{X}_i$ sur X_i, ainsi que les suites de crochets de longueur inférieure ou égale à N sur les crochets correspondants de $\mathcal{X}(M)$. Bien sûr, $\natural$ n'est pas un morphisme d'algèbre.

Pour $x \in M$, on considère $\natural_x = ev_x \circ \natural\colon \mathfrak{g} \to T_xM$, où ev_x est l'évaluation en x. Notons que la condition de Hörmander garantie la surjectivité de $\natural_x$ de sorte que son noyau est un élément de $\mathrm{Grass}(\mathfrak{g})$. Puisque $\natural$ n'est pas un morphisme d'algèbre de Lie, $\ker(\natural_x)$ n'est pas une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ en général.
On définit également la dilatation graduée $\alpha_t\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ donnée par : $\alpha_t(\tilde{X}_i) = t\tilde{X}_i$, $\alpha_t([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]) = t^2[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]$,...
Enfin, on considère l'inclusion

$$\begin{array}{rccc} \Theta_0\colon & M \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathrm{Grass}(\mathfrak{g}) \times M \times \mathbb{R}_+ \\ & (x,t) & \longmapsto & (\alpha_{\frac{1}{t}}(\ker(\natural_x)), x, t). \end{array}$$

On définit l'espace :

$$\mathbb{G}^{(0)} := M \times \mathbb{R}_+^* \bigsqcup_{x\in M} \mathcal{G}_x^0 \times \{(x, 0)\}$$

comme la fermeture de $M \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathrm{Grass}(\mathfrak{g}) \times M \times \mathbb{R}_+$.
L'un des résultats principaux de Mohsen (2024) est le suivant

Théorème 3.1. — *Si $(x_n, t_n) \in M \times \mathbb{R}_+^*$ converge dans $\mathbb{G}^{(0)}$ vers $(\mathfrak{h}, x, 0)$, c'est à dire si $t_n \to 0$, $x_n \to x$ et $\alpha_{\frac{1}{t_n}}(\ker(\natural_{x_n})) \to \mathfrak{h}$ alors :*

1. *$\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*
   Notons $H = \Xi(\mathfrak{h})$ le sous-groupe simplement connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.
2. *Pour tout $g \in G$, l'algèbre de Lie de gHg^{-1} est dans $\mathcal{G}_x^0$.*
3. *On a*
$$\lim_{n\to+\infty}(M, t_n^{-1}d_{CC}, x_n) = (G/H, d_{G/H}, H).$$

De plus la projection $\mathbb{G}^{(0)} \to M \times \mathbb{R}_+$ est propre, de sorte que la construction précédente fournit tous les cônes tangents possibles.

✧*Lien avec l'ensemble de Helffer et Nourrigat $\mathcal{T}_x$.* — La méthode des orbites de Kirillov établit une correspondance entre les représentations irréductibles et unitaires d'un groupe de Lie et les orbites co-adjointes, c'est-à-dire, les orbites de l'action du groupe sur le dual de son algèbre de Lie. À l'aide de cette identification, on peut décrire le sous-ensemble $\mathcal{T}_x$ des représentations irréductibles et unitaires du groupe de Lie nilpotent G comme un sous-ensemble de $\mathfrak{g}^*$ des deux façons équivalentes suivantes.

Définition 3.2. — *Le* cône de Helffer et Nourrigat *en x, vu dans $\mathfrak{g}^*$, est défini de façon équivalente par :*

1. *L'élément ξ de $\mathfrak{g}^*$ est dans $\mathcal{T}_x$ si et seulement si il est limite d'une suite de la forme $(\xi_n \circ \natural_{x_n} \circ \alpha_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ qui tend vers 0, $(x_n, \xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T^*M telle que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x.*
2. $$\mathcal{T}_x = \bigcup_{\mathfrak{h}\in\mathcal{G}_x^0} \mathfrak{h}^\perp$$
   où $\mathfrak{h}^\perp = \{\xi \in \mathfrak{g}^*;\ \xi(\mathfrak{h}) = 0\}$.

La première définition provient des travaux de Helffer et Nourrigat (1979), la seconde se trouve dans les travaux de Androulidakis, Mohsen et Yuncken (2022). En outre, une définition alternative s'obtient par la proposition suivante.

Proposition 3.3. — *Une représentation irréductible et unitaire π du groupe de Lie nilpotent G est dans $\mathcal{T}_x$ si et seulement si π est faiblement contenue dans la représentation induite $G \to U(L^2(G/H))$ pour un $H = \Xi(\mathfrak{h})$ avec $\mathfrak{h} \in \mathcal{G}_x^0$.*

✧*Le groupoïde $\mathbb{G} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}$.* — Dans la suite, on identifiera, les sous-groupes simplement connexes de G et leur algèbre de Lie. Ainsi, pour tout $x \in M$, on identifie $\mathcal{G}_x^0$ et $\Xi(\mathcal{G}_x^0)$ de sorte que $\mathcal{G}_x^0$ apparaît comme un ensemble de sous-groupes de Lie simplement connexes de G et

$$\mathbb{G}^{(0)} := M \times \mathbb{R}_+^* \sqcup \{(H, x)\ ; x \in M, H \in \mathcal{G}_x^0\} \times \{0\}.$$

Dans le cas du groupoïde tangent de Connes, on recolle $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ avec l'espace tangent TM en 0. En géométrie sous-riemannienne on procède de même, le rôle d'espace tangent étant cette fois joué par l'ensemble des cônes tangents. On pose donc :

$$\mathbb{G} = M \times M \times \mathbb{R}_+^* \sqcup \{(gH, x); g \in G,\ x \in M,\ H \in \mathcal{G}_x^0\} \times \{0\} \rightrightarrows \mathbb{G}^{(0)}.$$

La structure de groupoïde est la suivante :

✧ Application unité :

$$u(x,t) = (x, x, t) \text{ si } t > 0 \text{ et } u(H, x, 0) = (H, x, 0).$$

✧ Source et but :

$$\begin{cases} s(x,y,t) &= (y,t) \text{ si } t>0 \\ s(gH,x,0) &= (H,x,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r(x,y,t) &= (x,t) \text{ si } t>0 \\ r(gH,x,0) &= (gHg^{-1},x,0). \end{cases}$$

✧ Produit partiel :

$$\begin{cases} (x,y,t)\cdot(y,z,t) &= (x,z,t) \text{ si } t>0 \\ (hgHg^{-1},x,0)\cdot(gH,x,0) &= (hgH,x,0). \end{cases}$$

✧ Inverse :

$$(x,y,t)^{-1} = (y,x,t) \text{ si } t>0 \text{ et } (gH,x,0)^{-1} = (g^{-1}(gHg^{-1}),x,0) = (Hg^{-1},x,0).$$

On peut munir $\mathbb{G}$ d'une structure topologique naturelle de sorte que $\mathbb{G}$ est localement compact séparé à base dénombrable et un groupoïde $C^{\infty,0}$ d'unités $\mathbb{G}^{(0)}$. Plus encore, on peut construire un plongement topologique fermé de $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{R}^n$ pour un n assez grand.

La topologie obtenue sur ce groupoïde est la suivante :
Une suite $(y_n,x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(gH,x,0)$ si et seulement si :

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,
2. la suite $(x_n,t_n,0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(H,x,0)$ dans $\mathbb{G}^{(0)}$,
3. Il existe $v\in gH$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de G qui converge vers v tels que, moyennant l'identification de G avec son image dans $\mathcal{X}(M)$ (via l'exponentielle qui identifie G avec $\mathfrak{g}$ puis $\natural\colon \mathfrak{g}\to\mathcal{X}(M)$) on a $\exp(\alpha_{t_n}(v_n)).x_n = y_n$.

Remarque 3.4. — Dans leur article Androulidakis, Mohsen et Yuncken (2022) considèrent le feuilletage singulier $\mathfrak{a}\mathcal{F} := t\tilde{\mathcal{F}}_1 + t^2\tilde{\mathcal{F}}_1 + \cdots + t^N\tilde{\mathcal{F}}_N$ sur $M\times\mathbb{R}$ où $\tilde{\mathcal{F}}_k$ désigne les champs de vecteurs sur $M\times\mathbb{R}$ de la forme $\tilde{X}(x,t) = X(x)$ où $X\in\mathcal{F}_k$. Ils construisent le groupoïde d'holonomie de ce feuilletage (Androulidakis et Skandalis, 2009) :

$$\mathcal{H}(\mathfrak{a}\mathcal{F}) = M\times M\times\mathbb{R}^* \underset{x\in G_x}{\sqcup} G_x\times\{0\} \rightrightarrows M\times\mathbb{R}$$

où G_x est le groupe de Lie simplement connexe qui intègre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_x = \mathfrak{a}\mathcal{F}/I_{(x,0)}\mathfrak{a}\mathcal{F}$. Ils se concentrent ensuite sur l'adhérence de $M\times M\times\mathbb{R}_+^*$ dans ce groupoïde (singulier). Ce point de vue permet de travailler dans des « cartes » adaptées.

3.2. Calcul pseudodifférentiel et preuve de la conjecture de Helffer et Nourrigat

✧*Le symbole est correctement défini.* — La première étape consiste à montrer que le symbole principal est correctement défini. Le théorème suivant utilise de façon cruciale le fait que la C^*-algèbre de $\mathbb{G}$ est une $C_0(\mathbb{R}_+)$-algèbre ce qui permet d'obtenir que si $a\in C^*(\mathbb{G})$:

$$\limsup_{t\to 0^+}\|a_t\|_{K(L^2(M)} = \sup_{x\in M}\ \sup_{\pi\in\mathcal{T}_x^*}\|\pi(a_{x,0})\|_{L^2(\pi)}$$

On a :

Théorème 3.5 (Androulidakis, Mohsen et Yuncken, 2022, Théorème 1.15)
Soit D un opérateur différentiel et $x\in M$, pour tout $\pi\in\mathcal{T}_x$, $\sigma(D,x,\pi)$ est bien défini.

✧*Définitions des opérateurs pseudodifférentiels.* — On procède ensuite à la définition d'un calcul pseudodifférentiel, à l'aide du groupoïde tangent en géométrie sous-riemannienne $\mathbb{G}$ de façon analogue à ce que l'on a fait en 2.2.3. Voici une idée de la construction.
Notons $\mathcal{G}^0 = \bigsqcup_{x\in M}\{(H,x)\,;x\in M,\ H\in\mathcal{G}^0_x\}$. On a (localement) une « submersion $C^{\infty,0}$ » surjective :

$$\begin{array}{rccc}\Upsilon\colon & \mathcal{G}^0\times\mathbb{R}_+\times\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{G}\\ & (H,x,t,v) & \longmapsto & (\exp(\alpha_t(\natural(v)))\cdot x,x,t)\text{ si } t\neq 0\\ & (H,x,0,v) & \longmapsto & (\Xi(v)H,x,0)\end{array}$$

où Ξ est l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G.
Le membre de gauche est un fibré vectoriel sur $\mathcal{G}^0\times\mathbb{R}_+$ pour lequel on peut construire un $\mathcal{J}(\mathcal{G}^0\times\mathbb{R}_+\times\mathfrak{g},\mathcal{G}^0\times\mathbb{R}_+)$ (bien que $\mathcal{G}^0$ ne soit pas une variété, mais un fermé dans une variété).
Une fonction $f\in C^\infty_c(\mathbb{G})$ est dans $\mathcal{J}(\mathcal{F}^\bullet)$ si et seulement si $f\circ\Upsilon$ est dans $\mathcal{J}(\mathcal{G}^0\times\mathbb{R}_+\times\mathfrak{g},\mathcal{G}^0\times\mathbb{R}_+)$.

Définition 3.6. — *Pour $m\in\mathbb{N}$, on définit $\Psi^{-m}(\mathcal{F}^\bullet)$ comme l'ensemble des opérateurs de noyaux de la forme :*

$$P(x,y)=\int_0^{+\infty}w(x,y,t)k_t(x,y)\frac{dt}{t^{1-m}}$$

ou $k=(k_t)_{t\in\mathbb{R}^+}\in\mathcal{J}(\mathcal{F}^\bullet)$ et w est un terme correctif[5] .

Cela permet d'étendre l'algèbre $\mathbb{N}$-filtrée des opérateurs différentiels $DO^m(\mathcal{F}^\bullet)$ en une algèbre $\mathbb{Z}$-filtrée $\Psi^m(\mathcal{F}^\bullet)$.
Avec les notations de la définition ci-dessus, le symbole principal de l'opérateur P est donné par

$$\sigma(P,x,\pi)(\xi)=\pi(\int_0^{+\infty}(\alpha_tk_0)(x,\xi)\frac{dt}{t^{1-m}})$$

de plus le symbole d'un produit est le produit des symboles.

✧*L'algèbre $\Psi(\mathcal{F}^\bullet)$ a les propriétés « attendues » d'un calcul pseudodifférentiel.* —

Théorème 3.7 (Androulidakis, Mohsen et Yuncken, 2022, Théorème 3.31)
Soit $P\in\Psi^k(\mathcal{F}^\bullet)$:
- ✧ *Pour $k\leq 0$, P s'étend en un opérateur borné de $L^2(M)$.*
- ✧ *Pour $k<0$, P s'étend en un opérateur compact de $L^2(M)$.*

En particulier, en étendant les espaces de Sobolev de la définition 1.4 à $\mathbb{Z}$ par dualité : pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $P\in\Psi^k(\mathcal{F}^\bullet)$ et $s\in\mathbb{Z}$, P s'étend en un opérateur $P\colon\tilde{H}^{s+k}\to\tilde{H}^s$.

Ce théorème permet de montrer que $\Psi(\mathcal{F}^\bullet)$ satisfait la « propriété de *régularité* » :
- ✧ Les éléments de $\Psi^{-\infty}(\mathcal{F}^\bullet):=\bigcap_{m\in\mathbb{Z}}\Psi^m(\mathcal{F}^\bullet)$ sont des opérateurs régularisants.

5. La fonction w n'apparaît pas si l'on utilise des densités.

Il découle de la définition des opérateurs pseudodifférentiels que $\Psi(\mathcal{F}^\bullet)$ satisfait la « propriété de *pseudo-localité* » :

- ✧ Les noyaux de Schwartz des éléments de $\Psi(\mathcal{F}^\bullet)$ sont lisses en dehors de la diagonale.

Théorème 3.8 (Androulidakis, Mohsen et Yuncken, 2022, Proposition 3.32)
Pout tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $P_k \in \Psi^k(\mathcal{F}^\bullet)$ et $Q_k \in \Psi^{-k}(\mathcal{F}^\bullet)$ tels que $P_kQ_k - Id$ et $Q_kP_k - Id$ sont dans $\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \Psi^m(\mathcal{F}^\bullet)$.

Le théorème suivant utilise le théorème précédent pour se ramener à $\Psi^0(\mathcal{F}^\bullet)$, puis se déduit d'une suite exacte courte de C^*-algèbres analogue à la suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels classiques présentée dans la remarque 2.17.

Théorème 3.9 (Androulidakis, Mohsen et Yuncken, 2022, Théorème 3.38)
Soit $P \in \Psi^k(\mathcal{F}^\bullet)$, les assertions suivantes son équivalentes :

1. *Pour tout $x \in M$ et $\pi \in \mathcal{T}_x \setminus 1_G$, $\sigma(P, x, \pi) = 0$.*
2. *Pour tout (ou un) $s \in \mathbb{Z}$ l'opérateur $P\colon \tilde{H}^{s+k} \to \tilde{H}^s$ est compact.*

Remarque 3.10. — Il est important de noter que si $P \in \Psi^k(\mathcal{F}^\bullet)$ et que pour tout $x \in M$ et $\pi \in \mathcal{T}_x \setminus 1_G$, $\sigma(P, x, \pi) = 0$, on ne peut pas en déduire pour autant que $P \in \Psi^{k-1}(\mathcal{F}^\bullet)$. Ce point est une différence majeure avec le calcul pseudodifférentiel classique et rend particulièrement délicate la quête de paramétrix.

Le théorème 3.8 permet de réduire l'étude de l'existence de paramétrix aux éléments de $\Psi^0(\mathcal{F}^\bullet)$; éléments qui s'étendent d'après le théorème 3.7 en des opérateurs bornés de $L^2(M)$ dans $L^2(M)$.

Théorème 3.11 (Androulidakis, Mohsen et Yuncken, 2022, Théorèmes 3.43)
Soit $P \in \Psi^0(\mathcal{F}^\bullet)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout $x \in M$ et $\pi \in \mathcal{T}_x \setminus \{1_G\}$, $\sigma(P, x, \pi)$ est injective.*
2. *Il existe $Q \in \Psi^0(\mathcal{F}^\bullet)$ tel que pour tout $x \in M$ et $\pi \in \mathcal{T}_x \setminus \{1_G\}$, $\sigma(QP, x, \pi) = Id$*
3. *Il existe un opérateur $Q\colon C^{-\infty}(M) \to C^{-\infty}(M)$ qui définit pour tout $s \in \mathbb{Z}$ un opérateur borné $Q\colon \tilde{H}^s \to \tilde{H}^s$ et tel que $QP - Id$ est régularisant.*

Quelques mots sur l'implication de (2) à (3). — Si un opérateur $P \in \Psi^0(\mathcal{F}^\bullet)$ est tel que pour tout $x \in M$ et $\pi \in \mathcal{T}_x \setminus \{1_G\}$, $\sigma(P, x, \pi) = Id$ alors, d'après le théorème 3.9, pour tout $s \in \mathbb{Z}$ l'opérateur $Id - P\colon \tilde{H}^s \to \tilde{H}^s$ est compact. Donc, pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $P\colon \tilde{H}^s \to \tilde{H}^s$ est un opérateur de Fredholm d'indice de Fredholm nul. Quitte à lui ajouter un régularisant $R \in C^\infty(M \times M)$ il est inversible comme opérateur de $L^2(M)$ dans $L^2(M)$. Notons $Q = (P + R)^{-1}\colon L^2(M) \to L^2(M)$.
Regardons $P + R\colon \tilde{H}^s \to \tilde{H}^s$. Lorsque $s > 0$, puisque $\tilde{H}^s \subset L^2(M)$, l'opérateur $P + R$ est injectif, de Fredholm et d'indice nul, il est donc inversible. Lorsque $s < 0$, puisque

$L^2(M) \subset \tilde{H}^s$, l'opérateur $P+R$ est surjectif, d'image dense puisqu'elle contient $L^2(M)$ et donc inversible à nouveau. Donc pour tout $s \in \mathbb{Z}$, Q s'étend de $\tilde{H}^s \to \tilde{H}^s$.

En utilisant que les C^*-algèbres sont stables par calcul fonctionnel holomorphe, on obtient que pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $Q = (P+R)^{-1}$ est dans la fermeture de $\Psi^0(\mathcal{F}^\bullet)$ dans $\mathcal{L}(\tilde{H}^s)$. $\square$

On en déduit que les éléments que $\Psi(\mathcal{F}^\bullet)$ admettent des « *paramétrix* » :

- ✧ Si le symbole principal de $P \in \Psi^k(\mathcal{F}^\bullet)$ est inversible, il existe un opérateur $Q\colon C^{-\infty}(M) \to C^{-\infty}(M)$ qui définit pour tout $s \in \mathbb{Z}$ un opérateur borné $Q\colon \tilde{H}^s \to \tilde{H}^{s+k}$ et tel que $QP - Id$ et $QP - Id$ sont régularisants.

Remarque 3.12. — Contrairement au calcul pseudodifférentiel classique, les paramétrix peuvent ne pas être des éléments de $\Psi(\mathcal{F}^\bullet)$.

On est alors en mesure de montrer que l'inversibilité du symbole principale d'un opérateur différentiel implique l'hypoellipticité. En effet, pour $k \in \mathbb{N}$, si le symbole principal de $D \in DO^k(\mathcal{F}^\bullet)$ est inversible, considérons un paramétrix Q tel que $QD - Id \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{F}^\bullet)$. Si $u \in C^{-\infty}(M)$, on écrit $u = (I - QD)u + QDu$ et on a :

- ✧ $(Id - QD)u$ est lisse car $Id - QD$ est régularisant.
- ✧ Si Du est dans $C^\infty(M) = \bigcap_{s\in\mathbb{Z}} \tilde{H}^s$ alors QDu aussi, puisque pour tout $s \in \mathbb{Z}$, Q induit un opérateur $Q\colon \tilde{H}^s \to \tilde{H}^{s+k}$.

Finalement si f est lisse et $Du = f$ alors u est lisse.

✧ *Un exemple.* — La variété considérée est $\mathbb{R}^2$ avec $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = x\partial_y$ [(6)].
On a $[X_1, X_2] = \partial_y$ donc $N = 3$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est engendrée (comme espace vectoriel) par trois éléments $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ et $\tilde{X}_3 = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$ qui sont tels que $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_3] = [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 0$. En particulier $Grass(\mathfrak{g}) = \mathbb{P}^1(\mathfrak{g})$.
On reconnait l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg, donc $G = \mathbb{H}$.

Rappelons que l'on a les identifications suivantes :
$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a_i \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; v_i \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathfrak{g}^* = \{A^t \ ; A \in \mathfrak{g}\}$ avec pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et $v \in \mathfrak{g}$: $\langle \xi, v \rangle = \mathrm{Tr}(\xi v)$.
Pour $g = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et $\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_1 & 0 & 0 \\ f_3 & f_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^*$, l'action co-adjointe de g sur ξ est donnée par $g_\bullet\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_1+a_2f_3 & 0 & 0 \\ f_3 & f_2-a_1f_3 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc des orbites de dimension 2 lorsque $f_3 \neq 0$ et de dimension 0 sinon.

Les représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg G sont de deux types :

6. Pour être vraiment dans une variété compacte, on peut considérer $M = S^1 \times S^1$ avec $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = \sin(x)\partial_y$.

- ✧ Pour $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $\pi_\varepsilon \colon G \to U(L^2(\mathbb{R}))$ est engendrée au niveau de son algèbre de Lie par :
$$\tilde{X}_1 \mapsto \varepsilon\partial_t,\ \tilde{X}_2 \mapsto it,\ \tilde{X}_3 \mapsto i\varepsilon$$
et correspondent aux orbites de dimension 2 de l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.
- ✧ Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\pi_{a,b} \colon G \to U(\mathbb{C})$ est engendrée au niveau de son algèbre de Lie par :
$$\tilde{X}_1 \mapsto ia,\ \tilde{X}_2 \mapsto ib,\ \tilde{X}_3 \mapsto 0$$
et correspondent aux orbites de dimension 0 de l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\natural_{(x,y)} \colon \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mapsto v_1\partial_x + (v_2 x + v_3)\partial_y \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_{\frac{1}{t}} \ker(\natural_{(x,y)}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

On s'intéresse à la limite de $\alpha_{\frac{1}{t_n}} \ker(\natural_{(x_n,y)})$ lorsque t_n tend vers 0 et x_n tend vers x.

- ✧ Pour $x \neq 0$ cette limite est toujours $\langle \tilde{X}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Donc $\mathcal{G}^0_{x,y} = \langle \tilde{X}_3 \rangle$ et $\mathcal{T}_{x,y} = \langle \tilde{X}_3 \rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \end{pmatrix} ; f_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{g}^*$.
Les représentations à considérer sont donc celles du type $\pi_{a,b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- ✧ Pour $x = 0$, en notant que $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_n \\ 0 & 0 & t_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{x_n}{t_n} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, on obtient alors que $\mathcal{G}^0_{x,y} = \langle \tilde{X}_3 \rangle \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\sqcup} \langle \tilde{X}_2 + \lambda \tilde{X}_3 \rangle$.
Donc $\mathcal{T}_{x,y} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \end{pmatrix} ; f_i \in \mathbb{R} \right\} \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\sqcup} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_1 & 0 & 0 \\ f_3 & -\lambda f_3 & 0 \end{pmatrix} ; f_1, f_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathfrak{g}^*$.
Les représentations à considérer sont donc les $\pi_{a,b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ainsi que les π_ε pour $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

On se donne une fonction $\ell \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ et on considère l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^2$:
$$D_\ell = \partial_x^2 + x^2\partial_y^2 + \ell(x,y)i\partial_y.$$
On a $D_\ell = P(X_1, X_2)$ où $P(X,Y) = X^2 + Y^2 + \ell(x,y)i(XY - YX)$ et D est d'ordre de Hörmander 2.

On a, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\varepsilon \in \{-1,1\}$:

- ✧ $\sigma(D_\ell, (x,y), \pi_{a,b}) = ((ia)^2 + (ib)^2)Id = -(a^2+b^2)Id$.
On retrouve le symbole classique.
- ✧ $\sigma(D_\ell, (0,y), \pi_\varepsilon) = \partial_t^2 + ((it)^2 - \ell(0,y)\varepsilon)Id_{L^2(\mathbb{R})} = (\partial_t^2 - t^2) - \ell(0,y)\varepsilon Id_{L^2(\mathbb{R})}$.

On conclut que l'opérateur D_ℓ est hypoelliptique maximal si et seulement si $\ell(0,y) \notin \varepsilon \cdot \operatorname{spec}(\partial_t^2 - t^2) = \{2n+1,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Références

Iakovos Androulidakis, Omar Mohsen et Robert Yuncken (2022). *A pseudodifferential calculus for maximally hypoelliptic operators and the Helffer-Nourrigat conjecture.* arXiv : 2201.12060 [math.AP].

Iakovos Androulidakis et Georges Skandalis (2009). « The holonomy groupoid of a singular foliation », *J. Reine Angew. Math.* **626**, p. 1-37.

Hajer Bahouri, Clotilde Fermanian-Kammerer et Isabelle Gallagher (2012). « Phase-space analysis and pseudodifferential calculus on the Heisenberg group », *Astérisque* (342), p. vi+127.

Richard Beals et Peter Greiner (1988). *Calculus on Heisenberg manifolds.* T. 119. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. x+194.

André Bellaïche (1996). « The tangent space in sub-Riemannian geometry », in : *Sub-Riemannian geometry.* T. 144. Progr. Math. Birkhäuser, Basel, p. 1-78.

Michael Christ, Daryl Geller, Paweł Głowacki et Larry Polin (1992). « Pseudodifferential operators on groups with dilations », *Duke Math. J.* **68** (1), p. 31-65.

Alain Connes (1979). « Sur la théorie non commutative de l'intégration », in : *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978).* T. 725. Lecture Notes in Math. Berlin : Springer, p. 19-143.

——— (1982). « A survey of foliations and operator algebras », in : *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980).* T. 38. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., p. 521-628.

——— (1994). *Noncommutative geometry.* San Diego, CA : Academic Press Inc., p. xiv+661.

Clément Cren (2024). « A transverse index theorem in the calculus of filtered manifolds », *J. Funct. Anal.* **287** (11), Paper No. 110618, 31.

Claire Debord et Georges Skandalis (2014). « Adiabatic groupoid, crossed product by $\mathbb{R}_+^*$ and pseudodifferential calculus », *Adv. Math.* **257**, p. 66-91.

——— (2019). « Lie groupoids, pseudodifferential calculus, and index theory », in : *Advances in noncommutative geometry—on the occasion of Alain Connes' 70th birthday.* Springer, Cham, p. 245-289.

Charles L. Epstein, Richard B. Melrose et Gerardo A. Mendoza (1991). « Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains », *Acta Math.* **167** (1-2), p. 1-106.

Clotilde Fermanian-Kammerer et Véronique Fischer (2020). « Defect measures on graded Lie groups », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **21**, p. 207-291.

Véronique Fischer et Michael Ruzhansky (2014). « A pseudo-differential calculus on graded nilpotent Lie groups », in : *Fourier analysis.* Trends Math. Birkhäuser/Springer, Cham, p. 107-132.

——— (2016). *Quantization on nilpotent Lie groups.* T. 314. Progress in Mathematics. Birkhäuser/Springer, [Cham], p. xiii+557.

Gerald B. Folland et Elias M. Stein (1974). « Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group », *Comm. Pure Appl. Math.* **27**, p. 429-522.

Bernard Helffer et Jean Nourrigat (1979). « Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **289** (16), A775-A778.

——— (1985). *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*. T. 58. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, p. x+278.

Lars Hörmander (1967). « Hypoelliptic second order differential equations », *Acta Math.* **119**, p. 147-171.

——— (1971). « The calculus of Fourier integral operators », in : *Prospects in mathematics (Proc. Sympos., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1970)*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 33-57. Ann. of Math. Studies, No. 70.

——— (1985). *The analysis of linear partial differential operators. III*. T. 274. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Pseudodifferential operators. Springer-Verlag, Berlin, p. viii+525.

Jean-Marie Lescure, Dominique Manchon et Stéphane Vassout (2017). « About the convolution of distributions on groupoids », *J. Noncommut. Geom.* **11** (2), p. 757-789.

Kirill C. H. Mackenzie (2005). *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*. T. 213. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, p. xxxviii+501.

John Mitchell (1985). « On Carnot-Carathéodory metrics », *J. Differential Geom.* **21** (1), p. 35-45.

Omar Mohsen (2022). *Blow-up groupoid of singular foliations*. arXiv : 2105.05201 [math.DG].

——— (2024). « Tangent groupoid and tangent cones in sub-Riemannian geometry », *Duke Math. J.* **173** (16), p. 3179-3218.

Bertrand Monthubert et François Pierrot (1997). « Indice analytique et groupoïdes de Lie », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325** (2), p. 193-198.

Mahsa Naraghi (2024). « The calculus of Pseudo-differentiel Operators : A Geometric Approach ». Thèse de doct. Université Paris Cité.

Victor Nistor, Alan Weinstein et Ping Xu (1999). « Pseudodifferential operators on differential groupoids », *Pacific J. Math.* **189** (1), p. 117-152.

Alan L. T. Paterson (2000). « Continuous family groupoids », *Homology Homotopy Appl.* **2**, p. 89-104.

Raphaël S. Ponge (2008). « Heisenberg calculus and spectral theory of hypoelliptic operators on Heisenberg manifolds », *Mem. Amer. Math. Soc.* **194** (906), p. viii+ 134.

Jean Renault (1980). *A groupoid approach to C^*-algebras*. T. 793. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer, p. ii+160.

Linda Preiss Rothschild (1979). « A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields », *Comm. Partial Differential Equations* **4** (6), p. 645-699.

Linda Preiss Rothschild et Elias M. Stein (1976). « Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups », *Acta Math.* **137** (3-4), p. 247-320.

Brian Street (2014). *Multi-parameter singular integrals*. T. 189. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. xvi+392.

Erik van Erp (2010a). « The Atiyah-Singer index formula for subelliptic operators on contact manifolds. Part I », *Ann. of Math. (2)* **171** (3), p. 1647-1681.

——— (2010b). « The Atiyah-Singer index formula for subelliptic operators on contact manifolds. Part II », *Ann. of Math. (2)* **171** (3), p. 1683-1706.

Erik van Erp et Robert Yuncken (2019). « A groupoid approach to pseudodifferential calculi », *J. Reine Angew. Math.* **756**, p. 151-182.

Claire Debord

IMJ-PRG, Université Paris Cité
Bâtiment Sophie Germain
8 place Aurélie Nemours
Boite Courrier 7012
75205 Paris Cedex 13
E-mail : `claire.debord@imj-prg.fr`