

**ESTIMATIONS *A PRIORI* UNIFORMES POUR
L'ÉQUATION DE LANDAU**
[d'après Nestor Guillen et Luis Silvestre]

par **Isabelle Tristani**

Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Premières propriétés.....	5
3. Résultats antérieurs.....	10
4. Décroissance de l'information de Fisher.....	13
5. Existence de solutions globales à l'équation de Landau.....	26
Références.....	28

1. Introduction

1.1. Le modèle cinétique

L'équation de Landau est une équation centrale en physique des plasmas et a été dérivée par Landau (1936) indépendamment de l'équation de Boltzmann, l'autre modèle central de la théorie cinétique des gaz. Elle décrit l'évolution d'une densité de particules $f = f(t, x, v)$ au temps $t \in \mathbf{R}^+$, à la position $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ et ayant la vitesse $v \in \mathbf{R}^3$. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$(1) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = q(f, f).$$

Dans cette équation, nous retrouvons l'opérateur de transport libre $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ qui traduit le fait que les particules évoluent en ligne droite à vitesse constante si elles ne subissent pas d'autres interactions. Notons que dans cette équation, les éventuels champs auto-induits par les particules elles-mêmes ne sont pas pris en compte. La partie collisionnelle de l'équation est donnée par l'opérateur de Landau noté ici q . Il s'agit d'un opérateur qui n'agit que sur la variable v , non linéaire et intégral-différentiel. Il s'écrit de la manière suivante : pour des distributions $f = f(v)$ et $g = g(v)$ assez régulières,

$$(2) \quad q(g, f)(v) := \sum_{i=1}^3 \partial_{v_i} \int_{\mathbf{R}^3} \sum_{j=1}^3 a_{ij}(v-w)(\partial_{v_j} - \partial_{w_j})[f(v)g(w)] dw, \quad \forall v \in \mathbf{R}^3,$$

avec

$$(3) \quad a_{ij}(z) = \alpha(|z|)|z|^2 \Pi_{ij}(z), \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

où α est la fonction positive donnée par

$$\alpha(r) = r^\gamma, \quad \forall r \in \mathbf{R}^+ \quad \text{avec} \quad \gamma \in [-3, 1],$$

et pour $z \in \mathbf{R}^3$, $\Pi_{ij}(z)$ est la (i, j) -ème composante de la projection orthogonale Π sur $z^\perp$ donnée par

$$(4) \quad \Pi_{ij}(z) = \left(\delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2} \right), \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Suivant la terminologie usuelle, nous parlerons de potentiels durs si $\gamma \in]0, 1]$, de molécules maxwelliennes si $\gamma = 0$, de potentiels modérément mous si $\gamma \in [-2, 0]$ et de potentiels très mous si $\gamma \in [-3, 2[$. Le cas $\gamma = -3$ correspond à la description de particules chargées qui interagissent selon un potentiel de Coulomb. Il s'agit du seul cas pertinent physiquement. L'équation est tout de même étudiée pour les autres valeurs de γ , notamment car elle peut être obtenue à partir de l'équation de Boltzmann dans la limite dite des collisions rasantes, quelques références sont données à ce sujet dans le paragraphe qui suit.

Introduisons l'opérateur de Boltzmann. Il s'agit d'un opérateur intégral bilinéaire qui s'écrit de la manière suivante : pour des distributions $f = f(v)$ et $g = g(v)$ assez régulières,

$$(5) \quad q_B(g, f)(v) := \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2} B(v - w, \sigma)(g(w')f(v') - g(w)f(v)) dw d\sigma.$$

Dans cette formule, (v, w) (resp. (v', w')) désignent les vitesses d'une paire de particules collisionnelles après (resp. avant) la collision. La structure de l'opérateur fait naturellement apparaître un terme de gain et un terme de perte correspondant au fait que certaines particules acquièrent la vitesse v après une collision alors que d'autres la perdent. Les vitesses (v, w) et (v', w') obéissent aux lois des collisions élastiques, il y a ainsi conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie au cours des collisions (on suppose ici que toutes les particules ont la même masse) :

$$(6) \quad v + w = v' + w' \quad \text{et} \quad |v|^2 + |w|^2 = |v'|^2 + |w'|^2.$$

Cela fournit 4 équations pour 6 inconnues, les vitesses (v', w') peuvent ainsi être paramétrées par un élément σ de la sphère $\mathbf{S}^2$:

$$(7) \quad v' = \frac{v + w}{2} + \frac{|v - w|}{2}\sigma \quad \text{et} \quad w' = \frac{v + w}{2} - \frac{|v - w|}{2}\sigma.$$

Dans la formule (5), le noyau de collision B dépend du type d'interactions considérées. Lorsque les particules interagissent selon un potentiel du type $\phi(r) = r^{-p+1}$ où p est tel que $p \in (2, +\infty)$, on ne dispose pas de formule explicite pour B mais on sait d'après Maxwell (1867) que

$$B(v - w, \sigma) = |v - w|^\gamma b(\cos \theta) \quad \text{avec} \quad \cos \theta = \frac{v - w}{|v - w|} \cdot \sigma$$

où

$$(8) \quad \gamma := \frac{p-5}{p-1} \in]-3, 1[\quad \text{et} \quad b(\cos \theta) \sim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-2-2s}, \quad s := \frac{1}{p-1} \in]0, 1[.$$

On s’aperçoit dans ce type de modèle que les interactions à longue portée sont prises en compte (cela correspond à une équation de Boltzmann dite sans troncature angulaire). Cela engendre la présence de collisions rasantes (correspondant à de petits angles de collision θ) qui sont responsables de la singularité en $\theta = 0$ vue en (8) qui a pour conséquence la non intégrabilité du noyau de Boltzmann sur la sphère. Nous renvoyons à Villani (2002) pour une présentation plus complète des différents types de noyaux. Il est important de mentionner que l’opérateur de Boltzmann n’a pas de sens pour des particules interagissant selon un potentiel coulombien (correspondant à $p = 2$ ci-dessus). Le fait d’opérer une troncature sur le potentiel de Coulomb permet d’obtenir à la limite l’opérateur de Landau, ce processus correspond intuitivement à faire se concentrer le noyau angulaire de l’opérateur de Boltzmann sur des collisions d’angle nul avec une remise à l’échelle appropriée de l’équation. Cette limite de collisions rasantes a été largement étudiée entre autres dans les articles de Desvillettes (1992), Goudon (1997), Villani (1998b) et He (2014) et aussi par Alexandre et Villani (2004) qui donnent la première étude du problème dans un cadre inhomogène en espace. Nous mentionnons également le travail plus récent de Yang et Zhou (2024) dans lequel les auteurs donnent un nouveau point de vue sur la limite de collisions rasantes en s’appuyant sur la limite $s \rightarrow 1$ du paramètre s qui mesure la singularité angulaire du noyau de l’opérateur de Boltzmann dans (8).

1.2. Le modèle homogène en espace

Dans la suite, nous ne considérerons qu’une version homogène en espace de l’équation de Landau (9). Plus précisément, nous considérons des densités de particules qui ne dépendent que de la vitesse v et pas de la position x . Ainsi, l’équation de Landau se réduit à

$$(9) \quad \partial_t f = q(f, f).$$

Une autre manière de voir ce cadre homogène en espace est de considérer des données initiales pour l’équation (1) qui ne dépendent pas de x , la propriété d’être homogène en espace étant ensuite propagée par l’équation.

1.3. Résultat principal

L’étude des solutions de l’équation (9) est l’objet de cette présentation. Plus précisément, Guillen et Silvestre (2023) ont découvert une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov pour cette équation, l’information de Fisher. Cela était déjà connu pour les molécules maxwelliennes (i.e. $\gamma = 0$) mais pas pour les potentiels très mous incluant le cas physique d’un potentiel coulombien. Cette nouvelle estimation *a priori* pour l’équation permet d’obtenir de nouvelles bornes sur la solution dans un espace de type L^3 . Il est par ailleurs connu qu’en combinant cela avec des résultats antérieurs de propagation des moments,

on peut utiliser des arguments de théorie elliptique à la De Giorgi–Nash–Moser pour récupérer une borne L^∞ sur la solution. Grâce à cela, Guillen et Silvestre (2023) parviennent à prouver l’existence de solutions fortes globales à l’équation (9) pour tout type de potentiel (cf. théorème 5.1).

Ainsi, la découverte majeure de Guillen et Silvestre (2023) est la preuve de la décroissance de l’information de Fisher (définie en (24)) le long des solutions de l’équation (9). Plus précisément, ils prouvent le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\gamma \in [-3, 1]$. Soit $f : [0, T] \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^+$ une solution classique de l’équation de Landau (9) associée à un potentiel $\alpha(r) = r^\gamma$ dans (3). Alors $i(f)$, l’information de Fisher de la solution f , est une fonction décroissante du temps.*

Guillen et Silvestre (2023) prouvent en fait le résultat pour toute fonction positive α satisfaisant la borne

$$\sup_{r>0} \frac{r|\alpha'(r)|}{\alpha(r)} \leq \sqrt{19},$$

qui est bien vérifiée par $\alpha(r) = r^\gamma$ pour tout $\gamma \in [-3, 1]$, le théorème permet donc de couvrir tous les types de potentiels, y compris le potentiel physique coulombien.

La première idée de la preuve consiste, grâce à une tensorisation du problème, en une réécriture de l’équation qui permet de passer d’une équation non linéaire et non locale à une équation linéaire du second ordre locale avec coefficients explicites. Les auteurs développent ensuite une preuve algébrique basée sur une compréhension profonde de la géométrie du problème qui leur permet de réduire la question à la preuve d’une inégalité fonctionnelle sur la sphère (cf. théorème 4.12). Cette inégalité peut en fait se réécrire au moyen d’opérateurs intrinsèques sur la sphère complètement indépendants du problème de départ, même si ce n’est pas la présentation qui a été adoptée par Guillen et Silvestre (2023).

1.4. Organisation du texte

Dans la section 2, nous donnons les premières estimations *a priori* classiques pour cette équation. Grâce à ces estimations notamment, des travaux ont permis de développer une théorie de Cauchy de solutions (très) faibles pour cette équation. Des résultats de régularité partielle ou conditionnelle, d’existence en temps court ont également été obtenus plus ou moins récemment mais la question de l’existence globale de solutions fortes est restée ouverte jusqu’à très récemment, un panorama non exhaustif de la littérature à ce sujet est donné dans la section 3. Comme mentionné ci-dessus, dans leur papier, Guillen et Silvestre (2023) prouvent que l’information de Fisher est décroissante le long du flot de solutions de l’équation (9), ce qui leur fournit une nouvelle estimation *a priori* pour l’équation (9) et leur permet en particulier de prouver que les solutions de l’équation de Landau Coulomb n’explosent jamais. Dans la section 4, nous présenterons la preuve de la décroissance de cette information de Fisher le long des solutions de l’équation (9), ce qui constitue le résultat central de Guillen et Silvestre (2023). Pour

terminer, dans la section 5, nous expliquerons comment on peut déduire de cette nouvelle estimation *a priori* le fait que certaines solutions fortes de (9) sont globales en temps.

1.5. Notations

Pour $z \in \mathbf{R}^3$, nous noterons $\langle z \rangle := (1 + |z|^2)^{1/2}$. De plus, pour $p \in [1, \infty]$ et $k \in \mathbf{R}$, nous définissons l'espace de Lebesgue à poids $L_k^p = L^p(\langle v \rangle^k)$ par sa norme

$$\|g\|_{L_k^p} = \|g\|_{L^p(\langle v \rangle^k)} := \|g \langle v \rangle^k\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}.$$

Remerciements

Je remercie vivement Bertrand Lods pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir sur le sujet ainsi que pour ses conseils pour la rédaction de ce texte. Je remercie également Cyril Imbert pour ses explications, Isabelle Gallagher et Nicolas Bourbaki pour leur relecture et leurs suggestions.

2. Premières propriétés

2.1. Premières estimations *a priori*

Afin d'établir formellement les premières propriétés de l'équation de Landau, nous en donnons une formulation faible : pour une fonction test convenable $\varphi = \varphi(v)$, nous avons

$$\begin{aligned} (10) \quad \int_{\mathbf{R}^3} q(f, f)(v) \varphi(v) \, dv &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} a_{ij}(v-w) f(v) f(w) \\ &\quad \left(\frac{\partial_{v_i} f(v)}{f(v)} - \frac{\partial_{w_i} f(w)}{f(w)} \right) (\partial_{v_j} \varphi(v) - \partial_{w_j} \varphi(w)) \, dw \, dv \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} a_{ij}(v-w) f(v) f(w) (\partial_{v_i v_j} \varphi(v) - \partial_{w_i w_j} \varphi(w)) \, dw \, dv \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \partial_i a_{ij}(v-w) f(v) f(w) (\partial_{v_j} \varphi(v) - \partial_{w_j} \varphi(w)) \, dw \, dv. \end{aligned}$$

Propriétés de conservation. — Il apparaît alors clair que

$$\int_{\mathbf{R}^3} q(f, f) \varphi(v) \, dv = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(v) = 1, v, |v|^2.$$

en utilisant le fait que $\Pi(v-w)(v-w) = 0$ pour obtenir l'égalité pour $\varphi(v) = |v|^2$. Ainsi si f est solution de (9) sur $[0, T[$ avec donnée initiale f_0 , nous pouvons en déduire que pour tout $t \in [0, T[$,

$$(11) \quad \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) \varphi(v) \, dv = \int_{\mathbf{R}^3} f_0(v) \varphi(v) \, dv \quad \text{pour} \quad \varphi(v) = 1, v, |v|^2.$$

Théorème H de Boltzmann. — Nous allons donner ici la version du théorème H de Boltzmann adaptée à l'équation de Landau. Pour cela, nous introduisons l'entropie de Boltzmann

$$\mathcal{H}(g) := \int_{\mathbf{R}^3} g(v) \log g(v) \, dv$$

ainsi que la dissipation d'entropie adaptée à l'équation de Landau

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(g) &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} a_{ij}(v-w) g(v) g(w) \left(\frac{\partial_{v_i} g(v)}{g(v)} - \frac{\partial_{w_i} g(w)}{g(w)} \right) \\ &\quad \left(\frac{\partial_{v_j} g(v)}{g(v)} - \frac{\partial_{w_j} g(w)}{g(w)} \right) \, dw \, dv \\ (12) \quad &= 2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \alpha(|v-w|) |v-w|^2 \left| \Pi [\nabla_v - \nabla_w] \sqrt{g(v)g(w)} \right|^2 \, dw \, dv. \end{aligned}$$

La deuxième égalité permet de voir immédiatement que $\mathcal{D}(g) \geq 0$. La première partie du théorème H affirme ainsi que l'entropie décroît le long des solutions de l'équation de Landau. Plus précisément, si f est solution de (9) sur $[0, T[$ avec donnée initiale f_0 , on a pour tout $t \in [0, T[$:

$$(13) \quad \mathcal{H}(f(t)) + \int_0^t \mathcal{D}(f(s)) \, ds = \mathcal{H}(f_0).$$

La deuxième partie du théorème affirme que toute distribution minimisant l'entropie est une Maxwellienne en vitesse. Plus précisément, on a $\mathcal{D}(g) = 0$ si et seulement si $q(g, g) = 0$ si et seulement s'il existe $\rho > 0$, $u \in \mathbf{R}^3$ et $\theta > 0$ tels que $g = M_{\rho, u, \theta}$ où

$$(14) \quad M_{\rho, u, \theta} := \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(- \frac{|v-u|^2}{2\theta} \right).$$

Les propriétés de conservation de l'équation et le théorème H de Boltzmann nous permettent ainsi de déduire les premières estimations *a priori* pour l'équation de Landau. Voyons de plus ce que l'on peut déduire de l'égalité (13) combinée avec (11). Pour cela, nous commençons par écrire la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) |\log f(t, v)| \, dv \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) \log f(t, v) \, dv + 2 \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) (-\log f(t, v)) \mathbf{1}_{\{f(t, v) \leq 1\}} \, dv \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) \log f(t, v) \, dv + 2 \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) (-\log f(t, v)) \mathbf{1}_{\{f(t, v) \leq e^{-1-|v|^2}\}} \, dv \\ &\quad + 2 \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) (-\log f(t, v)) \mathbf{1}_{\{e^{-1-|v|^2} \leq f(t, v) \leq 1\}} \, dv. \end{aligned}$$

En combinant ce calcul avec (11), on déduit de la croissance de $x \mapsto -x \log x$ sur l'intervalle $[0, e^{-1-|v|^2}]$ que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) |\log f(t, v)| \, dv \\ & \leq \mathcal{H}(f(t)) + 2 \int_{\mathbf{R}^3} e^{-1-|v|^2} (1 + |v|^2) \, dv + 2 \int_{\mathbf{R}^3} f_0(v) (1 + |v|^2) \, dv. \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute donnée initiale f_0 de masse, énergie et entropie finies, c'est-à-dire telle que

$$(15) \quad \mathcal{M}[f_0] := \int_{\mathbf{R}^3} f_0(v) \, dv < \infty, \quad \mathcal{E}[f_0] := \int_{\mathbf{R}^3} f_0(v) \frac{|v|^2}{2} \, dv < \infty, \\ \mathcal{H}[f_0] := \int_{\mathbf{R}^3} f_0(v) |\log f_0(v)| \, dv < \infty,$$

si f est solution de (9) associée à f_0 , on aura l'estimation *a priori* suivante sur f :

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbf{R}^3} f(t, v) \left(1 + \frac{|v|^2}{2} + |\log f(t, v)| \right) \, dv + \int_0^T \mathcal{D}(f(t)) \, dt \\ & \leq C(T, \mathcal{M}[f_0], \mathcal{E}[f_0], \mathcal{H}[f_0]). \end{aligned}$$

Pour terminer cette partie, nous faisons une remarque indépendante de notre équation concernant le fait de considérer des distributions de masse, d'énergie et d'entropie finies. L'heuristique est que pour une distribution f , le fait d'avoir son énergie bornée empêche sa masse de partir à l'infini et le fait d'avoir son entropie bornée empêche d'avoir de la concentration sur un ensemble petit. Pour illustrer cela, nous énonçons le lemme suivant dont une preuve est donnée par exemple par Silvestre (2017) :

LEMME 2.1. — *Soit f de masse, énergie et entropie finies. Alors il existe des constantes $R, \ell, \mu > 0$ telles que*

$$|\{v \in B_R : f(v) \geq \ell\}| \geq \mu,$$

où B_R désigne la boule de $\mathbf{R}^3$ centrée en l'origine et de rayon R et $|\cdot|$ désigne ici la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^3$.

2.2. D'autres écritures de l'opérateur de Landau et remarques associées

Afin d'essayer de comprendre comment pourraient se comporter les solutions de l'équation (9), nous allons donner d'autres formulations de l'opérateur de Landau de type opérateur parabolique avec coefficients non locaux sous forme conservative ou non conservative. Pour cela, il est classique d'introduire deux nouvelles fonctions b et c définies par

$$b_i(z) := \sum_{j=1}^3 \partial_j a_{ij}(z) = -2z_i |z|^\gamma, \quad \forall i = 1, 2, 3$$

et

$$c(z) := \sum_{i=1}^3 \partial_i b_i(z) = \begin{cases} -2(\gamma + 3)|z|^\gamma & \text{si } \gamma \in (-3, 1], \\ -8\pi\delta_0 & \text{si } \gamma = -3. \end{cases}$$

En utilisant ces fonctions, l'opérateur peut se réécrire sous forme conservative ou non conservative de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (16) \quad q(f, f) &= \sum_{i=1}^3 \partial_{v_i} \left(\sum_{j=1}^3 (a_{ij} * f) \partial_{v_j} f - (b_i * f) f \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} * f) \partial_{v_i v_j}^2 f - (c * f) f.
 \end{aligned}$$

En particulier, dans le cas coulombien (correspondant à $\gamma = -3$), l'équation (9) se réécrit

$$(17) \quad \partial_t f = \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} * f) \partial_{v_i v_j}^2 f + 8\pi f^2.$$

Lorsque $\gamma \geq 0$, on voit que le terme de réaction $-(c * f)f$ est facilement contrôlé car $c * f$ peut être borné ponctuellement en termes de la masse et de l'énergie de f . Dans le cas où $\gamma \geq -2$, le terme de réaction peut encore être contrôlé, cela peut notamment se voir grâce à des estimations de type ε -Poincaré (nous renvoyons aux travaux de Gualdani et Guillen (2019), Alonso, Bagland et Lods (2019) et Alonso, Bagland, Desvillettes et Lods (2024) pour cela). Lorsque $\gamma < -2$, le terme de réaction devient trop singulier pour être contrôlé par le terme de diffusion.

En utilisant le lemme 2.1, on peut voir que le fait que la matrice a dégénère sur certaines lignes n'est pas un problème car f ne peut pas se concentrer sur ces lignes. On peut ainsi trouver dans la littérature des bornes sur la matrice de diffusion $A[f]$ définie par $A_{ij}[f](v) := \int_{\mathbf{R}^3} a_{ij}(v - w) f(w) dw$ (par Desvillettes et Villani (2000a) et Golse, Imbert, Ji et Vasseur (2024) par exemple) : si f est de masse, énergie et entropie finies, alors

$$(18) \quad A[f](v) \gtrsim \langle v \rangle^\gamma \mathbf{I}_3$$

où $\mathbf{I}_3$ est la matrice identité de $M_3(\mathbf{R})$. Précisons également que cette borne elliptique peut être raffinée afin de prendre en compte les caractéristiques anisotropes de l'opérateur de Landau. Plus précisément, il a été prouvé par Silvestre (2017) que

$$(19) \quad A[f](v) \gtrsim \left(\langle v \rangle^\gamma \frac{v \otimes v}{|v|^2} + \langle v \rangle^{\gamma+2} \left[\mathbf{I}_3 - \frac{v \otimes v}{|v|^2} \right] \right).$$

Ce type de borne est un élément crucial pour pouvoir faire le lien entre la dissipation d'entropie d'une distribution (terme non local) et un terme purement local faisant intervenir la racine carrée de notre distribution. Desvillettes (2015) a en effet prouvé une inégalité fonctionnelle permettant de faire ce lien. Plus précisément, il a montré que pour toute $f \geq 0$ telle que $f \in L_2^1$ et $f \log f \in L^1$, alors

$$(20) \quad \int_{\mathbf{R}^3} \left| \nabla \sqrt{f} \right|^2 \langle v \rangle^\gamma dv \leq C(1 + \mathcal{D}(f))$$

où $C = C(\mathcal{M}[f], \mathcal{E}[f], \mathcal{H}[f]) > 0$ avec les quantités $\mathcal{M}[f]$, $\mathcal{E}[f]$, $\mathcal{H}[f]$ définies comme dans (15). Le terme de droite de l'inégalité correspond à la dissipation d'entropie définie

en (12) tandis que le terme de gauche correspond à une information de Fisher à poids (voir section 4.1). La perte de poids pour les potentiels mous due au poids $\langle v \rangle^\gamma$ dans le membre de gauche illustre bien le caractère dégénéré de l'opérateur elliptique qui apparaît dans la formulation parabolique de l'opérateur (voir section 2.2). Notons que la borne (19) est à la base d'une version raffinée de l'inégalité (20) prouvée par Ji (2024c).

Sous la forme (17), l'équation de Landau Coulomb est alors proche de l'équation semi-linéaire de la chaleur

$$\partial_t f = \Delta f + \beta f^2 \quad \text{avec} \quad \beta > 0,$$

qui a été largement étudiée (nous renvoyons au papier de Merle et Zaag (1998) ainsi qu'aux références qui y sont mentionnées à ce sujet) et pour laquelle on sait qu'il y a explosion en temps fini des solutions dans L^p pour $p > 3/2$ en dimension $d = 3$. L'effet diffusif du laplacien est trop faible pour compenser l'explosion due au terme source non linéaire f^2 . Néanmoins, le parallèle entre ces deux équations reste grossier car intuitivement, pour l'équation de Landau Coulomb, on peut espérer que lorsque f augmente, l'effet de la matrice de diffusion dans (17) augmente également grâce au coefficient $A[f]$ et ainsi permette que la diffusion compense l'effet du terme f^2 . Il s'agit ainsi de comprendre s'il y a une sorte d'équilibre qui s'opère entre la matrice de diffusion dont les coefficients dépendent linéairement de f et le terme non linéaire f^2 .

Un autre modèle (qui semble plus proche de l'équation de Landau (17)) a été étudié, il s'agit de l'équation de Landau isotrope, la matrice de projection $\Pi(z)$ dans (3) est simplement remplacée par l'identité. L'équation s'écrit :

$$(21) \quad \partial_t f = \begin{cases} (f * |v|^{2+\gamma}) \Delta f - (2 + \gamma)(3 + \gamma)(f * |v|^\gamma) f & \text{si } \gamma \in (-3, 1], \\ (f * |v|^{2+\gamma}) \Delta f + 4\pi f^2 & \text{si } \gamma = -3. \end{cases}$$

Notons que dans le cas coulombien, cela revient à étudier l'équation

$$\partial_t f = (-\Delta)^{-1} f \Delta f + f^2.$$

Une modification de ce modèle a aussi été étudiée :

$$(22) \quad \partial_t f = (-\Delta)^{-1} f \Delta f + \beta f^2,$$

où $0 < \beta \leq 1$. L'idée d'introduire ce paramètre β est de rendre le terme de dissipation plus fort que le terme de réaction. Krieger et Strain (2012) établissent l'existence globale de solutions régulières pour des données radialement symétriques, positives et monotones dès que $\beta \leq 2/3$. Le résultat a été étendu par Gressman, Krieger et Strain (2012) au cas où $\beta \in [0, 74/75]$ puis au cas $\beta = 1$ par Gualdani et Guillen (2016) toujours pour des données symétriques radiales et positives. Gualdani et Guillen (2022) prouvent qu'il existe $\gamma_* \in (-5/2, -2)$ tel que pour $\gamma \in (\gamma_*, -2]$, les solutions fortes de l'équation (21) restent régulières en tout temps fini. Plus récemment (et postérieurement au travail de Guillen et Silvestre (2023)), Bowman et Ji (2024) ont prouvé que l'information de Fisher décroît le long des solutions de l'équation de Landau isotrope, leur permettant d'obtenir un résultat d'existence globale (y compris pour le cas $\gamma = -3$).

Pour terminer, mentionnons tout de même que l’analogie avec le modèle originel de Landau a ses limites, deux des caractéristiques principales de l’équation de Landau (le fait que les Maxwelliennes (14) soient des équilibres et la conservation de l’énergie) n’étant pas partagées par l’équation de Landau isotrope. De plus, dans le cas où $\gamma > -2$, le terme de réaction devient négatif pour l’équation de Landau isotrope, ce qui simplifie considérablement son analyse et ce qui n’est pas le cas pour l’équation de Landau écrite sous forme non conservative dans (16).

2.3. Comparaison avec l’équation de Navier–Stokes

Il existe des analogies frappantes entre l’équation de Navier–Stokes incompressible en 3D et l’équation de Landau Coulomb et plus précisément entre les solutions H de Villani (1998c) pour l’équation de Landau (voir section 3.2) et les solutions de Leray (1934) de l’équation de Navier–Stokes. Commençons par rappeler cette équation :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0$$

où $\nu > 0$ est le coefficient de viscosité. Dans cette analogie, si f est solution de l’équation de Landau, $\sqrt{f}$ joue le rôle de u et l’entropie $\mathcal{H}$ joue pour l’équation de Landau le même rôle que l’énergie $\|\cdot\|_{L^2}^2$ pour l’équation de Navier–Stokes. Grâce à l’inégalité de Desvillettes (20), on peut classer l’équation de Landau Coulomb dans une même classe que l’équation de Navier–Stokes en termes d’exposants de Lebesgue (avec une différence liée au poids). Plus précisément, on a

$$u \in L_t^\infty L_x^2, \quad \nabla_x u \in L_t^2 L_x^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{f} \in L_t^\infty L_v^2(\langle v \rangle^2), \quad \nabla_v \sqrt{f} \in L_t^2 L_v^2(\langle v \rangle^{-3}).$$

Remarquons aussi que si f est une solution de l’équation de Landau Coulomb alors f_ε définie par $f_\varepsilon = f_\varepsilon(t, v) := \varepsilon^2 f(\varepsilon^2 t, \varepsilon v)$ est aussi une solution de l’équation de Landau Coulomb. Une solution u de l’équation de Navier–Stokes incompressible en dimension 3 partage ainsi la même invariance d’échelle que $\sqrt{f}$ avec f solution de l’équation de Landau Coulomb. Ces analogies ont été à l’origine de nombreux travaux dont certains sont mentionnés ci-dessous.

3. Résultats antérieurs

Avant d’étudier le comportement des solutions de l’équation de Landau (9), nous commençons par rappeler brièvement des éléments concernant la théorie de Cauchy pour cette équation.

à cet effet, il est important de mentionner que dans les cas où $\gamma \geq -2$, avoir f de masse, énergie et entropie finies est suffisant pour donner un sens à des solutions faibles, c’est-à-dire à des solutions définies grâce à la formulation faible de l’opérateur (10). Ce n’est plus le cas dès lors que $\gamma < -2$. Même sans prendre en compte le fait que f dépend de la variable t , en utilisant la deuxième égalité de (10) et le fait que $a_{ij}(v - w)$

se comporte comme $|v - w|^{\gamma+2}$, on voit que le fait d’avoir f dans un espace L^1 à poids ou d’entropie finie n’est pas suffisant pour définir l’intégrale

$$(23) \quad \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} a_{ij}(v - w) f(v) f(w) \left(\partial_{v_i v_j} \varphi(v) - \partial_{w_i w_j} \varphi(w) \right) dw dv.$$

On peut espérer mieux si f vit dans un espace L^p pour un certain $p > 1$ en utilisant l’inégalité de Young pour la convolution.

3.1. Potentiels durs et modérément mous

Dans le cas des potentiels durs correspondant à $\gamma > 0$, nous avons existence, unicité des solutions, création de régularité et de moments grâce aux résultats de Desvillettes et Villani (2000a,b). La situation est très similaire pour le cas maxwellien et pour le cas de potentiels modérément mous. En effet, dans le cas maxwellien i.e. dans le cas où $\gamma = 0$, nous disposons également d’existence, d’unicité et de régularité grâce à Villani (1998d). Notons tout de même que dans ce cas, les moments polynomiaux sont propagés par l’équation mais pas créés comme dans le cas des potentiels durs. Villani (2000) a aussi prouvé que l’information de Fisher décroît dans ce cas. Dans le cas de potentiels modérément mous i.e. $-2 \leq \gamma < 0$, nous disposons d’estimations de régularité par Wu (2014), Silvestre (2017) et Gualdani et Guillen (2019) qui permettent de construire des solutions globales régulières. Concernant l’information de Fisher, nous mentionnons également des travaux récents de Alonso, Bagland et Lods (2019) et Meng, Wang, Min et Jin (2023) qui donnent des bornes uniformes en temps sur l’information de Fisher respectivement pour des potentiels durs et modérément mous.

3.2. Cas des potentiels très mous, dont le potentiel coulombien

Nous commençons par mentionner les solutions H construites par Villani (1998c) pour toute donnée appartenant à $L^1_2 \cap L \log L$. Villani a prouvé l’existence de solutions “très faibles” globalement en temps sans avoir de résultat d’unicité. En un certain sens, ces solutions jouent le même rôle que les solutions de Leray (1934) pour l’équation de Navier–Stokes (cf. section 2.3). L’idée centrale est d’utiliser le fait que la dissipation d’entropie est bornée dans L^1_t pour borner des termes du type (23). La terminologie “solution H” permet de souligner la différence avec les solutions faibles classiques qui elles nécessitent des bornes L^p pour $p > 1$ assez grand. Notons que les solutions H ont été construites pour tout type de potentiels $\gamma \in [-3, 1]$. Grâce à son inégalité (20), Desvillettes (2015) a plus récemment prouvé que les solutions H sont en fait des solutions faibles au sens classique.

D’autre part, Fournier et Guérin (2009) (resp. Fournier (2010)) ont prouvé un résultat d’unicité pour $\gamma \in (-3, 0)$ (resp. $\gamma = -3$) si la solution appartient à $L^1_t L^{3/(3+\gamma)}_v$ (resp. $L^1_t L^\infty_v$). Ces résultats impliquent des résultats d’existence en temps court si la donnée initiale est bornée grâce au résultat d’existence en temps court obtenu par Arsenev et Peskov (1977). Plus récemment, Chern et Gualdani (2022) ont prouvé un résultat d’unicité si la solution est dans $L^\infty_t L^p_v$ pour $p > 3/2$ pour l’équation de Landau Coulomb.

Des résultats de régularité conditionnelle ont été obtenus par Silvestre (2017) qui a prouvé que les solutions de l'équation de Landau Coulomb qui sont bornées dans L_k^p pour $p > 3/2$ et k assez grand sont bornées et donc régulières (le cas des solutions radiales avait déjà été traité par Gualdani et Guillen (2016)). Mentionnons également les travaux menés par Alonso, Bagland, Desvillettes et Lods (2024) et par Golding et Loher (2024) qui établissent des résultats de régularité conditionnelle en fournissant des critères à la Prodi–Serrin i.e. en supposant que la solution f est dans un espace du type $L_t^p L_v^q$ pour un bon choix d'exposants p et q . Ces travaux sont basés sur l'analogie entre l'équation de Landau Coulomb et l'équation de Navier–Stokes incompressible en dimension 3 que nous avons présentée dans la section 2.3.

Mentionnons également le travail de Desvillettes, He et Jiang (2024) ; les auteurs ont identifié une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov pour l'équation de Landau Coulomb qui leur permet d'obtenir des résultats de différente nature : existence en temps long pour des données proches d'un équilibre maxwellien ou bien preuve du fait qu'une solution H devient globale et forte à partir d'un certain temps même si on ne fait pas d'hypothèse de petitesse sur la donnée initiale. Ceci est à rapprocher des résultats de Leray pour l'équation de Navier–Stokes incompressible en dimension 3 : on a existence globale et unicité d'une solution forte si la quantité $\|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}$ est assez petite ; sinon, les solutions faibles deviennent fortes à partir d'un certain temps (mais pas globales).

Des résultats de régularité partielle ont également été obtenus. Golse, Gualdani, Imbert et Vasseur (2022) ont prouvé que l'ensemble des temps pour lesquels une solution H de l'équation de Landau Coulomb est non bornée est de dimension de Hausdorff au plus $1/2$, ce qui est similaire au résultat de Leray (1934) sur l'équation de Navier–Stokes incompressible en dimension 3. Un résultat de régularité partielle à la Caffarelli, Kohn et Nirenberg (1982) a ensuite été obtenu par Golse, Imbert, Ji et Vasseur (2024). Notons qu'une nouvelle preuve du résultat de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (1982) a été donnée par Vasseur (2007) basée sur la méthode de De Giorgi (1957) initialement destinée à l'étude d'équations elliptiques et paraboliques (voir par exemple les notes de cours de Vasseur (2016) pour une présentation de cette méthode).

3.3. Équation non homogène en espace

Pour terminer, nous mentionnons qu'il existe une littérature importante sur l'équation non homogène en espace pour tout type de potentiels dont nous ne mentionnons que quelques éléments ici qui concernent les potentiels très mous. On dispose de résultats d'existence de solutions renormalisées par Alexandre et Villani (2004), d'existence de solutions proches de l'équilibre maxwellien par Guo (2002), Carrapatoso et Mischler (2017) et Kim, Guo et Hwang (2020), d'existence de solutions en temps court par Henderson, Snelson et Tarfulea (2020) mais aussi de résultats de régularité conditionnelle par Golse, Imbert, Mouhot et Vasseur (2019) à condition que certaines quantités hydrodynamiques soient bornées uniformément en t et en x .

4. Décroissance de l'information de Fisher

Dans cette partie, nous entrons dans le cœur du sujet : l'obtention d'une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov pour l'équation (9), l'information de Fisher.

4.1. Information de Fisher

Pour f définie sur $\mathbf{R}^3$, l'information de Fisher associée à f est définie par

$$(24) \quad i(f) := \int_{\mathbf{R}^3} \frac{|\nabla f|^2}{f} dv = \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \log f|^2 f dv = 4 \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \sqrt{f}|^2 dv.$$

Notons que si f s'annule sur certaines régions, la seule formulation bien définie est la troisième. Pour l'utilisation que l'on va en faire, c'est-à-dire lorsque l'on considérera l'information de Fisher de solutions de l'équation de Landau (9), ce problème ne se posera pas car Henderson, Snelson et Tarfulea (2020) ont prouvé que les solutions deviennent immédiatement strictement positives.

On peut facilement remarquer que la formule (24) définit une fonctionnelle convexe et isotrope. Elle a d'abord été utilisée par Fisher (1925) et joue un rôle fondamental en théorie de l'information. Ce n'est que bien plus tard que McKean (1966) a introduit l'information de Fisher en théorie cinétique dans le but de comprendre des phénomènes de convergence vers l'équilibre pour une équation de Kac (un modèle 1D qui peut être vu comme une version simplifiée de l'équation de Boltzmann homogène en espace pour des molécules maxwelliennes). McKean a remarqué que l'information de Fisher était une fonctionnelle d'entropie pour l'équation de Kac. Toscani (1992) a ensuite étendu ce résultat à l'équation de Boltzmann homogène en espace pour des molécules maxwelliennes en 2D. Villani (1998a, 2000) a ensuite prouvé le résultat en toute dimension pour les équations de Boltzmann et Landau pour des molécules maxwelliennes.

Le résultat principal du papier de Guillen et Silvestre (2023) consiste à prouver que l'information de Fisher décroît le long des solutions de l'équation de Landau pour tout type de potentiels, incluant notamment le cas du potentiel de Coulomb correspondant à $\gamma = -3$. Notons également que dans un papier plus récent, Ji (2024b) a obtenu un taux pour la dissipation de l'information de Fisher, rendant ainsi plus précis le résultat de Guillen et Silvestre. Par ailleurs, Imbert, Silvestre et Villani (2024) ont récemment prouvé un résultat similaire à celui de Guillen et Silvestre pour l'équation de Boltzmann pour tout type d'interaction.

Mentionnons également que Buet et Cordier (1998) avaient observé numériquement que l'information de Fisher semblait décroître le long des solutions de l'équation de Landau, y compris lorsque le potentiel d'interaction n'était pas maxwellien.

Pour terminer, nous renvoyons aux notes de cours de Villani (2025) dans lesquelles on pourra trouver une présentation très détaillée et profonde de l'utilisation de l'information de Fisher en théorie cinétique principalement centrée sur l'équation de Boltzmann.

4.2. Réécriture du problème

On rappelle ici l'équation de Landau que l'on souhaite étudier

$$\partial_t f = q(f, f)$$

où q est un opérateur non linéaire intégral-différentiel défini en (2). La première idée est de transformer l'équation grâce à un “relèvement” de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^6$ au moyen d'une tensorisation du problème. Afin de faire le lien entre ces deux cadres, pour $F : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$, on définit $\pi F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ par $\pi F(v) = \int_{\mathbf{R}^3} F(v, w) dw$. On peut alors montrer que si $Q(F)$ pour $F : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ est défini par

$$(25) \quad Q(F)(v, w) := \sum_{i,j=1}^3 (\partial_{v_i} - \partial_{w_i}) \left(a_{ij}(v - w) (\partial_{v_j} - \partial_{w_j}) F(v, w) \right), \quad \forall (v, w) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3,$$

alors en posant $F(v, w) := f(v)f(w)$ pour $v, w \in \mathbf{R}^3$ et avec $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, on a

$$(26) \quad \pi Q(F) = q(f, f).$$

Remarquons que si F est solution de

$$(27) \quad \begin{cases} \partial_t F = Q(F) \\ F(0, v, w) = f_0(v)f_0(w), \end{cases}$$

alors pour tout $t > 0$, on a $F(t, v, w) = F(t, w, v)$ grâce à la symétrie de l'équation et de la donnée initiale.

Remarque 4.1. — Mentionnons qu'il est aisé de voir que l'opérateur de Boltzmann (5) peut s'écrire comme une marginale d'un opérateur linéaire de $f \otimes f$ du fait de sa structure qui est directement liée au fait qu'il modélise des interactions binaires. Cette remarque est aussi à la base de la preuve de la décroissance de l'information de Fisher le long des solutions de l'équation de Boltzmann par Imbert, Silvestre et Villani (2024).

Notation. — L'information de Fisher sur $\mathbf{R}^3$ définie en (24) est notée i et on définit de manière similaire l'information de Fisher sur $\mathbf{R}^6$ et on la note I . Plus précisément, pour $F : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ assez régulière, on définit

$$I(F) := \int_{\mathbf{R}^6} \frac{|\nabla F|^2}{F} dv = \int_{\mathbf{R}^6} |\nabla \log F|^2 F dv = 4 \int_{\mathbf{R}^6} |\nabla \sqrt{F}|^2 dv.$$

L'idée est maintenant de comprendre le lien entre l'évolution de l'information de Fisher d'une solution de l'équation (27) et l'évolution de l'information de Fisher d'une solution de l'équation (9). Pour cela, nous allons étudier la différentielle directionnelle de i (respectivement I) en f (respectivement F) dans la direction $q(f, f)$ (respectivement $Q(F)$).

LEMME 4.2. — *Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^3$. On définit $F := f \otimes f$. Alors*

$$I(F) = 2i(f) \quad \text{et} \quad \langle I'(F), Q(F) \rangle = 2\langle i'(f), q(f, f) \rangle.$$

Remarque 4.3. — On peut facilement montrer que le même type de relations est vérifié pour l'entropie de Boltzmann.

Preuve du lemme 4.2. — La première égalité s'obtient directement à partir des définitions de I et i . Pour la deuxième égalité, nous présentons ici une preuve directe par le calcul basée sur la définition des différentielles directionnelles de i et I . Pour $G : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ assez régulière, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle I'(f \otimes f), G \rangle &= 2 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{\nabla_{v,w}(f \otimes f)}{f \otimes f} \cdot \nabla_{v,w} G \, dw \, dv - \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{|\nabla_{v,w}(f \otimes f)|^2}{(f \otimes f)^2} G \, dw \, dv \\ &= 2 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{((\nabla_v f(v))f(w), (\nabla_w f(w))f(v))}{f(v)f(w)} \cdot (\nabla_v G(v, w), \nabla_w G(v, w)) \, dw \, dv \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left(\frac{|\nabla_v f(v)|^2}{f(v)^2} + \frac{|\nabla_w f(w)|^2}{f(w)^2} \right) G(v, w) \, dw \, dv \\ &= 2 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left(\frac{\nabla_v f(v)}{f(v)}, \frac{\nabla_w f(w)}{f(w)} \right) \cdot (\nabla_v G(v, w), \nabla_w G(v, w)) \, dw \, dv \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left(\frac{|\nabla_v f(v)|^2}{f(v)^2} + \frac{|\nabla_w f(w)|^2}{f(w)^2} \right) G(v, w) \, dw \, dv. \end{aligned}$$

Nous supposons maintenant G symétrique, c'est-à-dire que nous faisons l'hypothèse que $G(v, w) = G(w, v)$ pour tout $(v, w) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Il est alors aisé de voir que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left(\frac{\nabla_v f(v)}{f(v)}, \frac{\nabla_w f(w)}{f(w)} \right) \cdot (\nabla_v G(v, w), \nabla_w G(v, w)) \, dw \, dv \\ = 2 \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\nabla_v f(v)}{f(v)} \cdot \nabla_v \pi G(v) \, dv \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left(\frac{|\nabla_v f(v)|^2}{f(v)^2} + \frac{|\nabla_w f(w)|^2}{f(w)^2} \right) G(v, w) \, dw \, dv = 2 \int_{\mathbf{R}^3} \frac{|\nabla_v f(v)|^2}{f(v)^2} \pi G(v) \, dv.$$

En appliquant ce calcul à $G = Q(F)$ avec $F = f \otimes f$ et en utilisant (26), on obtient le résultat voulu. $\square$

Remarque 4.4. — Guillen et Silvestre (2023) prouvent en fait l'inégalité $i(\pi F) \leq I(F)/2$ pour F symétrique et l'égalité énoncée ci-dessus lorsque $F = f \otimes f$.

Ainsi, pour prouver que l'information de Fisher décroît le long des solutions de l'équation de Landau (9) i.e. pour montrer la conclusion du théorème 1.1, il suffit de montrer que pour toute $F : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ symétrique, on a

$$(28) \quad \langle I'(F), Q(F) \rangle \leq 0.$$

Cette réécriture du problème nous a permis de “simplifier” le problème dans le sens où il suffit maintenant de montrer la décroissance de l'information de Fisher pour une

équation linéaire à coefficients explicites (27) au lieu d’une équation non linéaire et non locale (9).

Réécriture de Q . — Afin de mener leur preuve de l’inégalité (28), les auteurs réécrivent l’opérateur Q au moyen de champs de vecteurs bien choisis. Plus précisément, ils introduisent pour $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{b}_1(z) := (0, -z_3, z_2), \quad \mathbf{b}_2(z) := (z_3, 0, -z_1), \quad \mathbf{b}_3(z) := (-z_2, z_1, 0).$$

Des calculs élémentaires permettent de vérifier que pour tout $z \in \mathbf{R}^3$, on a $\mathbf{b}_i(z) \perp z$. En particulier, on peut remarquer que les vecteurs $\mathbf{b}_k(z)$ pour $z \in \mathbf{R}^3$ engendrent l’espace tangent aux ensembles de niveau de $|z|$. De plus, on a

$$(29) \quad \left(\sum_{k=1}^3 \mathbf{b}_k(z) \otimes \mathbf{b}_k(z) \right)_{ij} = |z|^2 \Pi_{ij}(z), \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

En notant $\mathbf{b}_k := \mathbf{b}_k(v - w)$, on en déduit :

$$Q(F) = \sum_{k=1}^3 (\operatorname{div}_v - \operatorname{div}_w) \left[\alpha(|v - w|) \mathbf{b}_k \otimes \mathbf{b}_k (\nabla_v - \nabla_w) F \right].$$

Comme les opérateurs agissent sur des fonctions de $\mathbf{R}^6$, les auteurs vont naturellement plus loin dans la réécriture de l’opérateur en introduisant les champs de vecteurs relevés $\mathbf{B}_k := (\mathbf{b}_k, -\mathbf{b}_k) \in \mathbf{R}^6$. En remarquant que si $\beta : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ ne dépend que de $|v - w|$, alors $\operatorname{div}(\beta \mathbf{B}_k) = 0$, on peut réécrire $Q(F)$ comme une somme de dérivées secondes dans les directions $\mathbf{B}_k$, plus précisément,

$$Q = \sum_{k=1}^3 L_{\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k} \circ L_{\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k} \quad \text{avec} \quad L_{\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k}(F) := \sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla F$$

où le gradient ∇ désigne ici le gradient en $(v, w) \in \mathbf{R}^6$. L’opérateur Q est ainsi réécrit comme une somme de carrés d’opérateurs de transport d’ordre 1, à savoir $\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla$ où les $\mathbf{B}_k$ vivent dans l’espace tangent aux ensembles de niveau de α .

4.3. Remarques sur la géométrie du problème

Les champs de vecteurs $\mathbf{b}_k$ introduits ci-dessus sont en fait reliés à des considérations géométriques plus profondes que nous essayons dans un premier temps d’expliquer en termes béotiens. On peut associer à chaque champ de vecteurs $\mathbf{b}_k : z \in \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{b}_k(z)$ une matrice antisymétrique, par exemple, la matrice associée à $\mathbf{b}_1$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors comprendre que le flot engendré par une telle matrice est une rotation (car cette matrice est antisymétrique et que la transposée de l’exponentielle d’une matrice antisymétrique est égale à son inverse). De manière plus rigoureuse, l’ensemble des rotations forme un groupe de Lie noté $SO(3)$. Son algèbre de Lie $so(3)$ est l’ensemble des matrices antisymétriques de $M_3(\mathbf{R})$ avec crochet de Lie donné par le commutateur

(la famille de champs de vecteurs $\mathbf{b}_k$ engendre ainsi l'algèbre de Lie $so(3)$). Notons aussi qu'on peut identifier $so(3)$ à l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ avec crochet de Lie donné par le produit vectoriel. En effet, toute matrice anti-symétrique de $M_3(\mathbf{R})$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{R}$$

et on peut l'identifier au vecteur (z_1, z_2, z_3) de $\mathbf{R}^3$. Cette application définit un isomorphisme linéaire entre $so(3)$ et $\mathbf{R}^3$ et le crochet de Lie est transporté par cet isomorphisme. On peut remarquer que les vecteurs de la base canonique e_k de $\mathbf{R}^3$ correspondent ainsi aux champs de vecteurs $\mathbf{b}_k$ via cette application. Dans la suite, on dira qu'un champ de vecteurs engendre une rotation s'il correspond à un élément de $so(3)$.

Au sujet des vecteurs $\mathbf{B}_k$, il est intéressant de remarquer que si l'on considère le flot de chaque $\mathbf{B}_k$, plus précisément, si

$$\begin{pmatrix} v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_k(v(t) - w(t)),$$

alors les quantités $v(t) + w(t)$, $|v(t)|^2 + |w(t)|^2$, et $|v(t) - w(t)|$ sont toutes constantes en temps, correspondant respectivement à la conservation du point milieu, de la norme et de la distance. En effet, $\mathbf{B}_k$ est perpendiculaire au gradient de $|v|^2 + |w|^2$, au gradient de $|v - w|$ et aux vecteurs de la forme $(e, e) \in \mathbf{R}^6$ avec $e \in \mathbf{R}^3$. Ainsi, partant d'un vecteur fixé $(v, w) \in \mathbf{R}^6$, l'ensemble de points que l'on peut atteindre en suivant le flot de $\mathbf{B}_k$ est la sphère

$$(30) \quad \left\{ (v', w') \in \mathbf{R}^6 : v' + w' = v + w \text{ et } |v'|^2 + |w'|^2 = |v|^2 + |w|^2 \right\},$$

ce qui est exactement la sphère de dimension 2 que l'on retrouve lorsque l'on écrit les lois des collisions élastiques pour l'équation de Boltzmann (6). Pour $(v, w) \in \mathbf{R}^6$, les vecteurs associés $\mathbf{B}_k$ sont tangents à cette sphère.

Pour terminer cette partie dédiée à des considérations géométriques, on remarque aussi que la propriété (29) et le fait que les $\mathbf{b}_k$ soient de divergence nulle permettent de réécrire des objets intrinsèques sur la sphère au moyen des vecteurs $\mathbf{b}_k$. En effet, pour des fonctions $f, g : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ régulières et $\sigma \in \mathbf{S}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma f &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma (\mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma f), \\ |\nabla_\sigma f|^2 &= \sum_{k=1}^3 (\mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma f)^2, \\ \nabla_\sigma f \cdot \nabla_\sigma g &= \sum_{k=1}^3 (\mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma f)(\mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma g). \end{aligned}$$

4.4. Décroissance dans le cas maxwellien

Dans le cas maxwellien, on a $\alpha \equiv 1$ de sorte que $Q = \sum_{k=1}^3 L_{\mathbf{B}_k} \circ L_{\mathbf{B}_k}$. On peut alors commencer par remarquer que $\langle I'(F), L_{\mathbf{B}_k}(F) \rangle = 0$. En effet, on a :

$$\langle I'(F), L_{\mathbf{B}_k}(F) \rangle = \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left(2 \frac{\nabla F \cdot \nabla L_{\mathbf{B}_k} F}{F} - \frac{|\nabla F|^2}{F^2} L_{\mathbf{B}_k} F \right) dw dv.$$

De plus, en notant $(D\mathbf{B}_k)_{ij} = (\partial_i(\mathbf{B}_k)_j)_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq 6$, on a :

$$\nabla F \cdot \nabla(\mathbf{B}_k \cdot \nabla F) = \langle D\mathbf{B}_k \nabla F, \nabla F \rangle + \mathbf{B}_k \cdot \nabla |\nabla F|^2 = \mathbf{B}_k \cdot \nabla |\nabla F|^2$$

car $D\mathbf{B}_k$ est antisymétrique pour tout k . Ainsi, en revenant à l'égalité précédente, on obtient :

$$\langle I'(F), L_{\mathbf{B}_k}(F) \rangle = \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \mathbf{B}_k \cdot \nabla \frac{|\nabla F|^2}{F} dw dv = 0$$

car $\mathbf{B}_k$ est de divergence nulle.

Remarque 4.5. — On aurait pu obtenir cette égalité par des considérations purement géométriques. En effet, Q est une somme d'opérateurs différentiels donnés par des champs de vecteurs qui engendrent des rotations dans $\mathbf{R}^6$ (cf. section 4.3). L'information de Fisher étant invariante par rotation, on en déduit que $I(F)$ est constante le long du flot de $\mathbf{B}_k \cdot \nabla$ et donc en particulier $\langle I'(F), L_{\mathbf{B}_k}(F) \rangle = 0$. Précisons ici que cela n'est plus vrai dès lors que α n'est plus constant égal à 1.

Montrons maintenant que

$$\langle I'(F), Q(F) \rangle = -\langle I''(F) L_{\mathbf{B}_k} F, L_{\mathbf{B}_k} F \rangle.$$

Pour cela, pour $F : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ fixée, on définit F^k par

$$\begin{cases} \partial_t F^k = L_{\mathbf{B}_k} F^k \\ F^k(0) = F. \end{cases}$$

On a alors :

$$\left(\partial_{tt} F^k \right)_{|t=0} = \left(L_{\mathbf{B}_k} \circ L_{\mathbf{B}_k} (F^k) \right)_{|t=0} = Q(F^k)_{|t=0} = Q(F).$$

Puis, on utilise que d'après la remarque précédente, $I(F^k)$ est constante en temps pour en déduire que

$$0 = \partial_{tt} I(F^k)_{|t=0} = \langle I'(F^k), \partial_{tt} F^k \rangle_{|t=0} + \langle I''(F^k) \partial_t F^k, \partial_t F^k \rangle_{|t=0}.$$

De plus, la convexité de l'information de Fisher implique que le deuxième terme dans le membre de droite est positif. On en déduit

$$\langle I'(F), Q(F) \rangle \leq 0.$$

Remarque 4.6. — On aurait pu directement montrer par le calcul que

$$\langle I'(F), Q(F) \rangle = -2 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} F |\nabla(\mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F)|^2 dw dv = -\langle I''(F) L_{\mathbf{B}_k} F, L_{\mathbf{B}_k} F \rangle \leq 0.$$

Comme vu dans la section 4.2, ceci nous permet de déduire que l’information de Fisher décroît le long des solutions de l’équation de Landau pour des molécules maxwelliennes, la conclusion du théorème 1.1 est ainsi vraie dans le cas où $\gamma = 0$ i.e. dans le cas où $\alpha \equiv 1$.

Remarque 4.7. — Ce résultat était déjà connu mais la méthode de preuve de Villani (2000) était différente. En effet, elle reposait sur la réécriture de l’opérateur de Landau Maxwell comme la somme d’un opérateur de Fokker–Planck linéaire modifié et de l’opérateur de Laplace–Beltrami (i.e. un laplacien sur la sphère $\mathbf{S}^2$). La décroissance de l’information de Fisher était alors obtenue en utilisant le formalisme de Bakry et Émery (1985) pour le laplacien sur la sphère (cf. section 4.7) et en adaptant les calculs déjà connus pour l’opérateur de Fokker–Planck, de McKean (1966) et Toscani (1992).

4.5. évolution de l’information de Fisher dans le cas général

Dans le cas général, on ne peut plus mener les calculs comme dans la partie précédente. En revanche, l’opérateur $L_k := L_{\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k}$ va rester une rotation lorsqu’on le restreint aux ensembles de niveau de $|v - w|$. Cela va naturellement amener à une décomposition de l’information de Fisher en deux parties : $I(F) = I_{\text{tan}}(F) + I_n(F)$ où on prend en compte dans $I_{\text{tan}}(F)$ (resp. dans $I_n(F)$) les dérivées de F dans les directions tangentes aux ensembles de niveau de $|v - w|$ (resp. dans la direction normale aux ensembles de niveau). De même que pour I dans le cas maxwellien, on va pouvoir montrer que I_{tan} est constante le long du flot de chaque L_k et conclure par un argument de convexité que I_{tan} décroît le long des solutions de l’équation de Landau “relevée”. L’étude de la partie I_n est nettement plus complexe et sera détaillée dans ce qui suit.

Nous allons maintenant donner une formulation plus précise de tout cela. Tout d’abord, $I_n(F)$ est définie par :

$$I_n(F) := \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{|n \cdot \nabla F|^2}{F} dw dv ,$$

où on a introduit

$$(31) \quad n := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} n_0 \\ -n_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad n_0 := \frac{v - w}{|v - w|} ,$$

et I_{tan} est donnée par

$$I_{\text{tan}}(F) = \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left[\frac{|\nabla F|^2}{F} - \frac{|n \cdot \nabla F|^2}{F} \right] dw dv .$$

La partie faisant intervenir I_{tan} est traitée de la même manière que I dans le cas maxwellien et la partie faisant intervenir I_n nécessite des calculs raffinés qui exploitent le fait que

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_k = \operatorname{div}(\alpha \mathbf{B}_k) = \operatorname{div}((n \cdot \nabla \alpha) \mathbf{B}_k) = 0$$

ainsi que

$$[n, \alpha \mathbf{B}_k] = (n \cdot \nabla \alpha) \mathbf{B}_k ,$$

où $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ désigne le crochet de Lie de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ qui est défini par la formule $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_i = \sum_j (\mathbf{a}_j \partial_j \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j \partial_j \mathbf{a}_i)$. Le crochet mesure l'erreur commise lorsqu'on commute les dérivations selon les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]u = \mathbf{a} \cdot \nabla (\mathbf{b} \cdot \nabla u) - \mathbf{b} \cdot \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla u).$$

Remarque 4.8. — Dans le cas maxwellien, on avait $[n, \alpha \mathbf{B}_k] = [n, \mathbf{B}_k] = 0$.

En utilisant cette décomposition $I = I_{\text{tan}} + I_n$, Guillen et Silvestre (2023) prouvent dans le lemme 8.2 que

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \langle I'(F), Q(F) \rangle &= - \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left| \nabla \left[\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F \right] \right|^2 F \, dw \, dv \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{\alpha'(|v-w|)^2}{2\alpha(|v-w|)} (\mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F)^2 F \, dw \, dv. \end{aligned}$$

Remarque 4.9. — Le deuxième terme du membre de droite de la formule précédente disparaît dans le cas maxwellien i.e. $\alpha \equiv 1$, on retrouve bien le résultat de la section 4.4.

Expliquons maintenant comment exploiter le calcul (32). Tout d'abord, on remarque que

$$\Pi(v-w) = \mathbf{I}_3 - n_0^t n_0,$$

où n_0 a été défini en (31) et $\Pi(v-w)$ est la matrice de projection orthogonale sur $(v-w)^\perp$ définie en (4). En utilisant cette identité, on en déduit que

$$(33) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n_0^t n_0 & -n_0^t n_0 \\ -n_0^t n_0 & n_0^t n_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Pi(v-w) & -\Pi(v-w) \\ -\Pi(v-w) & \Pi(v-w) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, pour $G : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable, nous pouvons écrire

$$|\nabla G|^2 = {}^t(\nabla G) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \nabla G.$$

En combinant ces deux remarques, nous pouvons en déduire que

$$(34) \quad |\nabla G|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 |(\nabla_{v_i} + \nabla_{w_i})G|^2 + |n \cdot \nabla G|^2 + \frac{1}{2|v-w|^2} \sum_{k=1}^3 |\mathbf{B}_k \cdot \nabla G|^2.$$

Ceci implique directement l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \left| \nabla \left(\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F \right) \right|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left| (\partial_{v_i} + \partial_{w_i}) \left(\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F \right) \right|^2 \\ &\quad + \left| n \cdot \nabla \left(\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F \right) \right|^2 + \frac{1}{2|v-w|^2} \sum_{i=1}^3 \left| \mathbf{B}_i \cdot \nabla \left(\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F \right) \right|^2. \end{aligned}$$

Remarquons que comme α ne dépend que de $|v-w|$, on a $(\partial_{v_i} + \partial_{w_i})\alpha = 0$ et $\mathbf{B}_k \cdot \nabla \alpha = 0$. Ainsi, en revenant à l'expression (32), nous obtenons la décomposition suivante :

$$\frac{1}{2} \langle I'(F), Q(F) \rangle = -D_{\text{par}} - D_{\text{rad}} - D_{\text{sph}} + \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{(\alpha')^2}{2\alpha} F |\mathbf{B}_k \cdot \log F|^2 \, dw \, dv$$

où on a défini

$$D_{\text{par}} := \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \alpha(|v-w|) |(\partial_{v_i} + \partial_{w_i})(\mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F)|^2 F \, dw \, dv$$

ainsi que

$$D_{\text{sph}} := \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{\alpha(|v-w|)}{2|v-w|^2} |\mathbf{B}_i \cdot \nabla (\mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F)|^2 F \, dw \, dv$$

et

$$D_{\text{rad}} := \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \left| n \cdot \nabla (\sqrt{\alpha} \mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F) \right|^2 F \, dw \, dv.$$

Nous introduisons également la notation suivante pour le terme de reste :

$$R_{\text{sph}} := \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{\alpha(|v-w|)}{|v-w|^2} F |\mathbf{B}_k \cdot \nabla \log F|^2 \, dw \, dv$$

de sorte que

$$(35) \quad \frac{1}{2} \langle I'(F), Q(F) \rangle \leq -D_{\text{par}} - D_{\text{rad}} - D_{\text{sph}} + \sup_{r>0} \left(\frac{r^2 \alpha'(r)^2}{2\alpha(r)^2} \right) R_{\text{sph}}.$$

Ainsi, le but est de contrôler le terme de reste par les termes dissipatifs. Il se trouve qu'il suffit d'utiliser le terme D_{sph} pour contrôler le terme de reste et d'utiliser la positivité des termes D_{par} et D_{rad} .

Remarque 4.10. — Nous avons ici adopté la présentation de Guillen et Silvestre (2023) et Ji (2024b). Néanmoins, mentionnons que la décomposition (34) correspond à une réécriture du gradient en (v, w) dans les coordonnées (z, r, σ) définies par $z := (v+w)/2 \in \mathbf{R}^3$ et $(v-w)/2 = r\sigma$ avec $r \in \mathbf{R}^+$ et $\sigma \in \mathbf{S}^2$ de sorte que

$$(36) \quad v = z + r\sigma \quad \text{et} \quad w = z - r\sigma.$$

Ceci explique les notations D_{par} , D_{rad} et D_{sph} puisque ces termes de dissipation proviennent de la décomposition de ∇F dans l'information de Fisher en trois termes correspondant respectivement au gradient selon z , à la dérivée par rapport à r et au gradient selon σ .

Remarque 4.11. — Rappelons que ce changement de variable apparaît naturellement et est très souvent utilisé lorsque l'on étudie l'équation de Boltzmann, on renvoie à l'expression des vitesses pré-collisionnelles (v', w') donnée en (7).

Comme mentionné précédemment, Ji (2024b) prouve un résultat plus fort que la décroissance de l'information de Fisher puisqu'il obtient un taux de dissipation. Pour cela, il raffine l'approche de Guillen et Silvestre (2023) en exploitant le terme D_{par} dont seule la positivité est utilisée par Guillen et Silvestre (2023).

4.6. Réduction à un problème d'inégalité sur la sphère

C'est le changement de variable introduit en (36) qui permet de se ramener à un problème d'inégalité fonctionnelle sur la sphère $\mathbf{S}^2$. On remarque que

$$dv dw = 8r^2 d\sigma dr dz.$$

De plus, pour tout $k = 1, 2, 3$, on a $\mathbf{b}_k(v - w) = 2r\mathbf{b}_k(\sigma)$ en utilisant que $|v - w| = 2r$ et $\nabla_\sigma G(z + r\sigma, z - r\sigma) = r(\nabla_v - \nabla_w)G(v, w)$ pour $G : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ assez régulière. Ainsi, on a :

$$\mathbf{B}_k(v - w) \cdot \nabla G = \mathbf{b}_k(v - w) \cdot (\nabla_v - \nabla_w)G = 2\mathbf{b}_k(\sigma) \nabla_\sigma G.$$

Grâce à ces remarques, nous pouvons réécrire les termes D_{sph} et R_{sph} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_{\text{sph}} &= \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^+} \int_{\mathbf{S}^2} \frac{\alpha(2r)}{8r^2} 16 |\mathbf{b}_i(\sigma) \cdot \nabla_\sigma (\mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma \log F)|^2 F 8r^2 d\sigma dr dz \\ &= 16 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^+} \alpha(2r) \left(\sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} |\mathbf{b}_i(\sigma) \cdot \nabla_\sigma (\mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma \log F)|^2 F d\sigma \right) dr dz \end{aligned}$$

et de même

$$R_{\text{sph}} = 8 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^+} \alpha(2r) \left(\sum_{k=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} |\mathbf{b}_k(\sigma) \cdot \nabla_\sigma \log F|^2 F d\sigma \right) dr dz.$$

Ainsi, comparer les termes entre parenthèses apparaissant dans D_{sph} et R_{sph} à $z \in \mathbf{R}^3$ et $r \geq 0$ fixés est suffisant pour comparer D_{sph} et R_{sph} . On s'est donc ramené à un problème d'inégalité sur la sphère. On peut donc en déduire que si on est capable de montrer une inégalité sur la sphère qui implique que $R_{\text{sph}} \leq 2/19 D_{\text{sph}}$, alors en revenant à l'inégalité (32), on aura prouvé que pour tout potentiel d'interaction $\alpha \geq 0$ satisfaisant

$$\frac{r|\alpha'(r)|}{\alpha(r)} \leq \sqrt{19}, \quad \forall r > 0,$$

le terme de droite de (32) est négatif, ce qui permettra d'obtenir le résultat escompté, c'est-à-dire la conclusion du théorème 1.1.

4.7. Inégalité sur la sphère

Guillen et Silvestre (2023) prouvent le résultat suivant :

THÉORÈME 4.12. — *Considérons $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}_*^+$ une fonction $\mathcal{C}^2$ qui satisfait l'égalité $f(\sigma) = f(-\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathbf{S}^2$. L'inégalité suivante est alors vérifiée :*

$$(37) \quad \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} f(\mathbf{b}_i(\sigma) \cdot \nabla_\sigma (\mathbf{b}_j(\sigma) \cdot \nabla_\sigma \log f))^2 d\sigma \geq \frac{19}{4} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} f(\mathbf{b}_i(\sigma) \cdot \nabla_\sigma \log f)^2 d\sigma.$$

Pour conclure la preuve de la décroissance de l'information de Fisher, il suffit alors de remarquer que l'hypothèse de symétrie $F(v, w) = F(w, v)$ se traduit dans les nouvelles coordonnées par $F(z, r, \sigma) = F(z, r, -\sigma)$. L'hypothèse de symétrie dans le théorème ci-dessus est cruciale pour obtenir la constante $19/4$. Et la valeur de cette constante est déterminante car c'est elle qui donne le type de potentiels pour lesquels le théorème final va pouvoir s'appliquer.

Idées de la preuve. — Nous ne donnons pas la preuve détaillée de ce résultat ici mais donnons quelques idées de la preuve donnée par Guillen et Silvestre (2023). La première étape consiste à introduire la dérivée de $\sqrt{f}$ plutôt que celle de $\log f$ grâce à la relation qui les relie. Pour alléger les notations, on notera $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(\sigma)$ et $\nabla = \nabla_\sigma$. On peut remarquer que le terme de droite de l'inégalité se réécrit de la manière suivante :

$$(38) \quad \int_{\mathbf{S}^2} f (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \log f)^2 d\sigma = 4 \int_{\mathbf{S}^2} \left(\mathbf{b}_i \cdot \nabla \sqrt{f} \right)^2 d\sigma.$$

Pour le membre de gauche, on peut aussi remarquer que pour les termes diagonaux (i.e. lorsque $i = j$), nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{S}^2} f (\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \log f))^2 d\sigma \\ &= 4 \int_{\mathbf{S}^2} \left[\left(\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \sqrt{f}) \right)^2 - 2 \frac{(\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \sqrt{f})) (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \sqrt{f})^2}{\sqrt{f}} + \frac{(\mathbf{b}_i \cdot \nabla \sqrt{f})^4}{f} \right] d\sigma. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties sur le 2ème terme, on peut facilement montrer que

$$(39) \quad \int_{\mathbf{S}^2} f (\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \log f))^2 d\sigma \geq 4 \int_{\mathbf{S}^2} \left(\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \sqrt{f}) \right)^2 d\sigma.$$

Concernant les termes pour lesquels $i \neq j$, les choses sont plus compliquées. Afin de les traiter, on introduit les matrices $M_g = M_g(\sigma)$ et $N_g = N_g(\sigma)$ définies par

$$(M_g)_{ij} = \frac{\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_j \cdot \nabla g) + \mathbf{b}_j \cdot \nabla (\mathbf{b}_i \cdot \nabla g)}{2} \quad \text{et} \quad (N_g)_{ij} = \frac{\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_j \cdot \nabla g) - \mathbf{b}_j \cdot \nabla (\mathbf{b}_i \cdot \nabla g)}{2}$$

qui représentent respectivement les parties symétrique et antisymétrique de la matrice $(\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_j \cdot \nabla g))_{ij}$. On peut tout d'abord remarquer que $(N_g)_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j] \cdot \nabla g$ où $[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j]$ désigne le crochet de Lie des vecteurs $\mathbf{b}_i$ et $\mathbf{b}_j$. De plus, on a les relations

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = -\mathbf{b}_3, \quad [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = -\mathbf{b}_1 \quad \text{et} \quad [\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1] = -\mathbf{b}_2.$$

En utilisant ces matrices, on a :

$$\sum_{i,j=1}^3 (\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_j \cdot \nabla \log f))_{ij}^2 = \|M_{\log f}\|^2 + \|N_{\log f}\|^2.$$

Ainsi, pour revenir à l'inégalité (37), nous avons :

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} f (\mathbf{b}_i \cdot \nabla (\mathbf{b}_j \cdot \nabla \log f))^2 d\sigma = \int_{\mathbf{S}^2} f \|M_{\log f}\|^2 d\sigma + \int_{\mathbf{S}^2} f \|N_{\log f}\|^2 d\sigma.$$

Concernant le second terme, en utilisant la remarque ci-dessus, on a :

$$\int_{\mathbf{S}^2} f \|N_{\log f}\|^2 d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{S}^2} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{b}_i \cdot \nabla \log f)^2 f d\sigma,$$

ce qui nous donne une partie de l'inégalité (37). Pour achever la preuve de cette dernière, il reste à comprendre le terme $\int_{\mathbf{S}^2} f \|M_{\log f}\|^2 d\sigma$, ce qui est nettement plus compliqué. Cela est l'objet des lemmes 9.5 à 9.13 de Guillen et Silvestre (2023). Mentionnons que les auteurs utilisent plusieurs idées. Tout d'abord, ils utilisent le fait qu'on peut exprimer la norme d'une matrice symétrique A en fonction des valeurs $\langle Ae, e \rangle$ avec e qui parcourt la sphère $\mathbf{S}^2$ par une procédure de passage à la moyenne sur la sphère. Puis les auteurs remarquent le fait que la matrice $(\mathbf{b}_i \cdot (\mathbf{b}_j \cdot \nabla \log f))_{ij}$ est de rang au plus 2 car les vecteurs $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sont linéairement dépendants comme éléments du plan tangent à la sphère en σ . Ainsi, $M_{\log f}$ en tant que partie symétrique d'une matrice de $M_3(\mathbf{R})$ de rang au plus 2 vérifie

$$\|M_{\log f}\|^2 \geq \frac{1}{2} |\text{Trace } M_{\log f}|^2.$$

Les auteurs prouvent alors que

$$\int_{\mathbf{S}^2} \|M_{\log f}\|^2 f d\sigma \geq \int_{\mathbf{S}^2} \left[2 \|M_{\sqrt{f}}\|^2 + \left| \text{Trace} \left(M_{\sqrt{f}} \right) \right|^2 \right] d\sigma,$$

inégalité qui est à rapprocher de celle déjà obtenue (beaucoup plus simplement !) pour les termes diagonaux (39) dans le sens où on relie les normes de $M_{\log f}$ et de $M_{\sqrt{f}}$. Ainsi, en utilisant l'égalité (38), il reste à comprendre comment borner les intégrales des carrés de $\mathbf{b}_i \cdot \nabla \sqrt{f}$ par l'intégrale de $M_{\sqrt{f}}$. Ceci est fait au moyen d'un calcul astucieux présenté dans le lemme 9.11 ainsi que d'une inégalité de Poincaré que l'on énonce ici :

LEMME 4.13. — *Soit $g : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de moyenne nulle sur la sphère et symétrique i.e. telle que $g(\sigma) = g(-\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathbf{S}^2$. Alors on a :*

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} (\mathbf{b}_i \cdot \nabla g)^2 d\sigma \geq 6 \int_{\mathbf{S}^2} g^2 d\sigma.$$

Remarque 4.14. — Cette inégalité peut en fait se réécrire plus simplement en utilisant le fait que

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{b}_i \cdot \nabla g)^2 = |\nabla g|^2,$$

comme remarqué dans la section 4.3.

L'inégalité provient alors du fait que les trois premières valeurs propres de $-\Delta_\sigma$ sont 0, 2 et 6. Le fait que g soit de moyenne nulle et symétrique nous permet de dire que g est orthogonal dans $L^2(\mathbf{S}^2)$ aux deux espaces propres associés aux deux premières valeurs propres et ainsi obtenir l'inégalité ci-dessus.

Grâce à tous les éléments mentionnés ci-dessus, les auteurs prouvent l'inégalité suivante :

LEMME 4.15. — *Soit $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}_*^+$ de classe $\mathcal{C}^2$ et symétrique. Alors, on a :*

$$\int_{\mathbf{S}^2} \|M_{\log f}\|^2 f \, d\sigma \geq \frac{17}{4} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{S}^2} |\mathbf{b}_i \cdot \nabla \log f|^2 \, d\sigma.$$

Ceci permet d'obtenir l'inégalité (37). $\square$

Interprétation. — Postérieurement au travail de Guillen et Silvestre (2023), il a été remarqué qu'une autre lecture de l'inégalité (37) peut être faite. En effet, la preuve donnée par Guillen et Silvestre (2023) est “pédestre” alors que l'inégalité peut en fait être rattachée à une classe d'inégalités bien connue qui s'avère être complètement indépendante du problème de départ. En effet, comme remarqué dans la section 4.3, les quantités intervenant dans les inégalités reliées aux vecteurs $\mathbf{b}_i$ correspondent en fait à des objets intrinsèques sur la sphère. On peut ajouter la relation suivante : pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{S}^2)$, on a :

$$\|M_f\|^2 = \|\nabla^2 f\|^2 + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \quad \text{et} \quad \|N_f\|^2 = \frac{1}{2}|\nabla f|^2.$$

L'inégalité (37) peut ainsi se réécrire de la manière suivante : pour toute $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{S}^2)$ symétrique,

$$\int_{\mathbf{S}^2} f \left(\|\nabla^2 \log f\|^2 + |\nabla \log f|^2 \right) \, d\sigma \geq \frac{19}{4} \int_{\mathbf{S}^2} f |\nabla \log f|^2 \, d\sigma.$$

Le membre de gauche peut être relié au carré du champ itéré introduit par Bakry et Émery (1985). Le carré du champ Γ associé au Laplacien sur la sphère est en effet défini par

$$\Gamma(f, g) := \frac{1}{2}(\Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f) = \nabla f \cdot \nabla g$$

et le carré du champ itéré par

$$\begin{aligned} \Gamma_2(f, g) &:= \frac{1}{2}(\Delta\Gamma(f, g) - \Gamma(f, \Delta g) - \Gamma(\Delta f, g)) \\ &= \frac{1}{2}\Delta(|\nabla g|^2) - \nabla g \cdot \nabla \Delta g = \|\nabla^2 g\|^2 + |\nabla g|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\int_{\mathbf{S}^2} f \left(\|\nabla^2 \log f\|^2 + |\nabla \log f|^2 \right) \, d\sigma = \int_{\mathbf{S}^2} f \Gamma_2(\log f, \log f) \, d\sigma.$$

On note Λ_3 la plus grande constante strictement positive telle que

$$(40) \quad \int_{\mathbf{S}^2} f \Gamma_2(\log f, \log f) \, d\sigma \geq \Lambda_3 \int_{\mathbf{S}^2} f |\nabla \log f|^2 \, d\sigma$$

pour toute fonction f positive symétrique sur $\mathbf{S}^2$ (le 3 en indice correspond au fait que nous travaillons en dimension 3). Cette inégalité est connue dans la littérature comme le critère Γ_2 de Bakry-émery pour les inégalités de log-Sobolev. Le critère dit que si l'inégalité (40) est vérifiée alors on peut en déduire l'inégalité de log-Sobolev suivante :

$$\int_{\mathbf{S}^2} f |\nabla \log f|^2 d\sigma \geq 2\Lambda_3 \left[\int_{\mathbf{S}^2} f \log f d\sigma - \left(\int_{\mathbf{S}^2} f d\sigma \right) \log \left(\int_{\mathbf{S}^2} f d\sigma \right) \right].$$

Ici, ce qui nous intéresse est l'inégalité (40) en elle-même et plus précisément la valeur de la constante Λ_3 . Guillen et Silvestre (2023) ont prouvé que $\Lambda_3 \geq 19/4$ (sachant que minorer Λ_3 par $9/4$ était suffisant pour couvrir le cas coulombien dans leur résultat principal, le théorème 1.1). Sans l'hypothèse de symétrie, il était déjà connu que $\Lambda_3 = 2$, l'hypothèse de symétrie est ainsi cruciale afin de pouvoir prouver le résultat principal de Guillen et Silvestre (2023) dans le cas coulombien. Rappelons que cette propriété de symétrie sur la sphère provient directement de la tensorisation du problème de départ. Pour terminer cette remarque, mentionnons que Ji (2024a) a amélioré cette borne et prouvé que $\Lambda_3 \geq 11/2$, ce qui permet d'élargir le champ d'application du résultat de Guillen et Silvestre (2023). Cette approche reliée au calcul Γ est également à la base du travail de Imbert, Silvestre et Villani (2024) sur l'équation de Boltzmann. Nous renvoyons aussi aux notes de cours de Villani (2025) pour ce point de vue.

5. Existence de solutions globales à l'équation de Landau

5.1. Le résultat de Guillen et Silvestre

Dans cette partie, nous expliquons comment la décroissance de l'information de Fisher permet de prouver l'existence de solutions globales classiques à l'équation de Landau. L'idée est que la nouvelle borne sur l'information de Fisher permet de récupérer une borne sur la norme L^3 de la solution f de l'équation de Landau (9). En combinant ceci avec des résultats antérieurs de propagation des moments, cela permet d'obtenir une borne sur la norme L^∞ de la solution f et de conclure par critère de continuation.

THÉORÈME 5.1. — *On considère $\gamma \in [-3, 1]$. Soit $f_0 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, d'information de Fisher finie et qui satisfait une borne gaussienne du type :*

$$(41) \quad f_0(v) \leq C_0 \exp(-\beta|v|^2), \quad \forall v \in \mathbf{R}^3,$$

pour des constantes $C_0 > 0$ et $\beta > 0$. Alors il existe une unique solution globale classique $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^+$ de l'équation de Landau avec potentiel γ de donnée initiale f_0 . Pour tout $t > 0$, $f(t)$ est strictement positive, est de régularité Schwartz et est bornée par une Maxwellienne.

Démonstration. — La preuve se décompose en plusieurs étapes.

- *Existence en temps court.* Soit f_0 vérifiant les hypothèses du théorème. D’après un théorème de Henderson, Snelson et Tarfulea (2020), on peut construire une solution classique sur $[0, T[$ pour un $T > 0$. De plus, elle est $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $]0, T[$ et en notant $C(t) := \|f(t)\|_{L_k^\infty}$, on a $f(t, v) \leq C(t)\langle v \rangle^{-k}$ sur $]0, T[\times \mathbf{R}^3$. Notons que la quantité $C(t)$ peut *a priori* exploser lorsque $t \rightarrow T$.
- *La décroissance de l’information de Fisher donne une borne L^3 .* D’après le théorème 1.1, $i(f)$ décroît au cours du temps sur $[0, T[$. On peut donc en déduire (grâce à l’injection continue de Sobolev $\dot{H}^1 \hookrightarrow L^6$) que

$$\|f\|_{L^3} = \|\sqrt{f}\|_{L^6}^2 \lesssim \|\sqrt{f}\|_{\dot{H}^1}^2 = \frac{1}{4}i(f) \leq \frac{1}{4}i(f_0).$$

- *La propagation des moments et la borne L^3 donnent des bornes L_k^p .* D’après Desvillettes (2015), $\|f(t)\|_{L_k^1}$ est borné sur $[0, T[$ pour tout $k > 0$ car ceci est vrai à l’instant initial grâce à la borne gaussienne. Ainsi, en combinant le fait $\|f(t)\|_{L^3}$ et $\|f(t)\|_{L_k^1}$ pour tout $k > 0$ sont bornées, on en déduit que $\|f\|_{L_k^p}$ est bornée pour tout $p \in (1, 3)$ et pour tout $k > 0$ par interpolation.
- *Les bornes L_k^p donnent une borne L^∞ .* D’après Silvestre (2017), une borne L_k^p avec $p > 3/(5 + \gamma)$ et k grand implique une borne L^∞ . Plus précisément, on a l’estimation

$$\|f(t)\|_{L^\infty} \leq C_1 \left(1 + t^{-\frac{3}{2p}}\right).$$

De plus, d’après le théorème de Henderson, Snelson et Tarfulea (2020), f est bornée en temps court. Ainsi, on peut en déduire que f est bornée sur $[0, T[$.

- *Propagation d’une borne maxwellienne.* On peut supposer β aussi petit qu’on veut dans (41) car si (41) est vérifiée pour un certain $\beta > 0$, alors on peut en déduire que $f_0(v) \leq C_0 \exp(-\beta'|v|^2)$ pour tout $\beta' \leq \beta$. En combinant ceci avec le fait que f est bornée et a tous ses moments finis, on en déduit que $f(t)$ satisfait une borne gaussienne pour tout $t \in]0, T[$ d’après un résultat de Cameron, Silvestre et Snelson (2018). Notons que ce résultat concerne les potentiels modérément mous mais peut être utilisé ici pour des potentiels plus mous car on sait que la solution f est bornée.
- *Conclusion.* On en déduit que $\|f(t)\|_{L_k^\infty}$ est bornée sur $[0, T[$ pour tout $k > 0$. Ainsi, d’après le critère de continuation de Henderson, Snelson et Tarfulea (2020), on en déduit que la solution ne peut pas exploser.

□

Remarque 5.2. — Le critère de continuation utilisé dans la preuve du théorème est obtenu en combinant des résultats de régularité conditionnelle avec des résultats d’existence en temps court. Il s’écrit de la manière suivante :

THÉORÈME 5.3. — *Soit $f_0 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f_0 \in L_{k_0}^\infty$ avec $k_0 = \max(5, 15/(5 + \gamma))$. Alors, il existe un temps $T > 0$ et $f : [0, T] \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^+$ une solution classique de l’équation de Landau à donnée initiale f_0 . De plus, elle est strictement positive pour tout $t > 0$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la solution peut être prolongée tant que $\|f(t)\|_{L_{k_0}^\infty}$ reste finie.*

Mentionnons que ce résultat est présenté dans un cadre non homogène en espace par Henderson, Snelson et Tarfulea (2020) et nécessite ainsi des hypothèses supplémentaires qui sont automatiquement vérifiées dans le cas homogène en espace. En particulier, les résultats de régularité conditionnelle sont basés sur l’hypothèse que certaines quantités hydrodynamiques sont uniformément bornées dans la variable d’espace, ce qui permet notamment d’obtenir que la matrice $A[f] = a * f$ soit uniformément elliptique. L’équation peut alors être traitée comme une équation de Fokker–Planck linéaire à coefficients bornés mesurables grâce à une méthode à la De Giorgi. Pour ce type de résultats au sujet de l’équation de Landau, nous renvoyons entre autres aux travaux de Golse, Imbert, Mouhot et Vasseur (2019), Cameron, Silvestre et Snelson (2018) et Henderson, Snelson et Tarfulea (2019) et Henderson et Snelson (2020).

5.2. Extensions du résultat

Golding, Gualdani et Loher (2024) ont étendu le résultat de Guillen et Silvestre (2023) au cas de données initiales plus générales dans L^p avec $p \geq 3/2$.

Comme déjà mentionné précédemment, Ji (2024b) a obtenu un taux de dissipation pour l’information de Fisher. Grâce à cela, il obtient le fait que l’information de Fisher devient instantanément bornée même si elle ne l’est pas initialement. Cela lui permet d’obtenir une preuve d’existence globale de solutions régulières à l’équation de Landau (9) pour tout type de potentiel γ avec donnée initiale dans $L^1_{2-\gamma} \cap L \log L$.

Mentionnons également le travail de Desvillettes, Golding, Gualdani et Loher (2024) qui propose une approche alternative pour obtenir un résultat similaire à celui de Ji (2024b), demandant néanmoins plus de moments finis sur la donnée initiale du problème. Leur preuve s’appuie sur plusieurs arguments antérieurs provenant de Desvillettes (2015), Golding et Loher (2024), Golding, Gualdani et Loher (2024) et Alonso, Bagland et Lods (2019).

Références

- Radjesvarane Alexandre et Cédric Villani (2004). « On the Landau approximation in plasma physics », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **21** (1), p. 61-95.
- Ricardo J. Alonso, Véronique Bagland, Laurent Desvillettes et Bertrand Lods (2024). « A priori estimates for solutions to Landau equation under Prodi–Serrin like criteria », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **248** (3). Id/No 42, p. 63.
- Ricardo J. Alonso, Véronique Bagland et Bertrand Lods (2019). « Uniform estimates on the Fisher information for solutions to Boltzmann and Landau equations », *Kinet. Relat. Models* **12** (5), p. 1163-1183.
- Aleksei A. Arsenev et Nick Peskov (1977). « The existence of a generalized solution of Landau’s equation », *Ž. Vyčisl. Mat i Mat. Fiz.* **17** (4), p. 1063-1068, 1096.

- Dominique Bakry et Michel Émery (1985). « Diffusions hypercontractives », in : *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*. T. 1123. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 177-206.
- David Bowman et Sehyun Ji (2024). *Global Existence for an Isotropic Landau Model*. To appear in SIAM Journal of Mathematical Analysis (SIMA), arXiv : [2403.10810](#) (math.AP).
- Christophe Buet et Stéphane Cordier (1998). « Conservative and entropy decaying numerical scheme for the isotropic Fokker–Planck–Landau equation », *J. Comput. Phys.* **145** (1), p. 228-245.
- Luis Caffarelli, Robert Kohn et Louis Nirenberg (1982). « Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (6), p. 771-831.
- Stephen Cameron, Luis Silvestre et Stanley Snelson (2018). « Global a priori estimates for the inhomogeneous Landau equation with moderately soft potentials », *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* **35** (3), p. 625-642.
- Kleber Carrapatoso et Stéphane Mischler (2017). « Landau equation for very soft and Coulomb potentials near Maxwellians », *Ann. PDE* **3** (1), Paper No. 1, 65.
- Jann-Long Chern et Maria Pia Gualdani (2022). « Uniqueness of higher integrable solution to the Landau equation with Coulomb interactions », *Math. Res. Lett.* **29** (4), p. 945-960.
- Ennio De Giorgi (1957). « Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari », *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)* **3**, p. 25-43.
- Laurent Desvillettes (1992). « On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing », *Transport Theory Statist. Phys.* **21** (3), p. 259-276.
- (2015). « Entropy dissipation estimates for the Landau equation in the Coulomb case and applications », *J. Funct. Anal.* **269** (5), p. 1359-1403.
- Laurent Desvillettes, William Golding, Maria Pia Gualdani et Amélie Loher (2024). *Production of the Fisher information for the Landau-Coulomb equation with L1 initial data*. arXiv : [2410.10765](#) [math.AP].
- Laurent Desvillettes, Ling-Bing He et Jin-Cheng Jiang (2024). « A new monotonicity formula for the spatially homogeneous Landau equation with Coulomb potential and its applications », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **26** (5), p. 1747-1793.
- Laurent Desvillettes et Cédric Villani (2000a). « On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. I. Existence, uniqueness and smoothness », *Comm. Partial Differential Equations* **25** (1-2), p. 179-259.
- (2000b). « On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. II. H -theorem and applications », *Comm. Partial Differential Equations* **25** (1-2), p. 261-298.
- Ronald A. Fisher (1925). « Theory of statistical estimation », *Proc. Camb. Philos. Soc.* **22**, p. 700-725.

- Nicolas Fournier (2010). « Uniqueness of bounded solutions for the homogeneous Landau equation with a Coulomb potential », *Comm. Math. Phys.* **299** (3), p. 765–782.
- Nicolas Fournier et Hélène Guérin (2009). « Well-posedness of the spatially homogeneous Landau equation for soft potentials », *J. Funct. Anal.* **256** (8), p. 2542–2560.
- William Golding, Maria Pia Gualdani et Amélie Loher (2024). *Global smooth solutions to the Landau-Coulomb equation in $L^{3/2}$* . arXiv : [2401.06939 \[math.AP\]](#).
- William Golding et Amélie Loher (2024). « Local-in-time strong solutions of the homogeneous Landau-Coulomb equation with L^p initial datum », *Matematica* **3** (1), p. 337–369.
- François Golse, Maria Pia Gualdani, Cyril Imbert et Alexis Vasseur (2022). « Partial regularity in time for the space-homogeneous Landau equation with Coulomb potential », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **55** (6), p. 1575–1611.
- François Golse, Cyril Imbert, Sehyun Ji et Alexis Vasseur (2024). « Local regularity for the space-homogeneous Landau equation with very soft potentials », *J. Evol. Equ.* **24** (4), Paper No. 82, 81.
- François Golse, Cyril Imbert, Clément Mouhot et Alexis Vasseur (2019). « Harnack inequality for kinetic Fokker–Planck equations with rough coefficients and application to the Landau equation », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **19** (1), p. 253–295.
- Thierry Goudon (1997). « On Boltzmann equations and Fokker–Planck asymptotics : influence of grazing collisions », *J. Statist. Phys.* **89** (3–4), p. 751–776.
- Philip T. Gressman, Joachim Krieger et Robert M. Strain (2012). « A non-local inequality and global existence », *Adv. Math.* **230** (2), p. 642–648.
- Maria Pia Gualdani et Nestor Guillen (2016). « Estimates for radial solutions of the homogeneous Landau equation with Coulomb potential », *Anal. PDE* **9** (8), p. 1772–1809.
- (2019). « On A_p weights and the Landau equation », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **58** (1), Paper No. 17, 55.
- (2022). « Hardy’s inequality and the isotropic Landau equation », *J. Funct. Anal.* **283** (6), Paper No. 109559, 25.
- Nestor Guillen et Luis Silvestre (2023). *The Landau equation does not blow up*. arXiv : [2311.09420 \[math.AP\]](#).
- Yan Guo (2002). « The Landau equation in a periodic box », *Comm. Math. Phys.* **231** (3), p. 391–434.
- Ling-Bing He (2014). « Asymptotic analysis of the spatially homogeneous Boltzmann equation : grazing collisions limit », *J. Stat. Phys.* **155** (1), p. 151–210.
- Christopher Henderson et Stanley Snelson (2020). « C^∞ smoothing for weak solutions of the inhomogeneous Landau equation », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **236** (1), p. 113–143.
- Christopher Henderson, Stanley Snelson et Andrei Tarfulea (2019). « Local existence, lower mass bounds, and a new continuation criterion for the Landau equation », *J. Differential Equations* **266** (2–3), p. 1536–1577.

- (2020). « Local solutions of the Landau equation with rough, slowly decaying initial data », *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* **37** (6), p. 1345-1377.
- Cyril Imbert, Luis Silvestre et Cédric Villani (2024). *On the monotonicity of the Fisher information for the Boltzmann equation*. arXiv : [2409.01183 \[math.AP\]](#).
- Sehyun Ji (2024a). *Bounds for the optimal constant of the Bakry-Émery Γ_2 criterion inequality on RP^{d-1}* . arXiv : [2408.13954 \[math.AP\]](#).
- (2024b). *Dissipation estimates of the Fisher information for the Landau equation*. arXiv : [2410.09035 \[math.AP\]](#).
- (2024c). *Entropy dissipation estimates for the Landau equation with Coulomb potentials*. To appear in *Kinetic and Related Models*, arXiv : [2305.09841 \(math.AP\)](#).
- Jinoh Kim, Yan Guo et Hyung Ju Hwang (2020). « An L^2 to L^∞ framework for the Landau equation », *Peking Math. J.* **3** (2), p. 131-202.
- Joachim Krieger et Robert M. Strain (2012). « Global solutions to a non-local diffusion equation with quadratic non-linearity », *Comm. Partial Differential Equations* **37** (4), p. 647-689.
- Lev D. Landau (1936). « Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung », *Phys. Z. Sowjet* **10** **154**.
- Jean Leray (1934). « Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace », *Acta Math.* **63** (1), p. 193-248.
- James C. Maxwell (1867). « On the dynamical theory of gases », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **157**, p. 49-88.
- Henry P. Jr. McKean (1966). « Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas », *Arch. Rational Mech. Anal.* **21**, p. 343-367.
- Fei Meng, Hao Wang, Lihua Min et Zhengmeng Jin (2023). « Uniform estimates for the Fisher information of the Landau equation for soft potentials », *J. Math. Anal. Appl.* **523** (1), Paper No. 126992, 21.
- Frank Merle et Hatem Zaag (1998). « Optimal estimates for blowup rate and behavior for nonlinear heat equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (2), p. 139-196.
- Luis Silvestre (2017). « Upper bounds for parabolic equations and the Landau equation », *J. Differential Equations* **262** (3), p. 3034-3055.
- Giuseppe Toscani (1992). « New a priori estimates for the spatially homogeneous Boltzmann equation », *Contin. Mech. Thermodyn.* **4** (2), p. 81-93.
- Alexis Vasseur (2007). « A new proof of partial regularity of solutions to Navier-Stokes equations », *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* **14** (5-6), p. 753-785.
- (2016). « The De Giorgi method for elliptic and parabolic equations and some applications », in : *Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 4*. T. 4. Morningside Lect. Math. Int. Press, Somerville, MA, p. 195-222.
- Cédric Villani (1998a). « Fisher information estimates for Boltzmann's collision operator », *J. Math. Pures Appl. (9)* **77** (8), p. 821-837.
- (1998b). « On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations », *Arch. Rational Mech. Anal.* **143** (3), p. 273-307.

- Cédric Villani (1998c). « On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations », *Arch. Rational Mech. Anal.* **143** (3), p. 273-307.
- (1998d). « On the spatially homogeneous Landau equation for Maxwellian molecules », *Math. Models Methods Appl. Sci.* **8** (6), p. 957-983.
- (2000). « Decrease of the Fisher information for solutions of the spatially homogeneous Landau equation with Maxwellian molecules », *Math. Models Methods Appl. Sci.* **10** (2), p. 153-161.
- (2002). « A review of mathematical topics in collisional kinetic theory », in : *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I*. North-Holland, Amsterdam, p. 71-305.
- (2025). *Fisher Information in Kinetic Theory*. arXiv : [2501.00925](https://arxiv.org/abs/2501.00925) [[math.AP](#)].
- Kung-Chien Wu (2014). « Global in time estimates for the spatially homogeneous Landau equation with soft potentials », *J. Funct. Anal.* **266** (5), p. 3134-3155.
- Tong Yang et Yu-Long Zhou (2024). « On the Boltzmann equation with strong kinetic singularity and its grazing limit from a new perspective », *Mathematische Annalen*, p. 1-85.

Isabelle Tristani

Université Côte d’Azur, CNRS, LJAD,
Parc Valrose, F-06108 Nice, France

E-mail :

`isabelle.tristani@univ-cotedazur.fr`