

VALEURS CRITIQUES DES FONCTIONS L
DE PUISSANCES SYMÉTRIQUES
[d'après S.-Y. Chen]

par Michael Harris

Introduction

L'observation que les valeurs des séries de Dirichlet aux points entiers peuvent s'exprimer comme des multiples algébriques de périodes d'intégrales est presque aussi ancienne que la théorie des séries infinies, et est certainement antérieure aux premiers travaux de Dirichlet sur les séries qui portent son nom. Pendant longtemps, les auteurs faisaient peu de cas du facteur transcendant —en général une puissance de $2\pi i$, même si les valeurs d'intégrales elliptiques ont été mentionnées dès 1897 (Hurwitz, 1897, 1899)— et se sont concentrés sur l'information arithmétique dans le facteur algébrique. Cela a commencé à changer lorsque Eichler et Shimura ont étudié les classes de cohomologie définies par des formes modulaires cuspidales qui sont des vecteurs propres pour l'algèbre de Hecke. Comme c'est le cas plus généralement, l'homologie topologique d'une courbe modulaire a une structure \mathbb{Q} -rationnelle canonique, tandis que la rationalité des coefficients de Fourier détermine une structure \mathbb{Q} -rationnelle sur la version de de Rham de la cohomologie. L'accouplement entre l'homologie et la cohomologie *ne respecte pas* ces structures rationnelles; il introduit plutôt des facteurs de proportionnalité sous la forme d'intégrales d'une forme cuspidale f avec q -développement rationnel le long d'une base rationnelle pour l'homologie. L'article de Shimura (1959) attire l'attention sur la relation entre ces intégrales d'Eichler et les valeurs de la fonction L de Hecke $L(s, f)$ —ou, plus précisément, du produit $D(s, f)$ de $L(s, f)$ par les facteurs archimédiens (Gamma)— aux points entiers. Puisque les espaces propres de Hecke dans la cohomologie sont de dimension 2, Shimura a pu montrer que les valeurs successives de $D(m, f)$ aux points entiers m de la même parité sont des multiples algébriques du même nombre complexe, à condition que m reste dans un certain intervalle. L'article de Shimura étudie ces relations dans le cas où f est la fonction Δ de Ramanujan; les rapports entre valeurs successives d'une parité fixée sont des nombres rationnels, que Shimura écrit explicitement dans la dernière partie de son article.

Vers la même époque, Birch et Swinnerton-Dyer ont proposé une expression explicite (conjecture BSD) pour la valeur précise au centre de symétrie $s = 1$ de la fonction $L(s, E)$ d'une variété abélienne E sur un corps de nombres F . En spécialisant au cas $F = \mathbb{Q}$,

avec E une courbe elliptique, et laissant de côté le cas (particulièrement intéressant) où la valeur est 0, la valeur conjecturale est à nouveau le produit d’une période de la courbe elliptique par un nombre rationnel qui contient des informations arithmétiques.

Vers la fin des années 60 il était globalement admis que $L(s, E)$ devait être la fonction L de Hecke d’une forme modulaire f de poids 2 —c’est la *conjecture de modularité*— et donc que la période qui intervient dans la conjecture BSD était aussi une période d’Eichler–Shimura. Avec la conjecture BSD comme motivation, Birch et Manin ont réinterprété les périodes d’intégrales dans le langage des *symboles modulaires*; Mazur et Swinnerton-Dyer ont appliqué cette théorie à la construction des premières fonctions L p -adiques des formes modulaires; et Mazur est revenu aux résultats de l’article de Shimura (1959) en reliant les rapports entre les valeurs de $D(s, f)$ aux points entiers d’une parité fixée aux valeurs propres des opérateurs de Hecke.

Pour les courbes elliptiques E à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire K , une version forte de la conjecture de modularité a été vérifiée par Shimura; la fonction L de E s’identifie alors à la fonction L d’un certain caractère de Hecke de K . Damerell a montré que les fonctions L de certains caractères de Hecke de K —ceux de type A_0 , selon la terminologie de Weil, et que nous appellerons *motiviques*— prennent en certains entiers des valeurs qui sont des multiples algébriques de puissances des périodes de E . Peu de temps après, Shimura a montré le résultat analogue —et plus difficile— pour un caractère de Hecke motivique d’un corps CM quelconque. Ce résultat est démontré dans le premier d’une série de papiers de Shimura qui raffinaient les résultats de 1959, tout en les étendant aux fonctions L de Rankin–Selberg de *paires* de formes modulaires. Shimura fut aussi le premier à observer que les points entiers où les valeurs des fonctions L sont liées aux périodes d’intégrales —Deligne les appellera bientôt les *valeurs critiques*— sont caractérisés par l’holomorphie des facteurs Γ dans l’équation fonctionnelle.

Telle était la situation lorsque Deligne (1979a) a commencé à formuler une conjecture générale reliant les *Valeurs de fonctions L et périodes d’intégrales* (le titre de son article). La conjecture était énoncée pour tous les motifs sur \mathbb{Q} , et donc dépend elle-même de la méta-conjecture sur l’existence d’une théorie de tels motifs adéquate pour la formulation de la conjecture. On en parlera plus en détail dans la section 1, et en particulier dans le §1.3. Ici, on cite les phrases du début de l’article de Deligne qui représentent le point de départ de cet exposé :

Cet article doit le jour à D. Zagier : pour son insistance à demander une conjecture, et pour la confirmation expérimentale qu’il en a donnée, sitôt émise, pour les fonctions L_3 et L_4 attachées à $\Delta = \Sigma\tau(n)q^n$ (voir [18]). C’est cette confirmation qui m’a donné la confiance nécessaire pour vérifier que la conjecture était compatible aux résultats de Shimura [13] sur les valeurs de fonctions L de caractères de Hecke algébriques.

La dernière section de l’article de Deligne vérifie que les résultats de Shimura sur les caractères de Hecke motiviques sont grossièrement compatibles avec la conjecture que Deligne formule dans son article, bien que les deux expressions n’aient pas la même allure.

s	$(2\pi)^{-2s+11}\Gamma(s)L_{3,\Delta}(s)$	s	$(2\pi)^{-3s+33}\Gamma(11)^{-1}\Gamma(s)\Gamma(s-11)L_{4,\Delta}(s)$
18	$2^2/5 \quad c_+^3 c_-^3$	24	$2^5 \times 3^2 \quad c_+^3 c_-^3$
19	$3/7 \quad c_+^3 c_-^3$	26	$2^5 \times 3 \times 5 \quad c_+^3 c_-^3$
20	$1/5 \quad c_+^3 c_-^3$	28	$2^2 \times 23 \times 691/7^2 \quad c_+^3 c_-^3$
21	$5/7^2 \quad c_+^3 c_-^3$	30	$2^3 \times 653 \quad c_+^3 c_-^3$
22	$2 \times 3/5 \times 23 \quad c_+^3 c_-^3$	32	$2 \times 3 \times 34891/7 \quad c_+^3 c_-^3$

FIGURE 1. Calcul par Köckritz et Schillo des valeurs de $L_{4,\Delta}$ et $L_{5,\Delta}$ reproduit dans Zagier (1977, pp. 119–120)

Plus tard Blasius (1986) a raffiné les résultats de Shimura et a démontré la conjecture de Deligne pour la plupart des caractères de Hecke algébriques ; la démonstration complète dans ce cas était finalement obtenue dans la thèse de Kufner (2024). Mon exposé se concentre sur *l'avant-dernière section* de l'article de Deligne, qui explique ce que sa conjecture dit sur les fonctions $L_{(n)} = L_{(n)}(s, f) = L(\text{Sym}^{n-1}M(f), s)$, où l'on note par $M(f)$ le motif attaché à une forme modulaire elliptique f et où Sym^{n-1} désigne la $(n - 1)$ -ème puissance symétrique. Les cas de L_2 , déjà traités par Shimura en 1959 et dans ses papiers des années 70, et de L_3 , étudiés indépendamment par Sturm et Zagier, ont suggéré une généralisation optimiste pour les autres $L_{(n)}$, mais cette formule n'était pas compatible avec des calculs numériques. La conjecture générale de Deligne donne une autre généralisation, plus subtile, pour toutes les $L_{(n)}$, et c'est cette expression que les calculs de Köckritz et Schillo (voir Figure 1) ont confirmée pour les fonctions L_4 et L_5 attachées à la fonction Δ de Ramanujan, avec une précision de plus de 30 chiffres.

Il manque toujours une théorie complète de motifs comme celle imaginée par Grothendieck. Cependant, l'article de Deligne propose un cadre motivique plus élémentaire sous la forme de la collection de différents types de groupes de cohomologie (étale, de Rham...) munis de leurs théorèmes de comparaison. Cette théorie s'adapte assez bien aux groupes de cohomologie attachés à certaines classes de formes automorphes. Les 40 années qui ont suivi la publication de l'article de Deligne ont vu la confirmation de sa conjecture pour beaucoup de types de formes automorphes. Un des premiers cas à être traité est celui de L_4 (Garrett, 1987, Remark 1.5). Les cas de L_5 , L_6 , et L_7 sont apparus pour la première fois dans des articles de K. Morimoto et S.-Y. Chen.

Plus récemment, Newton et Thorne ont démontré la functorialité de Langlands pour les puissances symétriques des formes modulaires : pour chaque f de poids $k \geq 2$ et chaque n il existe une représentation automorphe $\Pi_n(f)$ de $GL(n)_{\mathbb{Q}}$, cuspidale si f n'est pas de type CM, telle que $L(s, \Pi_n(f)) = L_{(n)}(s)$, où le terme de gauche est la fonction L standard de Godement–Jacquet (Godement et Jacquet, 1972). En particulier, on peut voir les valeurs critiques de $L_{(n)}$ comme des valeurs de la fonction L d'une représentation automorphe de $GL(n)$.

Dans un travail remarquable récent, Chen (2022a) a résolu la conjecture de Deligne, sous la forme explicite du théorème 6.1 (voir aussi §2.4) pour tout $L_{(n)}(s, f)$, $n \geq 1$, et toute forme modulaire f de poids au moins 5. Dans cet exposé, j’expliquerai les grandes lignes de l’argument de Chen.

Remarque 0.1 (« Sous certaines hypothèses »). — L’article de Chen est une merveille de précision. À la composante archimédienne Π_∞ d’une représentation automorphe Π de $GL(n)$ qui intervient dans son argument on associe son caractère infinitésimal $\mu(\Pi)$, qui est une suite décroissante $\mu_1(\Pi) > \mu_2(\Pi) > \dots > \mu_n(\Pi)$, où les $\mu_i(\Pi)$ sont dans $\mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$. À chaque étape de la preuve il y a une construction avec plusieurs représentations Π_i , chacune avec son paramètre $\mu(\Pi_i)$, et Chen prend soin de montrer que la construction donne les résultats prévus, à condition que les $\mu_j(\Pi_i)$ satisfassent à certaines inégalités (pour Π_i fixée ou pour plusieurs Π_i prises ensemble). Cela explique, par exemple, pourquoi la démonstration de Chen de la conjecture de Deligne marche uniquement pour les formes modulaires f de poids au moins 5.

J’ai fait le choix d’écrire « sous certaines hypothèses » chaque fois que Chen est obligé de supposer que les paramètres des Π_i satisfont à des inégalités précises. Les hypothèses sont parfaitement explicites dans Chen (2022a). Dans certains cas elles sont nécessaires pour garantir qu’une fonction L ait une valeur critique non nulle ; dans d’autres cas il s’agit de choisir un Π' auxiliaire dont le caractère infinitésimal « domine » ceux des autres Π_i et où l’on dispose déjà d’un résultat sur les valeurs critiques des fonctions $L(s, \Pi' \times \Pi_i)$. Enfin, les classes de *cohomologie d’Eisenstein*, qui jouent un rôle essentiel dans la preuve, existent uniquement si certaines valeurs des séries d’Eisenstein existent et ne s’annulent pas. J’essaierai à chaque fois d’indiquer la raison pour les « certaines hypothèses » sans les écrire explicitement.

Les résultats de Chen marquent un tournant dans l’histoire de la conjecture de Deligne, et je remercie les organisateurs du Séminaire Bourbaki de m’avoir donné la possibilité de les faire connaître à la communauté. Je remercie Don Blasius, Harald Grobner et A. Raghuram, ainsi que Nicolas Bourbaki, pour leur lecture attentive et critique des versions antérieures de cet exposé. Je tiens aussi à remercier Raghuram d’avoir accepté de passer plusieurs heures à lire l’article de Chen avec moi, une collaboration qui fut aussi agréable qu’indispensable.

1. Les motifs, les périodes de Deligne et la conjecture sur les valeurs critiques

Un motif, dans la théorie conçue par Grothendieck, est un objet d’une catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire hypothétique, obtenue en découpant les variétés algébriques à l’aide des projecteurs construits à partir de correspondances algébriques. Ainsi la catégorie des motifs fonctionnerait comme une théorie cohomologique universelle. L’article de Deligne a contribué à rendre les motifs plus accessibles en formulant sa conjecture en termes des

théories cohomologiques déjà connues. Autrement dit, pour les besoins de la conjecture de Deligne, et donc pour cet article, un motif est déterminé par ses *réalisations*.

1.1. Les motifs comme réalisations

Pour nous un motif (pur) M sur \mathbb{Q} , à coefficients dans un corps E , de rang n et de poids w , $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{Z}$, consistera en les données suivantes :

1. Un E -espace vectoriel M_B (réalisation de Betti) de dimension n , muni d'une involution E -linéaire

$$F_\infty: M_B \xrightarrow{\sim} M_B;$$

2. Un E -espace vectoriel M_{dR} (réalisation de de Rham) de dimension n , muni d'une filtration (de Hodge) décroissante $F^i M_{dR} \subset F^{i-1} M_{dR}$, $i \in \mathbb{Z}$, par des E -sous-espaces, avec

$$F^i M_{dR} = 0 \text{ pour } i \gg 0; F^i M_{dR} = M_{dR} \text{ pour } i \ll 0;$$

3. Un isomorphisme (dit de comparaison) $E \otimes \mathbb{C}$ -linéaire

$$I_\infty: M_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{dR} \otimes \mathbb{C};$$

4. Pour chaque complétion non archimédienne E_λ de E , une représentation continue

$$\rho_{\lambda, M}: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(M_\lambda), \text{ où } M_\lambda := M_B \otimes_E E_\lambda$$

telle que les $\rho_{\lambda, M}$ forment une famille compatible de représentations λ -adiques de poids w . Cela veut dire que si p est un premier non ramifié pour $\rho_{\lambda, M}$, alors les valeurs propres de $\rho_{\lambda, M}(\text{Frob}_p)$ (Frobenius géométrique) sont des nombres algébriques α , indépendants de λ , tels que $|\iota(\alpha)| = p^{\frac{w}{2}}$ pour tout plongement $\iota: \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Remarque 1.1. — 1. L'involution anti-linéaire $F_\infty \otimes c$ de $M_B \otimes \mathbb{C}$, où c est la conjugaison complexe, induit via I_∞ une structure de Hodge sur $M_{dR} \otimes \mathbb{C}$:

$$M_{dR} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=w} M^{p,q}$$

de sorte que

$$(F_\infty \otimes c)(M^{p,q}) = M^{q,p}; \quad F^i M_{dR} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p \geq i} M^{p,q}.$$

2. Pour chaque nombre premier p la compatibilité des $\rho_{\lambda, M}$ nous permet de définir un facteur d'Euler $L_\sigma(s, M)$ pour chaque plongement $\sigma: E \hookrightarrow \mathbb{C}$. En effet, si $\rho_{\lambda, M}$ est non ramifiée en p alors le polynôme caractéristique $P_p(M, T) := \det(I - \rho_{\lambda, M}(\text{Frob}_p)T)$ est à coefficients dans E , et l'on pose

$$L_{p, \sigma}(s, M) = \sigma(P_p)(M, p^{-s})^{-1};$$

Les autres facteurs sont définis par une formule analogue : si $I_p \subset \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est un sous-groupe d'inertie en p alors on considère la restriction de Frob_p à l'espace $M_\lambda^{I_p}$ des invariants de $\rho_{\lambda,M}(I_p)$ dans M_λ , et l'on pose

$$P_p(M, T) = \det(I - (\text{Frob}_p|_{(M_\lambda)^{\rho_{\lambda,M}(I_p)}})T), \quad L_{p,\sigma}(s, M) = \sigma(P_p)(M, p^{-s})^{-1}.$$

Enfin, on définit le produit eulérien $L_\sigma(s, M) = \prod_p L_{p,\sigma}(s, M)$ et l'on pose

$$L(s, M) = [s \mapsto (L_\sigma(s, M), \sigma : E \hookrightarrow \mathbb{C}) \in E \otimes \mathbb{C}].$$

1.2. Valeurs critiques des fonctions L

Soit M un motif pur de poids w . Alors on conjecture que la fonction $L(s, M)$ admet un *prolongement méromorphe* à \mathbb{C} , dont les pôles sont déterminés par les invariants de l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les M_λ , et qu'elle satisfait à une *équation fonctionnelle* de la forme

$$(1) \quad L_\infty(s, M)L(s, M) = \varepsilon(s, M)L_\infty(1 - s, M^\vee)L(1 - s, M^\vee)$$

où $L_\infty(s, M)$ est un certain produit de facteurs d'Euler archimédiens (des translatés de fonctions Γ , multipliés par des exponentielles) déterminé par la structure de Hodge sur (M_B, M_{dR}) , ε est une fonction entière sans zéros, et M^\vee est le motif dual (obtenu à partir de M en dualisant toutes les réalisations).

Le lecteur trouvera les définitions précises des termes dans (1) dans l'article de Deligne (1979a), où il énonce sa conjecture sur les *valeurs critiques* de la fonction $L(s, M)$, qui sont caractérisées par les pôles des facteurs d'Euler archimédiens.

DÉFINITION 1.2 (Valeurs critiques). — *L'entier $m \in \mathbb{Z}$ est critique pour M , et $L(m, M)$ est une valeur critique de $L(s, M)$, si ni $L_\infty(s, M)$ ni $L_\infty(1 - s, M^\vee)$ n'ont un pôle en $s = m$.*

Par exemple, lorsque $M = \mathbb{Q}(0)$ est le motif trivial, $L(s, M) = \zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann. Les entiers critiques pour $\zeta(s)$ sont alors les $m > 0$ pairs et les $m < 0$ impairs. Les formules pour ces valeurs de $\zeta(s)$ sont connues depuis le 18^{ème} siècle. La définition 1.2, qui équivaut à la définition 1.3 de Deligne (1979a), a été préfigurée par Shimura (1977, §4.V). Au moment de la publication de l'article de Deligne, Shimura avait déjà exprimé les valeurs critiques de plusieurs classes de fonctions L , attachées aux formes automorphes, comme des multiples algébriques de périodes automorphes. Le papier de Deligne est le premier à avoir proposé une formule pour les valeurs critiques, à des multiples algébriques près.

Des travaux ultérieurs de Beilinson, Bloch, Kato, Fontaine et Perrin-Riou ont généralisé la conjecture de Deligne à toutes les valeurs $L(m, M)$, pour $m \in \mathbb{Z}$; ils ont même précisé le facteur algébrique. Des méthodes automorphes ont confirmé ces conjectures dans un petit nombre de cas de basse dimension, mais jusqu'à présent se sont montrées mal adaptées au traitement des valeurs non critiques.

1.3. La conjecture de Deligne

Dans la suite, on supposera que $w \geq 0$; si w est pair, on supposera toujours que la valeur propre de F_∞ sur $M^{\frac{w}{2}, \frac{w}{2}}$ est -1 . On note $M_B^\pm \subset M_B$ l'espace propre pour F_∞ avec valeur propre ± 1 . Alors la filtration de Hodge a toujours un cran $F^+ M_{dR}$ (*resp.* $F^- M_{dR}$) de dimension $d^+(M) = \dim M_B^+$ (*resp.* $d^-(M) = \dim M_B^-$). On note

$$M_{dR}^\pm = M_{dR} / F^\mp M_{dR}$$

et l'on définit les applications

$$(2) \quad I^\pm : M_B^\pm \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow M_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{I_\infty} M_{dR} \otimes \mathbb{C} \rightarrow M_{dR}^\pm \otimes \mathbb{C}.$$

La symétrie de Hodge implique que I^\pm est un isomorphisme de $E \otimes \mathbb{C}$ -modules, et donc son déterminant $c^\pm(M)$, calculé dans n'importe quelles bases E -rationnelles de M_B^\pm et de M_{dR}^\pm , est un élément de $(E \otimes \mathbb{C})^\times$, bien défini à multiplication par E^\times près.

D'autre part, on a vu que l'on peut écrire $L(s, M)$ comme une fonction à valeurs dans $E \otimes \mathbb{C}$. Si $\alpha, \beta \in E \otimes \mathbb{C}$, avec $\beta \in (E \otimes \mathbb{C})^\times$, on écrit $\alpha \sim \beta$ si $\alpha/\beta \in E \subset E \otimes \mathbb{C}$. Maintenant, on peut énoncer la conjecture de Deligne pour les valeurs critiques des fonctions L motiviques :

CONJECTURE 1.3. — *Soient M un motif sur \mathbb{Q} à coefficients dans E et $m \in \mathbb{Z}$ une valeur critique de $L(s, M)$. Alors*

$$L(m, M) \sim (2\pi i)^{d^{(-1)^m(M) \cdot m}} c^{(-1)^m(M)}.$$

Remarque 1.4. — 1. Si M est pur de poids w , alors le produit eulérien pour $L(s, M)$ converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{w}{2} + 1$. Dans tous les cas considérés ici on aura $M^\vee \simeq M(w)$ (torsion à la Tate), et donc le centre de symétrie de l'équation fonctionnelle (1) est le point $s = \frac{w+1}{2}$. Deligne (1979a, §5) vérifie que sa conjecture est compatible avec l'équation fonctionnelle. Ainsi il suffit de vérifier la conjecture 1.3 pour $m \geq \frac{w+1}{2}$.

2. Harder et Raghuram (2020) utilisent la cohomologie d'Eisenstein pour démontrer dans beaucoup de cas une expression pour le rapport entre valeurs critiques successives $L(m, M)/L(m+1, M)$ (voir le théorème 3.4 ci-dessous). Comme conséquence de leurs résultats, il suffit de démontrer la conjecture 1.3 pour deux valeurs critiques $L(m, M), L(m', M)$ avec m et m' de parités opposés, pour l'obtenir en toute généralité. Chen exploite cette propriété plusieurs fois dans son article.

2. Les fonctions L attachées aux puissances symétriques

2.1. Le motif d'une forme modulaire

Soit f une forme modulaire de poids $k \geq 2$ pour un sous-groupe de congruence $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$. On rappelle que cela signifie que f est une fonction holomorphe sur le

demi-plan supérieur \mathfrak{H} qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(\gamma(z)) = j(\gamma, z)^k f(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathfrak{H}, \gamma \in \Gamma,$$

où si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et $j(\gamma, z) = cz + d$. On supposera toujours que f est *cuspidale*, et *normalisée* au sens où elle admet un développement de Fourier

$$(3) \quad f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi iz}$$

sans terme constant et avec $a_1 = 1$. On écrit $S_k(\Gamma)$ pour l'espace des formes cuspidales de poids k pour Γ . Soit N le plus petit entier ≥ 1 tel que

$$\Gamma \supset \Gamma(N) = \ker[SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})].$$

Alors pour tout nombre premier p qui ne divise pas N on a l'opérateur de Hecke $T(p)$ qui agit de façon semi-simple sur $S_k(\Gamma)$, et l'on suppose que f est une fonction propre avec valeur propre a_p pour chaque $T(p)$. On pourrait aussi supposer que f est une *forme nouvelle*, ce qui détermine ses propriétés en chaque diviseur premier de N , mais il suffit ici de dire que f se relève de façon canonique en une forme automorphe cuspidale sur $GL(2, \mathbb{Q}) \backslash GL(2, \mathbf{A})$ qui engendre une représentation irréductible $\Pi(f)$ sous l'action de $GL(2, \mathbf{A})$, où \mathbf{A} est l'anneau des adèles de \mathbb{Q} ⁽¹⁾.

La *fonction L standard* de f , ou de $\Pi(f)$, est une série de Dirichlet

$$L(s, f) = L(s, \Pi(f)) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p L_p(s, f)$$

que Hecke fut le premier à étudier. Dans le langage des formes modulaires f , la théorie était généralisée autour de 1970 par la théorie des *formes nouvelles* ou *primitive forms* (Mazur, 1973, section 4), alors que la théorie générale des fonctions $L(s, \Pi)$, pour les représentations automorphes cuspidales, est due à Jacquet et Langlands (1970) (voir aussi Robert, 1973). À une forme nouvelle $f \in S_k(\Gamma)$, Deligne (1979a, §5) a associé un véritable motif de Grothendieck $M(f)$ de rang 2 sur son corps de coefficients $E(f) = \mathbb{Q}(\{a_n, n \in \mathbb{N}\})$; et alors l'équation fonctionnelle (1) de $L(s, M(f)) := L(s, f)$ est celle de Hecke.

2.1.1. Les réalisations ℓ -adiques. — Afin de simplifier la notation nous allons toujours supposer que f est fonction propre des opérateurs $T(p)$ avec des valeurs propres a_p rationnelles; ceci revient à supposer que le corps de coefficients $E(f) = \mathbb{Q}$. Puisque Chen lui-même prend le soin de démontrer la conjecture de Deligne sans cette hypothèse, nous énoncerons ses résultats en toute généralité dans la section 4. Si $E(f) = \mathbb{Q}$, la réalisation ℓ -adique $M(f)_\ell$ (voir §1.1, point 4) est un homomorphisme

$$\rho_{f, \ell}: \Gamma_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL(2, \mathbb{Q}_\ell)$$

1. Il est plus exact de dire que $\Pi(f)$ est un $((\mathfrak{g}, K) \times GL(2, \mathbf{A}_f))$ -module irréductible, où $\mathfrak{g} = \text{Lie}(GL(2, \mathbb{R}))$ et $K = O(2)$, et \mathbf{A}_f est l'anneau des adèles finis de \mathbb{Q} , mais on laisse ce détail de côté.

non ramifié en dehors des diviseurs premiers de N . Cet homomorphisme est caractérisé, à équivalence près, par l'identité suivante : si $p \nmid N$, et si $Frob_p \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ est un élément de Frobenius (géométrique) en p , alors le polynôme caractéristique de $\rho_{f,\ell}(Frob_p)$ est à coefficients dans \mathbb{Q} , et

$$(4) \quad L_p(s, f) = \det(I - \rho_{f,\ell} p^{-s})^{-1},$$

où I désigne la matrice identité dans $GL(2)$.

En utilisant la réalisation ℓ -adique, nous pouvons assigner f , et donc $\Pi(f)$, à l'une de deux classes. Si l'image de $\rho_{f,\ell}$ est contenue dans le normalisateur d'un tore maximal de $GL(2, \mathbb{Q}_{\ell})$ pour un nombre premier ℓ , on dit que $M(f)$ (ou f) est à *multiplication complexe*. Si cette propriété est satisfaite pour un ℓ alors elle est vraie pour tout ℓ . Dans ce cas il y a une extension quadratique imaginaire K/\mathbb{Q} et un caractère de Hecke χ des idèles de K tels que $L(s, \Pi(f)) = L(s, \chi)$; ici le terme à droite est la fonction L de χ relativement à K . Serre (1972) a démontré que si $M(f)$ n'est pas à multiplication complexe, alors l'image de $\rho_{f,\ell}$ est un sous-groupe *ouvert* de $GL(2, \mathbb{Q}_{\ell})$; de plus, l'image est un sous-groupe compact maximal pour presque tout ℓ .

HYPOTHÈSE 2.1. — *Dans la suite nous supposons toujours que $M(f)$ n'est pas à multiplication complexe.*

2.1.2. *Les réalisations de Betti et de de Rham.* — Pour les applications à la conjecture de Deligne démontrée par Chen, nous n'aurons besoin que des réalisations $M(f)_B, M(f)_{dR}, M(f)_{\ell}$, et de quelques-unes de leurs comparaisons mentionnées ci-dessus. Pour tout $k \geq 2$ la courbe modulaire ouverte $Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathfrak{H}$ est munie d'un système local \mathbb{L}_k de \mathbb{Z} -modules⁽²⁾ défini par la $(k-2)$ -ème puissance symétrique de la représentation tautologique de $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{Z}^2 . (En particulier, si $k=2$ on a $\text{Sym}^0 \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}$ avec l'action triviale de Γ .) Alors $M(f)_B$ est un \mathbb{Q} -sous-espace de dimension 2 de $H_c^1(Y(\Gamma), \mathbb{L}_k \otimes \mathbb{Q})$, espace propre des opérateurs $T(p)$ avec les valeurs propres sur f ; $M(f)_{dR}$ (*resp.* $M(f)_{\ell}$) est le sous-espace de la cohomologie de de Rham (*resp.* la cohomologie étale ℓ -adique) définie à partir de $\text{Sym}^{k-2} \mathbb{Q}^2$ de manière analogue⁽³⁾. La forme f définit une classe \mathbb{Q} -rationnelle $\omega_f \in M(f)_{dR}$, et plus précisément engendre le cran inférieur de la filtration de Hodge (de longueur 2); on peut voir ω_f comme une 1-forme sur $Y(\Gamma)$ à valeurs dans $\mathbb{L}_k \otimes \mathbb{C}$.

2.1.3. *Les périodes $c^+(f)$ et $c^-(f)$.* — L'action de la conjugaison complexe sur la courbe $Y(\Gamma)$ définit une involution sur l'homologie topologique $M(f)_B^*$ (espace dual de $M(f)_B$) qui correspond à l'involution F_{∞} de Deligne; les sous-espaces avec valeurs propres ± 1 pour F_{∞} sont engendrés par des cycles γ^+ et γ^- respectivement. La période $c^+(f)$ (*resp.* $c^-(f)$) de Deligne est obtenue en intégrant la forme différentielle ω_f sur γ^+ (*resp.* sur γ^-). Si $k=2$, alors $M(f)_B^*$ est un sous-espace de l'homologie de $Y(\Gamma)$, et

2. On suppose sans insister là-dessus que Γ n'a pas de points fixes elliptiques.

3. Voir Verdier (1961) pour la construction de la cohomologie de de Rham dans la version d'Eichler et Shimura.

alors γ^+ se réalise comme la projection sur ce sous-espace de l'image dans $Y(\Gamma)$ de l'axe imaginaire dans \mathfrak{H} ; γ^- admet une description explicite analogue. Ce sont en fait des classes d'homologie à support infini, mais leur accouplement avec ω_f revient à l'intégrale de la forme parabolique f sur des cycles dans le demi-plan supérieur. Si $k = 2$, la fonction $L(s, f)$ de Hecke s'obtient comme l'intégrale sur l'axe imaginaire du produit de f par la fonction y^{s-1} . Ainsi si on définit la fonction $L(s, f, \chi)$, pour un caractère de Dirichlet χ , par

$$L(s, f, \chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n) a_n}{n^s}, \operatorname{Re} s \gg 0,$$

alors la relation entre les valeurs $L(1, f, \chi)$ et les périodes $c^\pm(f)$ —le cas $n = 2$ du théorème 6.1 ci-dessous— est transparente. La généralisation à $k \geq 2$ était observée par Shimura : les valeurs des intégrales d'Eichler

$$\int_0^{i\infty} (2\pi iz)^\ell f(q) \frac{dq}{q}, \quad 0 \leq \ell \leq k - 2,$$

où $z = \log(q)/2\pi i$, sont des multiples rationnels de $c^+(f)$ pour ℓ pair et de $c^-(f)$ pour ℓ impair, ce que Shimura (1959) avait déjà observé (pour la fonction Δ de Ramanujan). Ainsi la conjecture de Deligne pour $M(f)$ est compatible avec les résultats connus de Shimura, Birch, Manin, et autres. Par la suite, Shimura a obtenu des résultats plus précis pour les valeurs critiques de $L(s, f, \chi)$ et des fonctions L de Rankin–Selberg attachées à une paire de formes modulaires.

2.2. Les puissances symétriques de $M(f)$

Une fois que l'on a construit le motif $M(f)$ de rang 2, on définit le motif $\operatorname{Sym}^{n-1} M(f)$, de rang n , comme les invariants de l'action du groupe symétrique sur la puissance tensorielle $M(f)^{\otimes(n-1)}$, ce qui se traduit facilement sur les réalisations. Sous l'hypothèse 2.1, le théorème déjà cité de Serre implique que la représentation galoisienne

$$\rho_{f,\ell}^n: \Gamma_{\mathbb{Q}} \rightarrow \operatorname{Aut}(\operatorname{Sym}^{n-1} M(f)_\ell) \xrightarrow{\sim} GL(n, \mathbb{Q}_\ell)$$

est *irréductible*. Alors la fonction $L_{(n)}(s, f) := L(s, \operatorname{Sym}^{n-1} M(f))$ admet une décomposition en produit eulérien

$$L_{(n)}(s, f) = \prod_p L_{n,p}(s, f)$$

qui converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$. Les facteurs $L_{n,p}(s, f)$ pour $p \nmid N$ sont facilement déterminés à partir de $L_p(s, f)$: si l'on écrit la factorisation de $L_p(s, f)$

$$L_p(s, f) = [(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})]^{-1}$$

avec α_p, β_p les paramètres de Satake dans \mathbb{C}^\times (en fait dans $\overline{\mathbb{Q}}^\times$), alors

$$(5) \quad L_{n,p}(s, f) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha_p^i \beta_p^{n-1-i} p^{-s}) \right]^{-1}.$$

Les facteurs pour $p \mid N$ sont définis par les formules habituelles.

Puisque $\rho_{f,\ell}^n$ est irréductible, les conjectures standard sur les fonctions L des motifs, tout comme les conjectures de Langlands, impliquent la

CONJECTURE 2.2. — *Pour f de poids $k \geq 2$ qui vérifie l'hypothèse 2.1, la fonction $L_{(n)}(s, f)$ est entière pour tout $n > 1$ et satisfait à une certaine équation fonctionnelle explicite⁽⁴⁾.*

Remarque 2.3. — Avec nos conventions, la fonction $L_1(s, f)$ est la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle étaient démontrés dans les travaux de Clozel, Harris et Taylor (2008), Harris, Shepherd-Barron et Taylor (2010), Taylor (2008) et Barnet-Lamb, Geraghty, Harris et Taylor (2011), utilisant la méthode de Taylor de l'automorphie potentielle, avec comme conséquence la conjecture de Sato–Tate pour les formes modulaires. Beaucoup plus récemment, Newton et Thorne (2021a,b) ont obtenu le résultat magnifique suivant :

THÉORÈME 2.4 (Newton–Thorne). — *La conjecture 2.2 est vraie.*

Les travaux de Newton et Thorne sont une élaboration des idées développées lors d'une longue collaboration entre Clozel et Thorne. Remarquons que, pour n'importe quelle représentation cuspidale automorphe Π de $GL(2)$, y compris les Π attachées aux formes de Maass non holomorphes, le produit eulérien des facteurs (5), multiplié par les facteurs pour $p \mid N$ déterminés par la correspondance de Langlands locale, converge absolument vers une fonction $L_{(n)}(s, \Pi)$ définie sur un demi-plan. On peut formuler une version de l'hypothèse 2.1 et une conjecture 2.2 pour une telle Π . Pour $n = 2, 3, 4$ cette conjecture⁽⁵⁾ est connue depuis longtemps pour toute Π cuspidale sur n'importe quel corps de nombres ; par ailleurs, le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle sont connus si $n \leq 8$. La méthode principale utilisée pour démontrer ces résultats reposent pour l'essentiel sur la *méthode de Langlands–Shahidi* (Shahidi, 1981). Pour $n > 4$, la conjecture 2.2 reste complètement ouverte pour les représentations automorphes non-holomorphes et même pour les représentations cohomologiques de $GL(2)$ sur un corps de nombres qui n'est pas totalement réel. Par la suite, Newton et Thorne (2022) ont démontré l'analogie de leur théorème pour les formes modulaires holomorphes sur les corps totalement réels (les formes modulaires de Hilbert).

2.3. Motifs automorphes et fonctions L de Rankin–Selberg

Le résultat de Newton et Thorne est limité aux formes holomorphes mais va bien au-delà des résultats antérieurs :

4. Voir Harris, Shepherd-Barron et Taylor (2010, p. 810) pour le cas où le poids k est égal à 2.

5. ...modifiée pour tenir compte des éventuels motifs d'Artin et leurs généralisations...

THÉORÈME 2.5 (Newton–Thorne). — *Soit $n > 1$ un entier. Supposons que f est une forme modulaire de poids au moins 2 sans multiplication complexe. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale $\Pi^n(f)$ de $GL(n, \mathbf{A}_{\mathbb{Q}})$ telle que*

$$L(s, \Pi^n(f)) = L(s, \text{Sym}^{n-1}(M(f))).$$

Ici le membre de gauche est la fonction L standard, de degré n , attachée à la représentation $\Pi^n(f)$ par Godement et Jacquet (1972) et Shahidi (1981).

Si Π est une représentation automorphe de $GL(n)$, avec décomposition

$$\Pi \xrightarrow{\sim} \Pi_{\infty} \otimes \bigotimes'_p \Pi_p$$

en produit tensoriel restreint, où p parcourt les nombres premiers, alors pour $\text{Re}(s) \gg 0$ on a $L(s, \Pi) = \prod_p L(s, \Pi_p)$ (on suit Deligne plutôt que Chen et l'on omet le facteur $L(s, \Pi_{\infty})$). Ici pour presque tout p la composante Π_p est non ramifiée et alors

$$(6) \quad L_p(s, \Pi_p) = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i p^{-s})^{-1}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Si Π est cuspidale alors $L(s, \Pi)$ est une fonction entière. L'holomorphie de $L(s, \text{Sym}^{n-1}(M(f)))$ est donc une conséquence directe de la théorie des fonctions L standard de $GL(n)$. L'existence de $\Pi^n(f)$ confirme un cas particulier des conjectures de fonctorialité de Langlands, pour la représentation Sym^{n-1} du L -groupe de $GL(2)$. Les résultats de Chen sur les valeurs critiques de $L(s, \text{Sym}^{n-1}(M(f)))$ reposent en grande partie sur une étude approfondie des propriétés de ces $\Pi^n(f)$.

Le théorème 2.5 de Newton et Thorne affirme que, pour $n \geq 1$, $\text{Sym}^{n-1}(M(f))$ est un *motif automorphe*, ce qui veut dire tout simplement que sa fonction L est égale à celle d'une représentation automorphe cuspidale. Cela a la conséquence suivante :

THÉORÈME 2.6. — *Soient n et n' des entiers > 0 distincts. Alors la fonction*

$$L(s, \text{Sym}^{n-1}(M(f)) \otimes \text{Sym}^{n'-1}(M(f)))$$

est entière et satisfait à une certaine équation fonctionnelle explicite.

En effet, $L(s, \text{Sym}^{n-1}(M(f)) \otimes \text{Sym}^{n'-1}(M(f)))$ est la fonction L de Rankin–Selberg

$$(7) \quad L(s, \Pi \times \Pi') = \prod_p L_p(s, \Pi_p \times \Pi'_p)$$

d'un produit de deux représentations automorphes cuspidales, avec $\Pi = \Pi^n(f)$ et $\Pi' = \Pi^{n'}(f)$. Si Π_p et Π'_p sont non ramifiées et satisfont à (6), avec les α_i remplacés par α'_j pour Π'_p , alors

$$(8) \quad L_p(s, \Pi_p \times \Pi'_p) = \prod_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n'} (1 - \alpha_i \alpha'_j p^{-s})^{-1},$$

ce qui correspond bien au produit tensoriel des motifs (voir §2.5). Les propriétés nécessaires d'une telle $L(s, \Pi \times \Pi')$ ont été démontrées par Jacquet, Piatetski-Shapiro, et Shalika, et d'une autre manière par Shahidi. Si $n = n'$ et $\Pi = \Pi'$, l'autodualité de $\text{Sym}^{n-1}(M(f))$ (à une puissance de la norme près) implique l'existence d'un pôle simple.

On verra dans le 6 que les fonctions $L(s, \Pi \times \Pi')$ de Rankin–Selberg jouent un rôle clé dans la récurrence qui démontre le théorème de Chen.

2.4. Les périodes de Deligne de $\mathrm{Sym}^n M(f)$

La proposition 7.7 de Deligne (1979a) calcule les périodes $c^\pm(\mathrm{Sym}^n M(f))$ explicitement en termes des invariants $c^+(f)$ et $c^-(f)$ de $M(f)$ déjà rencontrés. Des bases des éléments rationnels de $\mathrm{Sym}^n M(f)_{dR}$ ou de $\mathrm{Sym}^n M(f)_B$ s'obtiennent facilement à partir des bases utilisées pour définir $c^\pm(f)$. En manipulant la matrice des périodes, Deligne trouve les formules suivantes :

THÉORÈME 2.7. — (1) Supposons $n = 2\ell + 1$. Alors

$$c^\pm(\mathrm{Sym}^n M(f)) = c^\pm(f)^{(\ell+1)(\ell+2)/2} \cdot c^\mp(f)^{\ell(\ell+1)/2} \cdot \delta(f)^{\ell(\ell+1)/2}.$$

(2) Supposons $n = 2\ell$. Alors

$$c^+(\mathrm{Sym}^n M(f)) = [c^+(f)c^-(f)]^{\ell(\ell+1)/2} \cdot \delta(f)^{\ell(\ell+1)/2};$$

$$c^-(\mathrm{Sym}^n M(f)) = [c^+(f)c^-(f)]^{\ell(\ell+1)/2} \cdot \delta(f)^{\ell(\ell-1)/2}.$$

Ici $\delta(f)$ est le déterminant du morphisme de comparaison

$$I_\infty : M(f)_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M(f)_{dR} \otimes \mathbb{C},$$

calculé dans des bases rationnelles des deux côtés.

Ainsi la conjecture de Deligne pour $\mathrm{Sym}^{n-1} M(f)$ revient à une relation entre $L(m, \mathrm{Sym}^{n-1} M(f))$ et les expressions dans le théorème 2.7. Chen démontre la conjecture pour la fonction $L(s, \mathrm{Sym}^{n-1} M(f) \otimes \chi)$ pour un caractère χ d'ordre fini (Chen, 2022a, Theorem 5.9), toujours en supposant que le poids de f est au moins 5. Ici on supposera toujours χ trivial.

2.5. Les périodes de Deligne d'une produit tensoriel

La point de départ de l'argument de Chen est l'observation de Yoshida (2001, Proposition 12) que, si M et N sont deux motifs sur \mathbb{Q} , à coefficients dans E , alors

$$(9) \quad c^\pm(M \otimes N) \sim f_M^\pm \cdot g_N^\pm$$

où f_M^\pm (*resp.* g_N^\pm) est une fonction polynomiale des périodes de M (*resp.* de N) dont la forme dépend de la relation entre les structures de Hodge des deux facteurs mais dont le contenu ne dépend que de M (*resp.* de N).

Autrement dit, si on remplace N par un N' avec la même structure de Hodge, les contributions de M aux périodes de Deligne aux deux produit tensoriels $M \otimes N$ et $M \otimes N'$ sont identiques. Par symétrie, si M, M', N, N' sont quatre motifs sur \mathbb{Q} à coefficients dans E , où M et M' (respectivement N et N') ont la même structure de Hodge, alors la formule (9) implique que

$$(10) \quad \frac{c^\pm(M \otimes N) \cdot c^\pm(M' \otimes N')}{c^\pm(M \otimes N') \cdot c^\pm(M' \otimes N)} \sim \frac{(f_M^\pm \cdot g_N^\pm) \cdot (f_{M'}^\pm \cdot g_{N'}^\pm)}{(f_M^\pm \cdot g_{N'}^\pm) \cdot (f_{M'}^\pm \cdot g_N^\pm)} = 1.$$

En particulier, la conjecture de Deligne implique une formule analogue à (10) pour le quotient des produits de valeurs critiques :

$$(11) \quad \frac{L(m, M \otimes N)L(m, M' \otimes N')}{L(m, M \otimes N')L(m, M' \otimes N)} \sim 1$$

La formule de Chen (2022a) (théorème 5.1 ci-dessous), qui en est la contribution la plus originale et la base de tous ses résultats, démontre une version de l'identité (11) pour certaines fonctions L de Rankin–Selberg.

3. Les techniques automorphes

Soit \mathcal{V} un espace vectoriel sur un corps L muni de l'action d'un groupe Γ , $K \subset L$ un sous-corps. On appellera K -modèle de la représentation \mathcal{V} de Γ , ou *structure K -rationnelle* de \mathcal{V} , un K -sous-espace Γ -invariant $\iota: \mathcal{V}(K) \hookrightarrow \mathcal{V}$ tel que ι définit un isomorphisme de L -espaces vectoriels

$$\mathcal{V}(K) \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$$

compatible aux actions de Γ sur les deux côtés. Les arguments de Chen reposent sur une accumulation de techniques développées au cours des cinquante dernières années dans des articles sur les valeurs spéciales de différentes catégories de fonctions L automorphes. Son papier est peut-être le plus éclectique de toute la série, mais toutes les techniques, ou presque, ont le même format :

1. On munit un certain sous- \mathbb{C} -espace \mathcal{V} de formes automorphes sur un groupe réductif G d'un $\overline{\mathbb{Q}}$ -modèle $\mathcal{V}(\overline{\mathbb{Q}})$; ici on écrit $\overline{\mathbb{Q}}$ pour simplifier, mais dans la pratique on peut remplacer $\overline{\mathbb{Q}}$ par \mathbb{Q} ou par un autre corps de nombres. On suppose $\mathcal{V}(\overline{\mathbb{Q}})$ invariant sous l'action d'un groupe adélique M (pas nécessairement égale à $G(\mathbf{A})$). Souvent il y a une deuxième structure rationnelle invariante, disons $\mathcal{V}_1(\overline{\mathbb{Q}})$.
2. On définit une forme linéaire $\lambda: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ avec de bonnes propriétés d'équivariance sous M .
3. On calcule $\lambda(f)$ pour $f \in \mathcal{V}(\overline{\mathbb{Q}})$ et l'on montre que c'est un multiple d'une valeur spéciale d'une fonction L , éventuellement privée des facteurs aux places ramifiées, par un nombre complexe $p(\lambda, \mathcal{V})$, à un scalaire algébrique (ou rationnel) près. L'invariant $p(\lambda, \mathcal{V})$ est souvent défini comme le facteur de proportionnalité entre les structures $\mathcal{V}(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\mathcal{V}_1(\overline{\mathbb{Q}})$.
4. Et on nettoie le calcul en regardant ce qui se passe aux places ramifiées et archimédiennes pour obtenir un résultat optimal.

Les étapes (2) et (3) forment un ensemble et constituent l'apport de la théorie des fonctions L automorphes. Cette théorie est (pour le moment) bifurquée en deux méthodes distinctes : la *méthode de Langlands–Shahidi*, basée sur la théorie des séries d'Eisenstein,

et le *programme de Langlands relatif* qui inclut toutes les constructions de fonctions L par les généralisations des méthodes de Hecke et de Rankin–Selberg pour $GL(2)$.

La structure rationnelle $\mathcal{V}(\overline{\mathbb{Q}})$ (ou $\mathcal{V}(\mathbb{Q})$) de l'étape (1) provient toujours, sans exception, de la cohomologie des espaces localement symétriques (qui dans certains cas se réduisent à des ensembles finis). Cela veut dire que l'étude des valeurs spéciales de fonctions L est limitée (au moins pour le moment) aux formes automorphes contenues dans des représentations automorphes dont la composante archimédienne est de type cohomologique. Ici aussi il y a une bifurcation entre les méthodes basées sur la cohomologie topologique et celles basées sur la cohomologie cohérente des variétés de Shimura. S'il y a une deuxième structure rationnelle $\mathcal{V}_1(\overline{\mathbb{Q}})$, elle est typiquement caractérisée par la propriété que $\lambda_i(\mathcal{V}_1(\overline{\mathbb{Q}})) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ pour une famille de formes linéaires λ_i .

En général il n'y a pas de séparation stricte entre ces méthodes. Par exemple, voici une esquisse (très simplifiée) de la démonstration du théorème de Damerell pour les formes modulaires de poids 2. La démonstration commence par le calcul (classique) des coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein sur une courbe modulaire —une variété de Shimura de dimension 1.

1. On choisit une sous-variété de Shimura S de dimension 0 qui correspond à un sous-tore $T \subset G$, à savoir la classe d'isogénie d'une courbe elliptique E avec multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire, et on définit \mathcal{V} comme l'image de l'espace des séries d'Eisenstein par la restriction à S ⁽⁶⁾; les restrictions des séries d'Eisenstein avec coefficients de Fourier dans $\overline{\mathbb{Q}}$ forment une structure rationnelle $\mathcal{V}(\overline{\mathbb{Q}})$. (Le groupe M mentionné ci-dessus est le groupe des points adéliques de T , qui agit sur S .)
2. Ensuite on applique les propriétés des formes automorphes sur les variétés de Shimura de dimension 0 et 1 (cohomologie cohérente) pour obtenir de bonnes propriétés de la restriction d'un élément $f \in \mathcal{V}$ en un point $s \in S$ —cette restriction définit la forme linéaire λ ⁽⁷⁾.
3. On montre que si $f \in \mathcal{V}(\overline{\mathbb{Q}})$, alors $\lambda(f)$ est un multiple algébrique d'une période d'un élément de $H^0(E, \Omega_E^1)$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ — c'est le nombre $p(\lambda, \mathcal{V})$. (Ici $\mathcal{V}_1(\overline{\mathbb{Q}})$ est le sous-espace de \mathcal{V} des formes différentielles sur E avec périodes dans $\overline{\mathbb{Q}}$.) Enfin dans l'étape (3) de la procédure, l'évaluation de λ en s est révélée *a posteriori* comme un cas particulier de la méthode dite de « doubling » (une variante de la méthode classique de Rankin–Selberg découverte indépendamment par Garrett et par Piatetski-Shapiro et Rallis) pour prouver le prolongement méromorphe d'une fonction L .

Dans ce qui suit, nous allons illustrer ces méthodes par deux des nombreuses techniques qui sont exploitées dans la preuve de Chen. La première est de nature topologique

6. Cela n'est bien sûr rien d'autre que la valeur en s , mais en dimension supérieure on a souvent affaire à la restriction à une sous-variété de dimension positive.

7. Plus précisément, λ est l'intégrale de f contre un caractère de Hecke sur S .

et est basée sur les séries d'Eisenstein ; la deuxième utilise la cohomologie cohérente et la méthode de doubling.

3.1. Les méthodes topologiques

Soient G/\mathbb{Q} un groupe réductif connexe avec centre Z_G ⁽⁸⁾ et X l'espace riemannien symétrique de $G(\mathbb{R})$. À chaque sous-groupe arithmétique $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ on associe $X_\Gamma = \Gamma \backslash X$; c'est une variété lisse ou, plus généralement, un orbifold. Donc on peut regarder sa cohomologie topologique à coefficients dans \mathbb{Q} . Pour les applications il est plus utile de considérer la version adélique. Soit $\rho: G \rightarrow GL(V_\rho)$ une représentation algébrique de dimension finie définie sur \mathbb{Q} , et soit $V_\rho(\mathbb{Q})$ le groupe des points \mathbb{Q} -rationnels de V_ρ . On pose

$$X_G = \varprojlim_{K_f} G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G(\mathbf{A}_f)) / K_f; \quad \tilde{V}_\rho = \varprojlim_{K_f} G(\mathbb{Q}) \backslash X \times V_\rho(\mathbb{Q}) \times G(\mathbf{A}_f) / K_f.$$

Ici $G(\mathbf{A}_f)$ est le groupe localement compact des adèles finis de G et K_f parcourt les sous-groupes ouverts compacts ; \tilde{V}_ρ est un système local $G(\mathbf{A}_f)$ -équivariant sur X_G .

Soient $\mathcal{A}(G)$ l'espace des formes automorphes sur $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$ et $\mathcal{A}_0(G)$ le sous-espace des formes cuspidales. Soit $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ le stabilisateur d'un point de X ; donc K_∞ contient les points réels du centre de G et un sous-groupe compact connexe maximal. La *formule de Matsushima*, dans la version démontrée par Franke (1998), calcule $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)$ en termes de $\mathcal{A}(G)$:

$$(12) \quad H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \mathcal{A}(G) \otimes V_\rho(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} H^*(X_G, \tilde{V}_\rho) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

Ici $H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \bullet)$ est la cohomologie de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de $G(\mathbb{C})$, relativement au sous-groupe K_∞ . Cela se calcule sur la partie cuspidale $H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \mathcal{A}_0(G) \otimes V_\rho(\mathbb{C}))$ en écrivant $\mathcal{A}_0(G)$ comme somme dénombrable $\bigoplus m(\Pi)\Pi$ de représentations irréductibles avec multiplicités $m(\Pi)$ strictement positives. Alors

$$\begin{aligned} H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \mathcal{A}_0(G) \otimes V_\rho(\mathbb{C})) &= \bigoplus m(\Pi) H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \Pi \otimes V_\rho(\mathbb{C})) \\ &\xrightarrow{\sim} \bigoplus m(\Pi) H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \Pi_\infty \otimes V_\rho(\mathbb{C})) \otimes \Pi_f, \end{aligned}$$

où la décomposition $\Pi \xrightarrow{\sim} \Pi_\infty \otimes \Pi_f$ correspond au produit $G(\mathbf{A}) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{R}) \times G(\mathbf{A}_f)$.

Le membre de droite de (12) est muni de la structure rationnelle $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)$ (*structure de Betti*), alors que l'espace $H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \Pi(f)_\infty \otimes V_\rho(\mathbb{C}))$ est muni d'une structure rationnelle $H^*(\mathfrak{g}, K_\infty; \Pi(f)_\infty(\mathbb{Q}) \otimes V_\rho(\mathbb{Q}))$.

Exemple 3.1. — Si $G = GL(2)$ et $V_\rho = \text{Sym}^{k-2}\mathbb{Q}^2$, alors (12) revient à l'isomorphisme de Shimura (Verdier, 1961) à la base de la définition des invariants $c^\pm(f)$ pour une forme modulaire f . Soit $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)[f] \subset H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)$ l'espace propre pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke sur f (que nous avons supposées rationnelles, pour simplifier). Décomposons

$$H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)[f] = H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)[f]^+ \oplus H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)[f]^-.$$

8. On suppose Z_G déployé sur \mathbb{Q} pour éviter certaines pathologies.

Les $c^\pm(f)$ sont des facteurs de proportionnalité entre la structure rationnelle sur $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)[f]^\pm$ —donc définie par le membre de gauche de (12)— et une deuxième structure rationnelle définie sur $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)[f] \otimes \mathbb{C}$ (ou plutôt sur sa partie holomorphe dans la filtration de Hodge) par la cohomologie cohérente.

DÉFINITION 3.2. — Une représentation automorphe $\Pi \subset \mathcal{A}(G)$ est dite *cohomologique* si sa partie finie Π_f est réalisée dans $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

On écrit « représentation AC », au lieu de « représentation automorphe cohomologique », et l'on dit que Π est AC à coefficients dans V_ρ .

Notons que l'on ne suppose pas que Π soit cuspidale. La construction et l'étude de certaines représentations AC *non cuspidales* occupe plus de la moitié de l'article de Chen. On sait que le sous-espace rationnel $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho) \subset H^*(X_G, \tilde{V}_\rho) \otimes \mathbb{C}$ munit chaque espace

$$H^i[\Pi] := \text{Hom}_{G(\mathbf{A}_f)}(\Pi_f, H^i(X_G, \tilde{V}_\rho) \otimes \mathbb{C})$$

d'un modèle sur un corps de nombres $E(\Pi)$ pour chaque représentation AC Π , qu'elle soit cuspidale ou pas. En supposant que Π intervient avec multiplicité 1 dans $\mathcal{A}(G)$ —ce qui est bien le cas si $G = GL(n)$ — on obtient un $E(\Pi)$ -modèle $\Pi^{i,B}$ sur le membre de droite $H^i(\mathfrak{g}, K_\infty; \Pi \otimes V_\rho(\mathbb{C}))$ de (12).

Remarque 3.3. — Si f est une forme nouvelle, les représentations $\Pi^n(f)$ de Newton et Thorne sont cohomologiques. De l'hypothèse que $E(f) = \mathbb{Q}$ on déduit que $E(\Pi^n(f)) = \mathbb{Q}$ aussi. Donc on suppose désormais pour simplifier que $E(\Pi) = \mathbb{Q}$.

3.1.1. Périodes de Betti–Whittaker. — Lorsque $G = GL(n)$, pour Π AC et cuspidale on pose b_n le degré minimal tel que $H^{b_n}[\Pi] \neq 0$. Alors on sait que $b_n = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Il y a une action de $\pi_0(GL(n, \mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ sur cet espace. On écrit $\dim H^{b_n}[\Pi]^\varepsilon$ pour l'espace propre pour cette action, avec $\varepsilon \in \text{Hom}(\pi_0(GL(n, \mathbb{R})), \pm 1) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$. Alors

$$\dim H^{b_n}[\Pi]^\varepsilon = 1, \varepsilon = \pm 1 \text{ si } n \text{ est pair,}$$

tandis que, si n est impair, il existe un caractère $\varepsilon(\Pi_\infty) \in \text{Hom}(\pi_0(GL(n, \mathbb{R})), \pm 1)$ tel que

$$\dim H^{b_n}[\Pi]^\varepsilon = 1 \text{ si } \varepsilon = \varepsilon(\Pi_\infty), \quad \dim H^{b_n}[\Pi]^\varepsilon = 0 \text{ sinon.}$$

Dans chaque cas, l'espace de dimension 1 est engendré par un homomorphisme qui envoie un $E(\Pi)$ -modèle (choisi préalablement) de Π_f ($E(\Pi) = \mathbb{Q}$, d'après notre hypothèse) dans $H^{b_n}(X_G, \tilde{V}_\rho)$. Ainsi on a

$$\Pi^{b_n, B} \xrightarrow{\sim} \Pi^{b_n, B, +} \oplus \Pi^{b_n, B, -}.$$

En faisant très attention au calcul explicite du membre de droite de (12), on obtient deux structures \mathbb{Q} -rationnelles $\Pi^{B, \pm}$ de la représentation automorphe Π elle-même, avec sa composante archimédienne.

Or une représentation cuspidale AC Π de G a encore une ou deux structure(s) $E(\Pi)$ -rationnelle(s) $\Pi^{W, \pm 1}$, définie(s) à partir du *modèle de Whittaker*. Le lemme de Schur

implique facilement qu'il existe un facteur de proportionnalité $p(\Pi, \varepsilon)$, la *période de Betti–Whittaker*, bien défini à $E(\Pi)^\times$ près, tel que

$$(13) \quad \Pi^{W, \varepsilon} = p(\Pi, \varepsilon) \Pi^{B, \varepsilon}, \quad \varepsilon \in \{\pm 1\}$$

en tant que sous-espaces de $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho(\mathbb{C})) := H^*(X_G, \tilde{V}_\rho) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Pour $n = 2$ la structure rationnelle de Whittaker sur $\Pi(f)$ coïncide avec celle définie par la cohomologie cohérente —c'est le *principe du q -développement*— et on retrouve justement les périodes d'Eichler $\rho(\Pi(f), \pm 1) = c^\pm(f)$ ⁽⁹⁾.

3.1.2. Cohomologie d'Eisenstein. — L'espace X_G n'est pas compact sauf si G/Z_G est anisotrope, ce qui n'est pas le cas si $G = GL(n)$, $n > 1$, donc dans la situation qui nous intéresse. Cependant l'inclusion de X_G dans son *compactifié de Borel–Serre* \bar{X}_G est une équivalence d'homotopie, et nous pouvons prolonger \tilde{V}_ρ à \bar{X}_G . Il y a une suite exacte longue

$$(14) \quad \begin{aligned} \dots &\rightarrow H^{i-1}(\partial X_G, \tilde{V}_\rho) \rightarrow H_c^i(X_G, \tilde{V}_\rho) \rightarrow \\ &H^i(X_G, \tilde{V}_\rho) = H^i(\bar{X}_G, \tilde{V}_\rho) \xrightarrow{res^i} H^i(\partial X_G, \tilde{V}_\rho) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

où H_c^* désigne la cohomologie à support compact, avec $\partial X_G = \bar{X}_G \setminus X_G$. Borel a démontré que les représentations *cuspidales* AC contribuent à l'image $H_1^*(X_G, \tilde{V}_\rho)$ de $H_c^*(X_G, \tilde{V}_\rho)$ dans $H^*(X_G, \tilde{V}_\rho)$, et que toute classe dans $H_1^*(X_G, \tilde{V}_\rho)$ provient des représentations cuspidales si ρ est assez régulière. Quant à la partie complémentaire $H^i(\partial X_G, \tilde{V}_\rho)$, elle est l'aboutissement d'une suite spectrale, dont les termes $E_1^{\bullet, \bullet}$ sont donnés par la cohomologie (à coefficients dans des systèmes locaux) des sous-groupes de Levi M_P des paraboliques $P \subset G$.

On appelle H_1^* la *cohomologie intérieure*.

En général, la structure de cette suite spectrale garde encore beaucoup de mystères, mais souvent les séries d'Eisenstein permettent d'inverser partiellement la flèche res^i . En particulier, à partir de certaines représentations AC cuspidales σ des M_P on peut construire des représentations automorphes $Eis(\sigma)$ qui définissent des *classes de cohomologie d'Eisenstein* $[Eis(\sigma)] \in H^i(X_G, \tilde{V}_\rho)$ qui ont la propriété suivante : l'image $res^i([Eis(\sigma)])$ dans $H^i(\partial X_G, \tilde{V}_\rho)$ se calcule explicitement en termes de σ et des valeurs spéciales des fonctions L attachées à σ . Pour cela, il faut que σ définisse une classe de cohomologie $[\sigma] \in H^*(X_{M_P}, \tilde{V}_{\rho'})$ avec $\rho' \in \mathcal{V}_P(\rho)$, où $\mathcal{V}_P(\rho)$ est l'ensemble des représentations irréductibles de M_P qui interviennent dans la cohomologie $H^*(\mathfrak{n}_P, V_\rho)$ où \mathfrak{n}_P est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P ⁽¹⁰⁾.

Si $G = GL(n)$ alors $M_P \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^k GL(n_i)$ pour une partition $n = n_1 + \dots + n_k$. Même dans ce cas, la combinatoire de la théorie de cohomologie d'Eisenstein est très subtile. Le

9. Ici j'abuse un peu : les $c^\pm(f)$ sont obtenus en comparant la structure rationnelle « cohérente » de la moitié holomorphe de Π —c'est la structure de Whittaker dans ce cas— avec les deux structures rationnelles « topologiques » qui correspondent aux espaces propres de l'action de $\pi_0(GL(2, \mathbb{R}))$.

10. Ici on se permet un abus de langage ; les classes $[Eis(\sigma)]$ sont attachées à des vecteurs —des *formes automorphes*— dans l'espace de la représentation engendrée par des séries d'Eisenstein.

livre de Harder et Raghuram (2020) développe une bonne partie de cette combinatoire, suivant des idées introduites il y a plus de 50 ans par Harder, pour $G = GL(2)$, et en tire plusieurs conséquences remarquables. Signalons une de ces conséquences tout de suite.

THÉORÈME 3.4 (Harder et Raghuram, 2020). — *Soient Σ et Π des représentations cuspidales AC de $GL(n)$ et $GL(n')$, respectivement. Soit $\frac{w+1}{2}$ le centre de symétrie de l'équation fonctionnelle de $L(s, \Sigma \times \Pi)$.*

1. *On suppose que n et n' sont tous les deux pairs, et que $L(s, \Sigma \times \Pi)$ a au moins deux valeurs critiques $\geq \frac{w+1}{2}$. Alors pour démontrer la conjecture de Deligne pour $L(s, \Sigma \times \Pi)$, il suffit de la vérifier pour une seule valeur critique.*
2. *Si n est pair et n' est impair et si m_0 et $m_0 + 1$ sont deux valeurs critiques de $L(s, \Sigma \times \Pi)$, avec $L(m_0 + 1, \Sigma \times \Pi) \neq 0$, alors le rapport $\frac{L(m_0, \Sigma \times \Pi)}{L(m_0 + 1, \Sigma \times \Pi)}$ s'exprime (à un facteur algébrique près) en termes des périodes de Betti–Whittaker de Σ .*

Chen cite (la version précise de) ce théorème plusieurs fois pour ramener son théorème à sa vérification pour une seule valeur critique.

Harder et Raghuram obtiennent le théorème 3.4 comme conséquence de leur construction de classes de cohomologie d'Eisenstein. En particulier, ils étudient la relation entre la rationalité (pour la structure de Betti) de la classe de cohomologie $[\sigma]$ dans $H^*(X_{M_P}, V_{\rho'})$ et la rationalité de la classe $[Eis(\sigma)]$. Chen a besoin d'une généralisation de leur construction à certains cas *presque tempérés* (voir la Définition 4.1). Voici un exemple de la construction de Chen qui figure dans la démonstration de ses principaux résultats.

THÉORÈME 3.5. — *Soit $P \subset GL(n)$ un sous-groupe parabolique avec facteur de Levi M_P , et soit $[\sigma] \in H^*(X_{M_P}, V_{\rho'})$, avec $\rho' \in \mathcal{V}_P(\rho)$. Sous « certaines hypothèses » (voir remarque 0.1) sur la régularité du caractère infinitésimal de σ , il existe une classe $[Eis(\sigma)]$ non nulle dans $H^*(X_G, \tilde{V}_{\rho})$. Si $[\sigma]$ est rationnelle sur \mathbb{Q} (pour la structure de Betti), alors $[Eis(\sigma)]$ est aussi rationnelle sur \mathbb{Q} .*

Soient P un sous-groupe parabolique de $GL(n)$ avec facteur de Levi M_P isomorphe à $\prod_{i=1}^{\ell} GL(n_i)$ et $\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{\ell}$, avec σ_i une représentation AC de $GL(n_i)$. On note

$$Eis(\sigma) = \sigma_1 \boxplus \cdots \boxplus \sigma_{\ell}$$

la représentation automorphe de $GL(n)$ obtenue à partir de σ par la méthode des séries d'Eisenstein. En tant que représentation abstraite de $GL(n, \mathbf{A})$, $Eis(\sigma)$ est une composante irréductible du produit restreint sur les places de \mathbb{Q}

$$I_{P(\mathbb{R})}^{GL(n)(\mathbb{R})} \sigma_{\infty} \otimes \bigotimes_p I_{P(\mathbb{Q}_p)}^{GL(n)(\mathbb{Q}_p)} \sigma_p$$

des induites paraboliques locales; la notation \boxplus signifie que $Eis(\sigma)$ est isomorphe à la partie *isobarique* (Langlands, 1979) de ce produit restreint. Dans la situation du théorème 3.5, Chen construit des classes de cohomologie d'Eisenstein pour $GL(n + n')$,

à partir d'un sous-groupe parabolique avec facteur de Levi $\prod_{i=1}^{\ell} GL(n_i) \times \prod_{i=1}^k GL(n'_i)$, et calcule leurs périodes de Betti–Whittaker.

THÉORÈME 3.6. — (Chen, 2022a, Lemma 2.7) Soient $\Sigma = \Sigma_{n_1} \boxplus \cdots \boxplus \Sigma_{n_\ell}$ et $\Pi = \Pi_{n'_1} \boxplus \cdots \boxplus \Pi_{n'_k}$ deux représentations AC de $GL(n)$ et $GL(n')$, respectivement, avec n pair. Soit $\delta \in \{0, 1\}$ avec $\delta \equiv n' \pmod{2}$. On suppose que la représentation

$$\sigma := \left(\Sigma \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-\delta/2} \right) \boxplus \Pi := \left(\Sigma_{n_1} \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-\delta/2} \right) \boxplus \cdots \boxplus \left(\Sigma_{n_\ell} \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-\delta/2} \right) \boxplus \Pi_{n'_1} \boxplus \cdots \boxplus \Pi_{n'_k}$$

satisfait à certaines hypothèses de régularité, de sorte que σ définit une classe

$$[\sigma] = [Eis((\Sigma \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-\delta/2}) \otimes \Pi)] = [Eis(\bigotimes_{i=1}^{\ell} (\Sigma_{n_i} \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-\delta/2}) \otimes \bigotimes_{j=1}^k \Pi_{n'_j})]$$

de cohomologie d'Eisenstein. Alors pour $\varepsilon = \pm 1$ on a la formule suivante pour la période de Betti–Whittaker :

$$p([\sigma], \varepsilon) \sim G(\omega_{\Pi})^n \cdot L\left(1 - \frac{\delta}{2}, \Sigma \times \Pi^{\vee}\right) \cdot p\left(\Sigma \otimes \|\cdot\|_{\mathbb{A}}^{(n'-\delta)/2}, \varepsilon\right) \cdot p\left(\Pi \otimes \|\cdot\|_{\mathbb{A}}^{-n/2}, \varepsilon\right).$$

Ici $G(\omega_{\Pi})$ est la somme de Gauss attachée au caractère central ω_{Π} de Π .

Remarque 3.7. — Ce genre de calcul figure pour la première fois dans un article de Mahnkopf (2005), qui était aussi le premier à définir les périodes de Betti–Whittaker dans la généralité de $GL(n)$; voir aussi Grobner et Harris (2016), Grobner et Lin (2021) et Grobner et Sachdeva (2020) pour le cas des corps CM. Le point principal est le calcul par Shahidi du coefficient de Whittaker d'une série d'Eisenstein attachée à une représentation générique, qui joue un rôle central dans la méthode dite de Langlands–Shahidi pour prouver le prolongement analytique des fonctions L . Mais attention : cette partie de la démonstration est cachée dans la formule (49) de Chen (2022a).

3.2. Les méthodes des variétés de Shimura

Si l'espace symétrique X est muni d'une structure complexe $G(\mathbb{R})$ -invariante, l'espace (adèlique) localement symétrique X_G est une variété de Shimura. C'est le cas en particulier si G est le groupe unitaire $U(V)$ d'un espace vectoriel V de dimension n sur un corps quadratique imaginaire F , muni d'une forme hermitienne non dégénérée⁽¹¹⁾. Dans ce cas X_G est muni d'un *modèle canonique* de variété algébrique quasi-projective sur F ; cette structure est préservée par l'action de $G(\mathbf{A}_f)$.

Une représentation algébrique $\tau : K_{\infty} \rightarrow GL(W)$ définit un fibré analytique $G(\mathbb{R})$ -équivariant $G(\mathbb{R}) \times W / K_{\infty}$ (avec l'action diagonale) sur $X \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{R}) / K_{\infty}$, et l'on définit le fibré vectoriel algébrique

$$[W] = \varprojlim_{K_f} G(\mathbb{Q}) \backslash [(G(\mathbb{R}) \times W) / K_{\infty} \times G(\mathbf{A}_f) / K_f]$$

11. Pour les détails négligés ici sur le centre, sur les composantes connexes de X , etc., nous renvoyons le lecteur à l'article de Deligne (1979b).

sur X_G . Si la (pro)-variété X_G est compacte (projective), alors la cohomologie de X_G à coefficients dans $[W]$, vu comme un faisceau cohérent algébrique, admet une structure rationnelle sur le *corps réflexe* $E(X_G, [W])$, qui est un corps de nombres algébriques, et se calcule par une formule analogue à celle de Matsushima :

$$(15) \quad H^*(X_G, [W]) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{P}, K_{\infty}; \mathcal{A}(G) \otimes W(\mathbb{C})).$$

Ici \mathfrak{P} est une certaine sous-algèbre parabolique maximale de $Lie(G)_{\mathbb{C}}$. Si X_G n'est pas projective, on peut définir la cohomologie intérieure $H_!^*(X_G, [W])$ par analogie avec le cas topologique, mais il faut introduire la théorie des compactifications toroïdales (Harris, 1990).

Pour τ assez régulière la cohomologie $H_!^*(X_G, [W])$ est concentrée en un seul degré, et il existe une représentation π_{τ} dans la série discrète de $G(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} H_!^*(X_G, [W]) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} &\xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{P}, K_{\infty}; \mathcal{A}_0(G) \otimes W(\mathbb{C})) \\ &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\pi \subset \mathcal{A}_0(G); \pi_{\infty} \xrightarrow{\sim} \pi_{\tau}} H^*(\mathfrak{P}, K_{\infty}; \pi_{\tau} \otimes W(\mathbb{C})) \otimes \pi_f. \end{aligned}$$

Pour beaucoup de constructions de fonctions L les valeurs critiques s'identifient à des cup produits en cohomologie cohérente des variétés de Shimura. C'est notamment le cas lorsque G est le groupe unitaire $U(V)$ comme ci-dessus et la fonction L est définie par la méthode de doubling (Harris, 1997). Un cas très particulier de ces résultats, lorsque l'espace hermitien V est défini positif, est cité dans la démonstration du résultat du § 4.2, qui joue un rôle mineur dans le traitement par Chen de $L(s, \text{Sym}^{n-1} M(f))$ avec n pair.

Pour n impair, Chen fait appel à des résultats de Furusawa et Morimoto (2014) pour les fonctions L de $SO(V) \times GL(2)$, dont les valeurs critiques interviennent dans le développement de Fourier-Jacobi de certaines séries d'Eisenstein. Ici encore c'est la cohomologie cohérente d'une variété de Shimura —en l'occurrence en degré 0, c'est-à-dire la partie holomorphe— qui fournit la structure rationnelle utilisée.

Ces deux applications de la cohomologie cohérente sont résumées dans le § 4.2.

4. Énoncés de résultats

4.1. Fonctions L de $GL(n) \times GL(n-1)$, le cas équilibré

Soit $\Pi \xrightarrow{\sim} \Pi_{\infty} \otimes \bigotimes'_p \Pi_p$ une représentation automorphe de $GL(n)$, et soit $L(s, \Pi) = \prod_p L_p(s, \Pi_p)$ pour $Re(s) \gg 0$. On dit que Π est *essentiellement tempérée* si, pour tout p avec Π_p non ramifiée, les α_i de (6) ont tous la même valeur absolue. La conjecture de Ramanujan pour les formes modulaires cuspidales, démontrée par Deligne, implique que $\Pi_n(f)$ est essentiellement tempérée. Les constructions de Chen font appel à une

classe un peu plus générale de représentations non cuspidales ⁽¹²⁾ que j'appelle ici *presque tempérées* :

DÉFINITION 4.1. — Une représentation automorphe $\Pi = \boxplus_j \Pi_j$ de $GL(n)$, où $n = \sum_j n_j$ et où $\sigma = \otimes_j \Pi_j$ est une représentation automorphe de $M_P = \prod_j GL(n_j)$, est presque tempérée si

- chaque Π_j est essentiellement tempérée avec caractère central ω_j et $|\omega_j| = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{e_j}$ avec $e_j \in \mathbb{R}$;
- au plus un des n_j est impair ;
- si $i \neq j$ alors Π_j n'est pas isomorphe à $\Pi_i \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}$;
- et pour chaque $i \leq j$, soit $e_i = e_j$, soit $e_i - e_j \geq 1$.

Le théorème suivant de Chen (2022a, Theorem 4.2) est l'analogie pour $GL(n)_{\mathbb{Q}}$ des résultats démontrés pour les corps CM par Grobner et Harris (2016) et Grobner et Lin (2021). Dans l'énoncé $GL(n)$ est le groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel W de dimension n et $GL(n-1)$ est le sous-groupe de $GL(n)$ qui fixe une décomposition $W = W' \oplus W''$ avec $\dim W' = n-1$ et $\dim W'' = 1$.

THÉORÈME 4.2. — Soit Ψ une représentation cuspidale AC de $GL(n)$ à coefficients dans V_{ρ} . Soit $\tau \xrightarrow{\sim} \text{Eis}(\sigma)$ une représentation AC de $GL(n-1)$ presque tempérée, comme dans la Définition 4.1, qui satisfait aux conditions qui impliquent l'existence d'une classe $[\text{Eis}(\sigma)]$ de cohomologie à coefficients dans une représentation irréductible algébrique V' de $GL(n-1)$. On suppose que

$$(16) \quad \text{Hom}_{GL(n-1)}((V_{\rho}|_{GL(n-1)} \otimes V', \mathbb{C}) \neq 0.$$

Alors pour tout entier (ou demi-entier, voir remarque 4.3 ci-dessous) critique $m + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ de $L(s, \Psi \times \tau)$, on a

$$(17) \quad \frac{L\left(m + \frac{1}{2}, \Psi \times \tau\right) \cdot Z_{\infty}(m, \Psi, \tau)}{G(\omega_{\tau}) \cdot p(\Psi \otimes ||_{\mathbb{A}}^m, \varepsilon_m) \cdot p(\tau, \varepsilon'_m)} \in E(\Psi) \cdot E(\tau).$$

Ici $\varepsilon_m = \varepsilon(\Psi_{\infty} \otimes |\cdot|^m)$ si n est impair, $\varepsilon'_m = \varepsilon(\tau_{\infty})$ si n est pair, et $\varepsilon_m \varepsilon'_m = (-1)^n$. Les corps $E(\Psi)$ et $E(\tau)$ sont les corps de définition de Ψ_f et τ_f , respectivement, et $p(\Psi \otimes ||_{\mathbb{A}}^m, \varepsilon_m)$ et $p(\tau, \varepsilon'_m)$ sont les périodes de Betti–Whittaker définies dans (13). Enfin, Z_{∞} est une combinaison linéaire d'intégrales zêta locales qui ne dépend que de m et des composantes archimédiennes de Ψ et τ et qui ne s'annule pas en m .

Remarque 4.3. — Chen utilise une normalisation des fonctions L de Rankin–Selberg pour $GL(n) \times GL(n')$ où l'équation fonctionnelle relie $\Lambda(s, \Sigma \times \Pi)$ à $\Lambda(1-s, \Sigma^{\vee} \times \Pi^{\vee})$, ce qui explique pourquoi les points auxquels on évalue les valeurs critiques sont dans $\mathbb{Z} + \frac{n+n'}{2}$, alors qu'avec la normalisation motivique les entiers critiques sont toujours dans \mathbb{Z} . Ainsi on parlera de *demi-entiers critiques* si $n + n'$ est impair.

12. On sait que si $G = GL(n)$ et Π est cuspidale AC, alors Π est essentiellement tempérée.

La paire (Ψ, τ) est dite *équilibrée* si elle satisfait à l’hypothèse (16). Les paires (V_ρ, V') qui satisfont (16) sont déterminées par la loi classique de branchement pour la restriction d’une représentation irréductible algébrique de $GL(n)$ à $GL(n-1)$. Cela nous dit que, si V_ρ est de caractère infinitésimal $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, avec $a_i \in \mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$ pour tout i , alors (16) est valable pour V' si et seulement si le caractère infinitésimal $b_1 > b_2 > \dots > b_{n-1}$ de la contragrédiente $(V')^\vee$ de V' satisfait

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 \cdots > b_{n-1} > a_n.$$

L’hypothèse (16) permet d’interpréter l’intégrale zêta globale pour $L(s_0, \Psi \times \tau)$, lorsque s_0 est un (demi)-entier critique dans le demi-plan de droite, comme un cup-produit en cohomologie topologique, et le théorème est conséquence directe de cette interprétation.

Des résultats analogues se trouvent dans Mahnkopf (2005), Grobner et Harris (2016) et Grobner et Lin (2021), et dans Li, Liu et Sun (2024) pour un corps de nombres quelconque, mais le traitement par Chen du cas où τ est *presque tempérée* est nouveau. Kazhdan et Mazur connaissaient déjà le principe de cet argument dans les années 70, et leur article avec Schmidt (Kazhdan, Mazur et Schmidt, 2000) l’utilisait pour construire des fonctions L p -adiques. Mais leur résultat était incomplet à l’époque parce que personne ne savait prouver que le facteur Z_∞ qui figure dans le numérateur n’était pas nul. Cet obstacle a été enfin levé par Sun (2017), qui a prouvé que $Z_\infty(m, \Psi, \tau) \neq 0$ si Ψ et τ sont essentiellement tempérées. L’appendice de Chen (2022a) contient la généralisation du résultat de Sun au cas où τ est presque tempérée.

4.2. Fonctions L de $GL(n) \times GL(2)$, le cas très déséquilibré

Soit $\Pi = \Pi(f)$ une représentation cuspidale AC de $GL(2)$ de poids k — c’est-à-dire qu’elle est engendrée par une forme nouvelle classique f de poids $k \geq 2$. Soit $n \geq 2$ un entier, et soit Σ une représentation cuspidale AC de $GL(n)$, de caractère infinitésimal $\kappa = (\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_n)$. On dit que la paire $(\Sigma, \Pi(f))$ est *très déséquilibrée* si $k > \kappa_1$. Dans ce cas, Yoshida a défini une invariante $q^\pm(\Sigma \times \Pi(f))$ qui intervient dans son calcul de la période de Deligne (Yoshida, 1994, Proposition 3.1) :

(18)

$$q^\pm(\Sigma \times \Pi(f)) = (2\pi i)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\delta-1) + nw/2} \cdot G(\omega_\Sigma) \cdot (c^+(f) \cdot c^-(f))^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \begin{cases} 1 & n \text{ pair} \\ c^{\pm\varepsilon}(f) & n \text{ impair} \end{cases}$$

avec $\varepsilon = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + w/2} \omega_{\Sigma, \infty}(-1)$ si n est impair. Ici, $G(\omega_\Sigma)$ est une somme de Gauss associée à la partie finie du caractère central de Σ .

THÉORÈME 4.4. — *Soit $(\Sigma, \Pi(f))$ une paire très déséquilibrée de représentations automorphes AC cuspidales de $GL(n) \times GL(2)$. On suppose que Σ est isomorphe à sa contragrédiente, à torsion par une puissance de la norme près. Alors sous certaines*

hypothèses de régularité, la conjecture de Deligne est valable pour $L(s, \Sigma \times \Pi(f))$, avec la période de (18) :

$$L\left(m + \frac{\delta}{2}, \Sigma \times \Pi(f)\right) \sim (2\pi i)^{nm} \cdot q^{(-1)^m} (\Sigma \times \Pi(f)).$$

Si f est la forme f_ξ de type CM associée à un caractère de Hecke ξ d'un corps quadratique imaginaire F , Shimura avait observé que les périodes $c^\pm(f)$ qui figurent dans l'expression (18) s'expriment en termes de périodes de courbes elliptiques avec multiplication complexe par F . D'autre part, pour tout ξ , $L(s, \Sigma \times \Pi(f_\xi))$ s'exprime en termes de fonctions L de groupes unitaires obtenues par la méthode de doubling, et le résultat est alors contenu dans Harris (1997), comme il a été déjà mentionné au § 3.2.

À partir de ce cas particulier, Chen déduit le théorème 4.4 pour f quelconque de son théorème 5.1, vers lequel nous nous tournons maintenant.

5. La formule de Chen

On écrit $\Lambda(s, \bullet)$ pour la fonction L multipliée par les facteurs d'Euler archimédiens (facteurs Γ), et l'on réserve $L(s, \bullet)$ pour le produit eulérien sur les nombres premiers, comme dans la conjecture de Deligne. Voici le résultat principal de l'article de Chen :

THÉORÈME 5.1 (Chen, 2022a, Theorem 4.3). — *Soient Σ, Σ' (resp. Π, Π') des représentations AC de $GL(n, \mathbb{A})$ (resp. $GL(n', \mathbb{A})$) telles que*

$$\Sigma_\infty = \Sigma'_\infty, \quad \Pi_\infty = \Pi'_\infty.$$

On suppose aussi que Σ_∞ et Π_∞ satisfont à une certaine propriété de régularité.

Soit $m_0 \in \mathbb{Z} + \frac{n+n'}{2}$ un (demi)-entier critique (remarque 4.3) pour $L(s, \Sigma \times \Pi)$ tel que

$$L(m_0, \Sigma \times \Pi') \cdot L(m_0, \Sigma' \times \Pi) \neq 0.$$

Alors, pour tout $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, on a

$$\sigma \left(\frac{L(m_0, \Sigma \times \Pi) \cdot L(m_0, \Sigma' \times \Pi')}{L(m_0, \Sigma \times \Pi') \cdot L(m_0, \Sigma' \times \Pi)} \right) = \frac{L(m_0, \sigma\Sigma \times \sigma\Pi) \cdot L(m_0, \sigma\Sigma' \times \sigma\Pi')}{L(m_0, \sigma\Sigma \times \sigma\Pi') \cdot L(m_0, \sigma\Sigma' \times \sigma\Pi)}.$$

On a en particulier

$$(19) \quad \frac{L(m_0, \Sigma \times \Pi) \cdot L(m_0, \Sigma' \times \Pi')}{L(m_0, \Sigma \times \Pi') \cdot L(m_0, \Sigma' \times \Psi)} \in E(\Sigma) \cdot E(\Sigma') \cdot E(\Pi) \cdot E(\Pi').$$

Comme il a été expliqué dans la section 2.5, ce résultat serait une conséquence de la conjecture de Deligne, grâce à la formule de factorisation (9) de Yoshida.

Voici une esquisse de la preuve. On construit la classe de cohomologie d'Eisenstein pour $GL(n + n')$

$$[Eis(\tau(X, Y))] = [Eis(X \otimes \|\mathbb{A}^{-\delta/2}\|) \boxplus (Y^\vee \otimes \|\mathbb{A}^{-m+1-\delta}\|)]$$

associée à une représentation automorphe (non cuspidale) $\tau(X, Y)$ pour chacune des paires (X, Y) , avec $X = \Sigma$ ou Σ' et $Y = \Pi$ ou Π' . La propriété de régularité garantit l'existence de $[Eis(\tau(X, Y))]$ et aussi l'existence de (beaucoup de) représentations cuspidales AC Ψ de $GL(n + n' + 1)$ telles que la paire $(\Psi, \tau(X, Y))$ satisfait aux conditions du théorème 4.2, et de plus que la fonction $L(s, \Psi \times \tau(X, Y))$ a au moins deux valeurs critiques. À noter que la même Ψ marche pour tous les choix de (X, Y) . D'ailleurs, $\tau(X, Y)_\infty$ est indépendant des choix et sera noté τ_∞ .

En réorganisant la formule (17) et en substituant la formule du théorème 3.6, on obtient la formule suivante pour la valeur $L(m + \frac{\delta}{2}, X \times Y)$ qui figure dans l'expression pour la période $p(\tau(X, Y), \varepsilon'_m)$ de $\tau(X, Y)$:

$$(20) \quad L\left(m + \frac{\delta}{2}, X \times Y\right) \sim \frac{L\left(\mu + \frac{1-\delta}{2}, \Psi \times X\right) \cdot L\left(\mu + \frac{3}{2} - m - \delta, \Psi \times Y^\vee\right) \cdot Z\left([\Psi_\infty \otimes |\cdot|^\mu]^{\varepsilon_\mu}, [\tau_\infty]^{\varepsilon'_\mu}\right)}{G(\omega_X) \cdot G(\omega_Y)^{-n-1} \cdot p(\Psi \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^\mu, \varepsilon_\mu) \cdot \mathcal{P}(X, Y)}$$

pour un certain entier μ , où

$$\mathcal{P}(X, Y) = p\left(X \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{(n'-\delta)/2}, \varepsilon'_\mu\right) \cdot p\left(Y^\vee \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-m+1-\delta-n/2}, \varepsilon'_\mu\right).$$

Cela montre que, pour chaque paire (X, Y) , la valeur $L\left(m + \frac{\delta}{2}, X \times Y\right)$ admet une factorisation analogue à celle de (9) pour la période de Deligne c^\pm , et le théorème est une conséquence immédiate.

6. La construction de Chen

Soient f une forme nouvelle de poids $k \geq 5$ et χ un caractère de Dirichlet. Voici la conjecture de Deligne pour les puissances symétriques, dans la forme démontrée par Chen :

THÉORÈME 6.1. — *Soit f une forme modulaire nouvelle de poids au moins 5 qui n'est pas de type CM. Soit $\delta \in \{0, 1\}$, δ de la même parité que $n - 1$. Alors*

$$\sigma\left(\frac{L_{(n)}\left(m + \frac{\delta}{2}, \Pi(f) \otimes \chi\right)}{(2\pi i)^{d_{n-1}^\pm} \cdot G(\chi)^{d_{n-1}^\pm} \cdot q^\pm(\Pi^n(f))}\right) = \frac{L_{(n)}\left(m + \frac{\delta}{2}, \Pi(f) \otimes \sigma\chi\right)}{(2\pi i)^{d_{n-1}^\pm} \cdot G(\sigma\chi)^{d_{n-1}^\pm} \cdot q^\pm(\Pi^n(\sigma(f)))}.$$

Chen démontre ce théorème par une application du théorème 5.1 à une série de quadruplets $(\Sigma, \Sigma', \Psi, \Psi')$, construite judicieusement, à partir de $\Pi = \Pi(f)$ et ses puissances symétriques de degré inférieur à $n - 1$, afin d'obtenir le théorème principal par récurrence. La récurrence commence par les cas connus de la conjecture de Deligne pour $GL(1)$, $GL(2) \times GL(1)$, $GL(2) \times GL(2)$, et $GL(2)^3$. Le premier cas est classique, les deux suivants sont dûs à Shimura ; le quatrième était démontré par Garrett et Harris (1993) pour $k \geq 5$, et généralisé à tout $k \geq 3$ dans des travaux antérieurs de Chen.

Le choix de ces quatre représentations est plutôt subtil. Afin de simplifier l'exposé, nous nous limitons au cas des puissances symétriques *impaires* Sym^{2r+1} et au poids pairs k , et l'on suppose que le caractère de Dirichlet χ est trivial. Plusieurs fois au cours de sa démonstration Chen est obligé d'imposer des hypothèses de régularité sur le poids des constructions intermédiaires ; nous omettons les détails. Choisissons un caractère de Dirichlet η de signe -1 et deux représentations automorphes holomorphes cuspidales Π' et Π'' de $GL(2)$. Par récurrence, nous pouvons supposer le théorème 6.1 connu (avec le caractère χ) pour tout $\mathrm{Sym}^{2r'+1}$ pour $1 \leq r' < r$ ⁽¹³⁾. Lorsque $r = 1$ le résultat est démontré dans Garrett (1987) et Garrett et Harris (1993) et dans des travaux récents de Chen (2022b) ; donc on suppose $r \geq 2$. Définissons

$$\Sigma = \mathrm{Sym}^{r+1} \Pi, \quad \Sigma' = (\mathrm{Sym}^{r-1} \Pi \otimes \eta) \boxplus (\Pi' \otimes \|\mathbb{A}^{-\delta/2})$$

où $\delta \in \{0, 1\}$ avec $\delta \equiv r \pmod{2}$ et

$$\Psi = \mathrm{Sym}^r \Pi, \quad \Psi' = (\mathrm{Sym}^{r-2} \Pi \otimes \eta) \boxplus (\Pi'' \otimes \|\mathbb{A}^{(\delta-1)/2}).$$

L'observation cruciale est que l'on peut choisir des représentations Π' et Π'' de $GL(2)$ simultanément qui satisfont aux deux conditions suivantes :

- CONDITIONS 6.2. — 1. $\Sigma_\infty \xrightarrow{\sim} \Sigma'_\infty$ et $\Psi_\infty \xrightarrow{\sim} \Psi'_\infty$; ceci détermine les poids et caractères centraux de Π'_∞ et Π''_∞ ;
2. Dans les produits de Rankin–Selberg avec les puissances symétriques Ξ de Π qui interviennent dans le calcul, les paires (Ξ, Π') ou (Ξ, Π'') des représentations de $GL(n) \times GL(2)$ sont très déséquilibrées au sens du §4.2, de sorte que ce sont les périodes de Π' et Π'' qui dominent.

(Il y a une exception au deuxième point, à savoir l'expression $q_\bullet^\pm(\mathrm{Sym}^N M(f) \times \Pi')$ dans la formule (24), qui intervient dans l'expression (27). Le calcul ici est très délicat et je ne peux pas donner plus de détails, voir Chen, 2022a, Theorem 5.11(ii).)

Maintenant nous appliquons le théorème 5.1 à ces données et l'on voit ce qui en sort. La décomposition de Clebsch-Gordan pour le produit tensoriel $\mathrm{Sym}^{r+1} \otimes \mathrm{Sym}^r$ nous donne l'expression

$$(21) \quad L(s, \Sigma \times \Psi) = \prod_{j=0}^r L\left(s, \mathrm{Sym}^{2(r-j)+1} \Pi \otimes \omega_\Pi^j\right)$$

où ω_Π est le caractère central de Π , et

$$(22) \quad L(s, \Sigma' \times \Psi) = \prod_{j=0}^{r-1} L\left(s, \mathrm{Sym}^{2(r-j)-1} \Pi \otimes \omega_\Pi^j \eta\right) \cdot L\left(s - \frac{\delta}{2}, \mathrm{Sym}^r \Pi \times \Pi'\right).$$

Les expressions dans (21) avec $j > 0$ et les facteurs du produit (22) sont tous connus par récurrence. Par contre, par le point (2) de 6.2, seules les périodes de Π' et celle du

13. À noter que la récurrence pour les puissances symétriques impaires ne fait intervenir que d'autres puissances impaires. Par contre, pour sa récurrence pour les puissances symétriques paires Sym^{2r} , Chen a besoin de toutes les puissances Sym^m avec $m < 2r$.

caractère central de $\text{Sym}^r \Pi$ interviennent dans le dernier facteur de (22). Ainsi, dans le quotient le plus à gauche de l'expression (19) du théorème 5.1, le seul facteur inconnu est le facteur $L\left(m_0, \text{Sym}^{2r+1} \Pi\right)$ de $L(m_0, \Sigma \times \Psi)$, qui est l'objet de la récurrence :

$$(23) \quad \frac{L\left(m + \frac{1}{2}, \Sigma \times \Psi\right)}{L\left(m + \frac{1}{2}, \Sigma \times \Psi'\right)} \sim L\left(m + \frac{1}{2}, \text{Sym}^{2r+1} \Pi\right) \times \Omega$$

(Chen, 2022a, (5.15)), où Ω est un produit de périodes connues.

Maintenant on évalue l'expression qui figure dans le théorème 5.1, en écrivant (\bullet) pour toute expression où les périodes de Π' ou Π'' figurent, ainsi que les puissances de $2\pi i$ et des sommes de Gauss. On appelle ces expressions « élémentaires ». L'expérience nous apprend que les expressions élémentaires disparaîtront dans la formule finale, ne laissant que des puissances de $c^+(f)$ et $c^-(f)$, comme prévu par la conjecture de Deligne. Et effectivement, c'est ce qu'obtient Chen après deux pages de calculs.

Plus précisément, si $a, b \in \mathbb{C}^\times$, on écrit $a \sim_\bullet b$ si a/b est une expression élémentaire. On introduit des versions simplifiées des nombres définis dans Chen (2022a, §, 5.4) :

$$(24) \quad \begin{aligned} q_\bullet^\pm(\text{Sym}^{2r+1} M(f)) &= c^\pm(f)^{(r+1)(r+2)/2} c^\mp(f)^{r(r+1)/2} \\ q_\bullet^\pm(\text{Sym}^N M(f) \times \Pi') &= (c^+(f)c^-(f))^N, \end{aligned}$$

bien définies à la relation \sim_\bullet près ; pour le deuxième on suppose N tel que le poids de Π' ne domine pas celui de $\text{Sym}^N M(f)$. La conjecture 2.7 de Deligne (simplifiée) se traduit en la relation (encore) conjecturale

$$(25) \quad L\left(m + \frac{1}{2}, \text{Sym}^{2r'+1} M(f)\right) \sim_\bullet q^{(-1)^{m+r'}}(\text{Sym}^{2r'+1} M(f))$$

pour $r' \geq 0$. On admet (25) pour $r' < r$, et donc par récurrence on peut réécrire (23) :

$$(26) \quad \frac{L\left(m + \frac{1}{2}, \Sigma \times \Psi\right)}{L\left(m + \frac{1}{2}, \Sigma \times \Psi'\right)} \sim_\bullet \frac{L\left(m + \frac{1}{2}, \text{Sym}^{2r+1} \Pi\right)}{q_\bullet^{(-1)^m}(\text{Sym}^r M(f) \times \Pi')} \cdot \prod_{j=0}^{r-1} \frac{q_\bullet^{(-1)^{j-1}\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-1} M(f))}{q_\bullet^{(-1)^j\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-1} M(f))}$$

avec $\varepsilon = (-1)^{m+r}$. Encore par récurrence, Chen obtient une expression pour l'autre fraction qui intervient dans le théorème 5.1 :

$$(27) \quad \frac{L\left(m + \frac{1}{2}, \Sigma' \times \Psi'\right)}{L\left(m + \frac{1}{2}, \Sigma \times \Psi'\right)} \sim_\bullet \Omega' \cdot \frac{c^{(-1)^r\varepsilon}(M(f))}{q_\bullet^\varepsilon(\text{Sym}^{2r-1} M(f))} \cdot \prod_{j=0}^{r-3} \frac{q_\bullet^{(-1)^j\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-3} M(f))}{q_\bullet^{(-1)^{(j-1)}\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-3} M(f))},$$

où Ω' est un produit de périodes qui contribue à l'expression Ω'' que l'on verra un peu plus tard.

Sous l'hypothèse que f est de poids au moins 5, les conditions de régularité du théorème 5.1 sont valables. Donc (26) et (27) donnent

$$(28) \quad \begin{aligned} &L\left(m + \frac{1}{2}, \text{Sym}^{2r+1} \Pi\right) / \Omega'' \sim_\bullet \\ &\prod_{j=0}^{r-1} \frac{q_\bullet^{(-1)^j\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-1} M(f))}{q_\bullet^{(-1)^{(j-1)}\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-1} M(f))} \cdot \prod_{j=0}^{r-3} \frac{q_\bullet^{(-1)^{(j-1)}\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-3} M(f))}{q_\bullet^{(-1)^j\varepsilon}(\text{Sym}^{2(r-j)-3} M(f))} \cdot \Omega''', \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{Q}''' = \frac{q_{\bullet}^{\varepsilon}(\mathrm{Sym}^{2r-1}M(f))}{c^{(-1)^r\varepsilon}(M(f))}.$$

Ici \mathfrak{Q}'' est équivalent (pour \sim_{\bullet}) à l'expression

$$G(\eta)^{2r-1} \cdot \frac{q^{(-1)^m}(\mathrm{Sym}^{r+1}M(f) \times \Pi'') \cdot q^{(-1)^m}(\mathrm{Sym}^{r+1}M(f) \times \Pi')}{q^{(-1)^m}(\Pi' \times \Pi'') \cdot q^{(-1)^{m+w}}(\mathrm{Sym}^{r-1}M(f) \times \Pi'' \otimes \eta) \cdot \mathfrak{R}},$$

où $\mathfrak{R} = q^{(-1)^{m+w}}(\mathrm{Sym}^{r-2}M(f) \times \Pi' \otimes \eta)$, η est un caractère d'ordre fini, $G(\eta)$ est la somme de Gauss pour η , et w est un entier, tous deux nécessaires pour les constructions auxiliaires. Après quelques manipulations, on trouve

$$\mathfrak{Q}'' \sim (c^+M(f) \cdot c^-M(f))^{r+1}$$

à un produit de puissances de $2\pi i$ et des sommes de Gauss près, et sans aucune trace des représentations auxiliaires Π' et Π'' . Et, sans surprise, à la fin, après la simplification des expressions sur le membre de droite de (28), on trouve

$$(29) \quad L\left(m + \frac{1}{2}, \mathrm{Sym}^{2r+1}\Pi\right) \sim (2\pi i)^{(r+1)m} q^{\varepsilon}(\mathrm{Sym}^{2r+1}M(f)),$$

ce qui confirme la conjecture de Deligne dans ce cas.

Comme les calculs détaillés sont un petit peu alambiqués, je spécialise au cas où $r = 4$ et m et le poids k sont pairs. Ainsi $\varepsilon = 1$ et $w = 0$. Le produit des deux premiers termes de (28) est

$$\frac{q_7^+ \cdot (q_5^-)^2 \cdot (q_3^+)^2 \cdot q_1^-}{q_7^- \cdot (q_5^+)^2 \cdot (q_3^-)^2 \cdot q_1^+} \sim_{\bullet} c^+M(f)/c^-M(f).$$

où l'on écrit $q_a^{\pm} = q^{\pm}(\mathrm{Sym}^aM(f))$. Le dernier terme est

$$\frac{q_7^+}{c^+M(f)} \sim (c^+M(f))^{10-1} \cdot c^-M(f)^6.$$

Et $\mathfrak{Q}'' \sim (c^+M(f) \cdot c^-M(f))^5$. Le résultat final est donc

$$L\left(m + \frac{1}{2}, \mathrm{Sym}^9\Pi\right) \sim_{\bullet} c^+M(f)^{1+9+5} \cdot c^-M(f)^{-1+6+5} = q^+(\mathrm{Sym}^9M(f)),$$

comme prévu par (25).

7. Compléments

Les applications du théorème 5.1 de Chen ne se limitent pas aux valeurs critiques des fonctions L des puissances symétriques de formes modulaires. Dans cette section on présente deux exemples où l'idée de Chen est appliquée à d'autres cas de la conjecture de Deligne. Le premier de ces exemples est traité par Chen lui-même et concerne l'interprétation par Blasius de la conjecture de Deligne pour les produits tensoriels de formes modulaires. Le deuxième exemple fait l'objet d'un travail en cours de l'auteur de cet exposé avec Grobner, Lin, et Raghuram.

7.1. Produits tensoriels de formes modulaires : une conjecture de Blasius

Soient f_i des formes nouvelles normalisées de poids k_i pour $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, et ω_i le *nebentypus* de f_i — c'est-à-dire la partie finie du caractère central de la représentation automorphe Π_i engendrée par f_i . On pose $Q_i = \langle f_i, f_i \rangle$ où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est le produit scalaire de Petersson. Le produit tensoriel $\otimes_{i=1}^n M(f_i)$ est de rang 2^n sur son corps de coefficients. Blasius (1987) a déterminé les valeurs critiques de sa fonction L et il a montré que ses périodes de Deligne s'expriment facilement en termes des Q_i et des sommes de Gauss. Soit $\delta \in \{0, 1\}$ avec $\delta \equiv n \pmod{2}$. Voici la traduction par Blasius de la conjecture de Deligne pour le motif $\otimes_{i=1}^n M(f_i)$, dans la forme reproduite par Chen :

CONJECTURE 7.1 (Blasius). — *Soit $m + \frac{\delta}{2}$ une valeur critique de la fonction*

$$L(s, M(f_1) \otimes M(f_2) \otimes \cdots \otimes M(f_n)).$$

Alors

$$L(m + \frac{\delta}{2}, M(f_1) \otimes M(f_2) \otimes \cdots \otimes M(f_n)) \sim (2\pi i)^{2(n-2)(2m+\delta+w)} \cdot \left[\prod_{i=1}^n G(\omega_i) \right]^{2^{n-2}} [\pi^{k_i} Q_i]^{2^{n-2}-t_i}.$$

Ici $w \in \mathbb{Z}$ est une constante qui dépend de la normalisation des caractères centraux des Π_i et t_i est le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n \mid 2(\kappa_i - 1) < \sum_{j=1}^n \varepsilon_j (\kappa_j - 1), \quad \varepsilon_i = 1 \right\}.$$

La puissance de Q_i qui intervient dans la formule dépend de la position du poids k_i relativement aux k_j , $j \neq i$. Pour $n = 2$, cette conjecture a été démontrée par Shimura ; pour $n = 3$, le résultat était démontrée dans le cas équilibré — où aucun des k_i n'est supérieur à la somme des deux autres k_j — dans Garrett et Harris (1993), et dans les autres cas sous différentes hypothèses (Harris et Kudla, 1991 ; Furusawa et Morimoto, 2014, entre autres). La formule du théorème 5.1 permet à Chen de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7.2. — *La conjecture 7.1 est vérifiée si*

1. la quantité $|\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) (\kappa_i - 1)|$ est assez grande pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \neq (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ dans $\{\pm 1\}^n$;
2. le produit tensoriel $M(f_1) \otimes \cdots \otimes M(f_k)$ est un motif automorphe — c'est-à-dire qu'il correspond à une représentation automorphe de $GL(2^k)$ — pour tout $1 \leq k \leq n - 2$.

La condition (2) est satisfaite en particulier si $n \leq 4$, grâce à un théorème de Ramakrishnan (2000) ou si f_i est de niveau 1 pour $1 \leq i \leq n - 2$, par un théorème de Dieulefait (2020).

7.2. Fonctions L de Rankin–Selberg pour les corps CM

La formule (5.1) de Chen est motivée, comme on l’a déjà expliqué, par la factorisation par Yoshida de la période de Deligne d’un produit tensoriel. Lorsque $M = R_{F/\mathbb{Q}}M_0$ et $N = R_{F/\mathbb{Q}}N_0$ sont obtenus par restriction de scalaires à partir de motifs M_0 et N_0 purs sur une extension quadratique imaginaire F/\mathbb{Q} , et lorsque M_0 et N_0 sont *réguliers* au sens où

$$(30) \quad \dim H^{p,q}(M_0), \dim H^{p,q}(N_0) \leq 1 \quad \forall p, q, \quad H^{p,q}(M_0) = H^{p,q}(N_0) \text{ si } p = q,$$

et *polarisés*⁽¹⁴⁾, alors une factorisation explicite de $c^\pm(M \otimes N)$, qui sépare les contributions de M et de N comme dans (9), est obtenue dans Harris (2013)⁽¹⁵⁾. On peut donc s’attendre à ce qu’un argument analogue à celui de Chen donne une version de (5.1) pour les motifs sur les corps CM. Dans un travail en cours avec Grobner, Lin, et Raghuram, nous essayons de démontrer une telle formule. Cela devrait aussi permettre d’améliorer les résultats de Grobner, Harris et Lin (2018), qui traite la conjecture de Deligne pour les fonctions L de Rankin–Selberg sur les corps CM. Les résultats de Grobner, Harris et Lin (2018) sont valables uniquement sous certaines hypothèses de régularité, mais surtout ils reposent sur des conjectures très difficiles de non-annulation de valeurs centrales de fonctions L . Avec une formule comme celle de Chen, ces hypothèses de non-annulation ne sont plus nécessaires.

Références

- Tom Barnet-Lamb, David Geraghty, Michael Harris et Richard Taylor (2011). « A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy. II. » *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **47** (1), p. 29-98.
- Don Blasius (1986). « On the critical values of Hecke L-series », *Ann. Math. (2)* **124**, p. 23-63.
- (1987). « Appendix to Orloff, Critical values of certain tensor product L- functions », *Invent. Math.* **90**, p. 181-188.
- Shih-Yu Chen (2022a). *Algebraicity of ratios of Rankin-Selberg L-functions and applications to Deligne’s conjecture*. arXiv : [2205.15382](https://arxiv.org/abs/2205.15382).
- (2022b). « On Deligne’s conjecture for symmetric fifth L -functions of modular forms », *Forum Math.* **34** (3), p. 831-849.
- Laurent Clozel, Michael Harris et Richard Taylor (2008). « Automorphy for some l -adic lifts of automorphic mod l Galois representations », *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **108**, p. 1-181.

14. Si A_0 est un motif de poids w sur F , on dit que le motif $R_{F/\mathbb{Q}}A_0$ est polarisé s’il est isomorphe à $[R_{F/\mathbb{Q}}A_0^\vee(w)]^c$, où (w) désigne la torsion à la Tate, A_0^\vee est le dual de A_0 , et c désigne l’image par l’action de l’élément non trivial de $Gal(F/\mathbb{Q})$.

15. Je regrette de ne pas avoir vu l’article de Yoshida (2001) quand j’étais en train d’écrire cet article et donc de ne pas avoir cité le calcul de Yoshida.

- Pierre Deligne (1979a). « Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales », in : *Automorphic forms, representations and L -functions (Corvallis, Ore., 1977)*. Proc. Sympos. Pure Math. 33, Part 2, p. 313-346.
- (1979b). « Variétés de Shimura : Interpretation modulaire, et techniques de construction de modeles canoniques », in : *Automorphic forms, representations and L -functions (Corvallis, Ore., 1977)*. Proc. Sympos. Pure Math. 33, Part 2, p. 313-346.
- Luis Dieulefait (2020). « Automorphy of m -fold tensor products of $GL(2)$ », *Rev. Mat. Iberoam.* **36** (2), p. 407-434.
- Jens Franke (1998). « Harmonic analysis in weighted L_2 -spaces », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **31** (2), p. 181-279.
- Masaaki Furusawa et Kazuki Morimoto (2014). « On special values of certain L -functions », *Am. J. Math.* **136** (5), p. 1385-1407.
- Paul B. Garrett (1987). « Decomposition of Eisenstein series : Rankin triple products », *Ann. of Math. (2)* **125** (2), p. 209-235.
- Paul B. Garrett et Michael Harris (1993). « Special values of triple product L -functions », *Am. J. Math.* **115** (1), p. 161-240.
- Roger Godement et Hervé Jacquet (1972). *Zeta functions of simple algebras*. Lect. Notes Math. vol. 260, Springer.
- Harald Grobner et Michael Harris (2016). « Whittaker periods, motivic periods, and special values of tensor product L -functions », *J. Inst. Math. Jussieu* **15** (4), p. 711-769.
- Harald Grobner, Michael Harris et Jie Lin (2018). *Deligne's conjecture for automorphic motives over CM-fields*. arXiv : [1802.02958](https://arxiv.org/abs/1802.02958).
- Harald Grobner et Jie Lin (2021). « Special values of L -functions and the refined Gan-Gross-Prasad conjecture », *Am. J. Math.* **143** (3), p. 859-937.
- Harald Grobner et Gunja Sachdeva (2020). « Relations of rationality for special values of Rankin-Selberg L -functions of $GL_n \times GL_m$ over CM-fields », *Pac. J. Math.* **308** (2), p. 281-305.
- Günter Harder et A. Raghuram (2020). *Eisenstein cohomology for GL_N and the special values of Rankin-Selberg L -functions*. T. 203. Ann. Math. Stud. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Michael Harris (1990). « Automorphic forms of $\bar{\partial}$ -cohomology type as coherent cohomology classes », *J. Differ. Geom.* **32** (1), p. 1-63.
- (1997). « L -functions and periods of polarized regular motives », *J. Reine Angew. Math.* **483**, p. 75-161.
- (2013). « L -functions and periods of adjoint motives », *Algebra Number Theory* **7** (1), p. 117-155.
- Michael Harris et Stephen S. Kudla (1991). « The central critical value of a triple product L -function », *Ann. Math. (2)* **133** (3), p. 605-672.
- Michael Harris, Nick Shepherd-Barron et Richard Taylor (2010). « A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy », *Ann. Math. (2)* **171** (2), p. 779-813.

- Adolf Hurwitz (1897). « Ueber die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Functionen. » *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* **1897**, p. 273-276.
- (1899). « Ueber die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Functionen. » *Math. Ann.* **51**, p. 196-226.
- Hervé Jacquet et Robert P. Langlands (1970). *Automorphic forms on $GL(2)$* . Lect. Notes Math. vol 114, Springer.
- David Kazhdan, Barry Mazur et Claus-Günther Schmidt (2000). « Relative modular symbols and Rankin-Selberg convolutions », *J. Reine Angew. Math.* **519**, p. 97-141.
- Han-Ung Kufner (2024). *Deligne’s conjecture on the critical values of Hecke L -functions*. arXiv : [2406.06148](https://arxiv.org/abs/2406.06148).
- Robert P. Langlands (1979). « Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen », in : *Automorphic forms, representations and L -functions (Corvallis, Ore., 1977)*. Proc. Sympos. Pure Math. 33, Part 2, p. 205-246.
- Jian-Shu Li, Dongwen Liu et Binyong Sun (2024). « Period relations for Rankin-Selberg convolutions for $GL(n) \times GL(n - 1)$ », *Compos. Math.* **160** (8), p. 1871-1915.
- Joachim Mahnkopf (2005). « Cohomology of arithmetic groups, parabolic subgroups and the special values of L -functions on GL_n », *J. Inst. Math. Jussieu* **4** (4), p. 553-637.
- Barry Mazur (1973). « Courbes elliptiques et symboles modulaires », in : Séminaire Bourbaki, Volume 1971/1972, Lect. Notes Math. no. 317, Exposé no. 414, 277-294.
- James Newton et Jack A. Thorne (2021a). « Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms », *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **134**, p. 1-116.
- (2021b). « Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms. II. » *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **134**, p. 117-152.
- (2022). *Symmetric power functoriality for Hilbert modular forms*. arXiv : [2212.03595](https://arxiv.org/abs/2212.03595).
- Dinakar Ramakrishnan (2000). « Modularity of the Rankin-Selberg L -series, and multiplicity one for $SL(2)$ », *Ann. Math. (2)* **152** (1), p. 45-111.
- Alain Robert (1973). « Formes automorphes sur GL_2 », in : Séminaire Bourbaki, Volume 1971/1972, Lect. Notes Math. no. 317, Exposé no. 415, 295-318.
- Jean-Pierre Serre (1972). « Propriétés galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques », *Invent. Math.* **15**, p. 259-331.
- Freydoon Shahidi (1981). « On certain L -functions », *Am. J. Math.* **103**, p. 297-355.
- Goro Shimura (1959). « Sur les intégrales attachées aux formes automorphes », *J. Math. Soc. Japan* **11**, p. 291-311.
- (1977). « On the periods of modular forms », *Math. Ann.* **229** (3), p. 211-221.
- Binyong Sun (2017). « The nonvanishing hypothesis at infinity for Rankin-Selberg convolutions », *J. Am. Math. Soc.* **30** (1), p. 1-25.
- Richard Taylor (2008). « Automorphy for some l -adic lifts of automorphic mod l Galois representations. II », *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **108**, p. 183-239.
- Jean-Louis Verdier (1961). « Sur les intégrales attachées aux formes automorphes », in : Séminaire Bourbaki, Volume 1960/1961, exposé no. 216, p. 149-175.

- Hiroyuki Yoshida (1994). « On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms », *Duke Math. J.* **75** (1), p. 121-191.
- (2001). « Motives and Siegel modular forms », *Am. J. Math.* **123** (6), p. 1171-1197.
- Don Zagier (1977). *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*. Modular Funct. of one Var. VI, Proc. int. Conf., Bonn 1976, Lect. Notes Math. 627, p. 105-169 (1977).

Michael Harris

Department of Mathematics

Columbia University

2990 Broadway

New York, NY 10027

E-mail : `harris@math.columbia.edu`