Séminaire BOURBAKI Mars 2024
76e année, 2023–2024, no 1222

MESURES DE GIBBS NON LINÉAIRES ET LIMITES DE CHAMP MOYEN POUR LES SYSTÈMES QUANTIQUES [d'après Lewin, Nam et Rougerie]

par **Simona Rota Nodari**

Introduction

Une *mesure de Gibbs non linéaire* est une mesure de probabilité en dimension infinie de la forme

$$d\mu(u) = \frac{e^{-\mathcal{D}[u]}}{z} d\mu_0(u) \tag{1}$$

avec z un facteur de normalisation, μ_0 une *mesure gaussienne de covariance* $(-\Delta+V_0)^{-1}$ et $\mathcal{D}$ une fonction positive non quadratique. La définition précise de cette mesure sera discutée dans la section suivante, mais, au moins formellement, nous pouvons voir une mesure de Gibbs non linéaire comme la mesure définie par

$$d\mu(u) = \frac{e^{-\mathcal{E}(u)}}{Z_0 z} du$$

avec

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u|^2 + V_0|u|^2)\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{D}[u]\, dx \tag{2}$$

et Z_0 le facteur de normalisation de la mesure gaussienne $d\mu_0$.

Les mesures de Gibbs non linéaires jouent un rôle central dans de nombreux domaines des mathématiques. Elles ont été définies dans les années 60/70 dans le cadre de la théorie constructive des champs quantiques. Plus récemment, elles ont été utilisées pour l'analyse d'équations aux dérivées partielles non linéaires avec données initiales aléatoires ou d'équations aux dérivées partielles stochastiques. Finalement, elles apparaissent en mécanique quantique statistique dans la description du comportement d'un système avec un grand nombre de particules près d'une transition de phase.

Les résultats que nous discutons dans ce texte, dus à Lewin, Nam et Rougerie (2015, 2021), s'inscrivent dans cette dernière thématique. Plus précisément, d'un point de vue physique, nous nous intéressons à la formation d'un condensat de Bose–Einstein juste avant sa transition de phase. D'un point de vue mathématique, nous présentons l'émergence des mesures de Gibbs non linéaires (1) à partir des états de Gibbs (bosoniques) d'un problème linéaire à plusieurs particules dans une limite de type champ moyen.

Un système quantique de n bosons confinés par un potentiel $V\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to\infty} V(x) = +\infty$, et qui interagissent via un potentiel $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est décrit par un opérateur de Schrödinger de la forme

$$H_{\lambda,\nu,n} = \sum_{j=1}^{n}(-\Delta_{x_j} + V(x_j) - \nu) + \lambda \sum_{1\leq j<k\leq n} w(x_i - x_j). \tag{3}$$

Cet opérateur agit sur $\bigotimes_s^n L^2(\mathbb{R}^d)$, *i.e.* sur $L^2_s((\mathbb{R}^d)^n)$ le sous-espace de $L^2((\mathbb{R}^d)^n)$ contenant les fonctions symétriques par rapport aux permutations de leurs variables. Le paramètre λ est une *constante de couplage* qui sera utilisée pour modifier l'intensité de l'interaction tandis que ν est le *potentiel chimique* qui jouera un rôle crucial lorsqu'il sera nécessaire de renormaliser la théorie.

Dans le formalisme grand-canonique où le nombre de particules n'est pas fixé, la *fonction de partition* de ce système à température $T > 0$ est donnée par

$$\mathcal{Z}(\lambda, \nu, T) = 1 + \sum_{n\geq 1} \mathrm{Tr}\left[e^{-\frac{H_{\lambda,\nu,n}}{T}}\right]. \tag{4}$$

Dans ce texte, nous nous intéressons au régime

$$T = \frac{1}{\lambda} \text{ avec } \lambda \to 0^+,$$

où le nombre moyen de particules, donné par

$$\mathcal{Z}(\lambda, \nu, \tfrac{1}{\lambda})^{-1} \sum_{n\geq 1} n \mathrm{Tr}\left[e^{-\lambda H_{\lambda,\nu,n}}\right],$$

diverge. Ce régime correspond à une limite de type *champ moyen*.

Le résultat que nous souhaitons présenter affirme que, pour une fonction $\nu = \nu(\lambda)$ bien choisie, nous avons le développement suivant de la fonction de partition

$$\log \mathcal{Z}(\lambda, \nu(\lambda)) = \log \mathcal{Z}_0(\lambda, \nu(\lambda)) + \log z + o(1)_{\lambda\to 0^+} \tag{5}$$

avec $\mathcal{Z}(\lambda, \nu(\lambda)) = \mathcal{Z}(\lambda, \nu(\lambda), \frac{1}{\lambda})$. Ici, le terme $\log \mathcal{Z}_0(\lambda, \nu)$ est donné par la *théorie de champ moyen*. Dans ce contexte, cela correspond à restreindre le problème à la famille des états de Gibbs quasi-libres. Par la suite, nous verrons que le choix de l'état quasi-libre de référence dépend de la dimension d et de la nécessité d'utiliser une procédure de renormalisation pour $d = 2, 3$.

L'ordre suivant dans (5) fait intervenir la mesure de Gibbs non linéaire via sa constante de normalisation $z = \int e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0(u)$.

Par conséquent, le développement (5) établit bien la validité de la théorie du champ moyen au premier ordre, ainsi que les fluctuations autour de celui-ci impliquant la mesure de Gibbs non linéaire μ.

Dans la section 1, nous allons décrire le modèle quantique considéré ainsi que la construction des mesures de Gibbs non linéaires en dimension $d \leq 3$. La section 2 est dédiée à la présentation des résultats concernant l'apparition des mesures de Gibbs non linéaires dans une limite de champ moyen à température positive. Finalement, dans la section 3, nous présentons une partie des éléments de preuve des résultats énoncés.

Ce texte est inspiré par les travaux originaux de Lewin, Nam et Rougerie (2015, 2021), mais aussi par les articles de synthèse de Rougerie (2016, 2019) et Lewin (2023).

1. Contexte et définitions

Dans cette section, nous introduisons le formalisme nécessaire pour énoncer les résultats qui nous intéressent concernant les limites de champ moyen pour les systèmes quantiques.

En particulier, pour le modèle quantique à plusieurs particules, le formalisme grand-canonique, basé sur les espaces de Fock, est utilisé et le nombre de particules n'est pas fixé. Pour le modèle classique, nous passons en revue la construction des mesures gaussiennes et nous introduisons la notion de mesure de Gibbs non linéaire.

1.1. Modèle quantique et états de Gibbs

Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert séparable. Dans ce texte, nous considérons $\mathfrak{H} = L^2(\Omega)$ avec $\Omega = \mathbb{R}^d$. L'*espace de Fock bosonique* est donné par

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{s}^{n} \mathfrak{H} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \otimes_s \mathfrak{H} \oplus \cdots \tag{6}$$

où $\bigotimes_s^n \mathfrak{H}$ est le produit tensoriel symétrique de n copies de $\mathfrak{H}$. Dans notre cadre $\bigotimes_s^n \mathfrak{H}$ est le sous-espace de $L^2((\mathbb{R}^d)^n)$ qui contient les fonctions symétriques par rapport à l'échange de deux variables ce qui est approprié pour décrire une configuration de n bosons.

Autrement dit, l'espace de Fock bosonique est l'espace qui contient les suites de la forme $\Psi = (\psi^0, \psi^1, \psi^2, \dots) \in \mathbb{C} \times \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \otimes_s \mathfrak{H} \times \cdots$ telles que

$$\|\Psi\|_{\mathfrak{F}}^2 = \sum_{n \geq 0} \|\psi^n\|^2_{\otimes_s^n \mathfrak{H}} < \infty.$$

Il s'agit d'un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{\mathfrak{F}} = \sum_{n \geq 0} \langle \Psi_1^n, \Psi_2^n \rangle_{\otimes_s^n \mathfrak{H}}.$$

Par convention, le *vide* est défini par $|0\rangle := (1, 0, 0, \dots) \in \mathfrak{F}$.

Les opérateurs qui agissent sur un espace avec un nombre fini de particules peuvent être étendus à l'espace de Fock via la *seconde quantification.* Plus précisément, soit A_k un opérateur auto-adjoint sur $\otimes_s^k \mathfrak{H}$. On définit son action sur $\mathfrak{F}$ par

$$\mathbb{A}_k := 0 \oplus \dots \oplus \bigoplus_{n=k}^{\infty} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (A_k)_{i_1, \dots, i_k} \right), \tag{7}$$

où $(A_k)_{i_1,\ldots,i_k}$ désigne l'action de A_k sur les variables indexés par $i_1,\ldots,i_k$ dans $\otimes_s^n\mathfrak{H}$. Par définition, on notera

$$A_k\otimes_s \mathbb{1}_{n-k} = \binom{n}{k}^{-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}(A_k)_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Pour les opérateurs à un corps, *i.e.* $k=1$, on utilise la notation

$$\mathrm{d}\Gamma(A) := \mathbb{A} = 0\oplus\bigoplus_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{1\leq i\leq n}(A)_i\right) \tag{8}$$

Un exemple important d'opérateur à un corps est donné par l'opérateur *nombre total de particules*. Plus précisément, il s'agit de la seconde quantification de l'opérateur identité sur $\mathfrak{H}$, *i.e.*

$$\mathcal{N} = \mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1}_{\mathfrak{H}}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} n\mathbb{1}_{\otimes_s^n\mathfrak{H}}. \tag{9}$$

Soit $\Psi\in\mathfrak{F}$ tel que $\|\Psi\|_{\mathfrak{F}}=1$. L'*état pur* associé à Ψ est le projecteur orthogonal sur Ψ, noté $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Un *état mixte* Γ est par définition une superposition statistique d'états purs, *i.e.* une combinaison convexe éventuellement infinie de projecteurs orthogonaux qui commutent 2 à 2. En utilisant le théorème spectral, il est clair que l'ensemble des états mixtes, noté $\mathcal{S}$, est donné par l'ensemble des opérateurs positifs de trace 1 :

$$\mathcal{S}(\mathfrak{F}) = \{\Gamma \text{ opérateur auto-adjoint sur } \mathfrak{F},\ \Gamma\geq 0, \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma]=1\}. \tag{10}$$

Étant donné un état mixte $\Gamma\in\mathcal{S}(\mathfrak{F})$, on appelle *$k$-ième matrice de densité réduite* de Γ, notée $\Gamma^{(k)}$, l'opérateur sur $\otimes_s^k\mathfrak{H}$ défini par dualité via

$$\mathrm{Tr}_{\otimes_s^k\mathfrak{H}}[A_k\Gamma^{(k)}] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{A}_k\Gamma] \tag{11}$$

pour tout opérateur borné A_k sur $\otimes_s^k\mathfrak{H}$ et avec $\mathbb{A}_k$ la seconde quantification de A_k. Cela implique en particulier que le nombre de particules d'un état Γ est donné par la trace de la matrice de densité réduite à un corps,

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathcal{N}\Gamma] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\Gamma^{(1)}].$$

On remarque que si Γ est diagonale, *i.e.* Γ commute avec $\mathcal{N}$ et peut s'écrire sous la forme

$$\Gamma = \Gamma_0\oplus\Gamma_1\oplus\ldots$$

avec Γ_n un opérateur positifs qui agit sur $\otimes_s^k\mathfrak{H}$, alors la matrice densité réduite $\Gamma^{(k)}$ peut être définie en termes de traces partielles. Plus précisément,

$$\Gamma^{(k)} = \sum_{k\geq n}\binom{n}{k}\mathrm{Tr}_{k+1\to n}[\Gamma_n]$$

où $\mathrm{Tr}_{k+1\to n}$ indique la trace partielle par rapport à $n-k-1$ variables.

Une *observable* est un opérateur auto-adjoint $\mathbb{H}$ sur $\mathfrak{F}$. Sa moyenne dans l'état quantique Γ est donnée par $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{H}\Gamma]$. En particulier, si Γ est un état pur $\Gamma=|\Psi\rangle\langle\Psi|$, on obtient $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{H}\Gamma]=\langle\Psi,\mathbb{H}\Psi\rangle$. Dans la suite, deux familles d'observables joueront un rôle important : celles construites à partir d'opérateurs sur $\mathfrak{H}$ ou $\mathfrak{H} \otimes_s \mathfrak{H}$. Comme vu auparavant, si h est un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{H}$, sa seconde quantification $\mathrm{d}\Gamma(h)$ définit un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{F}$. Cet opérateur est souvent appelé *opérateur à un corps*. Un calcul facile montre que la moyenne de $\mathrm{d}\Gamma(h)$ dans un état quantique Γ peut s'écrire en termes de sa matrice densité réduite à un corps

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathrm{d}\Gamma(h)\Gamma] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h\Gamma^{(1)}].$$

De même, si w est un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{H} \otimes_s \mathfrak{H}$, sa seconde quantification est donnée par

$$\mathbb{W} = 0 \oplus 0 \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (w)_{i,j} \right) = 0 \oplus 0 \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n(n-1)}{2} w \otimes_s \mathbb{1}_{n-2} \right). \tag{12}$$

Sa moyenne peut donc s'écrire en termes des matrices densités réduites à deux corps

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{W}\Gamma] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w\Gamma^{(2)}].$$

Soit $\mathbb{H}$ un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{F}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\mathbb{H}}] < \infty$. Un *état de Gibbs quantique* est un état qui s'écrit sous la forme

$$\Gamma = \frac{e^{-\mathbb{H}}}{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\mathbb{H}}]}. \tag{13}$$

Si $\mathbb{H} = \mathrm{d}\Gamma(h)$ avec h un opérateur à un corps, positif et tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e^{-h}] < \infty$, on parle d'*état gaussien* ou *état quasi-libre*. Le nom gaussien est lié au fait que toutes les fonctions de correlation peuvent être calculées à partir de la matrice densité à un corps via le théorème de Wick (voir Bach, Lieb et Solovej (1994) et Solovej (2007) pour plus de détails).

Dans le modèle quantique que nous étudions, l'*hamiltonien*, qui encode l'énergie du système à plusieurs particules, est de la forme

$$\mathbb{H}_\lambda = \mathrm{d}\Gamma(h) + \lambda\mathbb{W} - \nu(\lambda)\mathcal{N} + E_0(\lambda). \tag{14}$$

Ici, h est un opérateur non-borné sur $\mathfrak{H}$, auto-adjoint, positif (au sens des formes quadratiques) et tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e^{-\beta h}] < \infty$ pour tout $\beta > 0$. Pour fixer les idées, nous considérons dans ce texte, le cas $h = -\Delta + V$ sur $\mathbb{R}^d$ avec $V(x) = |x|^s$ et $s > 1$ ou $h = -\Delta$ sur $\mathbb{T}^d$. Lewin, Nam et Rougerie (2015, 2021) traitent également le cas dans un potentiel confinant V plus général et le cas d'un opérateur h de la forme $-\Delta + V$ défini sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Le terme d'interaction $\mathbb{W}$ est la seconde quantification d'un opérateur de multiplication w sur $\mathfrak{H} \otimes_s \mathfrak{H}$ comme défini ci-dessus. La constante de couplage $\lambda > 0$ modélise l'intensité de l'interaction et le potentiel chimique $\nu(\lambda) \in \mathbb{R}$ est introduit pour régler le poids de l'opérateur nombre de particules $\mathcal{N}$. Finalement, $E_0(\lambda) \in \mathbb{R}$ est une énergie de référence. Ce décalage est défini de sorte que l'*interaction renormalisée*

$$\lambda\mathbb{W}^{\mathrm{ren}} = \lambda\mathbb{W} - \nu(\lambda)\mathcal{N} + E_0(\lambda) \tag{15}$$

soit un opérateur positif.

Dans ce contexte, l'état de Gibbs associé à l'hamiltonien $\mathbb{H}_\lambda$ à température $T > 0$, donné par

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{\mathcal{Z}(\lambda)} \exp\left(-\frac{\mathbb{H}_\lambda}{T}\right) \tag{16}$$

avec *fonction de partition*

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}\left[\exp\left(-\frac{\mathbb{H}_\lambda}{T}\right)\right], \tag{17}$$

est l'unique minimiseur de la *fonctionnelle d'énergie libre*

$$\mathcal{F}_{\lambda,T}[\Gamma] = \underbrace{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{H}_\lambda\Gamma]}_{\text{énergie}} + T\underbrace{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma\log\Gamma]}_{-\text{ entropie}} \tag{18}$$

parmi tous les états $\Gamma \in \mathcal{S}(\mathfrak{F})$ (*principe variationnel de Gibbs*). En effet, pour tout $\Gamma \in \mathcal{S}(\mathfrak{F})$,

$$\mathcal{F}_{\lambda,T}[\Gamma] - \mathcal{F}_{\lambda,T}[\Gamma_\lambda] = T\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma(\log\Gamma - \log\Gamma_\lambda)] := T\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_\lambda)$$

où $\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_\lambda)$ est l'*entropie relative* de Γ et Γ_λ, et l'entropie relative est telle que $\mathcal{H}(A, B) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $A = B$ (voir Carlen (2010) pour plus de détails). Finalement, l'énergie minimale $F_\lambda := \min_{\Gamma\in\mathcal{S}(\mathfrak{F})} \mathcal{F}_{\lambda,T}[\Gamma]$ est donné par

$$F_\lambda = -T\log\mathcal{Z}(\lambda). \tag{19}$$

Dans ce texte, nous nous intéressons au comportement asymptotique de l'énergie libre F_λ et des (matrices de densités réduites des) états de Gibbs associés, dans un régime où $\lambda \to 0$ et

$$T = \frac{1}{\lambda} \to \infty.$$

Les paramètres $\nu(\lambda)$ et $E_0(\lambda)$ devront être ajustés de manière appropriée pour obtenir une limite non triviale.

Comme on le verra par la suite, les états de Gibbs quasi-libres à température $\frac{1}{\lambda}$ jouent un rôle particulier. En effet, pour ces états, il est possible de calculer la fonction de partition et les matrices de densités réduites explicitement. Plus précisément, nous avons le lemme suivant (Lewin, Nam et Rougerie, 2015, 2021).

Lemme 1.1. — *Soit h un opérateur auto-adjoint positif sur $\mathfrak{H}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}] < \infty$ pour un $p \geq 1$ donné. Soit Γ_0 l'état de Gibbs quasi-libre associé à h,* i.e.

$$\Gamma_0 = \frac{e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(h)}}{\mathcal{Z}_0(\lambda)}, \quad \mathcal{Z}_0(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\lambda\mathrm{d}\Gamma(h)}]. \tag{20}$$

La fonction de partition est donnée par

$$-\log(\mathcal{Z}_0(\lambda)) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\log(1 - e^{-\lambda h})] \tag{21}$$

et la k-ième matrice de densité réduite par

$$\Gamma_0^{(k)} = \left(\frac{1}{e^{h\lambda} - 1}\right)^{\otimes k} \leq \lambda^{-k}(h^{-1})^{\otimes k}. \tag{22}$$

Ici, nous utilisons la convention que, pour tout opérateur borné A sur l'espace à un corps, l'opérateur $A^{\otimes k}$ dénote la restriction de l'opérateur correspondant, initialement défini sur $\bigotimes^k \mathfrak{H}$, au sous-espace bosonique $\bigotimes_s^k \mathfrak{H}$. Son action est donnée par

$$A^{\otimes k} f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_k = (Af_1) \otimes_s \cdots \otimes_s (Af_k).$$

De plus, si $A \geq 0$, alors

$$\mathrm{Tr}_{\otimes_s^k \mathfrak{H}}[A^{\otimes k}] \leq \mathrm{Tr}_{\otimes^k \mathfrak{H}}[A^{\otimes k}] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[A]^k.$$

1.2. Modèle classique et mesures de Gibbs non linéaires

Dans cette section, nous commençons par passer en revue la construction des mesures gaussiennes. Ensuite, nous introduisons les mesures de Gibbs non linéaires en dimension $d \leq 3$.

Soit h un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte sur un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$. Soit $\{\lambda_i\}_i$ la famille de valeurs propres de h et $\{u_i\}_i$ la famille des modes propres correspondants. Pour simplifier l'exposition, nous nous limitons au cas des opérateurs de Schrödinger à une particule de la forme

$$h = -\Delta + V = -\Delta + |x|^s = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left|u_j\right\rangle \left\langle u_j\right|$$

sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous introduisons la famille d'espaces de type Sobolev donnée par

$$\mathfrak{H}^t = \left\{ u = \sum_{j\geq 1} \alpha_j u_j, \|u\|^2_{\mathfrak{H}^t} := \sum_{j\geq 1} \lambda_j^t |\alpha_j|^2 < \infty \right\} \subset \mathfrak{H}$$

pour tout $t \geq 0$, et par $\mathfrak{H}^{-t} = (\mathfrak{H}^t)'$. L'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0$ peut donc être identifié avec $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. De même, les espaces $\mathfrak{H}^t$ sont isomorphes à des espaces ℓ^2 à poids,

$$\mathfrak{H}^t \simeq \left\{ (\alpha_j)_j \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{j\geq 1} \lambda_j^t |\alpha_j|^2 < \infty \right\}.$$

Pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, nous considérons V_K le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{H}$ engendré par $\{u_1, \ldots, u_k\}$ et la mesure de probabilité définie sur V_K par

$$d\mu_{0,K}(u) = \bigotimes_{i=1}^{K} \left(\frac{\lambda_i}{\pi} e^{-\lambda_i |\alpha_i|^2} d\alpha_i \right).$$

Ici, $\alpha_i = \langle u_i, u\rangle$ et $d\alpha = d\mathrm{Re}(\alpha) d\mathrm{Im}(\alpha)$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. La suite de mesures $(\mu_{0,K})_K$ définit une unique mesure μ_0 telle que $\mu_{0,K}$ soit la projection cylindrique de μ_0 sur V_K si et seulement si la suite $(\mu_{0,K})_K$ est tendue, *i.e.* si et seulement si elle vérifie

$$\lim_{R\to\infty} \sup_K \mu_{0,K}(\{u \in V_K, \|u\| \geq R\}) = 0 \tag{23}$$

(voir Skorokhod (2012, Chapitre 1, Lemma 1) pour plus de détails). Cette condition n'étant pas toujours satisfaite dans $\mathfrak{H}$, il est nécessaire de modifier la norme utilisée dans (23). En particulier, nous remarquons que

$$\mu_{0,K}(\{u \in V_k, \|u\|_{\mathfrak{H}^{1-p}} \geq R\}) \leq R^{-2} \int_{V_K} \|u\|^2_{\mathfrak{H}^{1-p}} d\mu_{0,K}(u) = R^{-2} \sum_{j=1}^{K} \lambda_j^{-p}.$$

Par conséquent, s'il existe $p > 0$ tel que

$$\sum_{j \geq 1} \lambda_j^{-p} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}] < \infty$$

la condition (23) est satisfaite et μ_0 est bien définie sur $\mathfrak{H}^{1-p}$. On appelle μ_0 la *mesure gaussienne* de covariance h^{-1}.

Cette mesure n'est a priori pas définie sur un espace fonctionnel très régulier, car $p > 0$ et même $p \geq 1$ dans les applications, et cela ne peut pas être amélioré. Ce fait est une conséquence du théorème de Fernique (1970) : si p est le plus petit nombre tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}] < \infty$ alors $\mu_0(\mathfrak{H}^{1-q}) = 0$ pour tout $q < p$. Autrement dit, si $q < p$, $\|u\|_{\mathfrak{H}^{1-q}} = +\infty$ μ_0-presque sûrement. Par conséquent, en prenant $q = 0$, nous remarquons que l'énergie est toujours infinie : $\langle u, hu\rangle = \|u\|_{\mathfrak{H}^1} = +\infty$ μ_0-presque sûrement.

Le cas le plus favorable correspond à $p = 1$ (ou $p \leq 1$ plus généralement). En effet, dans ce cas, l'opérateur h^{-1} est un opérateur à trace et la mesure μ_0 est supportée sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$. Si $p = 2$, *i.e.* si l'opérateur h^{-1} est un opérateur Hilbert–Schmidt, l'analyse devient plus complexe, car la mesure μ_0 est définie sur un espace de distributions.

Pour trouver le bon exposant $p > 0$ dans le cas qui nous intéresse, *i.e.* $h = -\Delta + |x|^s$, nous pouvons utiliser les inégalités de Lieb–Thirring (voir Dolbeault, Felmer, Loss et Paturel (2006, Theorem 1)). En particulier,

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}] \leq 2^p \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(h + \lambda_1)^{-p}] \leq \frac{2^p}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(|k|^2 + |x|^s + \lambda_1)^p} \, dx \, dk$$

avec λ_1 la première valeur propre de h, ce qui donne $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}] < \infty$ pour tout $p > \frac{d}{2} + \frac{d}{s}$.

En dimension $d = 1$, il est donc possible de choisir $p = 1$ à condition que $s > 2$. En dimension supérieure, $d = 2, 3$, le choix $p = 1$ n'est jamais possible. Par contre, si $s > \frac{2d}{4-d}$, nous pouvons prendre $p = 2$ ce qui sera suffisant par la suite. Cela permet de conclure que la mesure gaussienne μ_0 est bien définie sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ seulement en dimension $d = 1$. En dimension $d = 2, 3$, la mesure gaussienne est en général définie sur un espace de Sobolev avec indice négatif (un espace de distributions).

La mesure gaussienne μ_0 apparaît naturellement à la limite $\lambda \to 0^+$ dans le cas sans interactions $w \equiv 0$. En effet, nous avons le lemme suivant (voir Lewin, Nam et Rougerie (2015, Lemma 3.4) et Lewin, Nam et Rougerie (2021, Lemma 5.10)).

Lemme 1.2. — *Soit h un opérateur auto-adjoint positif sur $\mathfrak{H}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}] < \infty$ pour un $p \geq 1$ donné. Soit μ_0 la mesure gaussienne de covariance h^{-1} et Γ_0 l'état de Gibbs quasi-libre associé à h. Alors, pour tout $k \geq 1$*

$$\lambda^k \, k! \, \Gamma_0^{(k)} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \int_{\mathfrak{H}^{1-p}} |u^{\otimes k}\rangle \, \langle u^{\otimes k}| \, d\mu_0(u) = k!(h^{-1})^{\otimes k} \tag{24}$$

dans l'espace de Schatten $\mathfrak{S}^p(\bigotimes_s^k \mathfrak{H})$.

Nous rappelons que l'espace de Schatten $\mathfrak{S}^p(\mathfrak{K})$ d'un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ est défini par

$$\mathfrak{S}^p(\mathfrak{K}) = \left\{A\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}, \|A\|^p_{\mathfrak{S}^p(\mathfrak{K})} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[|A|^p] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[(A^*A)^{p/2}] < \infty\right\}. \tag{25}$$

Remarque 1.3. — Pour tout $k \geq 1$,

$$\gamma_0^{(k)} := \int_{\mathfrak{H}^{1-p}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\mu_0(u) \tag{26}$$

définit la k-ième matrice de densité associée à la mesure μ_0. Un calcul explicite (voir Lewin, Nam et Rougerie (2015, Lemma 3.3)) montre que

$$\gamma_0^{(k)} = k!(h^{-1})^{\otimes k}.$$

Par conséquent, (l'unique extension de) $\gamma_0^{(k)}$ est un opérateur compact sur $\bigotimes_s^k$ et

$$\mathrm{Tr}_{\otimes_s^k}[(\gamma_0^{(k)})^p] \leq (k!)^p [\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}]]^k < \infty.$$

Cela implique, en particulier, $\gamma_0^{(k)} \in \mathfrak{S}^p(\bigotimes_s^k \mathfrak{H})$.

Pour prendre en compte le cas avec interactions, nous aurons besoin d'introduire les *mesures de Gibbs non linéaires* μ. Formellement, il s'agit de mesures de probabilité en dimension infinie de la forme

$$d\mu(u) = \frac{e^{-\mathcal{D}[u]}}{z} d\mu_0(u) \tag{27}$$

avec z un facteur de normalisation et $\mathcal{D}$ un terme non linéaire. Le terme non linéaire est ici de la forme

$$\mathcal{D}[u] = \mathrm{Ren.}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} w(x-y)|u(x)|^2|u(y)|^2 \, dx \, dy\right\}. \tag{28}$$

En dimension $d = 1$ et lorsque $p = 1$, la définition de $\mathcal{D}$ ne pose pas de soucis, car μ_0 est définie sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. En dimension supérieure, u est μ_0-presque sûrement une distribution ce qui rend problématique la définition de l'intégrale (28). La solution pour définir une telle mesure consiste à renormaliser l'interaction en soustrayant des contre-termes formellement infinis, ce que nous avons indiqué ici par la notation 'Ren.'. Plus précisément, après avoir projeté la mesure sur un espace de dimension finie K, il faudra s'assurer que les contre-termes divergent de la même façon que le terme principal lorsque K tend vers l'infini, afin d'avoir un objet final bien défini. Ce type de construction, due à Nelson (1973) a été intensivement étudiée en théorie constructive des champs quantiques.

Il est important de noter ici que, en dimension $d = 1$ et pour $1 < s \leq 2$, $\mathcal{D}$ est bien défini sans renormalisation pour des w suffisamment réguliers bien que μ_0 ne vive pas sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. En effet, la mesure μ_0 vit sur un espace $L^r(\mathbb{R}^d)$ pour $r > 2$, ce qui permet de donner un sens à $\mathcal{D}$ sans renormalisation (voir Lewin, Nam et Rougerie (2018a)).

1.2.1. *Mesures de Gibbs non linéaires pour $d = 1$, $p = 1$.* — Nous commençons par considérer le cas simple de la dimension $d = 1$. De plus, nous supposons que

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-1}] < \infty \tag{29}$$

de sorte que la mesure μ_0 soit définie sur l'espace $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$. Dans ce texte, h étant donné par $-\Delta + |x|^s$, cela revient à supposer $s > 2$.

Pour pouvoir définir rigoureusement la mesure de Gibbs non linéaire (27), il suffit de montrer que le terme non linéaire

$$\mathcal{D}[u] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} w(x-y)|u(x)|^2|u(y)|^2\, dx\, dy \tag{30}$$

est fini μ_0-presque surement. Dans ce cas, la fonction de partition

$$z = \int_{\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0(u) \tag{31}$$

est bien définie et

$$d\mu(u) = \frac{e^{-\mathcal{D}[u]}}{z} d\mu_0(u) \tag{32}$$

devient une mesure de probabilité sur $\mathfrak{H}$.

En utilisant le fait que pour tout opérateur positif auto-adjoint w sur $\mathfrak{H} \otimes_s \mathfrak{H}$

$$\int_{\mathfrak{H}} \langle u \otimes u, wu \otimes u\rangle\, d\mu_0(u) = \mathrm{Tr}_{\otimes_s^2 \mathfrak{H}}[wh^{-1} \otimes h^{-1}],$$

on peut en déduire une condition suffisant sur w dans le cas $h = -\Delta + |x|^s$ avec $s > 2$. Plus précisément, il suffit de supposer

$$0 \leq w = w_1 + w_2$$

avec $w_1 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ et w_2 une mesure positive de masse finie sur $\mathbb{R}$.

Nous remarquons encore une fois que le terme non linéaire (30) pourrait rester μ_0-presque sûrement fini même si la mesure μ_0 n'est pas définie sur $\mathfrak{H}$. En effet, Lewin, Nam et Rougerie (2018a) ont montré que si $s > 1$, alors le support de μ_0 est donné par $L^r(\mathbb{R})$ pour tout $\max(2, 4/s) < r < \infty$. Cela permet de montrer que si $0 \leq w = w_1 + w_2$ avec w_1 une mesure de Radon bornée et $w_2 \in L^q(\mathbb{R})$ pour $1 \leq q < \frac{1}{(2-s)_+}$, l'application $u \in \mathcal{D}[u]$ est dans $L^1(d\mu_0)$ et $\mathcal{D}[u]$ est μ_0-presque surement fini (Lewin, Nam et Rougerie, 2018a, Corollary 3.3).

1.2.2. *Mesures de Gibbs non linéaires pour $d = 2, 3$, $p = 2$.* — Le cas $d = 2, 3$ est plus complexe et comme nous l'avons déjà mentionné une procédure de renormalisation est nécessaire pour définir les mesures de Gibbs non linéaires et en particulier le terme d'interaction (28).

Nous supposons toujours $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty$, ce qui correspond à $s > \frac{2d}{4-d}$ lorsque $h = -\Delta + |x|^s$.

Soit μ_0 la mesure gaussienne de covariance h^{-1}. Pour tout $f \in L^1(d\mu_0)$, on note

$$\langle f(u)\rangle_{\mu_0} = \int f(u)\, d\mu_0(u) \tag{33}$$

la valeur moyenne associée. Finalement, pour tout $K \geq 1$, on considère P_K le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_K\}$ avec $u_1, \ldots, u_K$ les K premiers modes propres de h. Nous avons le résultat suivant (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Lemma 5.3).

Lemme 1.4. — *Soit h un opérateur auto-adjoint positif sur $\mathfrak{H}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty$. Soit $w \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ un potentiel d'interaction dont la transformée de Fourier $\hat{w}$ satisfait $0 \leq \hat{w} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $K \geq 1$, on définit l'interaction renormalisée tronquée par*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_K[u] := \frac{1}{2} \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} w(x-y) \left(|P_K u(x)|^2 - \langle |P_K u(x)|^2 \rangle_{\mu_0}\right) \\ \left(|P_K u(y)|^2 - \langle |P_K u(y)|^2 \rangle_{\mu_0}\right) dx\, dy.\end{aligned} \tag{34}$$

Alors, $\mathcal{D}_K[u] \geq 0$ et $\mathcal{D}_K[u]$ converge vers une limite $\mathcal{D}[u] \geq 0$ dans $L^1(d\mu_0)$. Par conséquent, la mesure de probabilité

$$d\mu(u) = \frac{e^{-\mathcal{D}[u]}}{z} d\mu_0(u), \quad z = \int e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0(u) \tag{35}$$

est bien définie. De plus, les matrices de densité correspondantes

$$\gamma_\mu^{(k)} := \int |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}|\, d\mu(u)$$

sont dans $\mathfrak{S}^p(\bigotimes_s^k \mathfrak{H})$ pour tout p tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-p}] < \infty$.

Cette procédure de renormalisation revient à renormaliser la densité de masse $|u(x)|^2$ après projection sur un espace de dimension fini. En effet, étant donné que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-1}] = \infty$, $|u(x)|^2$ est μ_0-presque sûrement infini. Le point est que, si $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty$, alors cet infini est « le même » μ_0-presque partout en u.

Remarque 1.5. — Il est intéressant, et important pour la suite, de mieux comprendre l'effet de la renormalisation sur le terme d'interaction. Pour cela, nous pouvons calculer formellement l'espérance dans la mesure de Gibbs libre μ_0 des interactions renormalisées et non-renormalisées.

Premièrement, en utilisant la transformée de Fourier, nous écrivons

$$w(x-y) = \int \hat{w}(k) e^{ik\cdot x} e^{-ik\cdot y}\, dk$$

et nous notons e_k l'opérateur de multiplication par $e^{ik\cdot x}$. Formellement, l'interaction non-renormalisée s'écrit alors sous la forme

$$\widetilde{\mathcal{D}}[u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} w(x-y) |u(x)|^2 |u(y)|^2\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\langle u, e_k u\rangle|^2\, dk, \tag{36}$$

tandis que l'interaction renormalisée est donnée par

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{Ren}}[u] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\langle u, e_k u\rangle - \langle \langle u, e_k u\rangle \rangle_{\mu_0}|^2\, dk. \tag{37}$$

Ici, pour ne pas alourdir ultérieurement la notation, nous avons omis l'indice $\mathfrak{H}$ sur le produit scalaire. Le théorème de Wick, satisfait par la mesure gaussienne μ_0, nous dit que

$$\langle \bar{\alpha}_i \alpha_j \rangle = \frac{1}{\lambda_j}\delta_{i=j}, \quad \langle \alpha_i \bar{\alpha}_j \bar{\alpha}_m \alpha_\ell \rangle = \frac{1}{\lambda_i \lambda_m}\delta_{i=j}\delta_{m=\ell} + \frac{1}{\lambda_i \lambda_\ell}\delta_{i=m}\delta_{j=\ell} \tag{38}$$

ce qui nous permet de calculer facilement $\langle |\langle u, e_k u\rangle|^2\rangle_{\mu_0}$ et $\langle |\langle u, e_k u\rangle - \langle\langle u, e_k u\rangle\rangle_{\mu_0}|^2\rangle_{\mu_0}$. En effet, en écrivant $u = \sum_i \alpha_i u_i$ avec $\alpha_i = \langle u_i, u\rangle$, on obtient

$$\langle u, e_k u\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle u_i, e_k u_j\rangle$$

et

$$\begin{aligned}\langle u, e_k u\rangle - \langle\langle u, e_k u\rangle\rangle_{\mu_0} &= \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle u_i, e_k u_j\rangle + \sum_{i,j} \langle \alpha_i \bar{\alpha}_j\rangle_{\mu_0} \langle u_i, e_k u_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle u_i, e_k u_j\rangle + \sum_i \frac{1}{\lambda_i}\langle u_i, e_k u_i\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\langle |\langle u, e_k u\rangle|^2\rangle_{\mu_0} &= \sum_{i,j,m,\ell} \langle \alpha_i \bar{\alpha}_j \bar{\alpha}_m \alpha_\ell\rangle_{\mu_0} \langle u_i, e_k u_j\rangle \overline{\langle u_m, e_k u_\ell\rangle} \\ &= \sum_{i,m} \frac{1}{\lambda_i \lambda_m}\langle u_i, e_k u_i\rangle \overline{\langle u_m, e_k u_m\rangle} + \sum_{i,\ell} \frac{1}{\lambda_i \lambda_\ell}\langle u_i, e_k u_\ell\rangle \overline{\langle u_i, e_k u_\ell\rangle} \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e_k h^{-1}]\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e_k^* h^{-1}] + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e_k h^{-1} e_k^* h^{-1}].\end{aligned}$$

De façon analogue,

$$\begin{aligned}\langle |\langle u, e_k u\rangle - \langle\langle u, e_k u\rangle\rangle_{\mu_0}|^2\rangle_{\mu_0} =& \sum_{i,j,m,\ell} \langle \alpha_i \bar{\alpha}_j \bar{\alpha}_m \alpha_\ell\rangle_{\mu_0} \langle u_i, e_k u_j\rangle \overline{\langle u_m, e_k u_\ell\rangle} \\ &- \sum_{i,j,m} \langle \alpha_i \bar{\alpha}_j\rangle_{\mu_0} \frac{1}{\lambda_m}\langle u_i, e_k u_j\rangle \overline{\langle u_m, e_k u_m\rangle} \\ &- \sum_{i,j,m} \langle \bar{\alpha}_i \alpha_j\rangle_{\mu_0} \frac{1}{\lambda_m}\overline{\langle u_i, e_k u_j\rangle} \langle u_m, e_k u_m\rangle \\ &+ \sum_{i,j} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}\langle u_i, e_k u_i\rangle \overline{\langle u_j, e_k u_j\rangle} \\ =& \sum_{i,\ell} \frac{1}{\lambda_i \lambda_\ell}\langle u_i, e_k u_\ell\rangle \overline{\langle u_i, e_k u_\ell\rangle} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e_k h^{-1} e_k^* h^{-1}].\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que h^{-1} est un opérateur à noyau, dont le noyau intégral est donné par la fonction de Green G, nous pouvons écrire formellement

$$\begin{aligned}\int \widetilde{\mathcal{D}}[u]\, d\mu_0(u) = &\frac{1}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} w(x-y) G(x,x) G(y,y)\, dx\, dy \\ &+ \frac{1}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} w(x-y) |G(x,y)|^2\, dx\, dy\end{aligned} \tag{39}$$

et

$$\int \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{Ren}}[u]\, d\mu_0(u) = \frac{1}{2} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} w(x-y)|G(x,y)|^2\, dx\, dy. \tag{40}$$

Le premier terme de (39) qui porte le nom de *terme direct* est purement formel puisque dans le cas $h = -\Delta + |x|^s$ la densité de matière $G(x,x) = \lim_{y\to x} G(x,y) \equiv \infty$ avec une singularité au moins logarithmique. Le deuxième terme porte le nom de *terme d'échange*. Ce terme est lui bien défini car, lorsque $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty$, $(x,y) \mapsto G(x,y)$ est au moins dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'effet de la renormalisation décrite dans le lemme 1.4 est d'éliminer le terme direct et de ne garder que le terme d'échange.

2. Limites de champ moyen à température positive

Dans cette section, nous allons présenter les résultats obtenus par Lewin, Nam et Rougerie (2015, 2021) concernant la limite de champ moyen d'un système quantique en interaction et l'apparition des mesures de Gibbs non linéaires (voir aussi Fröhlich, Knowles, Schlein et Sohinger (2017) pour une approche différente).

Par simplicité et clarté d'exposition, nous nous limitons au cas

$$h = -\Delta + |x|^s \text{ dans } \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, 3.$$

Les résultats de Lewin, Nam et Rougerie (2015, 2018a, 2021) s'étendent à des hamiltoniens h plus généraux.

2.1. Limites de champ moyen pour $d = 1$, $p = 1$

Nous allons d'abord traiter le cas plus simple de la dimension $d = 1$. Nous supposons aussi que $s > 2$ de sorte que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-1}] < \infty$.

Théorème 2.1 (Limite de champ moyen en 1D). — *Soit $d = 1$. Soit h un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{H}$, $h > 0$ et tel que $\mathrm{Tr}[h^{-1}] < \infty$. Soit $w = w_1 + w_2$ avec w_1 une mesure positive de masse finie sur $\mathbb{R}$ et $0 \le w_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit Γ_λ l'état de Gibbs associé à l'hamiltonien $\mathbb{H}_\lambda$ donné par (14), avec $\nu(\lambda) = E_0(\lambda) = 0$, à température $T = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathcal{Z}(\lambda)$ la fonction de partition correspondante. Soit μ_0 la mesure gaussienne de covariance h^{-1} et soit $d\mu = z^{-1}e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0$ la mesure de Gibbs non linéaire définie en (32). Alors :*

1. *Convergence de l'énergie libre relative :*

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \log \frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} = \log z = \log\left(\int e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0(u)\right). \tag{41}$$

2. *Convergence des matrices de densités réduites : soit $\Gamma_\lambda^{(k)}$ la k-ième matrice de densité réduite de l'état de Gibbs Γ_λ. Pour tout $k \ge 1$,*

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}\left[\left| k!\,\lambda^k\,\Gamma_\lambda^{(k)} - \int |u^{\otimes k}\rangle\,\langle u^{\otimes k}|\, d\mu(u)\right|\right] = 0. \tag{42}$$

Remarque 2.2. — La convergence de l'énergie libre relative (41) ne caractérise pas de manière unique la mesure limite μ. Pour cela, nous avons besoin de la convergence de toutes les matrices de densité réduites donnée par (42). Ces deux résultats permettent de conclure que le système quantique considéré est entièrement décrit par la mesure de Gibbs non linéaire μ.

2.2. Limites de champ moyen pour $d = 2, 3$, $p = 2$

Dans cette partie, nous allons énoncer les résultats obtenus par Lewin, Nam et Rougerie (2021) en dimension $d = 2, 3$. Le même type de résultats a été prouvé simultanément par Fröhlich, Knowles, Schlein et Sohinger (2017), mais avec une approche complètement différente que nous ne discutons pas ici en détails. La méthode de Fröhlich, Knowles, Schlein et Sohinger (2017) est inspirée par la théorie quantique des champs et est basée sur une expansion perturbative de l'interaction.

La différence majeure dans la formulation des résultats en dimensions $d = 1$ et $d = 2, 3$ est liée au besoin de renormaliser l'objet limite comme discuté dans 1.2.2. Dans la remarque 1.5, nous avons vu que la renormalisation revient à ignorer le terme direct de l'énergie d'interaction. Or, en physique, la renormalisation ne consiste pas seulement à supprimer les infinis indésirables : la suppression des mauvais termes doit être justifiée par la seule modification des paramètres physiques du système (Delamotte, 2004). Il faut donc être capable de trouver un contre-terme approprié qui compense la divergence de l'énergie d'interaction directe et qui peut être obtenu en ajustant seulement le potentiel chimique $\nu(\lambda)$ et l'énergie de référence $E_0(\lambda)$.

Heuristiquement, nous pouvons raisonner de la façon suivante. D'une part, en utilisant la transformée de Fourier, nous avons vu que l'énergie d'interaction au niveau classique est donnée par

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} w(x-y)|u(x)|^2|u(y)|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{w}(k)\left|\int_{\mathbb{R}^d}|u(x)|^2 e^{ik\cdot x}\,dx\right|^2 dk.$$

D'autre part, l'interaction quantique peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{w}(k)\left|\mathrm{d}\Gamma(e^{ik\cdot x})\right|^2 dk - \frac{w(0)}{2}\mathcal{N}$$

où le deuxième terme est typiquement d'ordre inférieur et peut être ignoré pour le moment. Formellement, nous pouvons donc obtenir l'interaction quantique en remplaçant

$$\int_{\mathbb{R}^d}|u(x)|^2 e^{ik\cdot x}\,dx \text{ par } \mathrm{d}\Gamma(e_k)$$

avec e_k l'opérateur de multiplication par $e^{ik\cdot x}$ dans $\mathfrak{H}$. Nous avons vu dans la remarque 1.5 que, au moins formellement, la procédure de renormalisation au niveau classique donne

$$\mathcal{D}[u] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{w}(k)|\langle u, e_k u\rangle - \langle\langle u, e_k u\rangle\rangle_{\mu_0}|^2\,dk.$$

Par conséquent, la renormalisation appropriée au niveau quantique devrait être de la forme

$$\mathbb{W}^{\mathrm{ren}} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{w}(k)|\mathrm{d}\Gamma(e_k) - \langle\mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0}|^2\,dk$$

avec $\langle\cdot\rangle_{\Gamma_0} := \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\cdot\Gamma_0]$ la valeur moyenne dans l'état quantique de référence Γ_0. En particulier, un choix adéquat de $\nu(\lambda)$ et $E_0(\lambda)$ obtenu en développant le carré devrait permettre d'écrire l'interaction quantique renormalisée sous la forme (15).

Cette approche marche très bien dans le cas du gaz homogène, *i.e.* lorsque $h = -\Delta$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T}^d)$. En effet, soit $\kappa > 0$ fixé et Γ_0 l'état de Gibbs quasi-libre de référence associé à l'hamiltonien à un corps $-\Delta + \kappa$, *i.e.*

$$\Gamma_0 = \mathcal{Z}_0(\lambda)^{-1} e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta+\kappa)}, \ \mathcal{Z}_0(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta+\kappa)}].$$

L'interaction renormalisée devrait donc être de la forme

$$\mathbb{W}^{\mathrm{ren}} = \frac{1}{2} \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \hat{w}(k) |\mathrm{d}\Gamma(e_k) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0}|^2$$

(où la somme remplace l'intégrale, car nous travaillons sur $\mathbb{T}^d$). En utilisant les résultats du lemme 1.1, il est facile de remarquer que

$$\langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0} = \delta_{k=0} N_0(\lambda),$$

avec $N_0(\lambda)$ la valeur moyenne du nombre des particules donnée par

$$N_0(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathcal{N}\Gamma_0] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\Gamma_0^1] = \sum_{p \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \frac{1}{e^{(|p|^2+\kappa)\lambda} - 1}.$$

Cette quantité est infinie lorsque $\lambda \to 0^+$, mais sa divergence en λ peut être contrôlée explicitement (voir (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Lemma B.1)). En développant le carré, nous obtenons donc

$$\lambda \mathbb{W}^{\mathrm{ren}} = \lambda \mathbb{W} + \lambda \frac{w(0)}{2} \mathcal{N} - \lambda \hat{w}(0) N_0(\lambda) \mathcal{N} + \lambda \frac{\hat{w}(0)}{2} N_0(\lambda)^2.$$

En choisissant le potentiel chimique et l'énergie de référence comme suit

$$\nu(\lambda) = -\kappa - \lambda \frac{w(0)}{2} + \lambda \hat{w}(0) N_0(\lambda), \ E_0(\lambda) = \lambda \frac{\hat{w}(0)}{2} N_0(\lambda)^2, \tag{43}$$

nous pouvons finalement écrire l'hamiltonien $\mathrm{d}\Gamma(h+\kappa) + \lambda \mathbb{W}^{\mathrm{ren}}$ sous la forme (14).

Dans le cas du gaz inhomogène, *i.e.* $h = -\Delta + |x|^s$ sur $\mathbb{R}^d$, la situation est plus complexe. En effet, supposons $h = -\Delta + V(x)$ sur $\mathbb{R}^d$ avec

$$V(x) = |x|^s \text{ avec } s > \frac{2d}{4-d} \tag{44}$$

et $w \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction paire telle que

$$w \in L^1(\mathbb{R}^d, (1+V(x))^2\,dx), \ 0 \le \hat{w} \in L^1(\mathbb{R}^d, (1+|k|^2)\,dk). \tag{45}$$

Si l'on considère comme état de Gibbs quasi-libre de référence celui associé à l'hamiltonien $h = -\Delta + V(x)$ et on suit la procédure de renormalisation décrite auparavant, nous sommes amenés à perturber l'hamiltonien original par un potentiel qui dépend de x. Cela est problématique d'un point de vue physique, car ça ne correspond pas à la seule modification des paramètres du système $\nu(\lambda)$ et $E_0(\lambda)$. Une solution pour obtenir une renormalisation physiquement pertinente consiste dans ce cas à modifier l'état de Gibbs quasi-libre de référence.

Soit V_λ un potentiel à un corps général et soit Γ_0 l'état de Gibbs quasi-libre associé à $h = -\Delta + V_\lambda$, *i.e.*

$$\Gamma_0 = \mathcal{Z}_0(\lambda) e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V_\lambda)}, \ \mathcal{Z}_0(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V_\lambda)}].$$

Nous posons

$$\rho_0^{V_\lambda}(x) := \Gamma_0^{(1)}(x,x) = \left[\frac{1}{e^{\lambda(-\Delta+V_\lambda)}-1}\right](x,x)$$

où $\Gamma_0^{(1)}(x,y)$ est le noyau intégral de l'opérateur à un corps $\Gamma_0^{(1)}$, et on remarque que, en général, $\rho_0^{V_\lambda}$ dépend de x. En suivant le raisonnement détaillé ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda \mathbb{W}^{\mathrm{ren}} =& \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\mathrm{d}\Gamma(e_k) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0}|^2 \, dk \\
=& \lambda \mathbb{W} + \lambda \frac{w(0)}{2}\mathcal{N} - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) \mathrm{d}\Gamma(e_k) \overline{\langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0}} \, dk \\
&- \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) \overline{\mathrm{d}\Gamma(e_k)} \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0} \, dk + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0}|^2 \, dk \\
=& \lambda \mathbb{W} + \lambda \frac{w(0)}{2}\mathcal{N} - \lambda \mathrm{d}\Gamma(w \star \rho_0^{V_\lambda}) + \frac{\lambda}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \rho_0^{V_\lambda}(x) w(x-y) \rho_0^{V_\lambda}(y) \, dx \, dy.
\end{aligned} \tag{46}$$

Par conséquent, l'hamiltonien avec l'interaction renormalisée est donné par

$$\mathrm{d}\Gamma\left(-\Delta + V_\lambda - \lambda w \star \rho_0^{V_\lambda} + \lambda \frac{w(0)}{2}\right) + \lambda \mathbb{W} + E_0(\lambda)$$

avec

$$E_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \rho_0^{V_\lambda}(x) w(x-y) \rho_0^{V_\lambda}(y) \, dx \, dy. \tag{47}$$

Cet hamiltonien coïncide avec l'hamiltonien physique (14) avec potentiel chimique $\nu(\lambda)$ si et seulement si le potentiel V_λ est solution de l'équation non linéaire

$$V_\lambda - \lambda w \star \rho_0^{V_\lambda} + \lambda \frac{w(0)}{2} = V - \nu(\lambda). \tag{48}$$

Cette équation, appelée *counter-term problem* dans Fröhlich, Knowles, Schlein et Sohinger (2017), apparaît naturellement lorsqu'on restreint la minimisation de l'énergie libre (18) aux états quasi-libres. Plus précisément, on sait que, étant donné $\gamma \geq 0$ une matrice densité à un corps, on peut y associer un unique état quasi-libre

$$\Gamma = \frac{e^{-\mathrm{d}\Gamma(a)}}{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\mathrm{d}\Gamma(a)}]}$$

dans l'espace de Fock $\mathfrak{F}$ tel que $\Gamma^{(1)} = \gamma$ (Solovej, 2007 ; Bach, Lieb et Solovej, 1994). Ici, a est un opérateur à un corps défini de manière unique par

$$\gamma = \frac{1}{e^a - 1} \Leftrightarrow a = \log \frac{1+\gamma}{\gamma}.$$

Grâce au lemme 1.1, nous pouvons calculer facilement l'entropie

$$\begin{aligned}-\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma\log\Gamma] &= -\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma(-\mathrm{d}\Gamma(a)-\log\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\mathrm{d}\Gamma(a)}])] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[a\gamma]+\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\log(1-e^{-a})]\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\gamma\log\gamma-\gamma\log(1+\gamma)]-\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\log(1+\gamma)]\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\gamma\log\gamma-(1+\gamma)\log(1+\gamma)]\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le fait que Γ est un état quasi-libre et le théorème de Wick (voir Bach, Lieb et Solovej (1994) pour plus de détails), nous pouvons écrire les termes qui apparaissent dans l'énergie libre en termes de γ. Plus précisément, nous avons

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V-\nu)\Gamma] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V-\nu)\gamma]$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{W}\Gamma] = \frac{1}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}&\gamma(x,x)w(x-y)\gamma(y,y)\,dx\,dy\\ &+\frac{1}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} w(x-y)|\gamma(x,y)|^2\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Ici, l'opérateur à trace γ est assimilé à son noyau intégral $\gamma(x,y)$ et la partie diagonale $\gamma(x,x)$ est définie précisément par

$$\gamma(x,x) := \sum_j \lambda_j|u_j(x)|^2$$

où λ_j et u_j sont les valeurs et les modes propres de γ. L'énergie libre restreinte aux états quasi-libres, dite *énergie libre d'Hartree*, s'écrit donc sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^H[\gamma] :=& \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V-\nu)\gamma]+\frac{\lambda}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\gamma(x,x)w(x-y)\gamma(y,y)\,dx\,dy\\ &+\frac{\lambda}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}w(x-y)|\gamma(x,y)|^2\,dx\,dy\\ &-T\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\gamma\log\gamma-(1+\gamma)\log(1+\gamma)].\end{aligned}\tag{49}$$

Minimiser l'énergie libre parmi les états quasi-libre revient donc à minimiser $\mathcal{F}^H$ parmi les opérateurs γ auto-adjoints positifs. En pratique, il est plus simple techniquement de considérer le problème de minimisation associée à l'énergie d'Hartree libre sans le terme d'échange. Cela donne l'*énergie d'Hartree réduite* ou *énergie de champ moyen*,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{MF}[\gamma] :=& \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V-\nu)\gamma]+\frac{\lambda}{2}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\gamma(x,x)w(x-y)\gamma(y,y)\,dx\,dy\\ &-T\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\gamma\log\gamma-(1+\gamma)\log(1+\gamma)].\end{aligned}\tag{50}$$

Cette simplification n'est pas rédhibitoire d'un point de vue conceptuelle, car comme nous l'avons remarqué auparavant le terme d'échange est pris en compte dans la renormalisation.

Nous avons donc le lemme suivant (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Lemma 3.2).

Lemme 2.3. — *Soient $d\geq 1$, $T>0$, $\lambda\geq 0$ et $\nu\in\mathbb{R}$. Supposons que*

$$0\leq V\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d),\ e^{-V/T}\in L^1(\mathbb{R}^d),\ w\in L^1(\mathbb{R}^d),\ 0\leq\hat{w}\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Le problème variationnel

$$F^{MF}(T,\lambda,\nu) = \inf_{\gamma=\gamma^*\geq 0} \mathcal{F}^{MF}[\gamma]$$

admet un unique minimiseur γ^{MF} *qui est solution de l'équation non linéaire*

$$\gamma^{MF} = \frac{1}{e^{T^{-1}(-\Delta+V-\nu+\lambda\rho_{\gamma^{MF}}\star w)}-1}.$$

Par conséquent, si $T=\frac{1}{\lambda}$ *et* $\nu=\nu(\lambda)+\lambda\frac{w(0)}{2}$, *son potentiel* $V_\lambda := V-\nu(\lambda)-\lambda\frac{w(0)}{2}+\lambda\rho_{\gamma^{MF}}\star w$ *est solution de l'équation* (48).

Ce lemme nous donne le candidat naturel à être l'état de Gibbs quasi-libre de référence. Il s'agit de l'unique minimiseur de l'énergie de champ moyen avec potentiel chimique $\nu(\lambda)+\lambda\frac{w(0)}{2}$. Ce choix permet d'écrire l'hamiltonien $\mathbb{H}_\lambda$ sous la forme (14).

L'étude de l'équation non linéaire (48) a été détaillée dans Fröhlich, Knowles, Schlein et Sohinger (2017, Section 5). En particulier, il a été montré que lorsque $T=\frac{1}{\lambda}$ et que le potentiel chimique $\nu(\lambda)$ est choisi de façon appropriée, l'unique solution V_λ de (48) converge vers une limite V_0. Le candidat naturel pour être l'état de Gibbs quasi-libre de référence est celui associé à l'opérateur à un corps $-\Delta+V_\lambda$ qui nous donne à la limite la mesure gaussienne μ_0 de covariance $h_0^{-1}=(-\Delta+V_0)$. Nous présentons ici la reformulation de ces résultats qui se trouve dans Lewin, Nam et Rougerie (2021).

Théorème 2.4. — *Soit* $d=2,3$. *Soient* V *et* w *deux fonctions sur* $\mathbb{R}^d$ *satisfaisant* (44)-(45). *Pour tout* $\kappa>0$, *posons*

$$\rho_0^\kappa(\lambda) := \frac{1}{(2\pi)^d\lambda^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{dk}{e^{|k|^2+\lambda\kappa}-1}, \qquad \nu(\lambda)=\lambda\hat{w}(0)\rho_0^\kappa(\lambda)-\kappa-\lambda\frac{w(0)}{2}. \tag{51}$$

Alors, il existe $\kappa_0<\infty$ *tel que, pour tout* $\kappa\geq\kappa_0$ *et pour tout* $0<\lambda\leq 1$, *les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *L'unique solution* V_λ *de* (48) *satisfait*

$$\frac{V}{2}\leq V_\lambda-\kappa\leq\frac{3V}{2}. \tag{52}$$

2. *Il existe une fonction* V_0 *telle que*

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\left\|\frac{V_\lambda-V_0}{V}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}=0 \tag{53}$$

et

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\mathrm{Tr}\left[\left|(-\Delta+V_\lambda)^{-1}-(-\Delta+V_0)^{-1}\right|^2\right]=0. \tag{54}$$

3. *Le potentiel limite* V_0 *est solution de l'équation non linéaire*

$$\begin{cases} V_0 = V+w\star\rho_0+\kappa, \\ \rho_0(x)=\left(\dfrac{1}{-\Delta+V_0}-\dfrac{1}{-\Delta+\kappa}\right)(x,x). \end{cases} \tag{55}$$

L'existence d'une unique solution V_λ de l'équation non linéaire (48) a été montrée par Fröhlich, Knowles, Schlein et Sohinger, 2017 à l'aide d'un argument de point fixe qui impose les conditions $d \leq 3$ et κ suffisamment grand. Le théorème de point fixe est appliqué dans l'espace métrique complet

$$B(V) = \left\{ f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{B(V)} := \left\| \frac{f}{V} - 1 \right\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \right\} \tag{56}$$

pour l'inconnue $u = V_\lambda - \kappa$. La convergence dans la norme Hilbert–Schmidt (54) suit de la convergence de la suite des potentiels V_λ et de la régularité de V. Finalement, l'équation non linéaire pour le potentiel limite V_0 s'obtient en passant à la limite de façon appropriée dans l'équation (48) (voir l'appendice A dans Lewin, Nam et Rougerie (2021) pour plus de détails).

Le choix du potentiel chimique $\nu(\lambda)$ dans (51) correspond à l'intuition que la divergence de la densité de l'état de champ moyen γ^{MF} est essentiellement indépendante de x et se comporte comme $\rho_0^\kappa(\lambda)$. Cela implique que nous pouvons compenser cette divergence en ajustant seulement le potentiel chimique $\nu(\lambda)$. Le paramètre κ peut être interprété comme un potentiel chimique effectif dans la limite $\lambda \to 0^+$.

Nous pouvons finalement énoncer le résultat sur la limite de champ moyen en dimension $d = 2, 3$.

Théorème 2.5 (Limite de champ moyen en 2D et 3D). — *Soit $d = 2, 3$. Soient V et w deux fonctions sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant (44)-(45). Soit $\kappa \geq \kappa_0$ et $\nu(\lambda)$, V_λ, V_0 comme dans le théorème 2.4. Soit Γ_λ l'état de Gibbs associé à l'hamiltonien $\mathbb{H}_\lambda$ donné par (14), avec $E_0(\lambda)$ donné par (47), à température $T = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathcal{Z}(\lambda)$ la fonction de partition correspondante. Soit*

$$\Gamma_0(\lambda) = \mathcal{Z}_0(\lambda)^{-1} e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta + V_\lambda)}, \quad \mathcal{Z}_0(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta + V_\lambda)}]$$

l'état de Gibbs quasi-libre de référence. Soit μ_0 la mesure gaussienne de covariance $(-\Delta + V_0)^{-1}$ et soit $d\mu = z^{-1} e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0$ la mesure de Gibbs non linéaire définie en (35). Alors :

1. *Convergence de l'énergie libre relative :*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \log \frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} = \log z = \log \left(\int e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0(u) \right). \tag{57}$$

2. *Convergence (Hilbert–Schmidt) des matrices de densités réduites : soit $\Gamma_\lambda^{(k)}$ la k-ième matrice de densité réduite de l'état de Gibbs Γ_λ. Pour tout $k \geq 1$,*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}} \left[\left| k!\, \lambda^k\, \Gamma_\lambda^{(k)} - \int |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}|\, d\mu(u) \right|^2 \right] = 0. \tag{58}$$

Remarque 2.6. — Un résultat du même type est vrai dans le cas du gaz homogène ($h = -\Delta$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T}^d)$) que nous avons brièvement décrit au début de cette sous-section. Cette situation est plus simple, car nous n'avons pas besoin de modifier le potentiel de l'état de Gibbs quasi-libre de référence, mais nous pouvons tout simplement prendre celui associé à l'opérateur à un corps sans interactions. Les détails de ce résultat, qui est une conséquence directe du théorème 2.7 énoncé dans la section suivante, se trouvent dans Lewin, Nam et Rougerie (2021), tandis qu'une présentation résumée est contenue dans Lewin, Nam et Rougerie (2018b).

2.3. Limite de champ moyen pour $d = 2, 3$ - Problème inverse

Dans la section 2.2, nous avons vu que l'approche physiquement pertinente pour prendre en compte les effets de la renormalisation du terme d'interaction consiste à modifier l'état de Gibbs quasi-libre de référence. Cependant, même si cela n'est pas naturel d'un point de vue physique, il est aussi possible de modifier directement l'interaction comme dans (46) pour obtenir à la limite une mesure de Gibbs non linéaire absolument continue par rapport à la mesure gaussienne sans interactions. Ce point de vue est appelée *problème inverse* par Lewin, Nam et Rougerie (2021), car il est nécessaire de modifier le modèle de départ pour obtenir à la limite la mesure souhaitée.

Comme dans les sections précédentes, nous considérons le cas modèle $h = -\Delta + V$ sur $\mathbb{R}^d$ avec V comme dans (44) et $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction paire satisfaisant (45).

Le résultat que nous allons énoncer est valable pour une classe plus générale d'hamiltoniens de la forme $h = -\Delta + V$ avec $0 \le V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(R^d)$ qui diverge suffisamment vite à l'infini, l'hypothèse cruciale étant

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty.$$

Le théorème qui est au cœur du travail de Lewin, Nam et Rougerie (2021) est donc le suivant.

Théorème 2.7 (Limite de champ moyen - problème inverse)
Soit $d \le 3$ et soient V et w deux fonctions sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant (44) et (45). Soit $\Gamma_\lambda = \mathcal{Z}(\lambda)^{-1} e^{-\lambda \mathbb{H}_\lambda}$ l'état de Gibbs associé à l'hamiltonien

$$\mathbb{H}_\lambda = \mathbb{H}_0 + \lambda \mathbb{W}^{\mathrm{ren}} = \mathrm{d}\Gamma\left(-\Delta + V - \lambda w \star \rho_0 + \lambda \frac{w(0)}{2}\right) + \lambda \mathbb{W} + E_0(\lambda) \tag{59}$$

avec $\rho_0(x) := \Gamma_0^{(1)}(x,x) = \left[\frac{1}{e^{\lambda(-\Delta+V)}-1}\right](x,x)$ *et*

$$E_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \rho_0(x) w(x-y) \rho_0(y)\, dx\, dy.$$

Soit

$$\Gamma_0(\lambda) = \mathcal{Z}_0(\lambda)^{-1} e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V)}, \quad \mathcal{Z}_0(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V)}]$$

l'état de Gibbs quasi-libre de référence. Soit μ_0 la mesure gaussienne de covariance $(-\Delta+V)^{-1}$ et soit $d\mu = z^{-1} e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0$ la mesure de Gibbs non linéaire définie en (35). Alors :

1. *Convergence de l'énergie libre relative :*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \log \frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} = \log z = \log \left(\int e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0(u) \right). \tag{60}$$

2. *Convergence (Hilbert–Schmidt) des matrices de densités réduites : soit $\Gamma_\lambda^{(k)}$ la k-ième matrice de densité réduite de l'état de Gibbs Γ_λ. Pour tout $k \geq 1$,*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}} \left[\left| k!\, \lambda^k\, \Gamma_\lambda^{(k)} - \int |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}|\, d\mu(u) \right|^2 \right] = 0. \tag{61}$$

Remarque 2.8. — Le théorème 2.7 ne s'applique pas directement au gaz inhomogène $h = -\Delta + |x|^s$ car, comme nous l'avons vu auparavant, dans ce cas nous pouvons écrire l'hamiltonien sous la forme (59), mais seulement si nous utilisons le potentiel V_λ solution de l'équation (48). Le théorème 2.5 suit essentiellement du théorème 2.7 avec $h = -\Delta + V_\lambda$. En effet, toutes les estimations utilisées dans la preuve du théorème 2.7 dépendent seulement de $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]$ qui est une quantité uniformément bornée grâce à (54) lorsque $V_\lambda \to V_0$.

3. Stratégie et éléments de la preuve

La méthode utilisée dans Lewin, Nam et Rougerie (2015, 2021) pour montrer les résultats énoncés dans la section 2 est une méthode variationnelle, contrairement à celle employée par Fröhlich, Knowles, Schlein et Sohinger (2017).

En effet, comme nous l'avons remarqué dans la section 1.1 pour les états de Gibbs quantiques, le principe variationnel de Gibbs nous dit que pour tout opérateur auto-adjoint A sur un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$,

$$-\log(\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[e^{-A}]) = \inf_{\substack{0 \leq M = M^* \\ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[M]=1}} \{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[AM] + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[M \log M]\}$$

et l'infimum est atteint par l'unique minimiseur

$$M_0 = \frac{e^{-A}}{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[e^{-A}]}.$$

En particulier, pour tout opérateur auto-adjoint B sur $\mathfrak{K}$, nous avons

$$\begin{aligned}
&-\log\left(\frac{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[e^{-A-B}]}{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[e^{-A}]}\right) \\
&= \inf_{\substack{0 \leq M = M^* \\ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}=1}} \{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[(A+B)M] + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[M \log M] - \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[AM_0] - \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[M_0 \log M_0]\} \\
&= \inf_{\substack{0 \leq M = M^* \\ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}=1}} \{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[BM] + \mathcal{H}(M, M_0) + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[A(M - M_0)] + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[(M - M_0)\log M_0]\} \\
&= \inf_{\substack{0 \leq M = M^* \\ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}=1}} \{\mathcal{H}(M, M_0) + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[BM]\}
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{H}(M, M_0) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[M(\log M - \log M_0)] \geq 0$ l'entropie relative (de von Neumann) de M et M_0.

Dans le cas particulier que nous considérons ici, l'état de Gibbs Γ_λ associé à l'hamiltonien $\mathbb{H}_\lambda$ à température $\frac{1}{\lambda} > 0$ est l'unique minimiseur de l'énergie libre donnée par (18) et

$$\lambda F_\lambda = -\log \mathcal{Z}(\lambda) = \min_{\Gamma \in \mathcal{S}(\mathfrak{F})} \{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\lambda \mathbb{H}_\lambda \Gamma] + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma \log \Gamma]\}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} -\log \frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} &= \min_{\Gamma \in \mathcal{S}(\mathfrak{F})} \{\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0) + \lambda \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[(\mathbb{H}_0 - \mathbb{H}_\lambda)\Gamma]\} \\ &= \min_{\Gamma \in \mathcal{S}(\mathfrak{F})} \left\{\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0) + \lambda^2 \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{W}^{\mathrm{ren}} \Gamma]\right\} \end{aligned} \tag{62}$$

où Γ_0 est l'état de Gibbs quasi-libre associé à $\mathbb{H}_0 = \mathrm{d}\Gamma(h)$.

De façon analogue, il n'est pas difficile de montrer que la mesure de Gibbs non linéaire μ, définie par (32) en dimension $d = 1$ et (35) en dimension $d = 2, 3$, est l'unique minimiseur du problème variationnel

$$-\log z = \min_{\substack{\nu \text{ mesure de probabilité} \\ \nu \ll \mu_0}} \left\{\mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu, \mu_0) + \int \mathcal{D}[u]\, d\nu(u)\right\} \tag{63}$$

avec

$$\mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu, \nu') = \int \frac{d\nu}{d\nu'}(u) \log \left(\frac{d\nu}{d\nu'}(u)\right) d\nu'(u) \geq 0 \tag{64}$$

l'entropie relative (classique) de ν et ν', et $z = \int e^{-\mathcal{D}[u]}\, d\mu_0(u)$ la fonction de partition définie par (32) en dimension $d = 1$ et (35) en dimension $d = 2, 3$. Ici, $\frac{d\nu}{d\nu'}$ est la densité de la mesure ν par rapport à la mesure ν'.

En effet, au moins formellement, si l'on note $\bar{\nu}$ la densité de la mesure ν par rapport à la mesure μ_0, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu, \mu_0) + \int \mathcal{D}[u] \bar{\nu}(u)\, d\mu_0(u) - \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\mu, \mu_0) - \int \mathcal{D}[u] \frac{e^{-\mathcal{D}[u]}}{z}\, d\mu_0(u) \\ = \int \bar{\nu}(u) \log \bar{\nu}(u)\, d\mu_0(u) + \int \mathcal{D}[u] \bar{\nu}(u)\, d\mu_0(u) + \log z \\ = \int \bar{\nu}(u) \left(\log \bar{\nu}(u) - \log \frac{e^{-\mathcal{D}[u]}}{z}\right) d\mu_0 = \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu, \mu) \geq 0. \end{aligned}$$

L'objectif est donc d'interpréter le problème variationnel (63) comme une version semi-classique de (62). Ce passage du quantique au classique se fait à l'aide d'une famille de mesures semi-classiques appelées *mesures de De Finetti* que nous décrirons dans la section suivante. L'idée consiste à associer à la suite d'états quantiques Γ_λ une mesure semi-classique ν et montrer qu'une telle mesure est solution du problème de minimisation (63). Par unicité du minimiseur, il sera possible de conclure que ν coïncide avec la mesure de Gibbs non linéaire μ et déduire la convergence de l'énergie libre relative.

Une telle procédure demande de passer à la limite dans le problème de minimisation (62), la difficulté principale étant le contrôle de la borne inférieure

$$\liminf_{\lambda\to 0^+}\left(-\log\frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)}\right) \geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\mu,\mu_0) + \int \mathcal{D}[u]\, d\mu(u) \geq -\log z. \tag{65}$$

Plus précisément, le terme d'entropie et le terme d'interaction seront contrôlés séparément, *i.e.*

$$\liminf_{\lambda\to 0^+} \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0) \geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\mu,\mu_0) \tag{66}$$

et

$$\liminf_{\lambda\to 0^+} \lambda^2 \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{W}^{\mathrm{ren}}\Gamma] \geq \int \mathcal{D}[u]\, d\mu(u). \tag{67}$$

En particulier, l'ingrédient principal pour montrer (66) est une version semi-classique de la première inégalité de Berezin–Lieb adaptée à l'entropie relative (Berezin, 1972 ; Lieb, 1973 ; Simon, 1980). Cette inégalité que l'on décrira par la suite constitue une des contributions principales de Lewin, Nam et Rougerie (2015).

Pour le contrôle du terme d'interaction la stratégie employée dépend de la dimension d et, plus précisément, de la nécessité d'utiliser une renormalisation dans la définition de $\mathcal{D}[u]$.

Nous avons vu auparavant, qu'en dimension $d = 1$ et $p = 1$, le terme d'interaction est bien défini et la renormalisation n'est pas nécessaire. Pour le passage à la limite, la version quantitative du théorème de De Finetti quantique énoncé dans la section suivant est donc suffisante.

En dimension $d = 2, 3$, la borne inférieure (67) est beaucoup plus difficile à obtenir à cause de la renormalisation de l'interaction $\mathcal{D}[u]$. Cette estimation représente la nouveauté fondamentale du travail de Lewin, Nam et Rougerie (2021).

Nous présenterons dans les sections suivantes les idées principales et les outils qui apparaissent dans les preuves des résultats de la section 2, et notamment ceux utilisés pour obtenir la borne inférieure (65).

La borne supérieure correspondante s'obtient en utilisant des états test bien choisis et les outils d'analyse semi-classique en dimension finie présentés dans la suite. Le lecteur intéressé trouvera les détails des preuves dans (Lewin, Nam et Rougerie, 2015) pour la dimension $d = 1$ et dans (Lewin, Nam et Rougerie, 2021) pour les dimensions $d = 2, 3$.

La preuve de la convergence des matrices de densité réduites est déduite de diverses estimations développées pour prouver la convergence de l'énergie libre relative. À nouveau, le lecteur intéressé trouvera les détails dans les papiers originaux (Lewin, Nam et Rougerie, 2015, 2021).

3.1. Du quantique au classique : mesures de De Finetti

Dans cette section, nous allons introduire les objets qui permettront de faire le lien entre le problème variationnel quantique (62) et celui classique (63). Ces outils nous aideront à comprendre comment décrire les objets quantiques qui sont des opérateurs sur un espace de Hilbert, en termes d'objets classiques qui sont des mesures de probabilités. Pour cela, nous utilisons dans ce texte les approches dues principalement à Ammari et Nier (2008, 2009, 2015) et Lewin, Nam et Rougerie (2014a,b, 2015, 2021).

Une des difficultés dans l'application de l'analyse semi-classique dans ce contexte réside dans le fait que nous devons travailler dans un espace fonctionnel de dimension infinie. L'idée est donc de se ramener au cas de la dimension finie en utilisant la méthode de localisation dans l'espace de Fock décrite par Lewin (2011).

Plus précisément, soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert, P un projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}$ et $Q = \mathbb{1} - P$. L'espace $\mathfrak{H}$ peut s'écrire comme somme directe $\mathfrak{H} = (P\mathfrak{H}) \oplus (Q\mathfrak{H})$ ce qui entraîne la factorisation de l'espace de Fock

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{H}) \simeq \mathfrak{F}(P\mathfrak{H}) \otimes \mathfrak{F}(Q\mathfrak{H}).$$

En particulier, il existe une transformation unitaire $\mathcal{U} : \mathfrak{F}((P\mathfrak{H}) \oplus (Q\mathfrak{H})) \to \mathfrak{F}(P\mathfrak{H}) \otimes \mathfrak{F}(Q\mathfrak{H})$ telle que $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathbb{1}$. Pour tout état Γ sur $\mathfrak{F}$, et pour tout projecteur orthogonal P, on définit sa *localisation* Γ_P *sur* $\mathfrak{F}(P\mathfrak{H})$ comme l'état obtenu en prenant la trace partielle sur $\mathfrak{F}(Q\mathfrak{H})$ de Γ, *i.e.*

$$\Gamma_P := \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}(Q\mathfrak{H})}[\mathcal{U}\Gamma\mathcal{U}^*].$$

L'état Γ_P est caractérisé par le fait que ses matrices de densité sont localisées

$$(\Gamma_P)^{(k)} = P^{\otimes k}\Gamma^{(k)}P^{\otimes k} \tag{68}$$

pour tout $k \geq 1$ (voir Hainzl, Lewin et Solovej (2009, Appendice A), Lewin (2011) pour plus de détails).

La construction de la mesure de De Finetti repose sur la notion de symbole inférieur par rapport à la base sur-complète de $\mathfrak{F}(P\mathfrak{H})$ donnée par les états cohérents lorsque P est un projecteur orthogonal sur un espace de dimension finie.

Pour tout $u \in \mathfrak{H}$, *l'état cohérent* associé à u sur l'espace de Fock $\mathfrak{F}$ est donné par

$$\xi(u) := e^{-\frac{\|u\|^2}{2}} \bigoplus_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n!}} u^{\otimes n}. \tag{69}$$

Les états cohérents possèdent plusieurs propriétés algébriques intéressantes (voir Zhang, Feng et Gilmore (1990)). En particulier, pour tout $k \geq 1$, la k-ième matrice de densité réduite de $\xi(\mu)$ est simplement donnée par

$$[|\xi(u)\rangle\langle\xi(u)|]^{(k)} = \frac{1}{k!}\left|u^{\otimes k}\right\rangle\left\langle u^{\otimes k}\right|. \tag{70}$$

De plus, grâce à la décomposition de l'identité fournie par le lemme de Schur, nous avons

$$\int_V |\xi(u)\rangle\langle\xi(u)|\, du = (\int_V e^{-\|u\|^2}\, du)\mathbb{1}_{\mathfrak{F}(V)} = \pi^{\dim(V)}\mathbb{1}_{\mathfrak{F}(V)} \tag{71}$$

pour tout sous-espace V de $\mathfrak{H}$ de dimension finie (voir Lewin, Nam et Rougerie (2015)). En particulier, cela est vrai pour $V = \mathfrak{F}(P\mathfrak{H})$ lorsque P est un projecteur orthogonal sur un espace de dimension finie.

Soit P un projecteur orthogonal sur un espace de dimension finie. Pour tout état Γ sur $\mathfrak{F}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous définissons le *symbole inférieur (fonction d'Husimi, symbole anti-Wick)* de Γ sur $\mathfrak{F}(P\mathfrak{H})$ à l'échelle ε par

$$d\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}(u) := (\varepsilon\pi)^{-\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[P]} \left\langle \xi\left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \Gamma_P \xi\left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\rangle du \tag{72}$$

avec du la mesure de Lebesgue usuelle sur $P\mathfrak{H} \simeq \mathbb{C}^{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[P]}$. L'identité (71) implique que le symbole inférieur est en effet une mesure de probabilité sur $P\mathfrak{H}$.

Une fois la fonction de Husimi $\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}$ définie, il est naturel de s'intéresser à l'état dans l'espace de Fock $\mathfrak{F}(P\mathfrak{H})$

$$\int_{P\mathfrak{H}} |\xi(u/\sqrt{\varepsilon})\rangle \langle \xi(u/\sqrt{\varepsilon})| \, d\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}(u)$$

et à ses matrices de densité

$$\frac{1}{k!}\varepsilon^{-k} \int_{P\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}(u).$$

En particulier, nous pouvons nous demander si cela donne une bonne approximation des matrices de densité de Γ_P dans la limite $\varepsilon \to 0$. La réponse à cette question est donnée par la version quantitative suivante du théorème de De Finetti quantique (Christandl, König, Mitchison et Renner, 2007 ; Lewin, Nam et Rougerie, 2014b, 2015 ; Rougerie, 2016 ; Lewin, Nam et Rougerie, 2021).

Théorème 3.1. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\int_{P\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}(u) = k!\varepsilon^k \Gamma^{(k)}_P + k!\varepsilon^k \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} \Gamma^{(\ell)}_P \otimes_s \mathbb{1}_{\otimes_s^{k-\ell} P\mathfrak{H}}. \tag{73}$$

De plus, si $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[P] = d$,

$$\mathrm{Tr}\left[\left| k!\varepsilon^k \Gamma^{(k)}_P - \int_{P\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}(u)\right|\right] \leq \varepsilon^k \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell}^2 \frac{(k-\ell+d-1)!}{(d-1)!} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathcal{N}^\ell \Gamma_P].$$

3.2. Du quantique au classique : Contrôle de l'entropie relative

Étant donné deux états Γ et Γ' sur $\mathfrak{F}$, l'*entropie relative* définie par

$$\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma') = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma(\log \Gamma - \log \Gamma')] \tag{74}$$

est une quantité positive éventuellement infinie. Une propriété cruciale de cet objet est sa monotonie par rapport aux transformations 2-positives qui conservent la trace. Plus précisément, pour toute application linéaire $\Phi \colon \mathcal{B}(\mathfrak{K}_1) \to \mathcal{B}(\mathfrak{K}_2)$ telle que

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \Phi(A_{11}) & \Phi(A_{12}) \\ \Phi(A_{21}) & \Phi(A_{22}) \end{pmatrix} \geq 0$$

pour tout $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathfrak{K}_1)$ et telle que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}_2}[\Phi(A)] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}_1}[A]$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{K}_1)$, nous avons

$$\mathcal{H}(\Phi(A), \Phi(B)) \leq \mathcal{H}(A, B)$$

(voir Petz (2003)). Un exemple d'application linéaire de ce type est donné par la localisation $\Gamma \to \Gamma_P$ définie dans la section 3.1. Par conséquent,

$$\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma') \geq \mathcal{H}(\Gamma_P, \Gamma'_P). \tag{75}$$

De plus, nous avons le résultat suivant dû à Lewin, Nam et Rougerie (2015).

Théorème 3.2. — *Soient Γ et Γ' deux états sur $\mathfrak{F}$ et soit P un projecteur orthogonal sur un espace de dimension finie. Alors*

$$\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma') \geq \mathcal{H}(\Gamma_P, \Gamma'_P) \geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}, \mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma'}) \tag{76}$$

où $\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma}$ et $\mu^{\varepsilon}_{P,\Gamma'}$ sont les symboles inférieurs définis dans la section 3.1.

Ce théorème est la conséquence directe du lemme suivant dont la preuve, contenue dans Lewin, Nam et Rougerie (2015), utilise les techniques développées pour les inégalités de type Berezin-Lieb (Berezin, 1972 ; Lieb, 1973 ; Simon, 1980) adaptées à l'entropie relative.

Lemme 3.3. — *Considérons une décomposition de l'identité sur un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ de la forme*

$$\int_M |n_x\rangle \langle n_x| \, d\zeta(x) = \mathbb{1}_{\mathfrak{K}},$$

avec ζ une mesure de Borel positive sur $M \subset \mathbb{R}^N$ et où l'application $x \in M \mapsto n_x \in S\mathfrak{K} = \{u \in \mathfrak{K}, \|u\| = 1\}$ est continue. Pour tout opérateur $A \geq 0$ à trace sur $\mathfrak{K}$, nous définissons le symbole inférieur sur M par

$$dm_A(x) = \langle x, Ax\rangle d\zeta(x).$$

Alors pour tout opérateur $A, B \geq 0$ à trace sur $\mathfrak{K}$, nous avons

$$\mathcal{H}(A, B) \geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(m_A, m_B). \tag{77}$$

Le théorème 3.2 fait le lien entre l'entropie relative de deux états quantiques et l'entropie relative classique de leurs symboles inférieurs. Ce lien nous permettra d'obtenir la borne inférieure (66).

3.3. Du quantique au classique : Contrôle du terme d'interaction

Pour ce qui concerne le contrôle du terme d'interaction (67), la stratégie développée dépend de la dimension, $d = 1$ ou $d = 2, 3$, considérée.

3.3.1. *Borne inférieure pour $d = 1$, $p = 1$.* — Nous allons d'abord considérer le cas $d = 1$. Nous rappelons que $h = -\Delta + |x|^s$ avec $s > 2$ de sorte que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-1}] < \infty$. De plus, $w = w_1 + w_2$ avec w_1 une mesure positive de masse finie sur $\mathbb{R}$ et $0 \leq w_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[wh^{-1} \otimes h^{-1}] < \infty.$$

Il s'agit du cas le plus simple, car d'une part nous n'avons pas besoin de renormaliser l'interaction, et d'autre part nous sommes capable d'avoir de bornes a priori sur toutes les matrices de densité associées à la suite d'états de Gibbs Γ_λ. Ces bornes a priori permettent, en particulier, de définir une mesure de De Finetti ν comme limite des symboles inférieurs donnés dans la section 3.1.

Précisément, le théorème suivant a été montré par Lewin, Nam et Rougerie (2015).

Théorème 3.4 (Construction de la mesure de De Finetti)
Soit $\Gamma_n \geq 0$ une suite d'états dans $\mathfrak{F}$ tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\Gamma_n] = 1$. Supposons qu'il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 et une constante C_k telles que

$$\mathrm{Tr}_{\otimes_s^k\mathfrak{H}}[\varepsilon_n^k \Gamma_n^{(k)}] \leq C_k$$

pour tout $k \geq 1$. Alors, il existe une mesure de probabilité ν sur $\mathfrak{H}$ (invariante par multiplication de phase) qui est la mesure de De Finetti d'une sous-suite Γ_{n_j} à l'échelle ε_j. De plus,

$$k!(\varepsilon_{n_j})^k \Gamma_{n_j}^{(k)} \rightharpoonup \int_{\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\nu(u) \tag{78}$$

faiblement dans $\bigotimes_s^k \mathfrak{H}$ pour tout $k \geq 1$.

Remarque 3.5. — 1. Dans ce contexte, dire que ν est la mesure de De Finetti d'une (sous-)suite Γ_{n_j} à l'échelle ε_j signifie que ν est l'unique mesure dont les projections cylindriques ν_V sont limites des symboles inférieurs $\mu_{P,\Gamma_{n_j}}^{\varepsilon_j}$ définis par (72) avec $V = \mathrm{Im}(P)$.

En particulier, nous pouvons passer à la limite dans l'inégalité (76) en utilisant la semi-continuité inférieure de l'entropie et conclure que

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathcal{H}(\Gamma_n, \Gamma_n') \geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu_V, \nu_V')$$

avec ν et ν' les mesures de De Finetti associées aux suites Γ_n et Γ_n' respectivement.

Finalement, la localisation sera enlevée en prenant $d = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[P] = \dim(V) \to \infty$.

2. La trace $\mathrm{Tr}_{\otimes_s^k\mathfrak{H}}[\varepsilon_n^k \Gamma_n^{(k)}]$ étant uniformément bornée, nous pouvons aussi déduire que

$$k!(\varepsilon_{n_j})^k \Gamma_{n_j}^{(k)} \rightharpoonup_* \int_{\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\nu(u) \tag{79}$$

dans l'espace des opérateurs à trace.

3. La mesure ν est caractérisée de façon unique par la connaissance de tous ses moments d'ordre k, $\int_{\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\nu(u)$ (Lewin, Nam et Rougerie, 2014a, Section 2). Par conséquent, le lemme 1.2 permet de conclure que la mesure gaussienne μ_0 définie dans la section 1.2 est l'unique mesure de De Finetti de la suite d'états de Gibbs quasi-libre $\Gamma_0 = \mathcal{Z}_0(\lambda)^{-1} e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(h)}$ à l'échelle $\varepsilon = \lambda$.

La stratégie consiste donc à appliquer ce résultat à la suite d'états de Gibbs $\Gamma_\lambda = \mathcal{Z}(\lambda)^{-1} e^{-\lambda \mathbb{H}_\lambda}$ avec $\mathcal{Z}(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\lambda \mathbb{H}_\lambda}]$ et $\mathbb{H}_\lambda = \mathrm{d}\Gamma(h) + \lambda \mathbb{W}$. Pour cela nous avons besoin d'estimations a priori sur toutes les matrices de densité de Γ_λ qui sont résumées dans la proposition suivante (Lewin, Nam et Rougerie, 2015, Lemmas 8.1, 8.2, 8.4).

Proposition 3.6. — *Soient $h > 0$ et $w \geq 0$ deux opérateurs auto-adjoints sur $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H} \otimes_s \mathfrak{H}$ respectivement, tels que*

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-1}] + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w h^{-1} \otimes h^{-1}] < \infty.$$

Soit $\mathbb{H}_\lambda = \mathrm{d}\Gamma(h) + \lambda \mathbb{W}$ et $\Gamma_\lambda = \mathcal{Z}(\lambda)^{-1} e^{-\lambda \mathbb{H}_\lambda}$ l'état de Gibbs associé à $\mathbb{H}_\lambda$ avec fonction de partition $\mathcal{Z}(\lambda)$. Alors les estimations suivantes sont satisfaites.

1. *Soit $\mathcal{Z}_0(\lambda)$ la fonction de partition de l'état de Gibbs quasi-libre $\Gamma_0 = \mathcal{Z}_0(\lambda) e^{-\mathrm{d}\Gamma(h)}$. Nous avons*

$$e^{-\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w h^{-1} \otimes h^{-1}]} \leq \frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} \leq 1 \tag{80}$$

et

$$\lambda^2 \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w \Gamma_\lambda^{(2)}] \leq \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w h^{-1} \otimes h^{-1}]. \tag{81}$$

2. *Nous avons*

$$0 \leq \lambda \Gamma_\lambda^{(1)} \leq 2(1 + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w h^{-1} \otimes h^{-1}]) h^{-1}. \tag{82}$$

3. *Pour tout $k \geq 1$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que*

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\lambda^k \mathcal{N}^k \Gamma_\lambda] \leq C_k e^{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w h^{-1} \otimes h^{-1}]} (\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-1}])^k. \tag{83}$$

En particulier, pour tout $k \geq 1$, la suite $(\lambda^k \Gamma^k)$ est bornée dans l'espace des opérateurs à trace lorsque $\lambda \to 0$.

Remarque 3.7. — La condition $w \geq 0$, qui correspond à une interaction répulsive, joue un rôle fondamental dans la preuve de la proposition 3.6.

Nous avons à présent tous les arguments pour donner la preuve de la borne inférieure (65) dans le cas particulier $d = 1$ et $p = 1$.

Plus précisément, soit $(\Gamma_\lambda)_\lambda$ la suite d'états de Gibbs définie dans la proposition 3.6. D'après le théorème 3.4, à une sous-suite près, $(\Gamma_\lambda)_\lambda$ possède une mesure de De Finetti ν telle que

$$k! \lambda^k \Gamma_\lambda^{(k)} \rightharpoonup_* \int_{\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| \, d\nu(u)$$

dans l'espace des opérateurs à trace.

Par conséquent, en utilisant le théorème 3.4, $w \geq 0$ et le lemme de Fatou pour les opérateurs, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\liminf_{\lambda\to 0^+}\left(-\log\frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)}\right) &= \liminf_{\lambda\to 0^+}\left(\mathcal{H}(\Gamma_\lambda,\Gamma_0)+\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{W}\Gamma_\lambda]\right)\\
&= \liminf_{\lambda\to 0^+}\left(\mathcal{H}(\Gamma_\lambda,\Gamma_0)+\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w\Gamma_\lambda^{(2)}]\right)\\
&\geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu,\mu_0)+\liminf_{\lambda\to 0^+}\left(\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[w\lambda^2\Gamma_\lambda^{(2)}]\right)\\
&\geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu,\mu_0)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}\left[w\int_{\mathfrak{H}}|u^{\otimes 2}\rangle\langle u^{\otimes 2}|\,d\nu(u)\right]\\
&= \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\nu,\mu_0)+\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{H}}\langle u\otimes u, wu\otimes u\rangle\,d\nu(u)\geq -\log z,
\end{aligned}$$

ce qui donne la borne inférieure souhaitée.

De plus, nous pouvons remarquer qu'en utilisant (82) et le théorème de convergence dominée pour les opérateurs à trace (Simon, 2005), nous déduisons de la convergence faible-$*$ la convergence forte

$$\lambda\Gamma_\lambda^{(1)} \to \int_{\mathfrak{H}}|u\rangle\langle u|\,d\nu(u)$$

dans $\mathfrak{S}^1$, ce qui donne (42) pour $k=1$. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Lewin, Nam et Rougerie (2015) pour la preuve de la convergence des matrices de densité pour $k>1$.

3.3.2. *Borne inférieure pour $d=2,3$, $p=2$.* — En dimension $d=2,3$, la situation est plus complexe. En effet, comme nous l'avons vu auparavant, la mesure de Gibbs non linéaire μ est un objet singulier et sa caractérisation variationnelle (63) fait intervenir l'interaction renormalisée $\mathcal{D}$. Il faut donc être capable de contrôler l'apparition de ces singularités lors du passage à la limite $\lambda\to 0^+$. Pour cela, de bonnes estimations sur les matrices de densité à un corps et à deux corps $\Gamma_\lambda^{(1)}$ et $\Gamma_\lambda^{(2)}$ sont nécessaires. Lewin, Nam et Rougerie (2021) introduisent deux nouvelles inégalités pour traiter cette question. Ces deux inégalités, intéressantes en soi, représentent l'une des contributions fondamentales du travail de Lewin, Nam et Rougerie (2021). Nous les énonçons ici et nous expliquerons les rôles qu'elles jouent dans la démonstration de la borne inférieure (65) en dimension $d=2,3$.

La première inégalité permet de contrôler la différence de deux matrices de densité à un corps par l'entropie relative de deux états. Plus précisément, nous avons le résultat suivant (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Theorem 6.1).

Théorème 3.8. — *Soit h un opérateur positif auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{K}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[e^{-h}]<\infty$. Soit*

$$\Gamma_0=\frac{e^{-\mathrm{d}\Gamma(h)}}{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[e^{-\mathrm{d}\Gamma(h)}]}$$

l'état de Gibbs quasi-libre sur $\mathfrak{F}$ associé à h. Alors, pour tout $\Gamma\in\mathfrak{F}$, nous avons

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[|\sqrt{h}(\Gamma^{(1)}-\Gamma_0^{(1)})\sqrt{h}|^2]\leq 4\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)(\sqrt{2}+\sqrt{\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)})^2 \tag{84}$$

où $\Gamma^{(1)}$ *et* $\Gamma_0^{(1)}$ *sont les matrices de densité à un corps correspondantes.*

Remarque 3.9. — 1. Dans le cas qui nous intéresse dans ce texte, *i.e.* $h = -\Delta + |x|^s$ avec $s > \frac{2d}{4-d}$, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[|(\Gamma^{(1)} - \Gamma_0^{(1)})|] &\leq \sqrt{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]}\left\|\sqrt{h}(\Gamma^{(1)} - \Gamma_0^{(1)})\sqrt{h}\right\|_{\mathfrak{S}^2} \\ &\leq \sqrt{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]}2\sqrt{\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)}(\sqrt{2} + \sqrt{\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)}).\end{aligned}$$

Autrement dit, il est possible de contrôler la norme trace de la matrice à un corps relative $\Gamma^{(1)} - \Gamma_0^{(1)}$.

2. La preuve de ce résultat repose sur un argument de type Feymann–Hellmann qui consiste à perturber le principe variationnel qui définit l'état Γ_0.

La deuxième inégalité permet de contrôler le moment d'ordre 2 d'un état de Gibbs par les moments d'ordre 1 d'une famille d'états de Gibbs perturbés. Plus précisément, nous avons le résultat suivant (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Theorem 7.1).

Théorème 3.10. — *Soit H un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{K}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[e^{-\beta H}] < \infty$ pour tout $\beta > 0$. Soit A un opérateur auto-adjoint borné sur $\mathfrak{K}$ tel que $X = [[H,A],A]$ est borné. Considérons les états de Gibbs perturbés*

$$\Gamma_\varepsilon := \frac{e^{-H+\varepsilon A}}{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[e^{-H+\varepsilon A}]}.$$

Soit $a > 0$ et

$$\eta := \sup_{\varepsilon\in[-a,a]}\left(|\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[A\Gamma_\varepsilon]| + a\sqrt{|\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[X\Gamma_\varepsilon]|}\sqrt{\|X\| + \|[[X,A],A]\|}\right).$$

Alors,

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}}[A^2\Gamma_0] \leq \frac{2(1+a^2+\eta^2)}{a}\eta e^{a\eta}. \tag{85}$$

Ces deux inégalités seront utilisées par la suite pour pouvoir contrôler les moments d'ordre 2 de certains opérateurs définis sur $\mathfrak{F}$. De plus, nous aurons besoin d'estimations a priori qui sont résumées dans la proposition suivante (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Lemmas 5.12, 5.14).

Proposition 3.11. — *Soit $h > 0$ un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{H}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty$. Soit $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $0 \leq \hat{w} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $\mathbb{H}_\lambda = \mathrm{d}\Gamma(h) + \lambda\mathbb{W}^{\mathrm{ren}}$ avec*

$$\mathbb{W}^{\mathrm{ren}} = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{w}(k)|\mathrm{d}\Gamma(e^{ik\cdot x}) - \langle\mathrm{d}\Gamma(e^{ik\cdot x})\rangle_{\Gamma_0}|^2\,dk.$$

Soient $\Gamma_\lambda = \frac{e^{-\lambda\mathbb{H}_\lambda}}{\mathcal{Z}(\lambda)}$ l'état de Gibbs associé à $\mathbb{H}_\lambda$, et $\Gamma_0 = \frac{e^{-\lambda\mathrm{d}\Gamma(h)}}{\mathcal{Z}_0(\lambda)}$ l'état de Gibbs quasi-libre associé à h. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que les estimations suivantes sont satisfaites.

1. *Pour tout $\lambda > 0$,*

$$\lambda^2\langle\mathbb{W}^{\mathrm{ren}}\rangle_{\Gamma_0} \leq C\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]. \tag{86}$$

2. Pour tout $\lambda > 0$,

$$0 \leq -\log \frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} \leq C \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]. \tag{87}$$

En particulier,

$$\mathcal{H}(\Gamma_\lambda, \Gamma_0) \leq C \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] \tag{88}$$

et

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{W}^{\mathrm{ren}} \Gamma_\lambda] \leq C \lambda^{-2} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] \tag{89}$$

uniformément en λ.

Remarque 3.12. — Da façon analogue au cas $d = 1$, la condition $\hat{w} \geq 0$ joue un rôle fondamentale dans la preuve de la proposition 3.11, car elle fixe le signe de l'interaction.

Nous pouvons finalement donner une illustration de la preuve de la borne inférieure (65) en dimension $d = 2, 3$.

Soit

$$\mathbb{H}_\lambda = \mathbb{H}_0 + \lambda \mathbb{W}^{\mathrm{ren}} = \mathrm{d}\Gamma(-\Delta + V) + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\mathrm{d}\Gamma(e^{ik \cdot x}) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e^{ik\cdot x}) \rangle_{\Gamma_0}|^2 \, dk$$

avec $\Gamma_0 = \frac{e^{-\lambda \mathrm{d}\Gamma(-\Delta+V)}}{\mathcal{Z}_0(\lambda)}$ l'état de Gibbs quasi-libre associé à $h = -\Delta + V$. Soit $\Gamma_\lambda = \frac{e^{-\lambda \mathbb{H}_\lambda}}{\mathcal{Z}(\lambda)}$ l'état de Gibbs associé à $\mathbb{H}_\lambda$.

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1, pour mieux exploiter les outils d'analyse semi-classique, il est pratique de se ramener à un espace de dimension finie en utilisant la localisation dans les espaces de Fock à l'aide d'un projecteur P bien choisi. Un choix naturel de P est donné par $P = \mathbb{1}(h \leq \Lambda_\ell)$ avec $\Lambda_\ell = \Lambda_\ell(\lambda)$ un paramètre de troncature fini, mais qui tend vers ∞ lorsque $\lambda \to 0^+$. Plus précisément, nous choisissons $1 \ll \Lambda_\ell \ll \lambda^{-1/3}$. Cela revient à traiter séparément les basses et les hautes énergies.

L'avantage d'une telle démarche est que, dans l'espace de dimension finie $P\mathfrak{H}$, nous pouvons utiliser la version quantitative du théorème de De Finetti (Théorème 3.1) pour relier les objets quantiques aux objets classiques. Cependant, en projetant sur un espace de dimension finie, nous produisons une erreur qui dépend très fortement de la dimension de l'image de P. Le principal défi consiste donc à trouver une bonne façon de contrôler cette erreur.

Soit e_k l'opérateur de multiplication par $\cos(k \cdot x)$ ou $\sin(k \cdot x)$. Cet opérateur permet de définir le terme d'interaction renormalisée qui apparaît dans (62) et s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda^2 \mathbb{W}^{\mathrm{ren}} =& \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\mathrm{d}\Gamma(e^{ik\cdot x}) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e^{ik\cdot x}) \rangle_{\Gamma_0}|^2 \, dk \\ =& \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\mathrm{d}\Gamma(\cos(k\cdot x)) - \langle \mathrm{d}\Gamma(\cos(k \cdot x)) \rangle_{\Gamma_0}|^2 \, dk \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) |\mathrm{d}\Gamma(\sin(k\cdot x)) - \langle \mathrm{d}\Gamma(\sin(k \cdot x)) \rangle_{\Gamma_0}|^2 \, dk. \end{aligned}$$

Si l'on note $e_k^- = Pe_kP$ et $e_k^+ = e_k - e_k^-$, nous pouvons facilement observer que

$$\lambda^2 \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^-) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda}$$
$$\leq (1+\varepsilon)\lambda^2 \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} + (1+\varepsilon^{-1})\lambda^2 \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^+) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^+)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} \tag{90}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. L'objectif est donc de montrer

$$\lambda^2 \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^+) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^+)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} 0 \tag{91}$$

de sorte à pouvoir garder seulement la partie de l'interaction projetée sur les basses énergies.

La limite (91) est l'un des points cruciaux de (Lewin, Nam et Rougerie, 2021). Elle fait l'objet du théorème suivant (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Théorème 8.1).

Théorème 3.13. — *Soient V et w deux fonctions sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant (44) et (45). Soit e_k l'opérateur de multiplication par $\cos(k \cdot x)$ ou $\sin(k \cdot x)$, $e_k^+ = e_k - Pe_kP$ avec $P = \mathbb{1}(h \leq \Lambda_\ell)$ et $1 \ll \Lambda_\ell \ll \lambda^{-2}$. Pour tout $k \in \mathbb{R}^d$, nous avons*

$$\lambda^2 \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^+) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^+)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} \leq C(1+|k|^2)(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}})^{1/7} \tag{92}$$

avec C une constante positive.

Remarque 3.14. — La preuve de ce théorème, omise dans ce texte, s'appuie sur l'inégalité de corrélation (85). Cette inégalité permet de remplacer les moments d'ordre 2 dans l'étude de la limite (91) par les moments d'ordre 1 d'une famille d'états de Gibbs. Par ailleurs, l'inégalité (85) est appliquée à des opérateurs A' de la forme $A - \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[A\Gamma_0]$ avec A qui vit dans les hautes énergies. Dans ce cas, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[A'\Gamma_\varepsilon] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[A\Gamma_\varepsilon] - \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[A\Gamma_0]$ est contrôlé à l'aide de l'inégalité (84) uniformément pour $\varepsilon \in [-a, a]$ et a suffisamment petit.

En utilisant le théorème 3.13 dans l'inégalité (90), nous avons

$$\begin{aligned}\lambda^2 \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^-) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} &\leq (1+\varepsilon)\lambda^2 \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} \\ &\quad + (1+\varepsilon^{-1})C(1+|k|^2)(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2})^{1/7}\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En multipliant cette inégalité par $\hat{w} \geq 0$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, nous obtenons, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^-) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} \, dk & \\ \leq (1+\varepsilon)\lambda^2 \langle \mathbb{W}^{\mathrm{ren}}\rangle_{\Gamma_\lambda} + (1+\varepsilon^{-1})C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2})^{1/7} & \\ \leq \lambda^2 \langle \mathbb{W}^{\mathrm{ren}}\rangle_{\Gamma_\lambda} + \varepsilon C + (1+\varepsilon^{-1})C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2})^{1/7}, &\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (45) à la deuxième ligne et (89) à la troisième. En optimisant la valeur de $\varepsilon > 0$, nous pouvons conclure

$$\lambda^2 \langle \mathbb{W}^{\mathrm{ren}}\rangle_{\Gamma_\lambda} \geq \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k) \langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^-) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} \, dk - C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2})^{1/14} \tag{93}$$

pour λ suffisamment petit.

Pour obtenir une borne inférieure de la forme (67), il est donc suffisant de contrôler le comportement du terme d'interaction sur les basses énergies. Pour cela, nous pouvons utiliser les outils de l'analyse semi-classique et, plus précisément la version quantitative de théorème de De Finetti énoncée plus haut (théorème 3.1).

Pour tout opérateur à un corps auto-adjoint A, nous pouvons facilement montrer que

$$(\mathrm{d}\Gamma(A))^2 = 0 \oplus 0 \oplus 2 \bigoplus_{n=2}^{\infty} \sum_{1\le i<j\le n} (A)_i \otimes (A)_j + \mathrm{d}\Gamma(A^2). \tag{94}$$

En particulier,

$$(\mathrm{d}\Gamma(e_k^-))^2 = 2\mathrm{d}\Gamma((e_k^-)^{\otimes 2}) + \mathrm{d}\Gamma((e_k^-)^2)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\langle |\mathrm{d}\Gamma(e_k^-) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} =& 2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}\Gamma_\lambda^{(2)}] + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)^2\Gamma_\lambda^{(1)}] \\ &- 2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_\lambda^{(1)}]\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_0^{(1)}] + \left(\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_0^{(1)}]\right)^2.\end{aligned}$$

Pour estimer les termes qui font intervenir l'état de Gibbs quasi-libre Γ_0 et ses matrices de densités, nous utilisons les formules explicites données par (22) et (24). En particulier,

$$\begin{aligned}\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_0^{(1)}] &= \lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}\left[(e_k^-)\frac{1}{e^{\lambda h}-1}\right] = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}\left[(e_k^-)h^{-1}\right] + \lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}\left[(e_k^-)\left(\frac{1}{e^{\lambda h}-1} - \frac{1}{\lambda h}\right)\right] \\ &= \int \langle u, e_k^- u\rangle \, d\mu_0(u) + O(\lambda\Lambda_\ell^2). \end{aligned} \tag{95}$$

En effet,

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}\left[(e_k^-)\left(\frac{1}{e^{\lambda h}-1} - \frac{1}{\lambda h}\right)\right] \le C\Lambda_\ell^2,$$

car $\left|(e^{\lambda h}-1)^{-1} - (\lambda h)^{-1}\right| \le \frac{1}{2}$ au sens des opérateurs et $\dim P\mathfrak{H} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[P] \le \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[\Lambda_\ell^2 h^{-2}] \le C\Lambda_\ell^2$. D'autre part, en utilisant (84) et (88), nous avons

$$\begin{aligned}\lambda\left|\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)(\Gamma_\lambda^{(1)} - \Gamma_0^{(1)})]\right| &\le \lambda\|h^{-1/2}(e_k^-)h^{-1/2}\|_{\mathfrak{S}^2}\|h^{1/2}(\Gamma_\lambda^{(1)} - \Gamma_0^{(1)})h^{1/2}\|_{\mathfrak{S}^2} \\ &\le C\|h^{-1/2}(e_k^-)h^{-1/2}\|_{\mathfrak{S}^2} = C\sqrt{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)h^{-1}(e_k^-)h^{-1}]} \\ &\le C\|e_k^-\|\sqrt{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]}\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Hölder pour les normes de Schatten. Ensuite, comme $|e_k^-| \le P \le \Lambda_\ell h^{-1}$, nous en déduisons

$$\begin{aligned}\left|\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_\lambda^{(1)}]\right| &\le \left|\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)(\Gamma_\lambda^{(1)} - \Gamma_0^{(1)})]\right| + \left|\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_0^{(1)}]\right| \\ &\le \left|\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)(\Gamma_\lambda^{(1)} - \Gamma_0^{(1)})]\right| + \lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[Ph^{-1}] \\ &\le C\Lambda_\ell\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]. \end{aligned} \tag{96}$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\lambda^2\langle|\mathrm{d}\Gamma(e_k^-)-\langle\mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} &= 2\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}\Gamma_\lambda^{(2)}]+\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)^2\Gamma_\lambda^{(1)}] \\
&\quad -2\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_\lambda^{(1)}]\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_0^{(1)}]+\lambda^2\left(\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_0^{(1)}]\right)^2 \\
&\geq 2\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}\Gamma_\lambda^{(2)}]-2\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_\lambda^{(1)}]\langle\langle u,e_k^-u\rangle\rangle_{\mu_0} \\
&\quad -C\lambda^2\Lambda_\ell^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_\lambda^{(1)}]+\left(\langle\langle u,e_k^-u\rangle\rangle_{\mu_0}\right)^2-C\lambda^2\Lambda_\ell^4 \\
&\geq 2\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}\Gamma_\lambda^{(2)}]-2\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_\lambda^{(1)}]\langle\langle u,e_k^-u\rangle\rangle_{\mu_0} \\
&\quad +\left(\langle\langle u,e_k^-u\rangle\rangle_{\mu_0}\right)^2-C(\lambda\Lambda_\ell^3+\lambda^2\Lambda_\ell^4)
\end{aligned} \tag{97}
$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)^2\Gamma_\lambda^{(1)}]\geq 0$ et la notation définie en (33) pour $\langle\cdot\rangle_{\mu_0}$. Par ailleurs, étant donné que $\Lambda_\ell \ll \lambda^{-1/3}$ le terme d'erreur $\lambda^2\Lambda_\ell^4$ peut être absorbé dans $\lambda\Lambda_\ell^3$.

Il reste donc à comprendre le comportement des termes qui font intervenir les matrices de densité à un et deux corps, $\Gamma_\lambda^{(1)}$ et $\Gamma_\lambda^{(2)}$. Pour cela, nous utilisons le théorème 3.1.

Plus précisément, soit $\mu_{P,\lambda}$ le symbole inférieur de Γ_λ sur $\mathfrak{F}(P\mathfrak{H})$ à l'échelle λ défini par (72). En appliquant (73), nous écrivons

$$
\lambda^2\Gamma_{P,\lambda}^{(2)}=\frac{1}{2}\int_{P\mathfrak{H}}|u^{\otimes 2}\rangle\langle u^{\otimes 2}|\,d\mu_{P,\lambda}(u)-2\lambda^2\Gamma_{P,\lambda}^{(1)}\otimes_s P-2\lambda^2 P\otimes_s P \tag{98}
$$

et

$$
\lambda\Gamma_{P,\lambda}^{(1)}=\int_{P\mathfrak{H}}|u\rangle\langle u|\,d\mu_{P,\lambda}(u)-\lambda P. \tag{99}
$$

D'après (68), $\Gamma_{P,\lambda}^{(1)}=P\Gamma_\lambda^{(1)}P$ et $\Gamma_{P,\lambda}^{(2)}=P^{\otimes 2}\Gamma_\lambda^{(2)}P^{\otimes 2}$, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)\Gamma_\lambda^{(1)}] &= \lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)P\Gamma_\lambda^{(1)}P]=\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}\left[(e_k^-)\int_{P\mathfrak{H}}|u\rangle\langle u|\,d\mu_{P,\lambda}(u)\right]-\lambda\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[(e_k^-)P] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}\left[(e_k^-)\int_{P\mathfrak{H}}|u\rangle\langle u|\,d\mu_{P,\lambda}(u)\right]+O(\lambda\Lambda_\ell^2) \\
&= \int_{P\mathfrak{H}}\langle u,e_k^-u\rangle\,d\mu_{P,\lambda}(u)+O(\lambda\Lambda_\ell^2)
\end{aligned} \tag{100}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}\Gamma_\lambda^{(2)}] &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}\left[(e_k^-)^{\otimes 2}\int_{P\mathfrak{H}}|u^{\otimes 2}\rangle\langle u^{\otimes 2}|\,d\mu_{P,\lambda}(u)\right] \\
&\quad -2\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}(P\Gamma_{P,\lambda}^{(1)}P)\otimes_s P]-2\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}P\otimes_s P] \\
&= \frac{1}{2}\int_{P\mathfrak{H}}|\langle u,e_k^-u\rangle|^2\,d\mu_{P,\lambda}(u)-2\lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}\otimes_s\mathfrak{H}}[(e_k^-)^{\otimes 2}\Gamma_\lambda^{(1)}\otimes_s P]+O(\lambda^2\Lambda_\ell^4) \\
&= \frac{1}{2}\int_{P\mathfrak{H}}|\langle u,e_k^-u\rangle|^2\,d\mu_{P,\lambda}(u)+O(\lambda\Lambda_\ell^3).
\end{aligned} \tag{101}
$$

Finalement, en insérant (100) et (101) dans (97) et en raisonnant comme dans (96) pour contrôler la croissance de $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e_k^- h^{-1}]$, nous obtenons

$$\lambda^2\langle|\mathrm{d}\Gamma(e_k^-) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda} \geq \int_{P\mathfrak{H}} \left|\langle u, e_k^- u\rangle - \langle\langle u, e_k^- u\rangle\rangle_{\mu_0}\right|^2 d\mu_{P,\lambda}(u) - C\lambda\Lambda_\ell^3.$$

Finalement, en multipliant cette inégalité par $\hat{w} \geq 0$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, nous obtenons

$$\frac{\lambda^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(k)\langle|\mathrm{d}\Gamma(e_k^-) - \langle \mathrm{d}\Gamma(e_k^-)\rangle_{\Gamma_0}|^2\rangle_{\Gamma_\lambda}\, dk \geq \int_{P\mathfrak{H}} \mathcal{D}_K(u)\, d\mu_{P,\lambda}(u) - C\lambda\Lambda_\ell^3$$

avec $\mathcal{D}_K$ l'interaction renormalisée tronquée définie par (34). En insérant ceci dans (93), nous obtenons

$$\lambda^2\langle \mathbb{W}^{\mathrm{ren}}\rangle_{\Gamma_\lambda} \geq \int_{P\mathfrak{H}} \mathcal{D}_K(u)\, d\mu_{P,\lambda}(u) - C\lambda\Lambda_\ell^3 - C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2})^{1/14} \tag{102}$$

ce qui donne une première borne inférieure pour le terme d'interaction.

Pour obtenir (65), nous rappelons que l'état de Gibbs Γ_λ associé à $\mathbb{H}_\lambda$ est l'unique minimiseur de (62). Par conséquent,

$$-\log\frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} = \mathcal{H}(\Gamma_\lambda, \Gamma_0) + \lambda^2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}[\mathbb{W}^{\mathrm{ren}}\Gamma_\lambda].$$

Grâce à l'inégalité de type Berezin–Lieb (76) et à la borne (102), nous pouvons écrire

$$-\log\frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} \geq \mathcal{H}_{\mathrm{cl}}(\mu_{P,\lambda}, \Gamma_{P,0}) + \int_{P\mathfrak{H}} \mathcal{D}_K(u)\, d\mu_{P,\lambda}(u) - C\lambda\Lambda_\ell^3 - C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}}^2)^{1/14}$$

ce qui donne, en utilisant le principe variationnel classique (63),

$$-\log\frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} \geq -\log\left(\int_{P\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}_K(u)}\, d\mu_{P,0}(u)\right) - C\lambda\Lambda_\ell^3 - C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}}^2)^{1/14} \tag{103}$$

Afin d'estimer plus précisément la borne inférieure (103), l'idée consiste à comparer le symbole inférieur $\mu_{P,0}$ avec $\mu_{0,K}$ la projection cylindrique de la mesure gaussienne μ_0 sur $P\mathfrak{H}$, où $K = \dim P\mathfrak{H}$. Les deux mesures en question sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $P\mathfrak{H}$. Nous pouvons donc montrer le lemme suivant (Lewin, Nam et Rougerie, 2021, Lemma 9.3).

Lemme 3.15. — *Soit $h > 0$ un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{H}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}] < \infty$. Alors,*

$$\|\mu_{P,0} - \mu_{0,K}\|_{L^1(P\mathfrak{H})} \leq 2\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[h^{-2}]\lambda\Lambda_\ell^3. \tag{104}$$

Remarque 3.16. — La preuve de ce résultat utilise les définitions explicites de $d\mu_{0,K}$ et $d\mu_{P,0}$, la forme précise de l'action de la localisation dans l'espace de Fock sur les états quasi-libres (Lewin, 2011) et l'expression exacte de la fonction de partition $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}[e^{-\lambda\mathrm{d}\Gamma(Ph)}]$ calculée dans Lewin, Nam et Rougerie (2015).

Grâce à (104) et en utilisant l'hypothèse que l'interaction (renormalisée) est positive, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_{P\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}_K(u)}\, d\mu_{P,0}(u) &\leq \int_{P\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}_K(u)}\, d\mu_{0,K}(u) + \|\mu_{P,0} - \mu_{0,K}(u)\|_{L^1(P\mathfrak{H})}\\ &\leq \int_{P\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}_K(u)}\, d\mu_{0,K}(u) + 2C\lambda\Lambda_\ell^3\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}-\log\frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)} &\geq -\log\left(\int_{P\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}_K(u)}\, d\mu_{0,K}(u) + C\lambda\Lambda_\ell^3\right) - C\lambda\Lambda_\ell^3\\ &\quad - C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2})^{1/14}\\ &\geq -\log\left(\int_{P\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}_K(u)}\, d\mu_{0,K}(u)\right) - C\lambda\Lambda_\ell^3 - C(\lambda + \|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2})^{1/14}.\end{aligned}\tag{105}$$

Ensuite, nous remarquons que lorsque $\lambda \to 0$, $\Lambda_\ell \to \infty$ et cela implique $K = \dim P\mathfrak{H} \to \infty$. Par conséquent, $\mathcal{D}_K[u]$ converge vers $\mathcal{D}[u]$ dans $L^1(d\mu_0)$ et $\|(1-P)h^{-1}\|_{\mathfrak{S}^2} \to 0$.

En appliquant le théorème de convergence dominée pour le premier terme, nous déduisons

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{P\mathfrak{H}} e^{-\mathcal{D}_K(u)}\, d\mu_{0,K}(u) = \int e^{-\mathcal{D}(u)}\, d\mu_0(u) \in (0,1)$$

et, en passant à la limite dans (105), nous obtenons la borne inférieure souhaitée

$$\liminf_{\lambda\to 0^+}\left(-\log\frac{\mathcal{Z}(\lambda)}{\mathcal{Z}_0(\lambda)}\right) \geq -\log\left(\int e^{-\mathcal{D}(u)}\right) = -\log z.\tag{106}$$

Références

Zied Ammari et Francis Nier (2008). « Mean Field Limit for Bosons and Infinite Dimensional Phase-Space Analysis », *Annales Henri Poincaré* **9** (8).

——— (avr. 2009). « Mean field limit for bosons and propagation of Wigner measures », *Journal of Mathematical Physics* **50** (4), p. 042107.

——— (2015). « Mean field propagation of infinite dimensional Wigner measures with a singular two-body interaction potential », *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* **14** (1), p. 155-220.

Volker Bach, Elliott H. Lieb et Jan Philip Solovej (1994). « Generalized Hartree-Fock theory and the Hubbard model », *Journal of Statistical Physics* **76** (1).

Felix A. Berezin (1972). « Convex Operator Functions », *Mathematics of the USSR-Sbornik* **17** (2), p. 269.

Eric Carlen (2010). « Trace inequalities and quantum entropy : an introductory course », *Entropy and the quantum* **529**, p. 73-140.

Matthias Christandl, Robert König, Graeme Mitchison et Renato Renner (2007). « One-and-a-Half Quantum De Finetti Theorems », *Communications in Mathematical Physics* **273** (2).

Bertrand Delamotte (2004). « A hint of renormalization », *American Journal of Physics* **72** (2), p. 170-184.

Jean Dolbeault, Patricio Felmer, Michael Loss et Eric Paturel (2006). « Lieb–Thirring type inequalities and Gagliardo–Nirenberg inequalities for systems », *Journal of Functional Analysis* **238** (1), p. 193-220.

Xavier Fernique (1970). « Intégrabilité des vecteurs gaussiens », *Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Série A et B* **270**.

Jürg Fröhlich, Antti Knowles, Benjamin Schlein et Vedran Sohinger (2017). « Gibbs Measures of Nonlinear Schrödinger Equations as Limits of Many-Body Quantum States in Dimensions $d \leq 3$ », *Communications in Mathematical Physics* **356** (3), p. 883-980.

Christian Hainzl, Mathieu Lewin et Jan Philip Solovej (2009). « The thermodynamic limit of quantum Coulomb systems Part II. Applications », *Advances in Mathematics* **221** (2), p. 488-546.

Mathieu Lewin (2011). « Geometric methods for nonlinear many-body quantum systems », *Journal of Functional Analysis* **260** (12), p. 3535-3595.

——— (2023). « Mean-field limits for quantum systems and nonlinear Gibbs measures ». In : *ICM 2022 Proceedings*. Sous la dir. de Dmitry Beliaev et Stanislav Smirnov. T. 5, p. 3800-3821.

Mathieu Lewin, Phan Thành Nam et Nicolas Rougerie (2014a). « Derivation of Hartree's theory for generic mean-field Bose systems », *Advances in Mathematics* **254**, p. 570-621.

——— (2014b). « Remarks on the Quantum De Finetti Theorem for Bosonic Systems », *Applied Mathematics Research eXpress* **2015** (1), p. 48-63.

——— (2015). « Derivation of nonlinear Gibbs measures from many-body quantum mechanics », *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques* **2**, p. 65-115.

——— (2018a). « Gibbs measures based on 1d (an)harmonic oscillators as mean field limits », *J. Math. Phys.* **59**, p. 041901.

——— (2018b). *The interacting 2D Bose gas and nonlinear Gibbs measures*. arXiv : `1805.03506 [math-ph]`.

——— (2021). « Classical field theory limit of many-body quantum Gibbs states in 2D and 3D », *Invent. math.* **224**, p. 315-444.

Elliott H. Lieb (1973). « The classical limit of quantum spin systems », *Communications in Mathematical Physics* **31** (4).

Edward Nelson (1973). « Construction of quantum fields from Markoff fields », *Journal of Functional Analysis* **12** (1), p. 97-112.

Dénes Petz (2003). « Monotonicity of quantum relative entropy revisited », *Reviews in Mathematical Physics* **15** (01), p. 79-91.

Nicolas Rougerie (2016). Sous la dir. de limites de champ moyen et condensation de Bose–Einstein Théorèmes de De Finetti. Les cours Peccot. Spartacus-Idh, p. 152.

Nicolas Rougerie (2019). « Limites de champ moyen bosoniques à température positive ». In : *SMF 2018 : Congrès de la Société Mathématique de France*. Sous la dir. d'Emmanuel Breuillard. T. 33. Séminaires et Congrès.

Barry Simon (1980). « The classical limit of quantum partition functions », *Communications in Mathematical Physics* **71** (3).

——— (2005). *Trace ideals and their applications*. 120. American Mathematical Society.

Anatoliy V. Skorokhod (2012). *Integration in Hilbert Space*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer Berlin.

Jan Philip Solovej (2007). *Many Body Quantum Mechanics*. LMU, Lecture notes.

Wei-Min Zhang, Da Hsuan Feng et Robert Gilmore (1990). « Coherent states : Theory and some applications », *Rev. Mod. Phys.* **62** (4), p. 867-927.

Simona Rota Nodari

Laboratoire J.A. Dieudonné
Université Côte d'Azur
28, avenue Valrose
06108 Nice Cedex 2
France
E-mail : `simona.rotanodari@univ-cotedazur.fr`