

DÉRIVATION DE L'ÉQUATION CINÉTIQUE ASSOCIÉE À
L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER CUBIQUE
[d'après Yu Deng et Zaher Hani]

par Anne-Sophie de Suzzoni

Introduction

La turbulence d'onde est l'étude de l'évolution de la loi d'une solution d'une équation d'onde, lorsque la donnée initiale est une variable aléatoire ou quand l'équation admet un terme de forçage aléatoire. Elle a été introduite par Peierls (1929) dans le contexte des cristaux. Cette étude a été suivie de travaux de Brout et Prigogine (1956). Dans les années 1960, la turbulence d'onde a été introduite dans le contexte de la physique des plasmas par Vedenov (1967) et Zaslavskii et Sagdeev (1967), et dans le contexte de la mécanique des fluides par exemple par Hasselmann (1962, 1963) et Benney et Saffman (1966). Dans le même temps, elle a été popularisée par Zakharov, dont une des contributions majeures a été l'introduction du spectre à présent nommé de Kolmogorov–Zakharov, qui modélise un transfert d'énergie entre échelles spatiales, voir l'article de Zakharov (1965). Il s'agit d'un domaine très actif en physique mathématique comme en témoignent les livres de Zakharov, L'vov et Falkovich (2012), Nazarenko (2011) ou Galtier (2022).

À partir de la fin des années 2000, la communauté mathématique a commencé à s'intéresser à la turbulence faible, un sous-domaine de la turbulence d'onde dans lequel les données initiales sont supposées petites. Une découverte majeure des travaux des physiciens sus-mentionnés a été la possibilité de décrire la statistique de certaines solutions d'équations d'ondes par des équations dites cinétiques. Il s'agit de dériver, c'est-à-dire d'obtenir par un processus mathématique rigoureux, ou d'étudier des équations cinétiques régissant ou émanant de l'étude de la statistique de solutions d'équations d'onde. Lukkarinen et Spohn (2011) ont décrit un effet de mélange pour la dynamique d'équations de Schrödinger discrètes. Puis N. Tzvetkov et moi avons étudié la limite de petite non-linéarité pour des équations primitives atmosphériques (de Suzzoni et Tzvetkov, 2014). S'en est suivie une série de travaux sur l'équation de Schrödinger cubique par Buckmaster, Germain, Hani et Shatah (2021) puis simultanément Collot et Germain (2019) et Deng et Hani (2021a). Parallèlement, Dymov et Kuksin (2020, 2023, 2021) ont travaillé avec une approche stochastique. Cette série a culminé avec le travail de Deng et Hani (2023b) qui est l'objet principal de ces notes, et dans lequel les auteurs

dérivent rigoureusement l'équation cinétique régissant l'évolution des corrélations d'une solution de cette équation. Dans le même temps, Staffilani et Tran (2021) ont dérivé une équation cinétique pour des équations primitives atmosphériques. Notons que ces travaux ont été fortement influencés d'une part par l'étude du problème de Cauchy pour différentes équations avec données aléatoires, en particulier par Bourgain (1994), Burq et Tzvetkov (2008) et Deng, Nahmod et Yue (2022); d'autre part par la dérivation de régimes collisionnels et diffusifs pour l'équation de Schrödinger avec potentiels aléatoires, en particulier par Erdős et Yau (2000) et Erdős, Salmhofer et Yau (2008); et enfin par le théorème de dérivation de l'équation de Boltzmann pour des particules classiques par Lanford (1976).

Depuis, le travail à l'étude ici a été poursuivi par Deng et Hani (2023a,c). Par ailleurs, plusieurs travaux récents abordent des questions connexes. Par exemple, dans le cadre de domaines inhomogènes, on mentionne les travaux de Ampatzoglou, Collot et Germain (2021) et Hannani, Rosenzweig, Staffilani et Tran (2022), dans le cadre des fluides celui de Ma (2022), et pour des modèles jouets en dimension finie par celui de Dubach, Germain et Harrop-Griffiths (2022). L'étude de l'équation cinétique elle-même a fait l'objet de travaux par Escobedo, Stéphane Mischler et Velazquez (2007) et Escobedo, Stéphane Mischler et Velazquez (2008), Escobedo et Velázquez (2015), Collot, Dietert et Germain (2022) et Menegaki (2022), et Faou (2020) pour une version stochastique. Pour un modèle linéaire de turbulence, on mentionnera le travail de Apolinário, Beck, Chevillard, Gallagher et Grande (2023).

Dans ces notes, on cherche à dériver une équation régissant la dynamique de la statistique d'une solution de l'équation de Schrödinger cubique posée sur un tore de taille $L \geq 1$, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \Delta u + \lambda^2 |u|^2 u = 0 & \text{sur } \mathbb{T}_L^d = (L\mathbb{T})^d \\ u(t=0) = u_{\text{in}} \end{cases}$$

où $u : [0, T] \times \mathbb{T}_L^d \rightarrow \mathbb{C}$ est l'inconnue du système pour un temps $T > 0$, où Δ est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur le tore \mathbb{T}_L^d , où la dimension d est supérieure ou égale à 3, et où λ est un paramètre réel strictement positif de l'équation. De plus, la donnée initiale u_{in} est le champ gaussien défini par

$$(2) \quad u_{\text{in}}(x) = \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}_L^d} \sqrt{U_{\text{in}}(k)} \eta_k e^{ik \cdot x}$$

où $\mathbb{Z}_L^d = \frac{1}{L} \mathbb{Z}^d$, où $k \cdot x = 2\pi \sum_{l=1}^d k^l x^l$, où $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}_L^d}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et normalisées (c'est-à-dire de variances 1) et où U_{in} est une fonction dans la classe de Schwartz positive et non nulle. Notons que la série définissant u_{in} converge, en notant Ω l'espace de probabilité sus-jacent à la famille $(\eta_k)_k$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, dans $L^2(\Omega, H^s(\mathbb{T}_L^d))$. En particulier, une conséquence des injections de Sobolev est la continuité presque sûre de u_{in} , ce qui permet de donner un sens à $u_{\text{in}}(x)$.

Une des idées essentielles relatives à la dérivation d'équations cinétiques est celle de *propagation du chaos* que l'on décrit sommairement dans ce qui suit. Notons qu'au

temps initial les coefficients de Fourier sont indépendants. Aux temps ultérieurs, cette indépendance est brisée par les interactions entre différentes longueurs d’onde dues à la non-linéarité. Néanmoins, le nombre de coefficients de Fourier de la donnée initiale croît avec la taille du tore. Ainsi, la « proportion » d’uplets de coefficients de Fourier qui ne sont pas indépendants les uns des autres devient très petite quand L tend vers l’infini. On se place alors dans ce régime et on fait l’hypothèse que la dynamique non linéaire est principalement régie par les triplets de coefficients de Fourier indépendants, qui eux-mêmes engendrent de l’indépendance entre les coefficients de Fourier de la solution du problème de Cauchy (1). La propagation du chaos revient à supposer qu’en tout temps, ces derniers se comportent presque comme des variables aléatoires indépendantes ; et même, dans le cas gaussien que l’on décrit ici, qu’ils se comportent comme des variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes. On mentionne par exemple la section 2.2.2 du livre de Nazarenko (2011). Or, la loi d’une famille de variables (conjointement) gaussiennes est complètement déterminée par les covariances entre les différentes variables. Cela suggère d’étudier l’évolution de la quantité

$$\mathbb{E}(|\hat{u}(t, k)|^2)$$

dans un régime asymptotique où L est très grand, les covariances entre deux modes de Fourier différents étant supposées nulles en vertu de l’hypothèse de propagation du chaos. Notons que cette hypothèse reste à démontrer dans le cas général. Elle a été obtenue comme conséquence de la dérivation de l’équation cinétique par Deng et Hani (2021b). Par ailleurs, j’ai formulé un résultat combinatoire général (de Suzzoni, 2022).

Dans le cadre de la turbulence faible — comme sous-théorie de la turbulence d’onde — on considère également que la non-linéarité tend vers 0. Cela requiert de se placer à une échelle de temps où l’on observe des effets non linéaires. Pour notre problème (1), nous allons identifier la *force de la non-linéarité*, c’est-à-dire l’espérance de $\lambda^2 |u_{\text{in}}(x)|^2$ (1). Comme $u_{\text{in}}(x)$ est une gaussienne centrée, l’espérance de $|u_{\text{in}}(x)|^2$ caractérise la loi de $|u_{\text{in}}(x)|$. On a

$$\mathbb{E}(|u_{\text{in}}(x)|^2) = \frac{1}{L^{2d}} \sum_{k, k' \in \mathbb{Z}_L^d} \sqrt{U_{\text{in}}(k)U_{\text{in}}(k')} e^{i(k-k') \cdot x} \mathbb{E}(\eta_k \overline{\eta_{k'}}).$$

La loi de la famille $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}_L^d}$ assure que

$$\mathbb{E}(\eta_k \overline{\eta_{k'}}) = \delta_{k, k'}$$

ce qui entraîne que

$$\mathbb{E}(|u_{\text{in}}(x)|^2) = \frac{1}{L^{2d}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_L^d} U_{\text{in}}(k) \sim \frac{1}{L^d} \int U_{\text{in}}(\xi) d\xi.$$

Ainsi, l’espérance de $|u_{\text{in}}(x)|^2$ est de l’ordre de L^{-d} , et la force de la non-linéarité est donnée par $\alpha = L^{-d} \lambda^2$. Notons qu’un changement de convention pour les coefficients

1. et pas celle de $\lambda^2 |u_{\text{in}}(x)|^3$ puisque si l’on considère l’équation vérifiée par νu , pour $\nu > 0$, la non-linéarité est bien multipliée par ν^2 et non ν^3

de Fourier ou qu'un changement d'échelle dans l'équation de Schrödinger donnent lieu dans la littérature à différentes expressions de la force de la non-linéarité qui n'ont pas d'influence sur la nature des résultats.

L'objet d'étude devient

$$U(t, k) = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \alpha \rightarrow 0}} \mathbb{E}(|\hat{u}(tT_{\text{kin}}, k)|^2)$$

où $T_{\text{kin}} > 0$ est l'échelle de temps dite cinétique, dépend des paramètres α et L , et reste à déterminer. Bien sûr, $U(t, k)$ n'a pas de sens *a priori* puisque les ensembles \mathbb{Z}_L^d sont pour la plupart disjoints. Par ailleurs, il faut donner un sens à limite : passe-t-on d'abord à la limite en α , puis en L , ou l'inverse, ou bien existe-t-il une relation entre α et L ? La nature de la limite a une grande influence sur l'asymptotique, voir Remarque 1.2. Nous allons nous placer dans un régime dit *cinétique*, que l'on définira et discutera aux remarques 1.1, 1.2. Pour la dérivation heuristique de l'équation d'évolution pour U , on choisira de prendre d'abord la limite en L , puis en α afin d'en clarifier l'articulation, mais le théorème considéré ici choisit une relation spécifique entre α et L : ces deux régimes sont cinétiques.

On prendra pour convention dans toute la suite

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}_L^d} u(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad u(x) = \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}_L^d} \hat{u}(k) e^{ik \cdot x}.$$

Plan du texte

Dans la sous-section suivante, j'énonce et commente le résultat principal. Il stipule que la quantité $\mathbb{E}(|\hat{u}(tT_{\text{kin}}, k)|^2)$ tend, quand L tend vers ∞ et $\alpha = L^{-1}$ vers la solution d'une équation cinétique, (4), qu'on dérive heuristiquement à la section 1. Cette dérivation heuristique est relativement longue, car elle permet d'introduire les objets intervenant dans la preuve de Deng et Hani, 2023b et de mettre en avant quelques considérations venant de la littérature physique expliquant certains aspects du résultat, en particulier la dépendance de l'échelle de temps cinétique en α et L . Dans les sections suivantes, on présente quelques points de la preuve : en particulier, on développe les objets de la section 1 en une diagrammatique ; on expose la structure générale de la preuve ainsi que quelques structures récursives faisant émerger l'équation cinétique (4).

Résultat principal

On verra à la remarque 1.1 que le régime $\alpha = L^{-1}$ est un régime privilégié : c'est celui que l'on choisit ici. La dérivation heuristique de l'équation (cf sous-section 1.2) nous assure que l'échelle de temps cinétique est $T = \alpha^{-2}$. Cela implique quelques difficultés techniques que nous discuterons à la remarque 1.2 et qui sont liées au choix d'échelle. En particulier, cela implique de se placer sur un tore *générique* plutôt que sur le tore

homogène (ou rectangulaire). Au lieu de modifier le tore, on modifie de façon équivalente la définition de l'opérateur de Laplace–Beltrami qui devient

$$\Delta_\beta = \sum_{j=1}^d \beta_j \partial_j^2,$$

où $\beta \in (\mathbb{R}_+)^d$ est choisi dans un ensemble de mesure pleine de $(\mathbb{R}_+)^d$ de façon à ce que le comptage de la remarque 1.2 soit valide. Dans toute la suite, on supposera β fixé de façon adéquate et on omettra la dépendance en β des différentes quantités concernées.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème.

THÉORÈME 0.1 (Deng et Hani, 2023b). — *Soient $d \geq 3$, $\alpha = L^{-1}$ et $T = \frac{1}{2}\delta L^2$ avec $\delta \ll 1$ indépendant de L . Soit U l'unique solution du problème de Cauchy (4). Pour tout L assez grand, il existe $A > 0$ indépendant de L tel que le problème de Cauchy (1) soit bien posé sur $[0, T]$ avec probabilité $1 - L^{-A}$. En notant son unique solution u (qui dépend implicitement de L), on a*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \sup_{k \in \mathbb{Z}_L^d} |\mathbb{E}(|\hat{u}(tT, k)|^2) - U(t, k)| = 0$$

L'équation (4) est l'équation d'évolution effective des corrélations des coefficients de Fourier que l'on dérive formellement à la sous-section 1.2.

Remarque 0.2. — Le théorème suppose de donner un sens à l'évaluation en k de U , ce qui requiert que U soit continue. La régularité de U dépend du choix de la donnée initiale ; sa continuité est garantie si la donnée initiale U_{in} est dans la classe de Schwartz.

Par ailleurs, le sens à donner à $u(tT)$ est sur l'ensemble de probabilité $1 - L^{-A}$ où la solution est bien définie.

Remarque 0.3. — Certaines hypothèses du théorème peuvent être affaiblies. Par exemple, le fait de demander U_{in} dans la classe de Schwartz peut être remplacé par le fait de contrôler certaines semi-normes de U_{in} . La loi de chaque η_k , plutôt que d'être gaussienne, peut satisfaire l'hypothèse plus générale dite RPA pour Random Phase Approximation. C'est l'objet du livre de Nazarenko (2011) : cette hypothèse garantit que la loi de chaque η_k présente les invariances nécessaires à la preuve, invariances que présentaient déjà les gaussiennes. Enfin, le choix du régime $\alpha = L^{-1}$ et du tore générique ont été affaiblis dans un travail ultérieur par Deng et Hani (2023a), pour lequel $\alpha = L^{-\kappa}$, avec $\kappa < 1$. L'échelle de temps devient alors $T = \alpha^{-2} = L^{2\kappa}$, et le tore générique peut être remplacé par n'importe quel tore. L'intervalle de temps sur lequel la dérivation est valide a également été étendu à $[0, T_*)$, où T_* est le temps maximal d'existence de la solution de (4), tout récemment par Deng et Hani (2023c).

Remarque 0.4. — Une note explicative a été rédigée par les deux auteurs (Deng et Hani, 2022). Ce texte se veut complémentaire à cette dernière.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Charles Collot et Chenmin Sun pour leurs relectures attentives, ainsi que pour leurs suggestions et leurs conseils précieux lors de l'élaboration de ce texte.

1. Dérivation heuristique de l'équation cinétique

1.1. Invariances de l'équation de Schrödinger

On fait quelques remarques sur les invariances de l'équation de Schrödinger intervenant dans la nature du résultat.

L'équation de Schrödinger est invariante sous l'action de $U(1)$, c'est-à-dire que son flot commute avec les changements de phase globaux. Autrement dit, si Ψ est le flot de l'équation de Schrödinger cubique, on a

$$\Psi(t)(e^{i\theta}u_0) = e^{i\theta}\Psi(t)(u_0)$$

pour u_0 dans une classe de distributions appropriée, $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de Noether, cela signifie que la masse de la solution est a priori conservée par le flot. Autrement dit, lorsque cela fait sens

$$\int_{\mathbb{T}_L^d} |\Psi(t)(u_0)(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{T}_L^d} |u_0(x)|^2 dx.$$

Cette invariance joue un rôle dans la reformulation de l'équation de Schrödinger nécessaire à la preuve du théorème.

L'équation de Schrödinger est également invariante sous l'action des translations spatiales. Cela signifie que son flot commute avec ces dernières. Par ailleurs, la loi de la donnée initiale u_{in} est également invariante sous l'action de ces translations. En effet, prenons $x_0 \in \mathbb{T}_L^d$ et notons τ_{x_0} la translation de vecteur x_0 . On a

$$\tau_{x_0} u_{\text{in}}(x) = \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}_L^d} \sqrt{U_{\text{in}}(k)} \eta_k^{x_0} e^{ik \cdot x}$$

où $\eta_k^{x_0} = e^{-ik \cdot x_0} \eta_k$. La famille $(\eta_k^{x_0})_k$ est une famille de variables gaussiennes centrées normalisées indépendantes et donc $\tau_{x_0} u_{\text{in}}$ a la même loi que u_{in} . Notons μ la loi de u_{in} et μ^t la loi de $u(t)$. Pour tout borélien A de $\mathcal{C}(\mathbb{T}_L^d)$, on a par définition,

$$\mu^t(\tau_{x_0}^{-1}(A)) = \mu(\Psi(t)^{-1}(\tau_{x_0}^{-1}(A))).$$

Comme τ_{x_0} et $\Psi(t)$ commutent, on obtient

$$\mu^t(\tau_{x_0}^{-1}(A)) = \mu(\tau_{x_0}^{-1}(\Psi(t)^{-1}(A))).$$

Comme μ est invariante sous l'action des translations, on a

$$\mu^t(\tau_{x_0}^{-1}(A)) = \mu(\Psi(t)^{-1}(A)) = \mu^t(A)$$

et il en va de même pour μ^t . Autrement dit, la loi de $u(t)$ satisfait la même invariance que la loi de la donnée initiale. On en déduit que

$$\mathbb{E}(\overline{\hat{u}(t, k)} \hat{u}(t, k')) = \mathbb{E}(\overline{\widehat{\tau_{x_0} u}(t, k)} \widehat{\tau_{x_0} u}(t, k')) = e^{ix_0 \cdot (k - k')} \mathbb{E}(\overline{\hat{u}(t, k)} \hat{u}(t, k'))$$

et donc l'espérance $\mathbb{E}(\overline{\hat{u}(t, k)} \hat{u}(t, k'))$ est identiquement nulle à moins que $k = k'$. Cela justifie rigoureusement que l'on ne considère pas l'évolution des corrélations entre deux modes de Fourier différents.

Enfin, l'équation de Schrödinger est invariante par changement d'échelle. En effet, en posant $v(t, x) = L^{(d+1)/2} u(L^2 t, Lx)$, on obtient que v est la solution du problème de Cauchy posé sur le tore \mathbb{T}_1^d suivant

$$\begin{cases} i\partial_t v - \Delta v + \alpha L|v|^2 v = 0 \\ v(t=0) = v_{\text{in}} \end{cases}$$

avec $v_{\text{in}}(x) = L^{(d+1)/2} u_{\text{in}}(Lx)$.

Remarque 1.1. — On en déduit que dans un régime où $\alpha \sim L^{-1}$, résoudre le problème de Cauchy jusqu'à des temps d'ordre $L^2 \sim \alpha^{-2}$ revient à résoudre le problème de Cauchy sur v jusqu'à des temps d'ordre 1. On peut objecter que la taille typique de v_{in} est L , ce qui entraîne naturellement des difficultés. Néanmoins, l'équation de Schrödinger linéaire, si elle ne peut présenter des effets dispersifs en tous temps sur une variété compacte comme le tore, est dispersive en temps fini. Le changement d'échelle ci-dessus indique que ces effets, observés sur \mathbb{T}_1^d jusqu'à des temps d'ordre 1, se répercutent sur \mathbb{T}_L^d jusqu'à des temps d'ordre L^2 , ce qui suggère que $T_{\text{kin}} = L^2$ est une bonne échelle de temps à considérer ; elle correspond à $\alpha = L^{-1}$.

1.2. Dérivation

Cette sous-section est une adaptation libre de la méthodologie introduite par Zakharov, qui permet de déduire d'une formulation hamiltonienne d'une équation d'onde, une équation cinétique, généralisée et expliquée dans de nombreux ouvrages de la littérature physique, par exemple ceux de Zakharov, L'vov et Falkovich (2012), Nazarenko (2011) et Galtier (2022).

Afin de trouver une candidate à l'équation d'évolution sur U , nous proposons de réduire la solution u de la façon suivante. Pour tout $k \in \mathbb{Z}_L^d$, et en fixant T l'échelle de temps considérée, on pose

$$a(t, k) = e^{-itT(|k|^2 + M)} \hat{u}(tT, k)$$

où $M = 2\alpha L^{-d} \sum_k |\hat{u}_{\text{in}}(k)|^2$. Par conservation de la masse, on a $M = 2\alpha L^{-d} \sum_k |a(t, k)|^2$. Le fait de multiplier la solution par la phase e^{-itTM} est parfois appelé renormalisation

de Wick ⁽²⁾. L'équation sur a devient

$$i\dot{a}(t, k) = -T\alpha L^{-d} \sum_{k_1 - k_2 + k_3 = k} \varepsilon_{k_1, k_2, k_3} e^{itT\Omega(k_1, k_2, k_3)} a(t, k_1) \overline{a(t, k_2)} a(t, k_3)$$

où \dot{a} signifie la dérivée temporelle de a , où

$$\varepsilon_{k_1, k_2, k_3} = \begin{cases} 1 & \text{si } k_2 \notin \{k_1, k_3\} \\ -1 & \text{si } k_2 = k_1 = k_3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et où l'on a défini le produit scalaire de \mathbb{R}^d et la norme associée par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^d \beta_j x^j y^j, \quad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

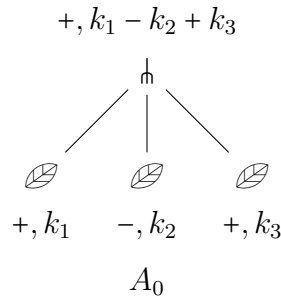
ce qui permet de définir $\Omega(k_1, k_2, k_3)$ comme

$$\Omega(k_1, k_2, k_3) = |k_1|^2 - |k_2|^2 + |k_3|^2 - |k_1 - k_2 + k_3|^2 = -2\langle k_2 - k_1, k_2 - k_3 \rangle.$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(|\hat{u}(tT, k)|^2) = \mathbb{E}(|a(t, k)|^2).$$

On peut représenter la forme de l'équation de façon diagrammatique comme un arbre.



L'arbre A_0 signifie que les modes de Fourier k_1 , k_2 et k_3 contribuent à l'évolution du mode de Fourier $k_1 - k_2 + k_3$. Un nœud ou une feuille porte un signe $-$ s'il fait intervenir une conjugaison (complexe) et porte le signe $+$ sinon. Au nœud \mathfrak{h} est associé une valeur $\varepsilon_{\mathfrak{h}} = \varepsilon_{k_1, k_2, k_3}$ et une valeur $\Omega_{\mathfrak{h}} = \zeta_{\mathfrak{h}}(|k_1|^2 - |k_2|^2 + |k_3|^2 - |k_1 - k_2 + k_3|^2)$ où $\zeta_{\mathfrak{h}}$ correspond au signe porté par \mathfrak{h} . Par ailleurs, la somme décrivant l'évolution de a étant symétrique en k_1 et k_3 , on interprétera de la même façon deux diagrammes s'obtenant en échangeant les enfants de gauche et de droite d'un nœud.

Mettons a sous la forme

$$a(t, k) = a^0(k) + a^1(t, k) + a^2(t, k) + R^2(t, k)$$

2. Cette appellation vient du fait qu'on transforme le $|u|^2$ de la non-linéarité en $|u|^2 - \mathbb{E}(|u|^2)$. Si u est une gaussienne centrée, cela correspond effectivement à prendre sa renormalisée au sens de Wick (analogue de la renormalisation en théorie quantique des champs).

avec

$$\begin{aligned}
a^0(k) &= \hat{u}_{\text{in}}(k) = \sqrt{U_{\text{in}}(k)}\eta_k, \\
a^1(k) &= iT\alpha L^{-d} \sum_{k_1-k_2+k_3=k} \varepsilon_{k_1,k_2,k_3} a^0(k_1)\overline{a^0(k_2)}a^0(k_3) \int_0^t e^{i\tau T\Omega(k_1,k_2,k_3)} d\tau \\
a^2(k) &= iT\alpha L^{-d} \sum_{k_1-k_2+k_3=k} \varepsilon_{k_1,k_2,k_3} \int_0^t \left(a^1(k_1)\overline{a^0(k_2)}a^0(k_3) \right. \\
&\quad \left. + a^0(k_1)\overline{a^1(k_2)}a^0(k_3) + a^0(k_1)\overline{a^0(k_2)}a^1(k_3) \right) e^{i\tau T\Omega(k_1,k_2,k_3)} d\tau
\end{aligned}$$

et en ayant pour idée que pour des temps d'ordre fini, a^n est d'ordre $\alpha^n \ll 1$ et $R^2 = o(\alpha^2)$. Autrement dit, pour $n \geq 0$, la fonction a^{n+1} est définie par

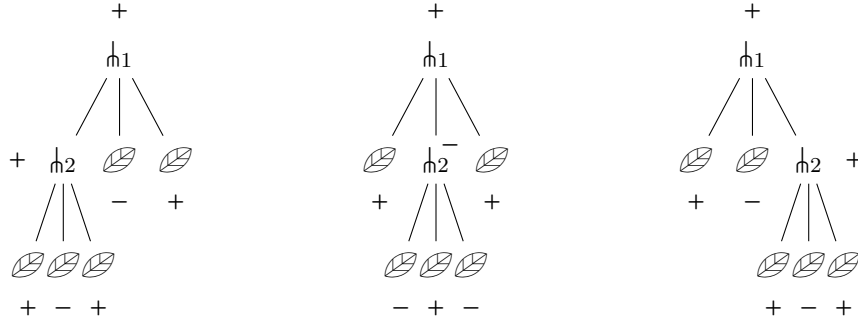
$$(3) \quad \begin{cases} i\dot{a}^{n+1}(t, k) = -T\alpha L^{-d} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ k_1-k_2+k_3=k}} \varepsilon_{k_1,k_2,k_3} e^{itT\Omega(k_1,k_2,k_3)} a^{n_1}(t, k_1)\overline{a^{n_2}(t, k_2)}a^{n_3}(t, k_3) \\ a^{n+1}(t=0, k) = 0 \end{cases} .$$

Sous l'hypothèse qu'en temps fini, a^n est de l'ordre de α^n , et en supposant que la série ci-dessous converge on a

$$a = \sum_n a^n$$

et $R_2 = \sum_{n \geq 3} a^n \sim \alpha^3$.

La fonction a^1 correspond au diagramme d'interaction A_0 , tandis que a^2 correspond aux diagrammes d'interaction ci-dessous.



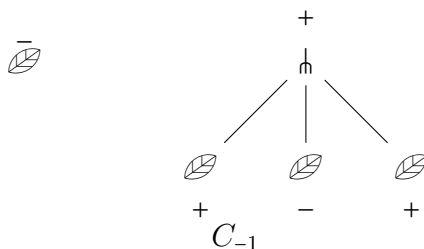
On déduit de l'écriture de a le développement suivant

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbb{E}(|a(t, k)|^2) &= 2\text{Re} \mathbb{E}(\overline{a(t, k)}\dot{a}(t, k)) \\
&= 2\text{Im} \mathbb{E}(\overline{a^0(k)}i\dot{a}^1(t, k)) \\
&\quad + 2\text{Im} \mathbb{E}(\overline{a^0(k)}i\dot{a}^2(t, k)) + 2\text{Im} \mathbb{E}(\overline{a^1(t, k)}i\dot{a}^1(t, k)) \\
&\quad + \tilde{R}^2
\end{aligned}$$

où l'on suppose toujours que pour des temps d'ordre fini, le terme \tilde{R}^2 est un $o(\alpha^2)$.

Le passage de la solution a à l'espérance $\mathbb{E}(|a|^2)$ met en jeu les quantités a^m et a^n . Pour décrire $\mathbb{E}(|a|^2)$ et sa dérivée temporelle, on écrit des *couplages* d'arbres. Un couplage d'arbres est la donnée d'un couple d'arbres et d'un appariement des feuilles de ces arbres, on renvoie à la définition 2.1. Par exemple, $\mathbb{E}(\overline{a^0(k)}i\dot{a}^1(t, k))$ fait intervenir le couplage

C_{-1} ci-dessous, tandis que $\text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^0(k)}i\dot{a}^2(t, k)) + \text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^1(t, k)}i\dot{a}^1(t, k))$ fait intervenir les couplages C_1 à C_8 décrits dans la suite.



Le signe $-$ au-dessus de la feuille de gauche correspond au fait que l'on prend le conjugué de a^0 .

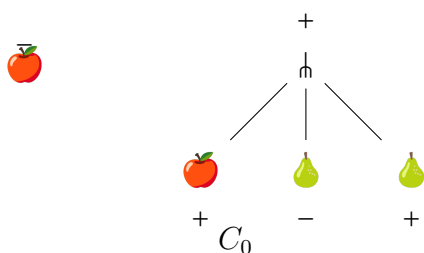
On a

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^0(k)}i\dot{a}^1(t, k)) \\ = -T\alpha L^{-d} \text{Im} \sum_{k_1-k_2+k_3=k} \varepsilon_{k_1, k_2, k_3} e^{itT\Omega(k_1, k_2, k_3)} \mathbb{E}(\overline{a^0(k)}a^0(k_1)\overline{a^0(k_2)}a^0(k_3)). \end{aligned}$$

Comme les $a^0(k)$ sont des gaussiennes complexes indépendantes, on a, par la formule de Wick évoquée en toute généralité à la section suivante,

$$\mathbb{E}(\overline{a^0(k)}a^0(k_1)\overline{a^0(k_2)}a^0(k_3)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k_2 \notin \{k_1, k_3\} \\ 2\mathbb{E}(|a^0(k)|^2)^2 & \text{si } k_1 = k_2 = k_3 = k \\ \mathbb{E}(|a^0(k_2)|^2)\mathbb{E}(|a^0(k)|^2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

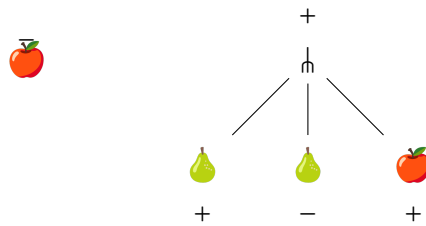
Cela signifie que pour que le couplage contribue au résultat final, il faut appairier les feuilles et imposer que leurs modes de Fourier soient égaux. En termes de diagrammatique, nous allons attribuer un symbole à chaque feuille de façon à ce qu'un symbole corresponde à un nombre pair de feuilles dont autant portent le signe $-$ que le signe $+$ comme par exemple le couplage C_0 ci-dessous.



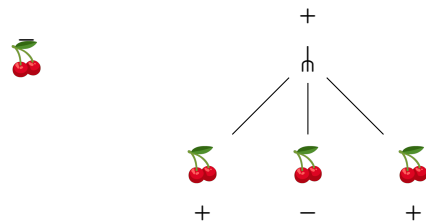
Mis en regard de la valeur de $\varepsilon_{k_1, k_2, k_3}$ chaque terme de la somme décrivant $\text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^0(k)}i\dot{a}^1(t, k))$ est nul sauf celui où $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Mais dans ce cas $\Omega(k_1, k_2, k_3) = 0$, et le fait de prendre la partie imaginaire annule $\text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^0(k)}i\dot{a}^1(t, k))$. Autrement dit, le terme d'ordre α dans le développement de $\partial_t \mathbb{E}(|a(t, k)|^2)$ est nul.

Les annulations probabilistes ci-dessus s'interprètent en terme d'arbres (ou de diagrammes de Feynman) de la façon suivante : le couplage C_0 donne un résultat nul car le ε correspondant est nul. En effet, des feuilles de même symbole désigne un appariement, c'est-à-dire que les feuilles paires correspondent à la même longueur d'onde k_2 et les

feuilles pommes à la même longueur d'onde k . Les signes $-$ correspondent au fait de prendre le conjugué. Les signes des nœuds et des feuilles se déduisent du signe de la racine de la façon suivante : les enfants de gauche et de droite héritent du même signe que celui de leur parent, tandis que celui du milieu obtient le signe opposé. On apparie toujours deux feuilles de signes opposés : en effet, les gaussiennes complexes centrées étant de loi invariante sous l'action de $U(1)$, pour toute variable gaussienne complexe centrée η , on a $\mathbb{E}(\eta^2) = \mathbb{E}((\bar{\eta})^2) = 0$. Il en va de même pour le couplage ci-dessous.



En revanche, le couplage



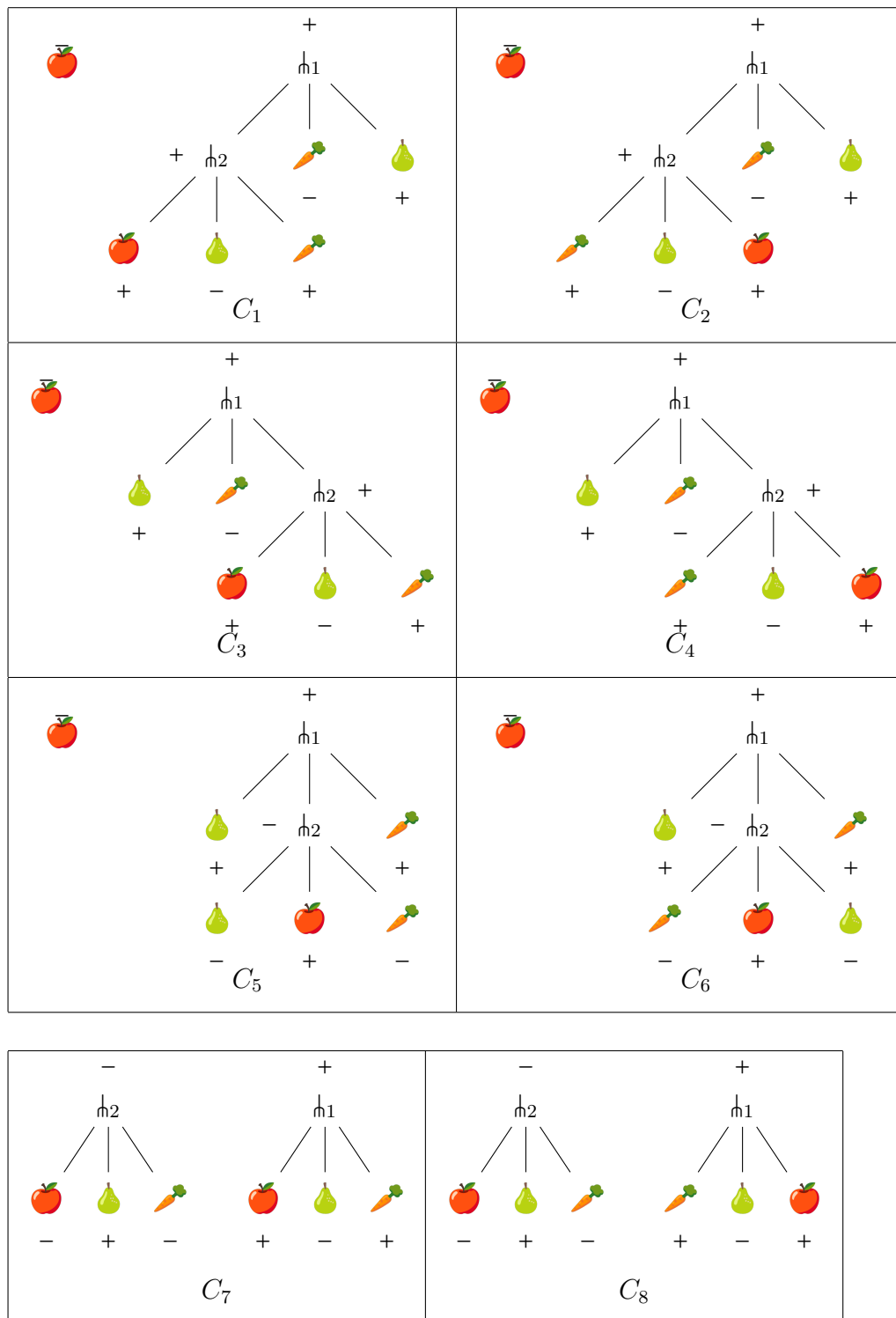
participe a priori à la somme puisque son ε vaut -1 . Néanmoins, le Ω associé à l'unique nœud vaut 0, ce qui donne une contribution nulle une fois prise la partie imaginaire.

On passe à l'ordre supérieur, c'est-à-dire au calcul de

$$\text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^0(k)} i \dot{a}^2(t, k)) + \text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^1(t, k)} i \dot{a}^1(t, k)).$$

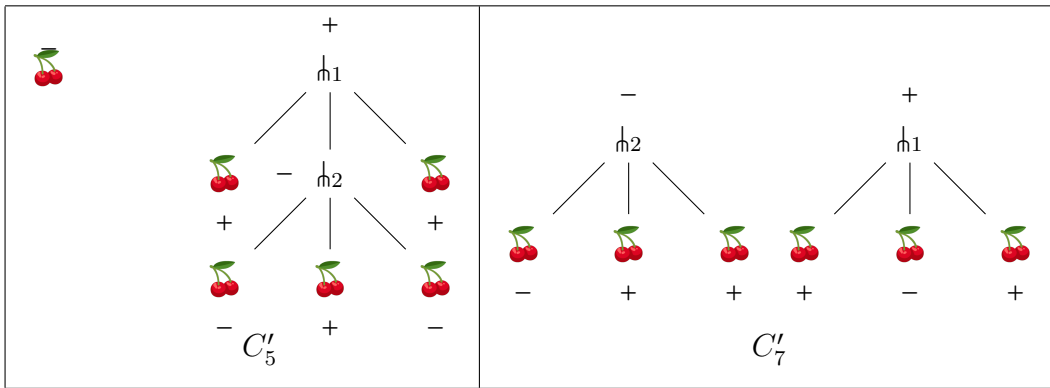
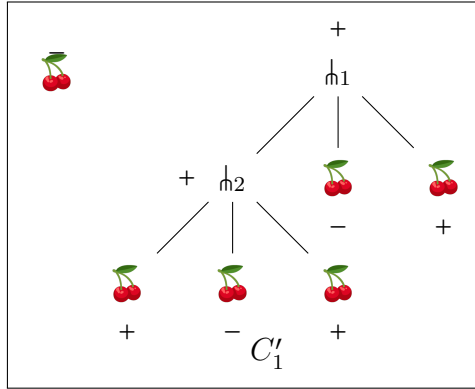
Ce calcul implique les couplages suivants ⁽³⁾.

3. Les couplages C_1 à C_6 sont appelés les mini-trees, et les couplages C_7 et C_8 sont appelés les (1,1)-mini couples dans Deng et Hani (2023b).



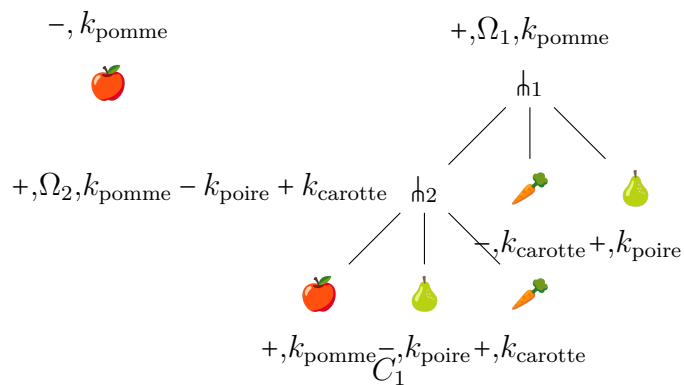
Comme mentionné plus haut, il y a une symétrie gauche-droite dans les arbres, qui est issue de la symétrie entre k_1 et k_3 dans la somme caractérisant la non-linéarité. Cela conduit au fait que les couplages C_1, C_2, C_3 et C_4 contribuent de la même façon au résultat final, ainsi que C_5 et C_6 d'une part, C_7 et C_8 d'autre part.

Enfin, il reste les couplages pour lesquels plus de 3 feuilles ont le même symbole : C'_1, C'_5 et C'_7 .



Le couplage C'_1 compte deux fois en vertu de la symétrie gauche–droite. À partir de maintenant, on considérera que les arbres dans lesquels au moins trois feuilles ont le même symbole sont un cas particulier des arbres dont les feuilles sont appariées, qui consiste à identifier certains symboles. Cette identification est justifiée par l'utilisation de la formule de Wick, voir Remarque 2.5.

On va à présent décorer les feuilles des arbres avec des modes de Fourier et les feuilles et les nœuds avec des modes de Fourier et des fréquences d'interaction. Donnons un exemple pour C_1 .



Ici, Ω_j correspond au signe du nœud \mathfrak{h}_j multiplié par $\Omega(k_1, k_2, k_3)$ où k_1 est le mode de Fourier qui décore son enfant de gauche, k_2 celui du milieu, et k_3 celui de droite, c'est-à-dire :

$$\Omega_1 = -|k_{\text{pomme}}|^2 + |k_{\text{pomme}} - k_{\text{poire}} + k_{\text{carotte}}|^2 - |k_{\text{carotte}}|^2 + |k_{\text{poire}}|^2, \quad \Omega_2 = -\Omega_1.$$

La contribution de ce couplage à la somme totale devient

$$I_1 = -i(T\alpha L^{-d})^2 \sum_{k_{\text{poire}}, k_{\text{carotte}}} U_{\text{in}}(k_{\text{pomme}}) U_{\text{in}}(k_{\text{poire}}) U_{\text{in}}(k_{\text{carotte}}) \varepsilon e^{itT\Omega_1} \int_0^t e^{-isT\Omega_1} ds$$

où

$$\varepsilon = \varepsilon_{k_{\text{pomme}} - k_{\text{poire}} + k_{\text{carotte}}, k_{\text{carotte}}, k_{\text{poire}}} \varepsilon_{k_{\text{pomme}}, k_{\text{poire}}, k_{\text{carotte}}}.$$

En posant, $k_1 = k_{\text{pomme}} - k_{\text{poire}} + k_{\text{carotte}}$, $k_2 = k_{\text{carotte}}$, $k_3 = k_{\text{poire}}$ et en renommant $k = k_{\text{pomme}}$, on récrit la contribution I_1 comme

$$\begin{aligned} & i \frac{L^{2d}}{(T\alpha)^2} I_1(k) \\ &= \sum_{k_1 - k_2 + k_3 = k} U_{\text{in}}(k) U_{\text{in}}(k_2) U_{\text{in}}(k_3) \varepsilon_{k_1, k_2, k_3} \varepsilon_{k, k_3, k_2} e^{itT\Omega(k_1, k_2, k_3)} \int_0^t e^{-isT\Omega(k_1, k_2, k_3)} ds. \end{aligned}$$

En renommant correctement les variables, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^0(k)} i \dot{a}^2(t, k)) + \text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^1(t, k)} i \dot{a}^1(t, k)) = \\ 2(T\alpha L^{-d})^2 \sum_{k_1 - k_2 + k_3 = k} \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_3, k_2} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_3) I_{k_1, k_2, k_3}(t) \end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} = -4$ si $k_1 = k_2 = k_3$ et vaut $\varepsilon_{k_1, k_2, k_3}$ sinon, où

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_3) = U_{\text{in}}(k) U_{\text{in}}(k_1) U_{\text{in}}(k_2) U_{\text{in}}(k_3) \left(\varepsilon_{k, k_3, k_2} U_{\text{in}}(k_1)^{-1} - \varepsilon_{k_1, k, k_3} U_{\text{in}}(k_2)^{-1} \right. \\ \left. + \varepsilon_{k_2, k_1, k} U_{\text{in}}(k_3)^{-1} - \varepsilon_{k_1, k_2, k_3} U_{\text{in}}(k)^{-1} \right) \end{aligned}$$

et où

$$I_{k_1, k_2, k_3}(t) = \text{Im} \left(-ie^{itT\Omega(k_1, k_2, k_3)} \int_0^t e^{-isT\Omega(k_1, k_2, k_3)} ds \right).$$

Le passage de ε à $\tilde{\varepsilon}$ permet de prendre en compte les contributions des couplages C'_1, C'_5 et C'_7 .⁽⁴⁾ On passe à la limite $L \rightarrow \infty$ et la somme de Riemann devient une intégrale (la limite est à prendre au sens faible pour k , mais on a vu qu'elle prend un sens fort dans le théorème grâce au supremum sur k quitte à supposer de la régularité sur U) :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^0(k)} i \dot{a}^2(t, k)) + \text{Im } \mathbb{E}(\overline{a^1(t, k)} i \dot{a}^1(t, k)) = \\ 2(T\alpha)^2 \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \delta(k - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3) \tilde{Q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) I_{\xi_1, \xi_2, \xi_3}(t) \end{aligned}$$

où δ désigne le delta de Dirac.

4. On se réfère à la remarque 2.5, pour comprendre que 4 vient de $4 = 3! - 2$.

Remarque 1.2. — Dans le régime que l'on considère pour cette dérivation heuristique, c'est-à-dire $L \rightarrow \infty$, puis $\alpha \rightarrow 0$, l'ensemble $\{\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0\}$ est de mesure nulle et on écrira

$$I_{\xi_1, \xi_2, \xi_3}(t) = -T^{-1} \frac{\sin(tT\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3))}{\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}.$$

Néanmoins, dans un régime entre α et L , il y a une compétition entre l'ensemble

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_L^d \mid \Omega(k_1, k_2, k_3) = 0\}$$

et l'ensemble

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_L^d \mid \Omega(k_1, k_2, k_3) \leq T^{-1}\}.$$

Pour obtenir le même type de limite que celui que nous sommes en train de dériver, il faut que la taille du deuxième ensemble domine celle du premier. C'est cette comparaison qui distingue les différents régimes. Dans le cas opposé, on parle de turbulence discrète, et dans le cas où les deux ensembles sont de tailles comparables de régime mésoscopique, voir les travaux de Kartashova (1991, 1994) et Denissenko, Lukaschuk et Nazarenko (2007). Or, dans le tore homogène ces ensembles ont pour tailles respectives

$$L^{d-1}, \quad L^d T^{-1/2}$$

ce qui impose $T \ll L^2$. Néanmoins, dans un tore dit générique, sans symétrie sur les coefficients, les ensembles ont pour taille

$$L^{d/2}, \quad L^d T^{-1/2}$$

ce qui autorise $T \geq L^2$.

On obtient

$$\begin{aligned} (2T\alpha^2)^{-1} \lim_{L \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \mathbb{E}(\overline{a^0(k)} \dot{a}^2(t, k)) + \operatorname{Im} \mathbb{E}(\overline{a^1(t, k)} \dot{a}^1(t, k)) = \\ - \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \delta(k - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3) \tilde{Q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{\sin(tT\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3))}{\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}. \end{aligned}$$

On prend donc $T = \frac{\delta}{2\alpha^2}$, où δ est une constante positive, et on obtient, en utilisant que $\frac{\sin(T\Omega)}{\Omega} \rightarrow \delta(\Omega)$ quand $T \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \mathbb{E}(\overline{a^0(k)} \dot{a}^2(t, k)) + \operatorname{Im} \mathbb{E}(\overline{a^1(t, k)} \dot{a}^1(t, k)) = \\ \delta \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \delta(k - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3) Q(U_{\text{in}}(\xi_1), U_{\text{in}}(\xi_2), U_{\text{in}}(\xi_3), U_{\text{in}}(\xi)) \delta(\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \end{aligned}$$

où

$$Q(U_1, U_2, U_3, U_4) = -U_1 U_2 U_3 U_4 \left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} - \frac{1}{U_4} \right),$$

les ε impliqués dans la définition de \tilde{Q} n'étant différents de 1 que sur un ensemble de mesure nulle.

Remarque 1.3. — L'écueil de cette dérivation heuristique tient bien sûr dans le fait qu'à l'échelle de temps $\alpha^{-2} \rightarrow \infty$, le « reste » \tilde{R}_2 n'est pas un reste et que l'étude diagrammatique que nous avons commencé à esquisser doit être poussée à tous les ordres.

Le candidat au problème de Cauchy pour U devient

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t U = & 2\delta \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \delta(k - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3) \delta(\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \\ & Q(U(t, \xi_1), U(t, \xi_2), U(t, \xi_3), U(t, k)) \\ U(t=0) = & U_{\text{in}}. \end{cases}$$

Son caractère localement bien posé a été prouvé par Germain, Ionescu et Tran (2020).

2. Diagrammatique

Soit A un arbre ternaire, c'est-à-dire ici un arbre dont chaque nœud a exactement 3 enfants. On notera \mathcal{F}_A l'ensemble de ses feuilles, \mathcal{N}_A l'ensemble de ses nœuds et $\mathcal{T}_A = \mathcal{F}_A \sqcup \mathcal{N}_A$. Notons que si $\#\mathcal{N}_A = n$, alors $\#\mathcal{F}_A = 2n + 1$. On associe à chaque nœud un signe conformément à la description de la sous-section 1.2, c'est-à-dire qu'on choisit le signe de la racine puis les enfants de gauche et de droite héritent du même signe que leur parent et celui du milieu du signe opposé. On dira par abus de notation que $A \in \mathcal{A}_n^\pm$ si $\#\mathcal{N}_A = n$ et si le signe de la racine est \pm .

DÉFINITION 2.1. — *Un couplage d'arbres est la donnée de deux arbres A_-, A_+ tels que $A_\pm \in \mathcal{A}_{n_\pm}^\pm$, où $n_\pm \in \mathbb{N}$, et d'une bijection σ entre les éléments de $\mathcal{F}_{A_+} \sqcup \mathcal{F}_{A_-}$ portant le signe $-$ et ceux du même ensemble portant le signe $+$. On notera $\mathcal{C}_{m,n}$ l'ensemble des couplages d'un arbre à m nœuds avec un arbre à n nœuds et \mathcal{F}_C^- (resp. \mathcal{F}_C^+) l'ensemble des feuilles de C portant le signe $-$ (resp. $+$). On notera également $\mathcal{N}_C = \mathcal{N}_{A_-} \sqcup \mathcal{N}_{A_+}$ et $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_{A_-} \sqcup \mathcal{F}_{A_+}$.*

Notons que si $A \in \mathcal{A}_n^\pm$, alors le nombre de feuilles de A portant le signe \mp est n et le nombre de feuilles de A portant le signe \pm est $n + 1$.

DÉFINITION 2.2. — *Une décoration d'un couplage (A_-, A_+, σ) est un vecteur $(k_j)_{j \in \mathcal{T}_{A_+} \sqcup \mathcal{T}_{A_-}} \in (\mathbb{Z}_L^d)^{3(n_- + n_+) + 2}$ qui vérifie les conditions suivantes : pour toute feuille j portant le signe $-$,*

$$k_{\sigma(j)} = k_j,$$

et pour tout nœud j ,

$$k_j = k_{j_g} - k_{j_m} + k_{j_d}$$

où j_g, j_m, j_d sont respectivement les enfants de gauche, du milieu et de droite de j .

Par ailleurs, pour tout nœud j , on pose

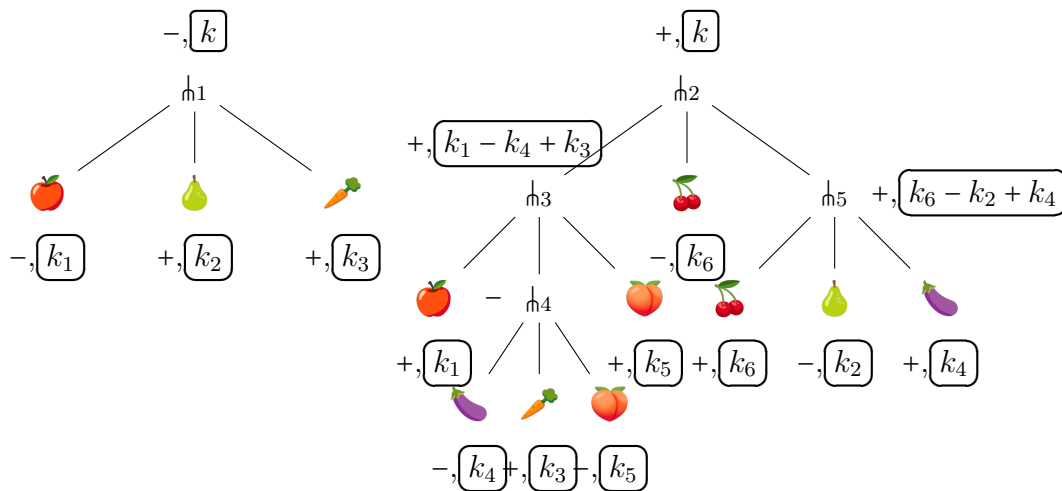
$$\Omega_j = \zeta_j (|k_{j_g}|^2 - |k_{j_m}|^2 + |k_{j_d}|^2 - |k_j|^2), \quad \varepsilon_j = \zeta_j \varepsilon_{k_{j_g}, k_{j_m}, k_{j_d}}$$

où ζ_j est le signe porté par le nœud j .

On notera $\mathcal{D}(C)$ l'ensemble des décorations d'un couplage C et $\mathcal{D}(C)(k)$ l'ensemble des décorations de C dont la décoration de la racine est k , c'est-à-dire

$$k = \sum_{j \in \mathcal{F}_A} \zeta_j k_j.$$

Notons qu'un élément de $\mathcal{D}(C)$ est entièrement déterminé par un élément de $(\mathbb{Z}_L^d)^{n_+ + n_- + 1}$ qui correspond aux décorations des feuilles portant le signe $-$.



Un exemple d'arbre décoré

Ci-dessus, il manque pour des raisons de lisibilité la décoration du nœud h_4 qui est $k_4 - k_3 + k_5$.

La solution u s'écrit formellement comme une somme indexée par les arbres et la quantité $\mathbb{E}(|\hat{u}(tT, k)|^2)$ comme une somme indexée sur les couplages.

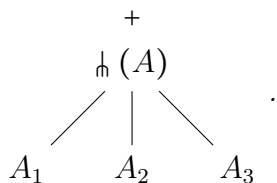
PROPOSITION 2.3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a^n(t, k) = (iT\alpha L^{-d})^n \sum_{A \in \mathcal{A}_n^+} \sum_{\sum_{j \in \mathcal{F}_A} \zeta_j k_j = k} \int_{I_A(t)} \prod_{l \in \mathcal{N}_A} e^{i\Omega_l t_l} \varepsilon_l dt_l \prod_{j \in \mathcal{F}_A} a^0(k_j)^{\zeta_j}$$

où a^n est défini par (3), pour tout $z \in \mathbb{C}$, on écrit $z^+ = z$ et $z^- = \bar{z}$ (ici, $a^0(k_j)^{\zeta_j} = \overline{a^0(k_j)^{\zeta_j}}$ si la feuille j porte le signe $-$) et $I_A(t)$ est défini de façon récursive sur A par

$$I_A(t) = \begin{cases} [0, t] & \text{si } A \in \mathcal{A}_1^\pm \\ \{(t_l)_{l \in \mathcal{N}_A} \mid t_{h(A)} \in [0, t] \wedge \forall j = 1, 2, 3, (t_l)_{l \in \mathcal{N}_{A_j}} \in I_{A_j}(t_{h(A)})\} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $h(A)$ est la racine de A et A est l'arbre

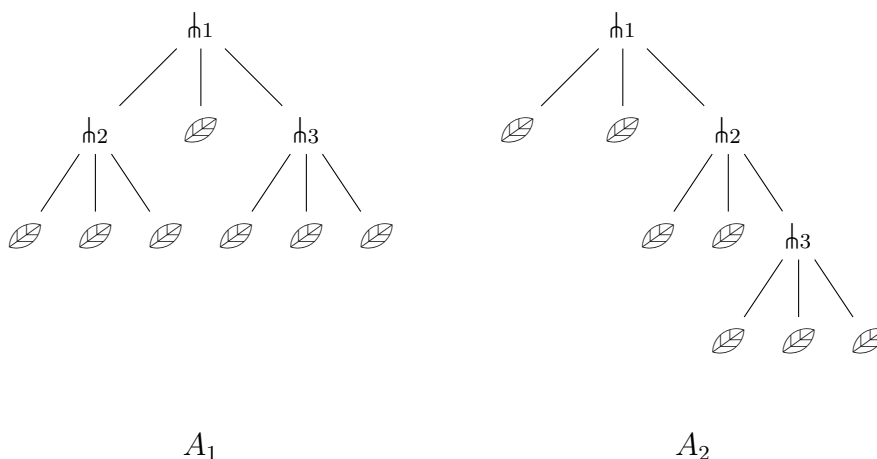


De plus, on a

$$(5) \quad \mathbb{E}(\overline{a^m(t, k)} a^n(t, k)) = (iT\alpha L^{-d})^{n+m} \sum_{C \in \mathcal{C}_{m,n}} \sum_{\mathcal{D}(C)(k)} \int_{I_C(t)} \prod_{l \in \mathcal{N}_C} e^{iT\Omega_l t_l} \varepsilon_l dt_l \prod_{j \in \mathcal{F}_C^-} U_{\text{in}}(k_j)$$

où $I_C(t) = I_{A_-}(t) \times I_{A_+}(t)$ en notant $C = (A_-, A_+, \sigma)$.

Remarque 2.4. — L'ensemble $I_A(t)$ est l'ensemble des familles $(t_l)_{l \in \mathcal{N}_A} \in [0, t]^n$ telles que pour tout $l', l \in \mathcal{N}_A$, si $l' \leq l$ pour l'ordre de la parentalité, c'est-à-dire que l' est un descendant de l , alors $t_{l'} \leq t_l$. Par exemple, pour les arbres



on a

$$I_{A_1}(t) = \{(t_{h_1}, t_{h_2}, t_{h_3}) \mid 0 \leq t_{h_2}, t_{h_3} \leq t_{h_1} \leq t\}$$

tandis que

$$I_{A_2}(t) = \{(t_{h_1}, t_{h_2}, t_{h_3}) \mid 0 \leq t_{h_3} \leq t_{h_2} \leq t_{h_1} \leq t\}.$$

La preuve de la proposition 2.3 est basée pour la première égalité sur un argument récursif sur n et sur les arbres. La deuxième égalité découle de la première et de la formule de Wick (voir par exemple le livre de Janson (1997)) qui stipule que pour toute famille (ici finie) de variables conjointement gaussiennes $(g_k)_{k \in R}$,

$$\mathbb{E}(\prod_{j \in R} g_j) = \sum_{\sigma} \prod_{j \in S_{\sigma}^+} \mathbb{E}(g_j g_{\sigma(j)})$$

où σ parcourt les involutions sans point fixe de R et S_{σ}^+ est un sous-ensemble de R tel que $S_{\sigma}^+ \sqcup \sigma(S_{\sigma}^+) = R$. Ici $R = \mathcal{F}_C$, on pose $g_j = \eta_{k_j}^{\zeta_j}$. Comme les η_k sont des gaussiennes complexes centrées normalisées indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(g_j g_{j'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta_j = -\zeta_{j'}, k_j = k_{j'}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}(\prod_{j \in R} g_j) = \sum_{\sigma'} \prod_{j \in \mathcal{F}_C^-} \delta_{k_j}^{k_{\sigma'(j)}}$$

où σ' parcourt les bijections de \mathcal{F}_C^- à \mathcal{F}_C^+ . On obtient de cette façon le passage des arbres aux couplages.

Remarque 2.5. — La formule de Wick permet d'identifier les symboles. Donnons un exemple avec le couplage C'_1 . Comme toutes les feuilles sont de la même couleur, sa contribution est du type

$$it(T\alpha L^{-d})^2 U_{\text{in}}(k)^3 \mathbb{E}(|\eta_{Lk}|^6).$$

Or, la formule de Wick assure que $\mathbb{E}(|\eta_{Lk}|^6)$ est égal à $3!$ c'est-à-dire au nombre de façon d'apparier les feuilles portant le signe $-$ aux feuilles portant le signe $+$. Ces appariements impliquent les couplages C_1 et C_2 mais aussi 4 autres qui ne sont pas dessinés à la sous-section 1.2 car ils impliquent un appariement de deux enfants du même nœud, dont la contribution, sauf dans le cas où tous les enfants ont le même symbole, est nulle.

3. L'Ansatz et les enjeux de la preuve

L'idée de la preuve repose sur le fait que a est bien approché par

$$\sum_{n=0}^N a^n$$

quand N est très grand. Cela vient du fait qu'on se place à l'échelle de temps $T = \frac{1}{2}\delta L^2$ avec $\delta > 0$ fixe, indépendant de L mais petit. Comme a^n fait intervenir une intégrale multiple, on peut voir que a^n se comporte comme $C_n \delta^{rn}$ où $r > 0$ dépend de la dynamique. Si $(C_n)_n$ est borné par une suite géométrique, le reste $\sum_{n>N} a^n$ de la série se comporte comme $(C\delta^r)^N$ et un choix approprié de δ permet à la série de converger. Notons $R_N = a - \sum_{n=0}^N a^n$. Pour calculer l'équation vérifiée par R_N , on pose $b_N = \sum_{n=0}^N a^n$ et

$$C(f, g, h)(t, k) = T\alpha L^{-d} \sum_{k_1 - k_2 + k_3 = k} \varepsilon_{k_1, k_2, k_3} e^{itT\Omega(k_1, k_2, k_3)} f(t, k_1) \overline{g(t, k_2)} h(t, k_3)$$

de sorte que C est linéaire en les variables f et h , antilinéaire en la variable g et de sorte que

$$i\dot{a}(t, k) = C(a, a, a)(t, k).$$

Avec ces notations, on obtient que R_N satisfait le problème de Cauchy suivant

$$(6) \quad \begin{cases} i\dot{R}_N = s_N + \ell_N R_N + \text{nl}(R_N) \\ R_N(t=0) = 0 \end{cases}$$

où le terme de source s_N s'écrit

$$s_N = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \leq N \\ n_1 + n_2 + n_3 \geq N}} C(a^{n_1}, a^{n_2}, a^{n_3});$$

où le terme linéaire ℓ_N est défini par

$$\ell_N R_N(t) = C(b_N, b_N, R_N) + C(b_N, R_N, b_N) + C(R_N, b_N, b_N)$$

et la non-linéarité présente des termes quadratiques et cubiques et se met sous la forme

$$\text{nl}(R_N) = C(b_N, R_N, R_N) + C(R_N, b_N, R_N) + C(R_N, R_N, b_N) + C(R_N, R_N, R_N).$$

Pour résoudre le problème de Cauchy (6) (par un argument de contraction) et montrer que R_N reste petit, il s'agit de remettre le problème sous sa forme intégrale :

$$\begin{aligned} R_N(t) &= -i \int_0^t s_N(\tau) d\tau - i \int_0^t \ell_N(R_N)(\tau) d\tau - i \int_0^t \text{nl}(R_N)(\tau) d\tau \\ &= S_N(t) + \mathcal{L}_N(R_N)(t) + \text{NL}(R_N)(t) \end{aligned}$$

de montrer que le terme de source S_N est lui-même petit et que $1 - \mathcal{L}_N$ est inversible, le traitement des termes non linéaires s'effectuant en utilisant des estimées multilinéaires et les estimées obtenues en traitant les termes source et linéaire.

L'inversibilité de \mathcal{L}_N repose sur des annulations sur la partie de \mathcal{L}_N qui fait intervenir les premiers termes de la somme définissant b_N et sur un argument perturbatif en δ . La preuve s'appuie sur la combinatoire développée pour estimer a^n .

Le cœur de la preuve revient à estimer a^n et donc b_N et S_N . Pour estimer a^n , on peut estimer

$$E(|a^n(t, k)|^2) = (T\alpha L^{-d})^{2n} \sum_{C \in \mathcal{C}_{n,n}} \sum_{\mathcal{D}(C)(k)} \int_{I_C(t)} \prod_{l \in \mathcal{N}_C} e^{iT\Omega_l t_l \varepsilon_l} dt_l \prod_{j \in \mathcal{F}_C} U_{\text{in}}(k_j),$$

ce qu'on peut récrire comme

$$E(|a^n(t, k)|^2) = \sum_{C \in \mathcal{C}_{n,n}} a_C(t, k),$$

avec

$$a_C(t, k) = (T\alpha L^{-d})^{2n} \sum_{\mathcal{D}(C)(k)} \int_{I_C(t)} \prod_{l \in \mathcal{N}_C} e^{iT\Omega_l t_l \varepsilon_l} dt_l \prod_{j \in \mathcal{F}_C} U_{\text{in}}(k_j).$$

On va voir à la section suivante que $a_C(t)$ est borné par $(K\delta)^n$ pour une constante K suffisamment grande et pour des temps $t \leq 1$, c'est-à-dire que a^n est de l'ordre de $\delta^{n/2}$. Par ailleurs, le nombre de couples de $\mathcal{C}_{n,n}$ est supérieur à $n!$ à cause des appariements. Le facteur δ^n ne peut pas compenser $n!$. Néanmoins, le nombre de couples qui contribuent effectivement comme δ^n et ne bénéficient pas d'une meilleure estimation est de l'ordre de C^n . L'originalité de la preuve du résultat présenté ici consiste à classifier les couplages en fonction de l'ordre de leur contribution à $\mathbb{E}(|a^n|^2)$.

Il reste de surcroît à montrer que $\mathbb{E}(|a|^2)$ se comporte effectivement comme U . Pour cela on écrit

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} U^m$$

avec $U^0 = U_{\text{in}}$ et

$$\begin{aligned} \dot{U}^{m+1}(t, \xi) &= \\ 2\delta \sum_{m_1+m_2+m_3=m} \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \delta(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi) \delta(\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) K(U^{m_1}, U^{m_2}, U^{m_3})(t, \xi, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K(U^{m_1}, U^{m_2}, U^{m_3})(t, \xi, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= U^{m_1}(t, \xi_2)U^{m_2}(t, \xi_3)U^{m_3}(t, \xi) \\ &\quad - U^{m_1}(t, \xi_1)U^{m_2}(t, \xi_3)U^{m_3}(t, \xi) + U^{m_1}(t, \xi_1)U^{m_2}(t, \xi_2)U^{m_3}(t, \xi) \\ &\quad - U^{m_1}(t, \xi_1)U^{m_2}(t, \xi_2)U^{m_3}(t, \xi_3). \end{aligned}$$

La preuve repose donc sur les trois faits suivants en prenant $N = \lfloor \log L \rfloor$: sur un ensemble de probabilité $1 - L^{-A}$,

Fait 1 : il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \leq N$, et tout $k \in \frac{1}{L}\mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}(|a^n|^2(t, k)) \leq (K\sqrt{\delta})^n(1 + |k|)^{-20d};$$

Fait 2 : l'opérateur $1 - \mathcal{L}_N$ est inversible pour la norme $\|f\|^2 = L^{-d} \sum_k (1 + |k|)^{10d} |f(k)|^2$;

Fait 3 : on a la limite

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left| \sup_{t \in [0,1]} \sup_k \sum_{n_1+n_2=m} \mathbb{E}(\overline{a^{n_1}}(t, k) a^{n_2}(t, k)) - U^m(t, k) \right| = 0.$$

Dans la suite de ces notes, on se concentrera sur le fait 1. Le fait 2 a été brièvement discuté plus haut. Le fait 3 repose sur une identification des couples dominants que l'on évoque à la section suivante et sur une comparaison série-intégrale dont la preuve repose sur argument hautes fréquences/basses fréquences.

4. Couples réguliers et dominants

La contribution d'un couplage de $\mathcal{C}_{n,n}$ à $\mathbb{E}(|a^n(t, k)|^2)$ est donnée par la formule (5) et vaut

$$a_C(t, k) = (T\alpha L^{-d})^{2n} \sum_{\mathcal{D}(C)(k)} \int_{I_C(t)} \prod_{l \in \mathcal{N}_C} e^{iT\Omega_l t_l} \varepsilon_l dt_l \prod_{j \in \mathcal{F}_C^-} U_{\text{in}}(k_j).$$

Comme $T = \frac{1}{2}\delta\alpha^{-2}$ on a $(T\alpha)^{2n} = (\frac{1}{2}\delta T)^n$. Cela suggère que les termes dominants relatifs à l'intégrale oscillante

$$\int_{I_C(t)} \prod_{l \in \mathcal{N}_C} e^{iT\Omega_l t_l} dt_l$$

sont en T^{-n} . Quitte à ordonner les nœuds du couplage C en respectant l'ordre de la parentalité dans les arbres, on peut décomposer $I_C(t)$ en

$$I_C(t) = \bigsqcup_{\rho} \{(t_l)_{l \in \mathcal{N}_C} \mid \rho(l_1) < \rho(l_2) \Rightarrow t_{l_1} < t_{l_2}\}$$

où ρ parcourt l'ensemble des bijections de \mathcal{N}_C dans $[[1, 2n]]$ croissantes pour l'ordre (partiel) de parentalité sur \mathcal{N}_C et celui des entiers sur $[[1, 2n]]$ (5).

5. En fonction du couplage considéré, cet ensemble peut être relativement gros. Comme on le verra dans la suite de cette section et à la section 5, un couplage possède une partie régulière, qui possède suffisamment de structure pour en comprendre la contribution sans passer par l'ordonnement des

On en déduit que l'intégrale sur $I_C(t)$ s'écrit comme

$$\int_{I_C(t)} \prod_{l \in \mathcal{N}_C} e^{iT\Omega_l t_l} dt_l = \sum_{\rho} \int_{0 < t_1 < \dots < t_{2n}} \prod_{l=1}^{2n} e^{it_l T\Omega_{\rho^{-1}(l)}} dt_l.$$

L'intégrale

$$\mathcal{I}_{C,\rho}(t) = \int_{0 < t_1 < \dots < t_{2n} < t} \prod_{l=1}^{2n} e^{it_l T\Omega_{\rho^{-1}(l)}} dt_l$$

s'écrit, après changement de variables comme

$$\mathcal{I}_{C,\rho}(t) = \int_{S(t)} \prod_{j=1}^{2n} e^{iT\omega_j s_j} ds_j$$

où $S(t) = \{(s_j)_{1 \leq j \leq 2n} \in [0, t]^{2n} \mid \sum_{j=1}^{2n} s_j \leq t\}$ et $\omega_j = \sum_{l=j}^{2n} \Omega_{\rho^{-1}(l)}$.

Pour traiter la restriction $\sum_{j=1}^{2n} s_j \leq t \leq 1$, on passe en Fourier en temps, c'est-à-dire qu'on réécrit $\mathcal{I}_{C,\rho}$ comme

$$\mathcal{I}_{C,\rho}(t) = \int_{\omega \in \mathbb{R}} e^{it\omega} \tilde{\mathcal{I}}_{C,\rho}(\omega)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{I}}_{C,\rho}(\omega) = \int_{[0,1]^{2n}} \prod_{j=1}^{2n} e^{iT\omega_j s_j} ds_j \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega \sum_j s_j}}{i\omega} \right)$$

où $\frac{1}{\omega}$ est à comprendre au sens de sa valeur principale.

On a

$$\tilde{\mathcal{I}}_{C,\rho}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \prod_{j=1}^{2n} \frac{e^{iT\omega_j} - 1}{iT\omega_j} \delta(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{2n} \frac{e^{iT\omega_j + \omega} - 1}{iT\omega_j + \omega} \frac{1}{i\omega}.$$

On en déduit que

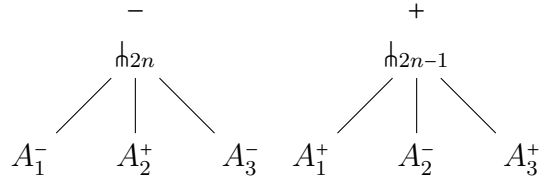
$$\mathcal{I}_{C,\rho}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \prod_{j=1}^{2n} \frac{e^{iT\omega_j} - 1}{iT\omega_j} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega \in \mathbb{R}} e^{it\omega} \prod_{j=1}^{2n} \frac{e^{iT\omega_j + \omega} - 1}{iT\omega_j + \omega} \frac{1}{i\omega} d\omega.$$

Chaque terme du type $\frac{e^{iT\omega_j} - 1}{iT\omega_j}$ ou $\frac{e^{iT\omega_j + \omega} - 1}{iT\omega_j + \omega}$ permet de gagner un facteur T^{-1} dans le calcul de $\mathcal{I}_{C,\rho}$. Si tous les ω_j sont non nuls, la contribution $\mathcal{I}_{C,\rho}(t)$ est de l'ordre de T^{-2n} donc $a_C(t)$ est de l'ordre T^{-n} et tend vers 0. Néanmoins, on s'attend à des configurations dont la contribution $a_C(t)$ est d'ordre 1, c'est-à-dire qu'un ω_j sur deux est nul.

Si $\omega_{2n} = \Omega_{\rho^{-1}(2n)}$ est nul, en vertu de la remarque 1.2, la sommation sur les décorations de C donnera une contribution du type $L^{-d/2} = T^{-d/4}$, qui est plus petit que T^{-1} en dimension supérieure à 3.

En revanche, $\omega_{2n-1} = \Omega_{\rho^{-1}(2n)} + \Omega_{\rho^{-1}(2n-1)}$ peut être structurellement nul, c'est-à-dire nul pour toute décoration du couplage, par exemple si le couplage prend la forme

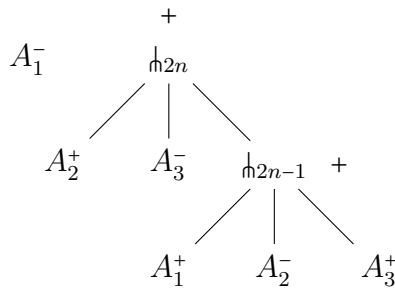
noeuds, et une partie non régulière, appelée squelette, dont l'ordonnancement des noeuds n'affecte pas l'analyse menée en Section 5.



où $((A_l^-, A_l^+, \sigma_l))_{l=1,2,3}$ sont des couplages tels que pour $l = 1, 2, 3$, si $j \in \mathcal{F}^-(A_l^-, A_l^+, \sigma_l)$ alors

$$\sigma(j) = \sigma_l(j).$$

Un autre exemple de couplage pour lequel ω_{2n-1} est structurellement nul est le suivant.



Si ω_{2n-1} est nul, alors $\omega_{2n-2} = \Omega_{\rho^{-1}(2n-2)}$ et on peut recommencer la discussion précédente.

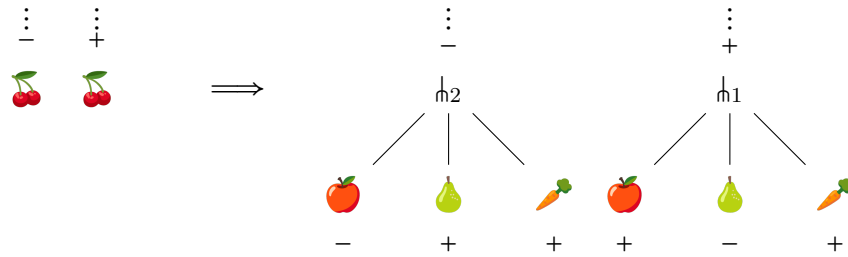
Autrement dit, $\mathcal{I}_{C,\rho}$ est d'ordre maximal 1 lorsque ω_{2j-1} est structurellement nul pour tout $j \in [1, n]$.

Cela amène à définir les couplages dits réguliers et dominants.

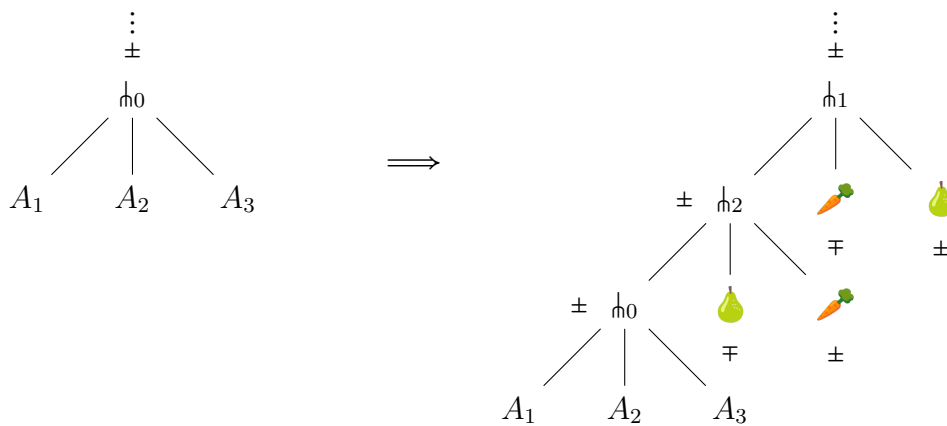
DÉFINITION 4.1 (Couplage régulier). — *Un couplage $C = (A_-, A_+, \sigma)$ est dit régulier si, ou bien*

- (i) : *c'est le couplage trivial $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \sigma_0)$ où σ_0 apparie l'unique feuille portant le signe $-$ à l'unique feuille portant le signe $+$,*
- (ii) : *il est formé à partir d'un couplage régulier C' dans lequel on a substitué le couplage C_7 ou le couplage C_8 à une paire de feuilles (appariées par σ),*
- (iii) : *il est formé à partir d'un couplage régulier C' dans lequel on a substitué à un nœud h_0 ou à une feuille \mathcal{B} un des arbres à deux nœuds apparaissant dans les couplages C_1 à C_6 ou leurs versions négatives selon le signe que porte h_0 ou \mathcal{B} , la feuille pomme de ces arbres rattachant le sous-arbre du nœud de C' à C .*

Cette définition s'illustre de la façon suivante : pour le point (ii), on forme le couplage selon la figure suivante (l'orientation gauche–droite des figures est arbitraire) lorsqu'on substitue le couplage C_7 ,



quant au point (iii), on forme la figure suivante quand on substitue l'arbre à deux nœuds du couplage C_1 ou sa version négative.



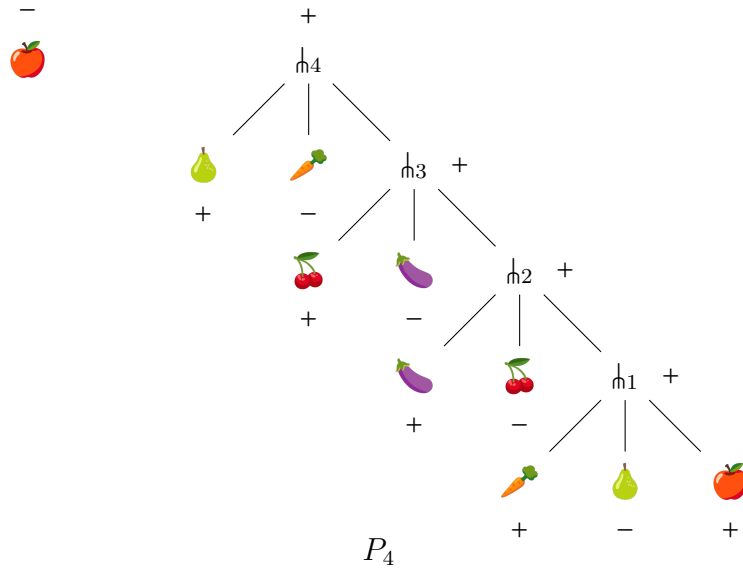
Remarque 4.2. — Les couplages réguliers sont plus nombreux que les couplages pour lesquels \mathcal{I}_C est d'ordre maximal. Ceci est dû à des annulations entre les différents couplages, et à l'insertion d'un arbre à deux nœuds à *n'importe quel* nœud du couplage. Néanmoins, ils interviennent dans la classification des couplages en fonction de l'ordre de leur contribution \mathcal{I}_C . Les couplages pour lesquels \mathcal{I}_C est d'ordre maximal sont dit dominants.

DÉFINITION 4.3 (Couplages dominants). — *Un couplage $C = (A_-, A_+, \sigma)$ est dit dominant si, ou bien*

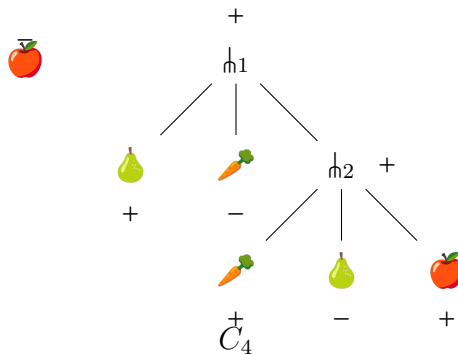
- (i) : *c'est le couplage trivial,*
- (ii) : *il est formé à partir d'un couplage dominant C' dans lequel on a substitué le couplage C_7 ou le couplage C_8 à une paire de feuilles (appariées par σ),*
- (iii) : *il est formé à partir d'un couplage dominant C' dans lequel on a substitué à une feuille \mathcal{E} un des arbres à deux nœuds apparaissant dans les couplages C_1 à C_6 ou leurs versions négatives selon le signe que porte \mathcal{E} , la feuille pomme de ces arbres rattachant le sous-arbre du nœud de C' à C .*

Remarque 4.4. — La définition 4.17 de Deng et Hani est sensiblement différente mais équivalente.

L'ensemble des couplages dominants possède la même structure récursive que celle permettant de définir les U^m dans la section 3, ce qui permet d'identifier les deux termes. Les couplages réguliers, quant à eux, bien qu'ils ne soient pas tous dominants, font apparaître des résonances (c'est-à-dire des égalités structurelles du type $\omega_j = 0$) qui ne peuvent être négligées a priori si elles apparaissent dans un couplage quelconque. Afin de nous convaincre qu'un couplage régulier n'est pas nécessairement d'ordre maximal, considérons le couplage de la figure suivante.



Ce couplage a été obtenu en appliquant l'étape (iii) au couplage trivial, ce qui donne le couplage C_4 , qu'on rappelle ci-dessous.



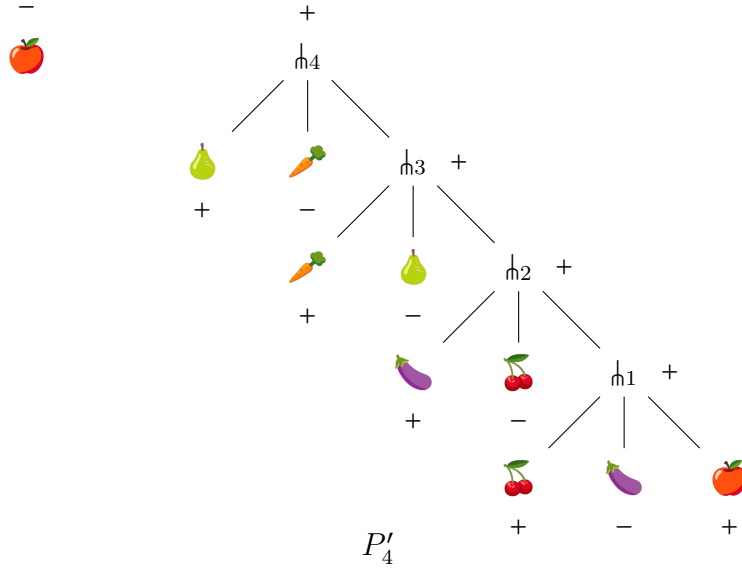
Puis on a appliqué à nouveau l'étape (iii) au nœud h_2 .


Dans ce couplage, en notant $\Omega_j = \Omega_{h_j}$ et en décorant chaque feuille par le mode de Fourier k indexé par le symbole correspondant, on a

$$\begin{aligned} \Omega_4 &= |k_{\text{poire}}|^2 - |k_{\text{carotte}}|^2 + |k_1|^2 - |k_{\text{pomme}}|^2, \\ \Omega_3 &= |k_{\text{cerises}}|^2 - |k_{\text{aubergine}}|^2 + |k_2|^2 - |k_1|^2, \\ \Omega_2 &= |k_{\text{aubergine}}|^2 - |k_{\text{cerises}}|^2 + |k_1|^2 - |k_2|^2 = -\Omega_2, \\ \Omega_1 &= |k_{\text{carotte}}|^2 - |k_{\text{poire}}|^2 + |k_{\text{pomme}}|^2 - |k_1|^2 = -\Omega_1, \end{aligned}$$

où $k_1 = k_{\text{carotte}} - k_{\text{poire}} + k_{\text{pomme}}$ et $k_2 = k_{\text{aubergine}} - k_{\text{cerises}} + k_1$. On en déduit que ω_4, ω_3 et ω_2 ne sont pas structurellement nuls, tandis que ω_1 l'est. On obtient donc que \mathcal{I}_{P_4} est de l'ordre de T^{-3} plutôt que l'ordre maximal T^{-2} et donc $a_{P_4}(t)$ est d'ordre T^{-1} .

Considérons le couplage P'_4 ci-dessous.



Il s'agit d'un couplage dominant construit en appliquant l'étape (iii) à la feuille  de C_4 . On a bien que ω_1 et ω_3 sont structurellement nuls, tandis que ω_2 et ω_4 ne le sont pas. On en déduit que $\mathcal{I}_{P'_4}$ est de l'ordre de T^{-2} et donc que $a_{P'_4}(t)$ est d'ordre 1.

5. Squelette

Les objets principaux de cette section sont les peignes réguliers ⁽⁶⁾. Ici, on appelle peigne tout arbre dont les nœuds sont totalement ordonnés par l'ordre de parentalité. On définit l'ensemble \mathcal{P}_n par le fait qu'un élément de \mathcal{P}_n est un peigne à $2n$ nœuds notés $h_1 < \dots < h_{2n}$ muni d'une application injective σ des feuilles portant le signe $-$ vers les feuilles portant le signe $+$ vérifiant $\sigma(m_l) = p_{2n-l}$ pour tout $l \in [1, 2n - 1]$ et où on note m_l l'unique enfant de h_l portant le signe $-$, et p_l l'unique enfant de h_l portant le signe $+$. Le peigne du couplage P_4 est un élément de \mathcal{P}_4 . Un tel peigne est unique à symétrie gauche-droite près, on a donc

$$\#\mathcal{P}_n = 4^n.$$

Un peigne régulier est la concaténation d'éléments de $\cup_n \mathcal{P}_n$. Un peigne régulier s'obtient récursivement en remplaçant l'unique feuille non appariée d'un peigne régulier par

6. regular chain dans (Deng et Hani, 2023b)

un élément de $\cup \mathcal{P}_n$. On note l'ensemble des peignes réguliers à $2n$ nœuds \mathcal{PR}_n . Par construction, on a

$$\#\mathcal{PR}_n = \frac{1}{2}8^n.$$

Ces peignes réguliers ⁽⁷⁾ permettent de décrire tous les couplages réguliers. En effet, un couplage régulier possède la structure récursive suivante : soit c'est le couplage trivial, soit il est formé à partir des couplages C_7 ou C_8 en remplaçant chaque paire de feuilles par un couplage régulier, soit il est formé à partir de deux peignes réguliers dont on a apparié les uniques feuilles libres puis dont on a remplacé chaque paire de feuilles par un couplage régulier. Cela assure que le nombre de couplages réguliers à $2n$ nœuds est majoré par K_{reg}^n avec $K_{\text{reg}} > 1$ (par une analyse semblable à celle de la majoration des nombres de Catalan). Ce n'était pas évident d'après la définition des couplages réguliers mais cela vient du fait que plusieurs opérations décrites dans les points (ii) et (iii) de la définition 4.1 commutent.

Les peignes de \mathcal{P}_n et les couplages C_7 et C_8 sont les seules structures qui induisent de la résonance : c'est-à-dire que pour un élément de \mathcal{P}_n , les fréquences ω_{2n} à ω_2 ne sont pas structurellement nulles, mais ω_1 l'est, tandis que pour C_7 et C_8 , on a toujours $\Omega_{h_1} + \Omega_{h_2} = 0$. Un couplage ne présentant aucune résonance est un couplage dénué de ces structures, on l'appelle couplage premier.

DÉFINITION 5.1. — *Un couplage est dit premier s'il ne peut s'obtenir à partir d'un autre couplage en appliquant les opérations décrites dans la définition 4.1 (ii) et (iii).*

PROPOSITION 5.2. — *Pour tout couplage C , il existe un unique couplage premier $Sq(C)$ appelé squelette de C tel que C s'obtient à partir de $Sq(C)$ en y insérant à chaque nœud un peigne régulier puis en remplaçant chaque paire de feuilles par un couplage régulier.*

On déduit de cette proposition que le nombre de couplages à $2n$ nœuds ayant pour squelette C_{sq} est majoré par K^n avec $K > 1$ ne dépendant pas de C_{sq} .

Nous allons à présent procéder à une analyse grossière justifiant la pertinence de la notion de squelette. Cette analyse est loin d'être suffisante pour conclure, nous présenterons certains de ses écueils à la remarque 5.3. Néanmoins, elle donne une idée des mécanismes mis en jeu pour démontrer la borne sur a^n .

Considérons un couplage à $2n$ nœuds. Par définition, son squelette a un nombre pair de nœuds qu'on notera $2q$. Comme le squelette n'induit pas de résonances (c'est-à-dire qu'aucun des ω_j n'est nul) on en déduit que

$$\mathcal{I}_C(t) \lesssim T^{-2q}T^{-(n-q)}$$

et donc que

$$a_C(t) \lesssim T^{-q} \left(\frac{\delta}{2} \right)^n.$$

7. Par construction, un peigne régulier est un peigne au sens usuel (c'est-à-dire avec tous les enfants à gauche ou à droite) à symétrie gauche-droite près. Mais comme cette symétrie n'a pas d'incidence sur le résultat final, on peut considérer que les peignes réguliers sont bien des peignes au sens usuel.

Or, on a

$$\mathbb{E}(|a^n(t)|^2) = \sum_{C \in \mathcal{C}_{n,n}} a_C(t) = \sum_{q \leq n} \sum_{C_{sq} \in \mathcal{C}_{2q}^p} \sum_{C \in \mathcal{C}_{n,n} | Sq(C) = C_{sq}} a_C(t)$$

où \mathcal{C}_{2q}^p est l'ensemble des couplages premiers à $2q$ nœuds. On en déduit

$$\mathbb{E}(|a^n(t)|^2) \lesssim \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \sum_{q \leq n} T^{-q} \sum_{C_{sq} \in \mathcal{C}_{2q}^p} \#\{C \in \mathcal{C}_{n,n} | Sq(C) = C_{sq}\}.$$

Par ailleurs, $\#\{C \in \mathcal{C}_{n,n} | Sq(C) = C_{sq}\} \leq K^n$ avec K ne dépendant pas de C_{sq} , on en déduit :

$$\mathbb{E}(|a^n(t)|^2) \lesssim \left(\frac{K\delta}{2}\right)^n \sum_{q \leq n} T^{-q} \#\mathcal{C}_{2q}^p.$$

Le cardinal de \mathcal{C}_{2q}^p est inférieur à celui de $\cup_{q_1+q_2=2q} \mathcal{C}_{q_1,q_2} \leq K_1^q (2q+1)!$ où K_1 est une constante universelle. On obtient que

$$\sum_{q \leq n} T^{-q} \#\mathcal{C}_{2q}^p \leq \sum_{q \leq n} (K_1(2q+1)^2 T^{-1})^q.$$

Nous sommes intéressés par le fait d'estimer a^n lorsque a^n intervient dans la définition du terme de source S_N (cf Section 3) c'est-à-dire quand $n \leq N$. On a donc $2q+1 \leq 2N+1 \leq 2(\log L) + 1$, et comme $T = L^2$, pour L suffisamment grand, on a $K_1(2q+1)^2 T^{-1} \leq \frac{1}{2}$ et donc

$$\sum_{q \leq n} (K_1(2q+1)^2 T^{-1})^q \leq 2$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{E}(|a^n(t)|^2) \lesssim \left(\frac{K\delta}{2}\right)^n.$$

Remarque 5.3. — On voit bien que cette analyse est trop grossière pour être correcte, en particulier parce qu'elle nous fournit un résultat meilleur que celui annoncé à la section 3, qui était en $(\sqrt{\delta})^n$ et non δ^n . La raison en est que nous avons utilisé la notation \lesssim sans lui donner de sens. Ici, elle cache une dépendance en la donnée initiale U_{in} et en les fréquences ω_j . En particulier, $\frac{1}{\omega_j}$ n'est pas intégrable et génère de la divergence de type $\log L$ quand L tend vers ∞ . Cette divergence est à compenser par d'autres mécanismes, qui altèrent le résultat final. D'autre part, il faut s'assurer que les ω_j s'annulent en des lieux différents sinon au lieu de donner de la divergence de type $\log L$, ils vont induire de la divergence de type L^ν avec $\nu > 0$ qui ne pourra pas être compensée par les autres mécanismes de la preuve. Les différentes structures qui induisent de la divergence dépendent du régime choisi $\alpha = L^{-1}$. Dans le cas où $\alpha = L^{-\kappa}$ avec $\kappa \in (0, 1)$, c'est-à-dire que α tend moins vite vers 0 que ce que nous avons présenté, il y a plus de structures divergentes, ce qui rend l'analyse plus délicate, mais ce qui permet d'atteindre le même résultat pour n'importe quel tore, voir le travail de Deng et Hani (2023a).

Références

- Ioakeim Ampatzoglou, Charles Collot et Pierre Germain (2021). *Derivation of the kinetic wave equation for quadratic dispersive problems in the inhomogeneous setting*. arXiv : [2107.11819 \[math.AP\]](#).
- Gabriel B. Apolinário, Geoffrey Beck, Laurent Chevillard, Isabelle Gallagher et Ricardo Grande (2023). *A linear stochastic model of turbulent cascades and fractional fields*. arXiv : [2301.00780 \[math-ph\]](#).
- David J. Benney et Philip G. Saffman (1966). « Nonlinear interactions of random waves in a dispersive medium », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **289** (1418), p. 301-320.
- Jean Bourgain (1994). « Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures », *Communications in Mathematical Physics* **166**, p. 1-26.
- Robert Brout et Ilya Prigogine (1956). « Statistical mechanics of irreversible processes Part VIII : general theory of weakly coupled systems », *Physica* **22** (6), p. 621-636.
- Tristan Buckmaster, Pierre Germain, Zaher Hani et Jalal Shatah (2021). « Onset of the wave turbulence description of the longtime behavior of the nonlinear Schrödinger equation », *Invent. Math.* **225** (3), p. 787-855.
- Nicolas Burq et Nikolay Tzvetkov (2008). « Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I : local theory », *Inventiones mathematicae* **173**, p. 449-475.
- Charles Collot, Helge Dietert et Pierre Germain (2022). *Stability and cascades for the Kolmogorov-Zakharov spectrum of wave turbulence*. arXiv : [2208.00947 \[math.AP\]](#).
- Charles Collot et Pierre Germain (2019). *On the derivation of the homogeneous kinetic wave equation*. arXiv : [1912.10368 \[math.AP\]](#).
- Yu Deng et Zaher Hani (2021a). « On the derivation of the wave kinetic equation for NLS », *Forum Math. Pi* **9**, Paper No. e6, 37.
- (2021b). *Propagation of chaos and the higher order statistics in the wave kinetic theory*. arXiv : [2110.04565 \[math.AP\]](#).
- (2022). *Rigorous justification of the wave kinetic theory*. arXiv : [2207.08358 \[math.AP\]](#).
- (2023a). *Derivation of the wave kinetic equation : full range of scaling laws*. arXiv : [2301.07063 \[math.AP\]](#).
- (2023b). « Full derivation of the wave kinetic equation », *Invent. Math.*
- (2023c). *Long time justification of wave turbulence theory*. arXiv : [2311.10082 \[math.AP\]](#).
- Yu Deng, Andrea R Nahmod et Haitian Yue (2022). « Random tensors, propagation of randomness, and nonlinear dispersive equations », *Inventiones mathematicae* **228** (2), p. 539-686.
- Petr Denissenko, Sergei Lukaschuk et Sergey Nazarenko (juill. 2007). « Gravity Wave Turbulence in a Laboratory Flume », *Phys. Rev. Lett.* **99** (1), p. 014501.

- Guillaume Dubach, Pierre Germain et Benjamin Harrop-Griffiths (2022). *On the derivation of the homogeneous kinetic wave equation for a nonlinear random matrix model*. arXiv : [2203.13748](https://arxiv.org/abs/2203.13748) [[math.AP](#)].
- Andrey Dymov et Sergei Kuksin (2020). « On the Zakharov-L’vov stochastic model for wave turbulence », *Dokl. Math* **101**, p. 102-109.
- (2021). « Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1 : Kinetic limit », *Comm. Math. Phys.* **382** (2), p. 951-1014.
- (2023). « Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 2 : method of diagram decomposition », *journal of statistical physics* **190** (3).
- László Erdős, Manfred Salmhofer et Horng-Tzer Yau (2008). « Quantum diffusion of the random Schrödinger evolution in the scaling limit », *Acta Math.* **200** (2), p. 211-277.
- László Erdős et Horng-Tzer Yau (2000). « Linear Boltzmann equation as the weak coupling limit of a random Schrödinger equation », *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* **53** (6), p. 667-735.
- Miguel Escobedo, Stéphane Mischler et Juan JL Velazquez (2008). « Singular solutions for the Uehling–Uhlenbeck equation », *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics* **138** (1), p. 67-107.
- Miguel Escobedo, Stéphane Mischler et Juan JL Velazquez (2007). « On the fundamental solution of a linearized Uehling–Uhlenbeck equation », *Archive for rational mechanics and analysis* **186**, p. 309-349.
- Miguel Escobedo et Juan JL Velázquez (2015). *On the theory of weak turbulence for the nonlinear Schrödinger equation*. American Mathematical Soc.
- Erwan Faou (sept. 2020). « Linearized Wave Turbulence Convergence Results for Three-Wave Systems », *Communications in Mathematical Physics* **378**.
- Sébastien Galtier (2022). *Physics of Wave Turbulence*. Cambridge University Press.
- Pierre Germain, Alexandru D Ionescu et Minh-Binh Tran (2020). « Optimal local well-posedness theory for the kinetic wave equation », *Journal of Functional Analysis* **279** (4), p. 108570.
- Amirali Hannani, Matthew Rosenzweig, Gigliola Staffilani et Minh-Binh Tran (2022). *On the wave turbulence theory for a stochastic KdV type equation—Generalization for the inhomogeneous kinetic limit*. arXiv : [2210.17445](https://arxiv.org/abs/2210.17445) [[math.AP](#)].
- Klaus Hasselmann (1962). « On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory », *Journal of Fluid Mechanics* **12** (4), p. 481-500.
- (1963). « On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum Part 2. Conservation theorems ; wave-particle analogy ; irreversibility », *Journal of Fluid Mechanics* **15** (2), p. 273-281.
- Svante Janson (1997). *Gaussian Hilbert spaces*. T. 129. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, p. x+340.
- Elena A. Kartashova (1991). « On properties of weakly nonlinear wave interactions in resonators », *Physica D : Nonlinear Phenomena* **54** (1), p. 125-134.

- (mars 1994). « Weakly nonlinear theory of finite-size effects in resonators », *Phys. Rev. Lett.* **72** (13), p. 2013-2016.
- Oscar E. Lanford III (1976). « On a derivation of the Boltzmann equation », in : *International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Rennes, 1975)*. Astérisque, No. 40. Soc. Math. France, Paris, p. 117-137.
- Jani Lukkarinen et Herbert Spohn (2011). « Weakly nonlinear Schrödinger equation with random initial data », *Invent. Math.* **183** (1), p. 79-188.
- Xiao Ma (2022). *Almost sharp wave kinetic theory of multidimensional KdV type equations with $d \geq 3$* . arXiv : [2204.06148](https://arxiv.org/abs/2204.06148) [math.AP].
- Angeliki Menegaki (2022). *L^2 -stability near equilibrium for the 4 waves kinetic equation*. arXiv : [2210.11189](https://arxiv.org/abs/2210.11189) [math.AP].
- Sergey Nazarenko (2011). *Wave turbulence*. T. 825. Lecture Notes in Physics. Springer, Heidelberg, p. xvi+279.
- Rudolf Peierls (1929). « Zur kinetischen Theorie der Wärmeleitung in Kristallen », *Annalen der Physik* **395** (8), p. 1055-1101.
- Gigliola Staffilani et Minh-Binh Tran (2021). *On the wave turbulence theory for stochastic and random multidimensional KdV type equations*. arXiv : [2106.09819](https://arxiv.org/abs/2106.09819) [math.AP].
- Anne-Sophie de Suzzoni et Nikolay Tzvetkov (2014). « On the propagation of weakly nonlinear random dispersive waves », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **212** (3), p. 849-874.
- Anne-Sophie de Suzzoni (2022). *General remarks on the propagation of chaos in wave turbulence and application to the incompressible Euler dynamics*. arXiv : [2206.14744](https://arxiv.org/abs/2206.14744) [math.AP].
- Alexander A. Vedenov (1967). « Theory of a Weakly Turbulent Plasma », *Reviews of Plasma Physics* **3**. edition by Leontovich, M. A., p. 229-276.
- Vladimir E. Zakharov (juill. 1965). « Weak turbulence in media with a decay spectrum », *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **6** (4), p. 22-24.
- Vladimir E. Zakharov, Victor S. L'vov et Gregory Falkovich (2012). *Kolmogorov spectra of turbulence I : Wave turbulence*. Springer Science & Business Media.
- George M. Zaslavskii et Roald Z. Sagdeev (1967). « Limits of statistical description of a nonlinear wave field », *Soviet physics JETP* **25**, p. 718-724.

Anne-Sophie de Suzzoni

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz (CMLS),

CNRS, École polytechnique,

Institut Polytechnique de Paris,

91120 Palaiseau, France

E-mail : anne-sophie.de-suzzoni@polytechnique.edu