

## COHOMOLOGIE DES ESPACES DE MODULES DE COURBES VIA LA GÉOMÉTRIE TROPICALE ET LES COMPLEXES DE GRAPHES

[d'après M. Chan, S. Galatius et S. Payne]

par Jérôme Poineau

### Introduction

Ce texte est consacré à l'espace de modules  $M_g$  des surfaces de Riemann compactes connexes de genre  $g$ . Bien qu'il s'agisse d'un objet central en géométrie, connu et étudié depuis longtemps, on ne dispose que d'informations fort lacunaires sur sa cohomologie singulière. Des estimations asymptotiques de caractéristique d'Euler, réalisées par Harer et Zagier dans les années quatre-vingt, permettent néanmoins d'affirmer qu'il s'agit d'un monde très vaste, où apparaissent de nombreux groupes de grande dimension.

Pour cette étude, les méthodes issues de la géométrie classique font long feu. Si elles permettent de construire naturellement des classes de cohomologie à partir de classes de Chern de fibrés sur la courbe universelle au-dessus de  $M_g$ , on ne voit ainsi apparaître qu'une partie fort restreinte du paysage, limitée aussi bien en nature — classes de degré pair —, qu'en quantité — dimension de l'espace engendré bien inférieure à l'asymptotique observée par Harer et Zagier.

C'est dans ce contexte que Melody Chan, Søren Galatius et Sam Payne démontrent le résultat suivant : la dimension du groupe de cohomologie  $H^{4g-6}(M_g, \mathbf{Q})$  croît exponentiellement en  $g$ . Au-delà du caractère remarquable du résultat lui-même, leur texte interpelle par l'originalité des méthodes mises en œuvre. Elle font en effet intervenir d'autres espaces de modules, classifiant différentes structures, sortes de version épurées des surfaces de Riemann.

Nous nous proposons ici de raconter les grandes lignes de la preuve de Chan, Galatius et Payne (2021). Nous y trouvons l'occasion d'une promenade à la frontière de l'espace de modules des surfaces de Riemann, où apparaissent graphes, courbes tropicales et courbes de Berkovich.

Pour le lecteur désireux d'approfondir le sujet, signalons l'existence d'un texte de survol par Chan (2021), mettant l'accent sur la notion d'espaces de modules, ainsi que de notes de cours par Chan (2017) et Payne (2020).

La section 1 contient des généralités sur l'espace de modules  $M_g$ . Sans rentrer dans le détail de sa construction, nous rappelons quelques résultats connus, comme l'asymptotique de Harer et Zagier et sa comparaison avec le nombre de classes d'origine géométrique. Nous évoquons ensuite rapidement la notion de structure de Hodge, fondamentale dans la suite. Considérons une variété  $X$  de dimension  $d$  et plongeons-la dans une variété propre  $\overline{X}$  (une compactification) de façon que le bord  $\partial X := \overline{X} \setminus X$  soit un diviseur à croisements normaux de  $\overline{X}$ . Alors le gradué de poids maximal de  $X$  (au sens de la structure de Hodge mixte) prend place dans un isomorphisme

$$\mathrm{Gr}_{2d}^{\mathrm{W}} H^{2d-k}(X, \mathbf{Q}) \simeq H_{k-1}^{\mathrm{sing}}(|\Delta(\partial X)|, \mathbf{Q}),$$

où  $|\Delta(\partial X)|$  désigne le complexe dual de la variété  $\partial X$ . Ainsi rencontrons-nous la première construction combinatoire de ce texte.

Dans le reste de la section 1, nous spécialisons ces résultats dans le cas de la variété  $M_g$  qui nous intéresse. Nous introduisons donc la notion de courbe stable, puis l'espace de modules des courbes stables de genre  $g$ , autrement dit, la compactification de Deligne–Mumford  $\overline{M}_g$  de  $M_g$ .

Dans la section 2, nous présentons deux variantes de l'espace de module  $M_g$  des courbes lisses. Dans un cas comme dans l'autre, la notion centrale est celle de graphe, de nature purement combinatoire, convenablement raffinée. La première variante, l'outre-espace  $CV_g$ , a été introduit par Culler et Vogtmann dans les années quatre-vingt afin d'étudier les automorphismes du groupe libre  $F_g$ , et nous nous contentons de l'évoquer rapidement. Nous exposons plus longuement la seconde variante, l'espace de modules  $\Delta_g$  classifiant les courbes tropicales normalisées de genre  $g$ , autrement dit, les graphes métriques compacts de longueur totale 1 et de genre  $g$  dont les sommets sont munis de poids entiers. L'espace  $\Delta_g$  possède une structure très concrète de  $\Delta$ -complexe symétrique, décrite en termes de contractions d'arêtes sur des graphes. Nous montrons qu'elle s'identifie au complexe dual du bord de la compactification de Deligne–Mumford de  $M_g$  mentionnée précédemment :

$$\Delta_g \simeq |\Delta_{\mathrm{sym}}(\partial M_g)|,$$

où  $\partial M_g := \overline{M}_g \setminus M_g$ .

La section 3 présente une digression autour des espaces de Berkovich et de leur application à l'étude du bord des variétés complexes. Nous proposons quelques rappels sur ces espaces et mettons en avant leur aspect polytopal et combinatoire. Nous nous attardons sur le cas de la dimension 1, dans lequel ces propriétés sont particulièrement visibles : une courbe de Berkovich peut être décrite comme une courbe tropicale où sont branchés des arbres réels.

Le reste de la section 3 met en avant un autre aspect combinatoire des espaces de Berkovich, d'après un travail d'Amaury Thuillier. Partant d'une variété torique, il observe que l'on peut réaliser son éventail dans l'espace de Berkovich associé, et de même pour les plongements toroïdaux. Étant donnée une variété complexe  $X$ , il est alors possible de lui associer canoniquement un espace de Berkovich  $\mathfrak{X}_\eta$ , sorte de bord non

archimédien intrinsèque, dont le type d’homotopie est le même que celui du complexe dual d’un bord à croisements normaux de  $X$ .

Dans la section 4, nous revenons au calcul de la cohomologie singulière de  $M_g$ , *via* celle de  $\Delta_g$ . La structure de  $\Delta$ -complexe de  $\Delta_g$  permet d’écrire un complexe explicite d’espaces vectoriels sur  $\mathbf{Q}$  calculant ces groupes de cohomologie. En étudiant certains graphes d’un type particulier, on montre qu’un certain quotient, possédant la même cohomologie, s’identifie au complexe de graphes commutatif défini par Maxim Kontsevich. Ce dernier a fait l’objet de nombreuses études, et des travaux combinés de Francis Brown et Thomas Willwacher assurent que sa cohomologie contient une algèbre de Lie libre sur un ensemble dénombrable de générateurs, d’où découle la croissance exponentielle de la dimension désirée.

La section 5 regroupe, sans démonstration, plusieurs résultats du même type que le précédent, non annulation ou croissance exponentielle de groupes de cohomologie, dans différents cadres : espaces de modules de courbes marquées, de variétés abéliennes, etc.

## Remerciements

La majeure partie de ce texte a été rédigée au cours d’un séjour à Francfort. Je remercie l’université Goethe et ses membres pour les excellentes conditions d’accueil, ainsi que la Deutsche Forschungsgemeinschaft (TRR 326 Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures, project number 444845124) pour son soutien financier. Je remercie tout particulièrement Yiu Man Wong pour de nombreuses discussions éclairantes.

## 1. Espaces de modules de courbes

Soit  $g \geq 2$ . Cette section est consacrée à l’espace de module  $M_g$  des courbes projectives lisses connexes de genre  $g$  sur  $\mathbf{C}$  (autrement dit des surfaces de Riemann compactes et connexes de genre  $g$ ). Cet espace constitue un vaste sujet d’étude, auquel il est difficile de rendre justice en quelques pages. Afin d’entrer directement dans le vif du sujet et d’aborder sans délai les questions cohomologiques qui nous intéressent, nous ne nous attarderons pas sur sa construction ou ses propriétés de base. Pour cela, nous renvoyons le lecteur intéressé à l’ouvrage très complet d’Arbarello, Cornalba et Griffiths (2011).

Dans la suite de ce texte, nous noterons  $M_g$  l’espace de modules des courbes projectives lisses connexes de genre  $g$  sur  $\mathbf{C}$ . Il s’agit d’une variété quasi-projective de dimension  $3g - 3$ . Deligne et Mumford (1969) en proposent une version champêtre, que nous noterons  $\mathcal{M}_g$ . Son espace de module grossier est  $M_g$  et, d’après Behrend (2004), pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on a un isomorphisme canonique

$$H^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}) \simeq H^k(M_g, \mathbf{Q}).$$

Pour les questions qui nous intéressent, nous pouvons donc utiliser indifféremment l’un ou l’autre de ces espaces.

### 1.1. Espace de Teichmüller et groupe modulaire

L'étude directe de l'espace de modules  $M_g$  est difficile et s'effectue souvent à l'aide d'espaces auxiliaires. Nous présentons ici le plus célèbre d'entre eux, l'espace de Teichmüller, qui classe des courbes analytiques munies de données supplémentaires.

Soit  $g \geq 2$ . Soit  $\Sigma$  une surface compacte connexe orientable de genre  $g$ . Pour toute surface de Riemann  $C$  compacte connexe, une *structure de Teichmüller* sur  $C$  est la donnée d'une classe d'isotopie d'homéomorphismes  $f: \Sigma \rightarrow C$  qui préservent l'orientation. L'*espace de Teichmüller*  $\mathcal{T}_g$  est l'ensemble des classes d'isomorphie de couples  $(C, f)$  comme ci-dessus, des couples  $(C, f)$  et  $(C', f')$  étant dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de surfaces de Riemann  $\varphi: C \rightarrow C'$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow f & \downarrow \varphi \\ \Sigma & & \\ & \searrow f' & \\ & & C' \end{array}$$

commute. L'espace  $\mathcal{T}_g$  possède une structure naturelle d'espace analytique complexe.

Le *groupe modulaire*  $\text{Mod}_g$  (mapping class group en anglais) est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes  $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$  qui préservent l'orientation. Il agit naturellement sur l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$ . On vérifie que l'action est propre, à stabilisateurs finis, et que le quotient s'identifie à l'espace de modules des courbes :

$$\mathcal{T}_g / \text{Mod}_g \simeq M_g.$$

L'un des résultats fondamentaux sur l'espace de Teichmüller affirme qu'il est isomorphe à la boule unité de  $\mathbf{C}^{3g-3}$ . En particulier, il est contractile. On en déduit que, pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on a un isomorphisme

$$H^k(M_g, \mathbf{Q}) \simeq H^k(\text{Mod}_g, \mathbf{Q}),$$

où le membre de droite s'entend au sens de la cohomologie des groupes. Ajoutons que le groupe modulaire  $\text{Mod}_g$  est bien compris : on en connaît des générateurs (les twists de Dehn), des présentations par générateurs et relations, etc. Aussi les isomorphismes précédents fournissent-ils des moyens efficaces d'obtenir des informations sur la cohomologie de  $M_g$ .

Un premier exemple est le calcul de la dimension cohomologique virtuelle de  $\text{Mod}_g$ , égale à  $4g - 5$ , d'après Harer (1986). Tous les groupes de cohomologie de  $M_g$  de degré strictement supérieur sont donc nuls, quels que soient les coefficients. Dans le cas particulier des coefficients rationnels, l'annulation persiste en degré égal au degré cohomologique (Church, Farb et Putman, 2012 ; Morita, Sakasai et Suzuki, 2013). Résumons.

THÉORÈME 1.1. — *Pour tout  $k \geq 4g - 5$ , on a*

$$H^k(M_g, \mathbf{Q}) = 0.$$

Un second exemple particulièrement intéressant pour les questions qui nous occupent figure dans l'article de Harer et Zagier (1986). En faisant agir  $\text{Mod}_g$  sur un complexe simplicial contractile explicite, construit à partir de classes de lacets dans  $\Sigma$ , les auteurs parviennent à calculer la caractéristique d'Euler de  $M_g$ .

THÉORÈME 1.2. — *Quand  $g$  tend vers l'infini, on a*

$$\chi(M_g) := \sum_{k \in \mathbf{N}} (-1)^k H^k(M_g, \mathbf{Q}) \sim \frac{\zeta(1-2g)}{2-2g},$$

où  $\zeta$  désigne la fonction de Riemann.

Rappelons que  $\zeta(1-2g) = -\frac{B_{2g}}{2g} \sim (-1)^g \frac{(2g-1)!}{2^{2g-1}\pi^{2g}}$ , où  $B_{2g}$  désigne le  $2g^{\text{ème}}$  nombre de Bernoulli. On en déduit que, lorsque  $g$  tend vers l'infini, la caractéristique  $\chi(M_g)$  prend alternativement des valeurs positives et négatives et présente une croissance en valeur absolue de l'ordre de  $g^{2g}$ . En particulier, l'espace de modules  $M_g$  possède des groupes de cohomologie de grande dimension.

## 1.2. La partie géométrique de la cohomologie

L'espace de modules  $M_g$  est un espace de modules de courbes et l'on aimerait disposer d'une famille universelle de courbes sur cet espace. Ceci n'est possible qu'en passant à la version champêtre  $\mathcal{M}_g$  de  $M_g$ . Il existe alors en effet un champ algébrique  $\mathcal{C}_g$  et un morphisme  $\pi: \mathcal{C}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  propre et lisse, de dimension relative 1.

En ayant cette courbe universelle  $\mathcal{C}_g$  à disposition, il devient possible de recourir à des constructions géométriques classiques pour obtenir des classes de cohomologie de  $\mathcal{M}_g$ . Mumford (1983) définit ainsi certaines *classes*  $\kappa$  par

$$\kappa_i := \pi_*(c_1(\omega_g)^{i+1}) \in H^{2i}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}),$$

où  $\omega_g := \omega_{\mathcal{C}_g/\mathcal{M}_g}$  désigne le fibré dualisant relatif et  $c_1(\omega_g)$  sa première classe de Chern. Remarquons que toutes les classes  $\kappa$  sont de degré pair.

Mumford conjecture que les classes  $\kappa$  engendrent la partie stable de la cohomologie (censée être, à degré fixé, indépendante de  $g$ , pour  $g$  assez grand). Cette stabilisation de la cohomologie a été démontrée sous une forme précise par Harer (1985) : l'espace  $H^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  est indépendant de  $g$ , dès que celui-ci est supérieur à  $3k$ . La conjecture de Mumford a ensuite été confirmée par Madsen et Weiss (2007). Notons que, une fois encore, ces résultats sont obtenus *via* l'étude du groupe modulaire  $\text{Mod}_g$ .

THÉORÈME 1.3. — *Soit  $k \in \mathbf{N}$ . Pour tout  $g$  assez grand, on a*

$$H^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[\kappa_i, i \in \mathbf{N}]_k,$$

où l'indice  $k$  désigne le sous-espace des éléments de degré  $k$ .

Il est intéressant d'estimer la dimension de la partie de la cohomologie obtenue *via* les procédés géométriques ci-dessus. Soit  $k$  un entier pair. Un élément de  $\mathbf{Q}[\kappa_i, i \in \mathbf{N}]$  donnant lieu à une classe dans  $H^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$\kappa_1^{j_1} \cdots \kappa_m^{j_m}, \quad \text{avec } 2j_1 + \cdots + 2j_m = k.$$

Par conséquent, la dimension de  $\mathbf{Q}[\kappa_i, i \in \mathbf{N}]_k$  est bornée par le nombre  $p(k/2)$  de partitions de  $k/2$ . D'après Hardy et Ramanujan (1916), lorsque  $k$  tend vers l'infini, on a l'équivalent

$$p\left(\frac{k}{2}\right) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{k}{3}}}}{2k\sqrt{3}}.$$

Prenant en compte la dimension cohomologique de  $\mathcal{M}_g$  (cf. théorème 1.1), on en déduit une majoration asymptotique : pour tout  $g$  assez grand, on a

$$\dim(\mathbf{Q}[\kappa_i, i \in \mathbf{N}]) \leq \sum_{\substack{k \leq 4g-4 \\ k \text{ pair}}} p\left(\frac{k}{2}\right) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2g}{3}}}}{2\sqrt{3}}.$$

On constate que cette partie géométrique est loin de suffire à expliquer la croissance de  $\chi(\mathcal{M}_g)$  en  $g^{2g}$  observée par Harer et Zagier (1986) (cf. théorème 1.2).

Notons également que, lorsque  $g$  est impair,  $\zeta(1 - 2g)$  est négatif. Par conséquent, le théorème 1.2 assure l'existence de groupes de cohomologie de degré impair de grande dimension. Ces derniers ne peuvent s'obtenir par les méthodes géométriques ci-dessus et il est très difficile d'y accéder. Le premier exemple explicite de groupe de cohomologie non nul de degré impair de  $\mathcal{M}_g$ , à savoir  $H^5(\mathcal{M}_4, \mathbf{Q})$ , a été obtenu par Tommasi (2005), presque vingt ans après l'article de Harer et Zagier (1986).

### 1.3. Structure de Hodge

Les espaces de cohomologie singulière de  $M_g$ , comme ceux de toute variété algébrique complexe, sont munis d'une structure supplémentaire, dite *structure de Hodge mixte*. Ce raffinement, que l'on doit à Deligne (1971), revêt une grande importance théorique, mais également pratique puisque, comme nous le verrons, on peut en tirer une stratégie permettant de calculer explicitement certaines parties de la cohomologie.

Nous nous contenterons de rappels succincts sur la théorie de Hodge. Soit  $X$  une variété algébrique complexe. Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , l'espace  $H^k(X, \mathbf{Q})$  possède une filtration canonique en  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels

$$W_0 H^k(X, \mathbf{Q}) \subset \cdots \subset W_{2k} H^k(X, \mathbf{Q}) = H^k(X, \mathbf{Q})$$

dont les gradués  $\text{Gr}_j^W H^k(X, \mathbf{Q})$  sont munis, après extension des scalaires à  $\mathbf{C}$ , de structures de Hodge pures de poids  $j$  (décomposition en somme directe de  $j + 1$  termes, échangés deux à deux par la conjugaison complexe selon une combinatoire précise). Ces structures de Hodge possèdent de nombreuses propriétés telles que la compatibilité aux suites exactes classiques (Mayer–Vietoris, etc.). Signalons également que, dans le cas

d'une variété projective et lisse, le  $k^{\text{ème}}$  groupe de cohomologie est pur de poids  $k$  (au sens où les autres gradués sont nuls).

Soit  $X$  une variété algébrique complexe lisse. Pour calculer sa structure de Hodge, il est utile d'en considérer une compactification projective lisse  $\overline{X}$ . Expliquons-le dans le cas du poids 0, qui est celui qui nous intéressera dans la suite. (Nous expliquerons brièvement, à la section 5.2, comment procéder pour les poids supérieurs.) En posant  $D := \overline{X} \setminus X$ , on dispose d'une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H^{k-1}(\overline{X}, \mathbf{Q}) \longrightarrow H^{k-1}(D, \mathbf{Q}) \longrightarrow H_c^k(X, \mathbf{Q}) \longrightarrow H^k(\overline{X}, \mathbf{Q}) \longrightarrow \dots$$

En utilisant sa compatibilité aux poids et le fait que  $H^k(\overline{X}, \mathbf{Q})$  est pur de poids  $k$ , on obtient alors, pour tout  $k \geq 2$ , un isomorphisme

$$W_0 H^{k-1}(D, \mathbf{Q}) \simeq W_0 H_c^k(X, \mathbf{Q}).$$

Il reste à calculer la structure de Hodge sur  $D$ . En pratique, on impose des conditions sur ce dernier, par exemple d'être un *diviseur à croisements normaux*. Rappelons que cela signifie que le bord  $D$  de  $\overline{X}$  est une hypersurface et que les intersections entre ses composantes irréductibles sont transverses : localement au voisinage de tout point, dans certaines coordonnées analytiques, elles peuvent s'écrire comme des intersections d'hyperplans de coordonnées dans un espace affine. Notons que cette définition autorise les auto-intersections entre composantes. Lorsque de telles intersections ne se produisent pas, on parle de *diviseur à croisements normaux simples*.

Pour calculer la structure de Hodge sur  $D$ , il est utile de supposer que ce dernier est à croisements normaux simples. En effet, dans ce cas, les composantes et leurs intersections sont projectives et lisses, donc leur cohomologie est pure, et on peut calculer la structure de Hodge à la Čech. Précisément, toujours dans le cas du poids 0, on peut procéder ainsi. Notons  $D_1, \dots, D_r$  les composantes irréductibles de  $D$  et considérons le complexe

$$\mathcal{D}_0 : 0 \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq r} H^0(D_i, \mathbf{Q}) \xrightarrow{d_0} \bigoplus_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} H^0(D_{i_0} \cap D_{i_1}, \mathbf{Q}) \xrightarrow{d_1} \dots$$

où, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , la différentielle  $d_k$  est définie par la formule classique

$$d_k(s)_{i_0, \dots, i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j (s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{k+1}})_{|D_{i_0} \cap \dots \cap D_{i_{j-1}} \cap D_{i_{j+1}} \cap \dots \cap D_{i_{k+1}}}.$$

On a alors, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$W_0 H^k(D, \mathbf{Q}) \simeq H^k(\mathcal{D}_0).$$

Remarquons que la cohomologie de  $\mathcal{D}_0$  s'exprime purement en termes de la combinatoire des intersections multiples des composantes de  $D$ . Pour préciser ce résultat, introduisons le complexe dual  $|\Delta(D)|$  de  $D$ . C'est un espace topologique construit comme suit. On commence par placer un point par composante  $D_i$  de  $D$ . Si deux composantes distinctes  $D_i$  et  $D_j$  s'intersectent, alors on relie les points correspondants par un segment. Si trois composantes distinctes  $D_i$ ,  $D_j$  et  $D_k$  s'intersectent, alors on remplit le triangle bordé par les points et segments correspondants. On répète le procédé tant

que des composantes s'intersectent non trivialement, cf. figure 1. Nous reprendrons cette construction de façon plus précise et générale à la section 1.5.

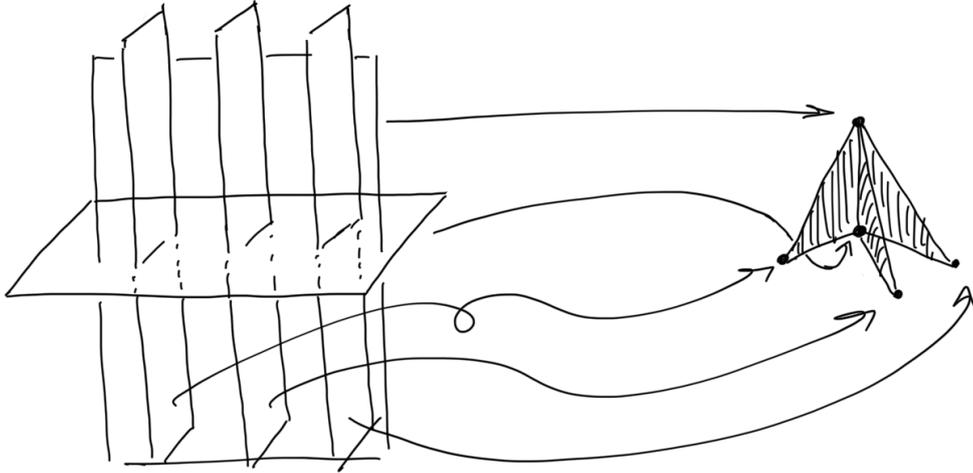


FIGURE 1. Un espace et son complexe dual

L'espace  $|\Delta(D)|$  est naturellement découpé en simplexes et son homologie simpliciale (ou singulière) à coefficients rationnels se calcule donc à l'aide d'un complexe explicite, défini ainsi : pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , le terme de degré  $n$  est le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel engendré par les  $n$ -simplexes ; les différentielles envoient un simplexe sur la somme alternée de ses faces. Ce complexe est précisément le dual du complexe  $\mathcal{D}_0$ .

Résumons les résultats obtenus.

**THÉORÈME 1.4.** — *Soit  $X$  une variété algébrique lisse complexe de dimension  $d$ . Soit  $\bar{X}$  une compactification lisse de  $X$  telle que  $D := \bar{X} \setminus X$  soit à croisement normaux simples. Alors, pour tout  $k \geq 2$ , on a*

$$H_{k-1}^{\text{sing}}(|\Delta(D)|, \mathbf{Q}) \simeq \text{Gr}_{2d}^{\text{W}} H^{2d-k}(X, \mathbf{Q}).$$

Mentionnons que nous avons utilisé la dualité de Poincaré pour remplacer le dual de  $W_0 H_c^k(X, \mathbf{Q})$  par  $\text{Gr}_{2d}^{\text{W}} H^{2d-k}(X, \mathbf{Q})$ .

#### 1.4. Courbes stables

L'espace de modules des courbes lisses n'est pas compact. Afin d'espérer le compactifier, il est nécessaire de prendre en compte certaines courbes singulières. Il suffit en réalité de considérer des singularités d'un type très simple, modélées sur une intersection d'axes de coordonnées, comme dans l'espace

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : xy = 0\}.$$

DÉFINITION 1.5. — Soit  $C$  une courbe connexe propre sur  $\mathbf{C}$ .

On dit qu'un point  $z \in C(\mathbf{C})$  est un point double ordinaire s'il existe un voisinage analytique  $U$  de  $z$  dans  $C(\mathbf{C})$ , un voisinage analytique  $V$  de  $(0,0)$  dans  $D(\mathbf{C})$  et un isomorphisme  $\varphi: U \rightarrow V$  tel que  $\varphi(z) = (0,0)$ .

On dit que la courbe  $C$  est nodale si tous ses points singuliers sont des points doubles ordinaires.

On dit que la courbe  $C$  est stable si elle est nodale et si son groupe d'automorphismes est fini.

Soit  $C$  une courbe nodale. Notons  $C_1, \dots, C_t$  ses composantes irréductibles. Pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ , notons  $\nu(C_i)$  le nombre de points singuliers de  $C_i$ ,  $\tilde{C}_i$  la normalisée de  $C_i$  et  $g(\tilde{C}_i)$  le genre de cette dernière. La condition de stabilité se traduit alors concrètement par les conditions numériques suivantes :

$$\forall i \in \{1, \dots, t\}, 2g(\tilde{C}_i) + \nu(C_i) \geq 3.$$

Indiquons également que l'on dispose d'une formule pour le genre arithmétique de  $C$  :

$$(1) \quad p_a(C) = \sum_{i=1}^t (g(\tilde{C}_i) - 1) + 1 + \nu(C),$$

où  $\nu(C)$  est le nombre de points singuliers de  $C$ .

Il est toujours possible de lisser un point double ordinaire d'une courbe nodale : localement, au voisinage du point double, on peut utiliser la famille d'équation  $xy = t$ , pour un paramètre  $t$  qui vaut 0 en la courbe originale, et recoller. De façon générale, les déformations d'une courbe nodale  $C$  sont comprises. Lorsque la courbe  $C$  est stable de genre arithmétique  $g$ , on peut la placer au centre d'une famille de Kuranishi (déformation locale universelle). Cette famille se présente sous la forme d'un morphisme plat  $\pi: \mathcal{C} \rightarrow B$ , où  $B$  est un disque de dimension  $3g - 3$  centré en 0, dont la fibre en 0 s'identifie à  $C$  et toutes les fibres sont des courbes nodales. En outre, il existe des coordonnées  $t_1, \dots, t_{3g-3}$  sur  $B$  s'annulant en 0 telles que le lieu des déformations qui sont localement triviales au voisinage du  $i^{\text{ème}}$  nœud soit donné par  $t_i = 0$ . Remarquons que le lieu  $B_0$  des courbes lisses est l'ouvert de  $B$  sur lequel aucun  $t_i$  ne s'annule et que son bord dans  $B$  est à croisements normaux.

Notons que, puisque le morphisme  $\pi$  est plat, le genre arithmétique de ses fibres est constant. En utilisant la formule (1), on observe que

- lorsqu'un point double d'une composante est lissé, le genre géométrique de ladite composante augmente de 1 ;
- lorsqu'un point double à l'intersection de deux composantes est lissé, c'est-à-dire que deux composantes fusionnent, le genre géométrique de la composante qui en résulte est égal à la somme des genres géométriques des composantes de départ.

*Exemple 1.6.* — Considérons une courbe  $C$  possédant deux composantes irréductibles  $C_1$  et  $C_2$  qui se coupent en un point  $P_1$ . Supposons que  $C_1$  est lisse de genre géométrique 1 et  $C_2$  de genre géométrique 2 avec un point double  $P_2$ . La courbe  $C$  est alors de genre

arithmétique 4 et l'espace des déformations  $B$  est un disque de dimension 9. Il est muni de coordonnées  $t_1, \dots, t_9$  et le fermé d'équation  $t_1 = 0$  (resp.  $t_2 = 0$ ) correspond au lieu des courbes où la singularité  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) est préservée.

Décrivons la stratification de  $B$  définie à partir des coordonnées, cf. figure 2.

— Strate  $\{t_1 = t_2 = 0\}$

C'est le lieu des courbes ayant la même description que  $C$ , c'est-à-dire deux composantes irréductibles de genre 1 et 2 qui se rencontrent en un point, celle de genre 2 ayant un point double. (La courbe  $C$  elle-même correspond au centre du disque, autrement dit au fermé  $\{t_1 = \dots = t_9 = 0\}$ .)

— Strate  $\{t_1 = 0, t_2 \neq 0\}$

Le point  $P_1$  subsiste, donc les courbes correspondantes ont deux composantes irréductibles. Le point  $P_2$  a été lissé, donc la courbe  $C_2$  est déformée en une courbe lisse de genre 3. C'est le lieu des courbes ayant deux composantes irréductibles de genre 1 et 3 qui se rencontrent en un point.

— Strate  $\{t_1 \neq 0, t_2 = 0\}$

Le point  $P_1$  a été lissé, donc la courbe est déformée en une courbe irréductible. Le point  $P_2$  subsiste, donc cette courbe possède un point double. C'est le lieu des courbes irréductibles de genre géométrique 3 avec un point double.

— Strate  $\{t_1 \neq 0, t_2 \neq 0\}$

Les deux points  $P_1$  et  $P_2$  ont été lissés. C'est le lieu des courbes lisses de genre 4.

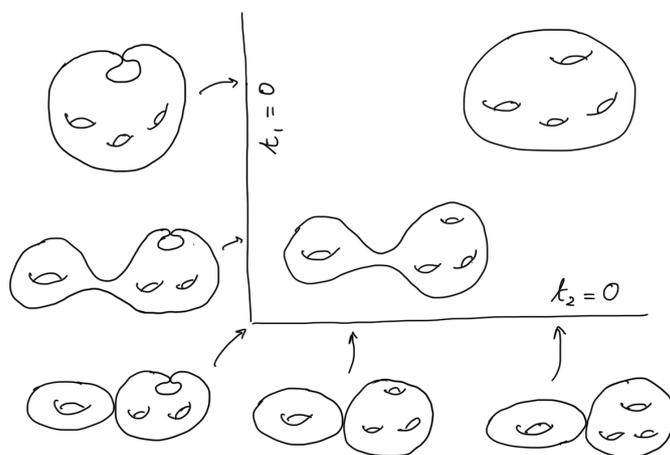


FIGURE 2. Déformations d'une courbe de genre 4

Pour  $g \geq 2$ , on note  $\overline{M}_g$  l'espace de modules paramétrant les classes d'isomorphie de courbes stables de genre  $g$ . Les résultats sur les déformations des courbes stables exposés ci-dessus permettent de donner une description précise du bord  $\partial M_g$  de l'espace de modules des courbes. Comme dans l'exemple 1.6, il s'écrit comme une union de strates, chacune d'elle étant constituée des courbes stables dont les composantes irréductibles ont

un genre géométrique donné et qui s'intersectent (et s'auto-intersectent) en un nombre de points lui aussi donné. À la fin de la section 2.3, nous indiquerons une interprétation alternative, en termes de graphes duaux.

Il faut signaler que l'espace  $M_g$  et sa compactification  $\overline{M}_g$  ne rentrent pas exactement dans le cadre utilisé à la section 1.3 pour décrire les structures de Hodge. En effet, certaines courbes ayant des automorphismes non triviaux, les espaces  $M_g$  et  $\overline{M}_g$  ne s'obtiennent pas directement en recollant les familles de Kuranishi mentionnées précédemment, mais des quotients par certains groupes finis, ce qui peut faire perdre aussi bien la lissité des espaces que la propriété de croisements normaux du bord.

Pour pallier ces difficultés, il convient de prendre les quotients dans la catégorie des champs, comme proposé par Deligne et Mumford (1969). Nous travaillerons donc désormais uniquement avec le champ  $\mathcal{M}_g$  (resp.  $\overline{\mathcal{M}}_g$ ) paramétrant les classes d'isomorphisme de courbes lisses (resp. stables) de genre  $g$ . Dans ce cadre, les propriétés désirées sont satisfaites :  $\mathcal{M}_g$  et  $\overline{\mathcal{M}}_g$  sont lisses et le bord  $\partial\mathcal{M}_g$  de  $\mathcal{M}_g$  dans  $\overline{\mathcal{M}}_g$  est à croisements normaux. Comme signalé au début de la section 1, le passage de  $M_g$  (resp.  $\overline{M}_g$ ) à  $\mathcal{M}_g$  (resp.  $\overline{\mathcal{M}}_g$ ) n'affecte pas les groupes des cohomologie à coefficients rationnels.

### 1.5. Complexes duaux

À la section 1.3, nous avons expliqué comment calculer la structure de Hodge d'une variété lisse possédant un bord à croisement normaux simples. Pour la compactification de Deligne–Mumford  $\overline{\mathcal{M}}_g$  de  $\mathcal{M}_g$ , les composantes du bord sont à croisements normaux, mais peuvent s'intersecter. Nous expliquons ici comment contourner ce problème. À cette fin, nous utiliserons une définition plus formelle du complexe dual.

Examinons de nouveau la situation de la section 1.3 et considérons une variété  $X$  avec une compactification lisse  $\overline{X}$  et un bord  $D := \overline{X} \setminus X$  à croisement normaux simples, de composantes irréductibles  $D_1, \dots, D_r$ . La combinatoire de ce bord, qui détermine la partie de poids 0 de la structure de Hodge de  $X$ , peut être efficacement encodée sous la forme d'un  $\Delta$ -complexe, c'est-à-dire un foncteur  $I^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ , où  $I$  désigne la catégorie dont les objets sont les ensembles de la forme  $\{0, \dots, n\}$ , avec  $n \in \mathbf{N}$ , et les morphismes les applications strictement croissantes.

Décrivons le foncteur  $\Delta(D): I^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  dans le cas qui nous intéresse.

— Image des objets

Le foncteur associe à  $\{0, \dots, n\}$  l'ensemble des éléments de la forme  $(i_0, \dots, i_n, F)$ , où  $i_0, \dots, i_n$  est une suite strictement croissante d'éléments de  $\{1, \dots, r\}$  et  $F$  une composante connexe de  $D_{i_0} \cap \dots \cap D_{i_n}$ .

— Image des morphismes

Soit  $\iota: \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  une application strictement croissante. L'application  $\Delta(D)(\iota)$  est celle qui à  $(i_0, \dots, i_n, F)$  associe  $(i_{\iota(0)}, \dots, i_{\iota(m)}, G)$  et  $G$  est l'unique composante connexe de  $D_{i_{\iota(0)}} \cap \dots \cap D_{i_{\iota(m)}}$  contenant  $F$ .

Tout  $\Delta$ -complexe  $\Lambda$  possède une *réalisation géométrique*  $|\Lambda|$ , définie en recollant des simplexes standards. Précisément, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout élément  $\mathcal{F}$  de  $\Lambda(\{0, \dots, n\})$ ,

l'espace topologique  $|\Lambda|$  contient un simplexe standard  $\Delta_{\mathcal{F}}$  de dimension  $n$ . Il reste à indiquer comment recoller ces simplexes. Remarquons que tous les morphismes de  $I$  s'obtiennent en composant un nombre fini de morphismes de la forme

$$\begin{aligned} \iota_{n,j} : \{0, \dots, n-1\} &\longrightarrow \{0, \dots, n\}, \\ i < j &\longmapsto i \\ i \geq j &\longmapsto i+1 \end{aligned}$$

pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , la  $j^{\text{ème}}$  face de  $\Delta_{\mathcal{F}}$  est identifiée au simplexe associé à  $\Lambda(\iota_{n,j})(\mathcal{F})$ .

L'un des intérêts de la réalisation géométrique  $|\Lambda|$  est que l'on peut calculer explicitement son homologie singulière, à coefficients rationnels disons, par un complexe explicite construit à partir du foncteur  $\Lambda$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , considérons l'espace vectoriel  $T_n$  sur  $\mathbf{Q}$  de base  $\Lambda(\{0, \dots, n\})$  :

$$T_n := \bigoplus_{\mathcal{F} \in \Lambda(\{0, \dots, n\})} \mathbf{Q} \cdot \mathcal{F}.$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , considérons l'application linéaire  $\delta_n : T_n \rightarrow T_{n-1}$  définie sur les éléments de la base par

$$\delta_n(\mathcal{F}) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \Lambda(\iota_{n,j})(\mathcal{F}).$$

Notons  $\mathcal{T}_{\bullet}(\Lambda)$  le complexe de chaînes ainsi défini. Alors, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , on a

$$H_k^{\text{sing}}(|\Lambda|, \mathbf{Q}) \simeq H_k(\mathcal{T}_{\bullet}(\Lambda)).$$

Remarquons que pour associer un  $\Delta$ -complexe à un diviseur à croisements normaux simples, il est nécessaire de choisir un ordre sur ses composantes irréductibles, ce qui rend le procédé peu naturel. Pour pallier ce défaut, nous introduisons la notion voisine de  $\Delta$ -complexe symétrique, que nous utiliserons plus volontiers par la suite. Elle s'obtient en remplaçant, dans la définition de  $\Delta$ -complexe, la catégorie  $I$  par la catégorie  $I_{\text{sym}}$  avec les mêmes objets (ensembles de la forme  $\{0, \dots, n\}$ ) et les applications injectives comme morphismes. À composition près, cela revient à autoriser non plus seulement les applications strictement croissantes, mais également les permutations de  $\{0, \dots, n\}$ .

Comme dans le cas classique, tout  $\Delta$ -complexe symétrique  $\Lambda_{\text{sym}}$  possède une réalisation géométrique  $|\Lambda_{\text{sym}}|$  définie en recollant des simplexes standard selon la combinatoire décrite par le foncteur  $\Lambda_{\text{sym}}$ .

La construction du complexe calculant l'homologie singulière de  $|\Lambda_{\text{sym}}|$  fait intervenir une subtilité supplémentaire provenant des permutations. Considérons en effet un élément  $\mathcal{F}$  de  $\Lambda_{\text{sym}}(\{0, \dots, n\})$  et le simplexe  $\Delta_{\mathcal{F}}$  associé. Si, pour une certaine permutation  $\sigma$  de  $\{0, \dots, n\}$ , on a  $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ , alors c'est le même simplexe  $\Delta_{\mathcal{F}}$  qui est associé à  $\sigma(\mathcal{F})$ , mais son orientation peut être différente, en fonction de la parité de la permutation  $\sigma$ .

Revenant au calcul de l'homologie singulière, on définit, comme dans le cas classique, le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $T_n$  de base  $\Lambda_{\text{sym}}(\{0, \dots, n\})$ , puis son quotient  $\bar{T}_n$  obtenu en identifiant les éléments de la forme  $\sigma(\mathcal{F})$  et  $\varepsilon(\sigma) \cdot \mathcal{F}$  lorsque  $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ . On regroupe

ces espaces dans un complexe  $\overline{\mathcal{T}}_{\bullet}(\Lambda_{\text{sym}})$ , avec les mêmes différentielles que dans le cas classique. (On vérifie qu’elles passent au quotient.) Alors, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , on a

$$H_k^{\text{sing}}(|\Lambda_{\text{sym}}|, \mathbf{Q}) \simeq H_k(\overline{\mathcal{T}}_{\bullet}(\Lambda_{\text{sym}})).$$

Revenons au cas des complexes duaux qui nous intéresse et donnons sa définition générale en tant que complexe symétrique. Pour l’appliquer au bord de  $\mathcal{M}_g$ , nous aurons besoin d’une définition qui autorise les diviseurs à croisements normaux non simples au bord et qui vaut également pour les champs de Deligne–Mumford. Elle nécessite donc un peu plus de formalisme que la définition purement topologique proposée à la section 1.3.

Soit  $\overline{X}$  un champ de Deligne–Mumford lisse et  $D$  un diviseur à croisements normaux de  $\overline{X}$ . Notons  $\tilde{D}$  la normalisation de  $D$ . Le *complexe symétrique dual* de  $D$  est le foncteur  $\Delta_{\text{sym}}(D) : I_{\text{sym}}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  qui, à  $\{0, \dots, n\}$  avec  $n \in \mathbf{N}$ , associe l’ensemble des composantes connexes de

$$\tilde{D}_n := \{(z_0, \dots, z_n) \in \tilde{D} \times_{\overline{X}} \cdots \times_{\overline{X}} \tilde{D} : \forall i \neq j, z_i \neq z_j\}.$$

Au niveau des morphismes, étant donné une application injective  $\iota : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ , l’application  $\Delta_{\text{sym}}(D)(\iota)$  est celle qui envoie une composante connexe  $C$  de  $\tilde{D}_n$  sur la composante connexe de  $\tilde{D}_m$  contenant l’image de  $C$  par la projection

$$\tilde{D} \times_{\overline{X}} \cdots \times_{\overline{X}} \tilde{D} \ (n \text{ fois}) \longrightarrow \tilde{D} \times_{\overline{X}} \cdots \times_{\overline{X}} \tilde{D} \ (m \text{ fois})$$

associée à  $\iota$ . (Elle envoie le  $i^{\text{ème}}$  facteur identiquement sur le  $j^{\text{ème}}$  facteur si  $\iota(j) = i$ . Elle le contracte si  $i$  n’appartient pas à l’image de  $\iota$ .)

Avec cette définition, on vérifie que le théorème 1.4 se généralise aux champs dont le bord est un diviseur à croisements normaux arbitraires.

Expliquons comment se ramener au cas d’un bord à croisements normaux simples. Par une suite d’éclatements bien choisis (strates de dimension 0, puis transformées strictes des strates de dimension 1, etc.), on transforme le diviseur de bord  $D$  en un diviseur  $D'$  à croisements normaux simples. Sur le complexe symétrique dual et sa réalisation, les opérations correspondantes sont très explicites : il s’agit de subdivisions. En particulier,  $|\Delta_{\text{sym}}(D)|$  et  $|\Delta_{\text{sym}}(D')|$  ont même homologie singulière.

Énonçons le résultat dans le cas particulier qui nous intéresse.

**THÉORÈME 1.7.** — *Soit  $g \geq 2$ . Pour tout  $k \geq 2$ , on a*

$$H_{k-1}^{\text{sing}}(|\Delta_{\text{sym}}(\partial\mathcal{M}_g)|, \mathbf{Q}) \simeq \text{Gr}_{6g-6}^{\text{W}} H^{6g-6-k}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}).$$

## 2. Deux variantes combinatoires

Dans cette section, nous présentons deux variantes de l’espace de modules des courbes lisses, de nature plus combinatoire. La première, l’outre-espace défini par Culler et Vogtmann (1986), présente un intérêt historique, en tant que prototype de ce genre de constructions, et s’est imposée comme un outil fondamental dans l’étude du groupe des

automorphismes extérieurs du groupe libre. Son succès a sans aucun doute contribué à l'apparition de la seconde variante, l'espace de modules des courbes tropicales, que nous présenterons plus en détail. Elle est directement reliée au sujet qui nous intéresse et nous expliquerons comment l'utiliser pour accéder à une partie de la cohomologie de l'espace de modules  $M_g$ .

Les deux constructions mentionnées ont en commun l'utilisation de graphes métriques, raffinés de deux façons différentes. Nous débuterons par quelques rappels sur cette notion.

## 2.1. Graphes

Un *graphe*  $G$  est défini classiquement par la donnée d'un ensemble de *sommets*  $S(G)$ , d'un ensemble d'*arêtes*  $A(G)$  et de relations d'incidence entre ces deux ensembles. Dans ce manuscrit, nous considérons des graphes finis et connexes. Ils ne sont pas orientés, sauf mention explicite du contraire, ce qui ne se produira que brièvement, au cours de la section 2.2, consacrée à l'outre-espace.

Dans tout le texte, les graphes que nous considérons sont des graphes finis et connexes, non orientés. Chaque graphe  $G$  possède un ensemble  $S(G)$  de sommets et un ensemble  $A(G)$  d'arêtes qui permet de le définir. Chaque arête de  $G$  relie deux sommets, non nécessairement distincts.

À toute arête d'un graphe  $G$  est associé l'ensemble de ses *extrémités*, qui est une partie de  $S(G)$  de cardinal 1 ou 2. On dit que c'est une *boucle* dans le premier cas, une *arête plate* dans le second.

Étant donné un sommet  $s$  de  $G$ , on définit son *arité*  $n(s)$  comme le nombre d'arêtes d'extrémité  $s$ , les boucles éventuelles comptant double.

*Remarque 2.1.* — La définition « naïve » précédente pose en réalité quelques problèmes et doit être modifiée. Par exemple, on aimerait que le groupe d'automorphisme d'un graphe restreint à une boucle soit  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  plutôt que le groupe trivial. Une solution consiste à définir un graphe comme la donnée de deux ensembles (sommets et arêtes orientées) et trois applications (inversion d'arête, origine d'une arête orientée, sommet terminal d'une arête orientée), avec les relations de compatibilité attendues.

Une autre possibilité, qui est celle utilisée par Chan, Galatius et Payne (2021), consiste à définir un graphe comme un ensemble de demi-arêtes et d'involutions (qui échangent les deux moitiés d'une arête).

Pour ne pas alourdir la présentation, nous utiliserons, tout au long de ce texte, les notations de la définition naïve. Le lecteur consciencieux n'aura aucun mal à les modifier en utilisant la définition rigoureuse de son choix.

La *réalisation géométrique*  $|G|$  du graphe  $G$  s'obtient en plaçant un point par sommet du graphe, puis en reliant ces points par des segments, de la façon prescrite par les relations d'incidence. On peut également considérer le graphe  $G$  comme un  $\Delta$ -complexe et appliquer la construction de la section 1.5.

Le *genre* du graphe  $G$  est défini par la formule

$$g(G) := 1 - \sharp S(G) + \sharp A(G).$$

Il coïncide avec le premier nombre de Betti de la réalisation géométrique  $|G|$  de  $G$ .

Le graphe  $G$  est dit *stable* si tout sommet de  $G$  est d'arité supérieure ou égale à 3. Un tel graphe est de genre supérieur ou égal à 2.

Un *graphe métrique* est la donnée d'un couple  $(G, \ell)$  formé d'un graphe  $G$  et d'une fonction longueur  $\ell: A(G) \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ . Le genre d'un graphe métrique est celui du graphe sous-jacent. Un graphe métrique est dit *stable* si le graphe sous-jacent l'est.

Le *volume* d'un graphe métrique  $(G, \ell)$  est la somme des longueurs de ses arêtes :

$$v(G, \ell) := \sum_{a \in A(G)} \ell(a).$$

Un graphe métrique est dit *normalisé* si son volume est égal à 1. Remarquons que le graphe sous-jacent possède au moins une arête.

On dispose d'une notion de *morphisme de graphes*. Les morphismes sont obtenus en composant un nombre fini de *morphismes élémentaires* de l'un des types suivants.

— *Isomorphisme*

C'est une bijection entre les ensembles de sommets et les ensembles d'arêtes des graphes qui préserve les relations d'incidence.

— *Contraction d'une arête plate*

Étant donné un graphe  $G$  et une arête  $a$  avec deux sommets distincts  $s$  et  $s'$ , on définit le graphe contracté  $G/a$  de la façon suivante :

- $A(G/a) = A(G) \setminus \{a\}$  ;
- $S(G/a)$  est le quotient de  $S(G)$  obtenu en identifiant les sommets  $s$  et  $s'$  en un sommet  $\bar{s}$  ;
- les relations d'incidence de  $G/a$  sont induites par celle de  $G$  : les extrémités d'une arête de  $G/a$  sont les images des extrémités de l'arête de  $G$  correspondante.

— *Contraction d'une boucle*

Étant donné un graphe  $G$  et une boucle  $a$  d'extrémité  $s$ , on définit le graphe contracté  $G/a$  de la façon suivante :

- $A(G/a) = A(G) \setminus \{a\}$  ;
- $S(G/a) = S(G)$  ;
- les relations d'incidence de  $G/a$  sont induites par celle de  $G$ .

On dispose également d'une notion de *morphisme de graphes métriques*, définie de façon similaire, à partir des mêmes morphismes élémentaires. Un *isomorphisme métrique* est un isomorphisme qui préserve la longueur des arêtes. Une *contraction d'arête métrique* est définie comme précédemment, en munissant le graphe  $G/a$  de la fonction longueur  $\ell/a$  induite par la fonction longueur  $\ell$  de  $G$ .

## 2.2. Outre-espace

Introduisons maintenant notre première construction combinatoire, celle de l'outre-espace. Elle a été proposée par Culler et Vogtmann (1986) afin d'étudier le groupe  $\text{Out}(F_g)$  des automorphismes extérieurs du groupe libre  $F_g$  à  $g$  générateurs par des techniques similaires à celles utilisées pour le groupe modulaire  $\text{Mod}_g$ . L'outre-espace  $\text{CV}_g$  est donc conçu comme un analogue de l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$ , et sa définition s'en inspire directement.

Soit  $g \geq 2$ . Soit  $R_g$  un graphe métrique « fleur » à un sommet et  $g$  boucles. Identifions son groupe fondamental au groupe libre  $F_g$ , cf. figure 3.

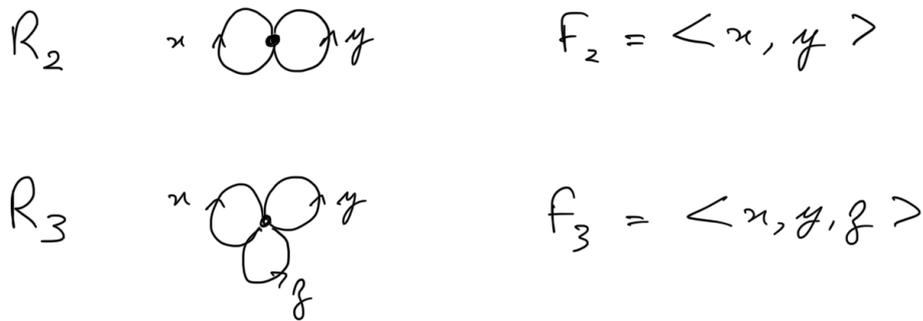


FIGURE 3. Les graphes fleurs en genre 2 et 3

Pour tout graphe métrique  $G$ , un *marquage* sur  $G$  est la donnée d'une équivalence d'homotopie  $f: R_g \rightarrow G$  (une application qui possède un inverse à homotopie près). Deux marquages  $f_1: R_g \rightarrow G_1$  et  $f_2: R_g \rightarrow G_2$  sont dits équivalents s'il existe une isométrie  $i: G_1 \rightarrow G_2$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & G_1 \\
 & \nearrow f_1 & \downarrow i \\
 R_g & & \\
 & \searrow f_2 & \downarrow \\
 & & G_2
 \end{array}$$

commute à homotopie libre près.

**DÉFINITION 2.2.** — *L'outre-espace  $\text{CV}_g$  est l'ensemble des classes d'équivalences de graphes métriques stables normalisés marqués.*

En pratique, on représente un graphe marqué  $(G, f)$  en choisissant un sous-arbre maximal  $T_G$  de  $G$  et en attribuant à toute arête du complémentaire  $G \setminus T_G$  une orientation et un élément de  $F_g$ . Le choix du sous-arbre maximal  $T_G$  et des orientations est arbitraire. On choisit encore un inverse  $g$  de  $f$  à homotopie près qui envoie  $T_G$  sur l'unique sommet de  $R_g$ . L'image d'une arête orientée de  $G \setminus T_G$  par  $g$  est alors un lacet de  $R_g$  et on

lui associe son image dans le groupe fondamental  $\pi_1(R_g)$ , que nous avons identifié à  $F_g$ . Notons que plusieurs choix entrent en jeu, et qu'ils peuvent donner lieu à des représentations différentes d'un même graphe marqué, cf. figure 4.

Tout automorphisme  $\alpha$  de  $F_g$  est induit par une application  $\varphi_\alpha: R_g \rightarrow R_g$ , unique à homotopie près. En composant les marquages par  $\varphi_\alpha$  à la source, on en déduit une action de  $\text{Aut}(F_g)$  sur  $\text{CV}_g$ . Les automorphismes intérieurs de  $F_g$  agissent trivialement et l'action se factorise donc par  $\text{Out}(F_g)$ .

On vérifie que le stabilisateur d'un graphe métrique marqué sous l'action de  $\text{Out}(F_g)$  s'identifie au groupe d'isométries du graphe métrique sous-jacent. En particulier, il est fini.

L'outre-espace possède une topologie naturelle. Nous ne la décrivons pas ici en détail, mais renvoyons à la section 2.3 pour une définition similaire. Contentons-nous d'indiquer que  $\text{CV}_g$  s'écrit comme réunion de simplexes standards ouverts, chacun d'eux étant obtenu en faisant varier les longueurs des arêtes d'un graphe marqué donné. Un graphe à  $k$  arêtes donne ainsi lieu à un simplexe de dimension  $k - 1$ . Les faces ouvertes de ce dernier sont les simplexes correspondant aux graphes obtenus en contractant une arête du précédent. Nous renvoyons à la figure 4 pour une représentation d'une partie de  $\text{CV}_2$ .

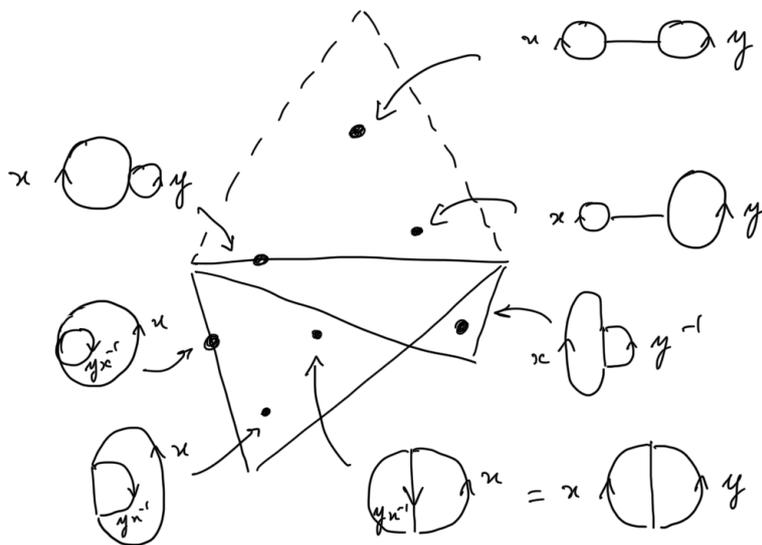


FIGURE 4. L'outre-espace  $\text{CV}_2$

Il suit de la discussion qui précède que l'on peut obtenir des informations sur le groupe  $\text{Out}(F_g)$  à partir de l'espace  $\text{CV}_g$ . Le résultat principal de Culler et Vogtmann (1986) assure que l'espace  $\text{CV}_g$  est de dimension  $3g - 4$  et se déforme (de façon équivariante) sur un complexe simplicial contractile de dimension  $2g - 3$ . On en déduit que la dimension cohomologique virtuelle de  $\text{Out}(F_g)$  est égale à  $2g - 3$ .

Nous n’approfondirons pas ce sujet, mais renvoyons le lecteur intéressé aux articles de survol de Vogtmann (2008, 2015) ainsi qu’à l’exposé de ce séminaire rédigé par Paulin (2011).

*Remarque 2.3.* — Puisque l’outre-espace  $\text{CV}_g$  se présente comme un analogue de l’espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$ , dans ce contexte, c’est donc le quotient  $\text{CV}_g / \text{Out}(F_g)$  qui joue le rôle de l’espace de module des courbes  $M_g$ . Il s’agit d’un espace de modules de graphes de genre  $g$  sans marquage.

### 2.3. Courbes tropicales

Nous présentons maintenant notre seconde construction combinatoire, celle de l’espace de modules des courbes tropicales. Afin de motiver cette nouvelle notion, il est utile de revenir au champ  $\overline{\mathcal{M}}_g$  classifiant les courbes stables introduit par Deligne et Mumford (1969). Rappelons l’une des propriétés fondamentales de ce champ : il est propre. Ceci se traduit par le fait que toute courbe lisse sur le corps des fractions d’un anneau de valuation possède un modèle à réduction stable, après extension finie éventuelle du corps de base.

Soit  $R$  un anneau de valuation, de corps des fractions  $K$ . Soit  $C$  un  $K$ -point de  $\mathcal{M}_g$ , correspondant à un morphisme  $f: \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{M}_g$ . Puisque le champ  $\overline{\mathcal{M}}_g$  est propre, le critère valuatif de propreté (SP, lemma 0CLZ, definition 0CLG, definition 0CLK) assure qu’il existe une extension finie  $K'$  de  $K$ , d’anneau de valuation noté  $R'$ , et un unique morphisme  $\varphi: \text{Spec}(R') \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(R') & & & & \\ \downarrow & \searrow^{\varphi} & & & \\ \text{Spec}(K') & \longrightarrow & \text{Spec}(K) & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_g & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_g \end{array}$$

soit commutatif.

Le cas qui nous intéresse est celui où  $R$  est un anneau de valuation discrète dont le corps résiduel  $k$  est algébriquement clos. Remarquons que le corps résiduel de  $R'$  est alors encore  $k$ .

Le morphisme  $\varphi: \text{Spec}(R') \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$  correspond à une courbe sur  $R'$ . Considérons sa réduction  $\mathcal{C}_s := \mathcal{C} \otimes_R k$ , qui est une courbe stable sur  $k$ . On peut lui associer les données suivantes.

— Un *graphe dual*  $\Gamma(\mathcal{C}_s)$

Ce graphe est construit ainsi : l’ensemble de ses sommets est l’ensemble des composantes irréductibles de  $\mathcal{C}_s$  et l’ensemble de ses arêtes est l’ensemble des singularités de  $\mathcal{C}_s$ . Si une singularité appartient à deux composantes, l’arête correspondante relie les deux sommets correspondants. Si une singularité appartient à une seule composante, l’arête correspondante est une boucle partant du sommet correspondant. Nous renvoyons à la figure 5 pour une représentation graphique de

cette construction. On reconnaît, dans un cas particulièrement simple, la construction du complexe dual présentée à la section 1.5.

— Une *métrique* sur le graphe  $\Gamma(\mathcal{C}_s)$

Par définition, une arête de  $\Gamma(\mathcal{C}_s)$  correspond à une singularité de  $\mathcal{C}_s$ . Autour de celle-ci, la courbe  $\mathcal{C}_s$  possède une équation de la forme  $xy = (\varpi')^n$ , où  $\varpi'$  est une uniformisante de  $R'$ . On définit la longueur de ladite arête comme  $n/[K' : K]$ .

— Des *poids* associés aux sommets de  $\Gamma(\mathcal{C}_s)$

Par définition, un sommet de  $\Gamma(\mathcal{C}_s)$  correspond à une composante irréductible de  $\mathcal{C}_s$ . On définit le poids dudit sommet comme le genre géométrique de la composante associée.

On vérifie que ces différentes données ( $\Gamma(\mathcal{C}_s)$ , la métrique et les poids) ne dépendent pas des choix effectués (corps  $K'$ , équation locale, uniformisante  $\pi'$ ). Nous renvoyons à l'article de Viviani (2013) pour les détails.

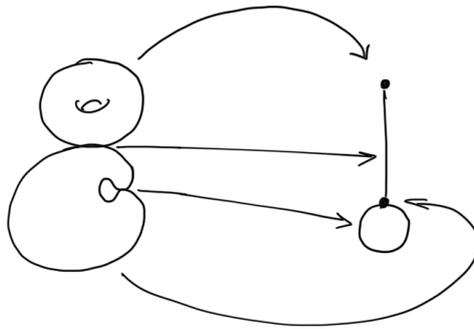


FIGURE 5. Le graphe dual associé à une courbe

Introduisons une nouvelle notion de graphe, de façon à prendre en compte les poids. Un *graphe pondéré* est la donnée d'un graphe  $G$  et d'une fonction poids sur ses sommets  $w: S(G) \rightarrow \mathbf{N}$ . Le *genre* d'un graphe pondéré  $(G, w)$  est défini par la formule

$$g(G, w) := g(G) + \sum_{s \in S(G)} w(s).$$

Un graphe pondéré  $(G, w)$  est dit *stable* si, pour tout sommet  $s$  de  $G$ , on a

$$2w(s) + n(s) \geq 3.$$

Une *courbe tropicale* est un graphe métrique pondéré, c'est-à-dire la donnée d'un graphe  $G$ , d'une fonction poids sur ses sommets  $w: S(G) \rightarrow \mathbf{N}$  et d'une fonction longueur sur ses arêtes  $\ell: A(G) \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ . Le genre d'une courbe tropicale  $(G, w, \ell)$  est celui du graphe pondéré  $(G, w)$ . Une courbe tropicale est dite stable si le graphe pondéré sous-jacent l'est. Le volume d'une courbe tropicale est celui du graphe métrique  $(G, \ell)$ .

La notion de morphisme de graphes et de graphes métriques s'étend aux graphes pondérés et aux courbes tropicales. Il nous suffit d'indiquer comment les poids sont modifiés par les morphismes élémentaires qui contractent une arête.

— *Contraction d'une arête plate*

Étant donné un graphe pondéré  $(G, w)$  et une arête  $a$  avec deux sommets distincts  $s$  et  $s'$ , on munit  $G/a$  d'une fonction poids  $w/a$  en laissant inchangé le poids des sommets différents de  $\bar{s}$  (qui s'identifient à des sommets de  $G$ ) et en posant

$$(w/a)(\bar{s}) = w(s) + w(s').$$

— *Contraction d'une boucle*

Étant donné un graphe pondéré  $(G, w)$  et une boucle  $a$  d'extrémité  $s$ , on munit  $G/a$  d'une fonction poids  $w/a$  en laissant inchangé le poids des sommets différents de  $s$  et en posant

$$(w/a)(s) = w(s) + 1.$$

On vérifie que les morphismes de graphes pondérés, et donc de courbes tropicales, préservent le genre, ainsi que la stabilité.

Soit  $g \geq 2$ . Nous souhaitons maintenant définir un espace de modules  $\Delta_g$  dont les points représentent les classes d'isomorphisme de courbes tropicales stables normalisées de genre  $g$ .

Fixons quelques notations. Pour tout entier  $n \in \mathbf{N}^*$ , considérons le simplexe de dimension  $n$  standard

$$\Delta^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in [0, 1] : \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$$

et son intérieur

$$\mathring{\Delta}^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in ]0, 1[ : \sum_{i=0}^n t_i = 1\}.$$

Soit  $n \in \mathbf{N}$  et soit  $(G, w)$  un graphe pondéré stable de genre  $g$  à  $n + 1$  arêtes. Choisissons un ordre sur ces arêtes de  $G$ , autrement dit une bijection  $\alpha: \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} A(G)$ . L'ensemble  $T(G, w)$  des courbes tropicales normalisées dont  $(G, w)$  est le graphe pondéré sous-jacent s'identifie alors au simplexe ouvert  $\mathring{\Delta}^n$ , via l'application longueur :

$$(G, w, \ell) \in T(G, w) \mapsto (\ell(\alpha(0)), \dots, \ell(\alpha(n))) \in \mathring{\Delta}^n.$$

Soit  $i \in \{0, \dots, n\}$  et considérons le graphe pondéré  $(G/\alpha(i), w)$  obtenu à partir de  $(G, w)$  en contractant l'arête  $\alpha(i)$ . L'application

$$(G/\alpha(i), w, \ell) \mapsto (\ell(\alpha(0)), \dots, \ell(\alpha(i-1)), 0, \ell(\alpha(i+1)), \ell(\alpha(n)))$$

identifie alors  $T(G/\alpha(i), w)$  à un sous-ensemble de  $\Delta^n$ . De façon imagée, contracter une arête revient à lui imposer d'être de longueur nulle.

En itérant ce procédé, on identifie finalement l'ensemble  $T^c(G, w)$  des courbes tropicales normalisées dont le graphe pondéré sous-jacent est une contraction de  $(G, w)$  au simplexe fermé  $\Delta^n$ , cf. figure 6.

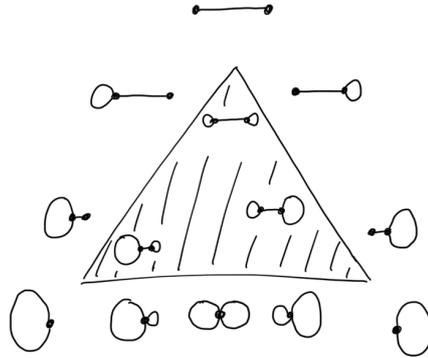


FIGURE 6. Un simplexe  $\Delta^2$  de courbes tropicales normalisées

Pour construire l'espace de modules de courbes tropicales  $\Delta_g$  recherché, il reste à :

1. prendre en compte les isomorphismes de courbes tropicales ;
2. recoller les différents simplexes obtenus en partant de différents graphes pondérés.

Le premier point se traduit par un passage au quotient, cf. figure 7. Il permet, en particulier, de s'affranchir du choix d'un ordre sur les arêtes dans la construction de  $T(G, w)$  et  $T^c(G, w)$ . Le second point s'effectue alors sans peine.

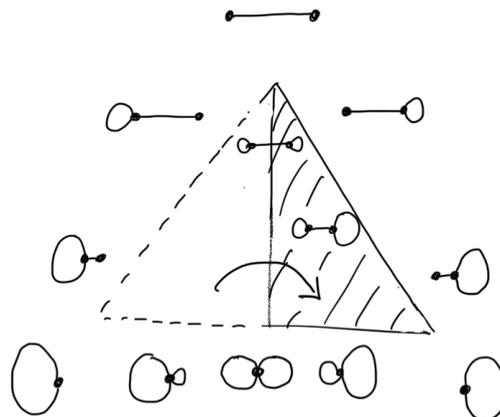


FIGURE 7. L'image du simplexe  $\Delta^2$  de la figure 6 dans l'espace de modules de courbes tropicales normalisées

La construction de l'espace  $\Delta_g$  ci-dessus peut être résumée de façon plus formelle et efficace à l'aide de la notion de  $\Delta$ -complexe symétrique présentée à la section 1.5.

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $T_{g,n}$  l'ensemble des triplets  $(G, w, \alpha)$ , où  $(G, w)$  est un graphe pondéré stable de genre  $g$  à  $n + 1$  arêtes et  $\alpha: \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} A(G)$  une bijection. Deux triplets  $(G, w, \alpha)$  et  $(G', w', \alpha')$  du type précédent sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme  $\varphi: (G, w) \rightarrow (G', w')$  qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & A(G) \\ & \nearrow \alpha & \downarrow \varphi \\ \{0, \dots, n\} & & A(G') \\ & \searrow \alpha' & \end{array}$$

On note  $\overline{T}_{g,n}$  l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de  $T_{g,n}$ .

La famille d'associations

$$\{0, \dots, n\} \longmapsto \overline{T}_{g,n}$$

s'étend en un  $\Delta$ -complexe symétrique, c'est-à-dire, rappelons-le, un foncteur contra-variant  $\overline{T}$  de la catégorie  $I_{\text{sym}}$  des ensembles de la forme  $\{0, \dots, n\}$ , avec morphismes injectifs, vers la catégorie des ensembles. Pour toute injection  $\iota: \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ , l'application  $\overline{T}(\iota): \overline{T}_{g,n} \rightarrow \overline{T}_{g,m}$  associée est celle qui envoie  $(G, w, \alpha)$  sur  $(G', w', \alpha')$ , où le graphe pondéré  $(G', w')$  est obtenu en contractant les arêtes du graphe  $G$  qui n'appartiennent pas à l'image de  $\alpha \circ \iota$  et  $\alpha'$  est l'isomorphisme induit par  $\alpha \circ \iota$  sur son image :

$$\begin{array}{ccc} \{0, \dots, m\} & \xrightarrow{\alpha'} & A(G') \\ \downarrow \iota & & \downarrow \\ \{0, \dots, n\} & \xrightarrow{\alpha} & A(G) \end{array} .$$

L'espace  $\Delta_g$  est alors la réalisation topologique du  $\Delta$ -complexe symétrique ainsi défini.

Revenons maintenant à l'espace de modules qui nous intéresse au premier chef, celui des courbes algébriques. Il existe un lien étroit entre l'espace de module  $\Delta_g$  et le bord  $\partial\mathcal{M}_g := \overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g$  de la compactification de Deligne–Mumford  $\overline{\mathcal{M}}_g$  de  $\mathcal{M}_g$ . Il apparaît dans la description de la stratification du bord mentionnée à la fin de la section 1.4. En effet, chacune des strates correspond à la donnée d'un type de courbes stables, le genre des composantes étant fixé, ainsi que le nombre de points d'intersections. Par le procédé présenté au début de la section, cela correspond exactement à la donnée d'un graphe dual pondéré, la métrique étant omise. En d'autres termes, l'ensemble des strates du bord de  $\mathcal{M}_g$  s'identifie à l'ensemble des graphes pondérés de genre  $g$ .

Il est possible de pousser plus loin ce raisonnement. Considérons une strate de  $\partial\mathcal{M}_g$  de codimension  $k \geq 1$  dans  $\overline{\mathcal{M}}_g$ . La description des familles de Kuranishi de déformations de courbes présentée à la section 1.4 montre qu'elle correspond à une courbe stable  $C$

qui possède exactement  $k$  singularités. En outre, cette strate se situe à l'intersection de  $k$  strates de codimension 1 et contribue donc au complexe dual  $|\Delta_{\text{sym}}(\partial\mathcal{M}_g)|$  par un simplexe de dimension  $k - 1$ . Du côté tropical, le graphe dual de la courbe  $C$  possède  $k$  arêtes et il contribue donc également par un simplexe de dimension  $k - 1$  à l'espace de modules  $\Delta_g$ .

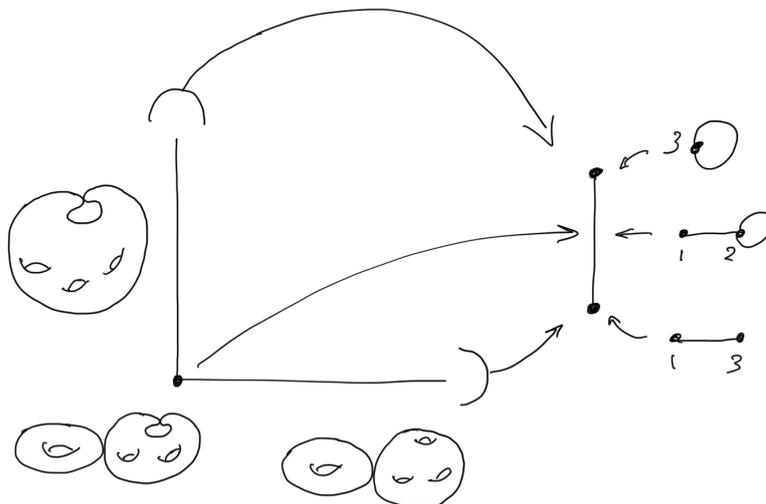


FIGURE 8. Complexe dual et complexe tropical

Le raisonnement se poursuit encore car les dégénérescences de courbes correspondent à des contractions d'arêtes dans des graphes duaux. Il reste à vérifier que la combinatoire associée dans complexe dual  $|\Delta_{\text{sym}}(\partial\mathcal{M}_g)|$  correspond bien à celle de l'espace  $\Delta_g$ , cf. figure 8 pour la situation de l'exemple 1.6. Le lien attendu s'en déduit.

THÉORÈME 2.4. — *On a un homéomorphisme canonique*

$$\Delta_g \simeq |\Delta_{\text{sym}}(\partial\mathcal{M}_g)|.$$

### 3. Un point de vue alternatif sur le bord

Soit  $X$  une variété analytique complexe et  $\bar{X}$  une compactification de  $X$ . À la section 1.3, nous avons expliqué le rôle important joué par le bord  $D := \bar{X} \setminus X$  dans le calcul de la structure de Hodge sur la cohomologie singulière de  $X(\mathbf{C})$ . Rappelons, en particulier, que, sous des hypothèses favorables, la partie de poids 0 est se lit tout entière sur la cohomologie du complexe dual.

Nous exposons ici un point de vue alternatif sur le bord, développé par Thuillier (2007), qui présente l'avantage d'être intrinsèque, au sens où il est directement associé à  $X$ , et non au choix d'une compactification particulière. En outre, il peut se révéler intéressant, même dans un cas, comme celui de l'espace de modules  $M_g$ , où l'on dispose d'une compactification possédant les propriétés désirées. Bien entendu, un tel bord ne peut

exister dans la catégorie des variétés, et il est nécessaire d'autoriser pour la construction une autre catégorie d'espaces.

L'idée générale peut s'exposer simplement. Partant d'une variété  $X$  et d'une compactification  $\overline{X}$ , on considère le schéma formel  $\mathfrak{X}$  obtenu en complétant  $\overline{X}$  le long du bord  $D$  de  $X$  dans  $\overline{X}$ . On peut y penser comme à une sorte de voisinage infinitésimal de  $D$  dans  $\overline{X}$ . On aimerait lui enlever le bord (qui n'est pas intrinsèque), pour ne conserver qu'une sorte de voisinage époinché. Cette opération peut être réalisée en prenant la fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$ , dans un sens convenable, du schéma formel en question. L'espace qui en résulte est un espace analytique ultramétrique, pris ici dans le sens de Berkovich (1990).

La notion d'espace de Berkovich n'étant pas centrale dans ce texte, nous nous contenterons de donner les définitions et propriétés dont nous aurons l'utilité directe. Pour une présentation plus précise et le détail de quelques applications, nous renvoyons à l'exposé de ce séminaire rédigé par Ducros (2007).

### 3.1. Espaces de Berkovich

Soit  $(K, |\cdot|)$  un corps valué ultramétrique complet. Rappelons que le caractère ultramétrique de la valeur absolue signifie qu'elle satisfait une version renforcée de l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in K, |x + y| \leq \max(|x|, |y|).$$

Les exemples les plus classiques sont le corps des nombres  $p$ -adiques  $\mathbf{Q}_p$  muni de la valeur absolue  $p$ -adique, pour un nombre premier  $p$ , ou le corps des séries de Laurent  $\mathbf{C}((t))$ , muni d'une valeur absolue  $t$ -adique. Dans la suite, il sera également intéressant de considérer le cas du corps  $\mathbf{C}$  muni de la valeur absolue triviale  $|\cdot|_0$  (qui envoie tout élément non nul sur 1).

La théorie des espaces analytiques ultramétriques est construite à partir d'algèbres de séries convergentes appelées *algèbres de Tate*. Pour  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}_{>0}$ , on note  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  l'ensemble des séries à coefficients dans  $K$  de la forme

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$$

vérifiant la condition

$$|a_{i_1, \dots, i_n}| r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n} \xrightarrow{(i_1, \dots, i_n) \rightarrow \infty} 0.$$

Les opérations usuelles sur les séries munissent l'ensemble  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  d'une structure de  $K$ -algèbre, le caractère ultramétrique assurant la stabilité par produit. On peut penser à l'algèbre  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  comme à l'algèbre des séries convergentes sur le disque fermé  $\overline{D}(0, (r_1, \dots, r_n))$  de centre 0 et de polyrayon  $(r_1, \dots, r_n)$ , une notion qui fait sens dans le cadre ultramétrique.

L'algèbre de Tate  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  peut être munie d'une norme définie par

$$\left\| \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \right\| = \max_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} (|a_{i_1, \dots, i_n}| r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}).$$

C'est alors une  $K$ -algèbre de Banach.

On vérifie que les algèbres de Tate sont noethériennes et que leurs idéaux sont fermés. Leurs quotients sont appelés *algèbres  $K$ -affinoïdes* et, munis des normes induites, ce sont des  $K$ -algèbres de Banach. Les algèbres  $K$ -affinoïdes, qui sont les objets algébriques de base de la théorie, sont donc des algèbres de séries convergentes sur des parties fermées de disques fermés définies par un nombre fini d'équations.

À toute algèbre  $K$ -affinoïde  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ , Berkovich associe son *spectre*  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ , abrégé abusivement en  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , défini comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur  $\mathcal{A}$  bornées par  $\|\cdot\|$ , autrement dit des applications de la forme

$$|\cdot|_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $|0|_x = 0, |1|_x = 1$  ;
- ii)  $\forall a, b \in \mathcal{A}, |a + b|_x \leq \max(|a|_x, |b|_x)$  ;
- iii)  $\forall a, b \in \mathcal{A}, |ab|_x = |a|_x |b|_x$  ;
- iv)  $\forall a \in \mathcal{A}, |a|_x \leq \|a\|$ .

Le spectre  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est munie de la topologie faible, la plus grossière qui rende continues les applications de la forme

$$|\cdot|_x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \longmapsto |a|_x \in \mathbf{R},$$

pour  $a \in \mathcal{A}$ . C'est un espace compact (séparé).

Berkovich développe encore la théorie en munissant  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  d'un faisceau de fonctions (dont les sections globales sont  $\mathcal{A}$ ), par le biais du théorème d'acyclicité de Tate. Nous ne nous attarderons pas sur ce point.

Les espaces de Berkovich généraux sont finalement construits en recollant des spectres d'algèbres affinoïdes.

*Exemple 3.1.* — Afin de mieux appréhender les espaces de Berkovich, il est utile d'avoir en tête quelques exemples de points dans des spectres. Nous considérerons ici une algèbre de Tate  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$ , avec  $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}_{>0}$ .

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  tel que  $|\alpha_i| \leq r_i$  pour tout  $i$ . On peut alors évaluer tout élément de  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  au point  $\alpha$  et l'application

$$f \in K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\} \longmapsto |f(\alpha)| \in \mathbf{R}$$

est une semi-norme multiplicative bornée. Le point « classique »  $\alpha$  donne donc lieu à un point du spectre de Berkovich  $\mathcal{M}(K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\})$ .

Ce spectre contient encore beaucoup d'autres points. Pour  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$  tel que  $s_i \leq r_i$  pour tout  $i$ , l'application

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \longmapsto \max_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} (|a_{i_1, \dots, i_n}| s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n})$$

est une semi-norme multiplicative bornée. Nous noterons  $\eta_s$  le point correspondant. Il correspond à une sorte de point générique du polydisque fermé de centre  $(0, \dots, 0)$  et de polyrayon  $(s_1, \dots, s_n)$ .

La construction précédente peut se généraliser en autorisant d'autres centres. Précisément, pour  $\alpha$  et  $s$  comme ci-dessus, l'application

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} (T_1 - \alpha_1)^{i_1} \cdots (T_n - \alpha_n)^{i_n} \longmapsto \max_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} (|a_{i_1, \dots, i_n}| s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n})$$

est une semi-norme multiplicative bornée. Nous noterons  $\eta_{\alpha, s}$  le point correspondant. Pour  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$  tel que  $|\alpha_i - \beta_i| \leq s_i$ , les propriétés ultramétriques de la valeur absolue assurent que le polydisque de centre  $\alpha$  et de polyrayon  $s$  coïncide avec celui de centre  $\beta$  et de polyrayon  $s$ , et ce pour des points à valeurs dans toute extension valuée de  $K$ . En concordance avec l'interprétation en termes de points génériques de disques, on vérifie que  $\eta_{\alpha, s} = \eta_{\beta, s}$ .

*Remarque 3.2.* — Les points  $\eta_{\alpha, s}$  de l'exemple 3.1 permettent de donner un premier aperçu de la structure des espaces de Berkovich. Même s'ils sont loin de suffire à les décrire complètement, ils en soulignent une propriété importante : les espaces de Berkovich contiennent des polytopes réels (le produit de segments  $[0, r_1] \times \cdots \times [0, r_n]$  pour le spectre de l'algèbre de Tate  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$ ).

*Remarque 3.3.* — En dimension 1, la collection des points  $\eta_{\alpha, s}$  décrit presque tout le disque  $\mathcal{M}(K\{T\})$ . En la dessinant, on fait apparaître des demi-droites (obtenues en faisant varier  $s$  à  $\alpha$  fixé) qui fusionnent (à cause des conditions  $\eta_{\alpha, s} = \eta_{\beta, s}$  pour  $s \geq |\alpha - \beta|$ ). On démontre ainsi que le disque de Berkovich de dimension 1 présente une structure d'arbre réel, cf. figure 9.

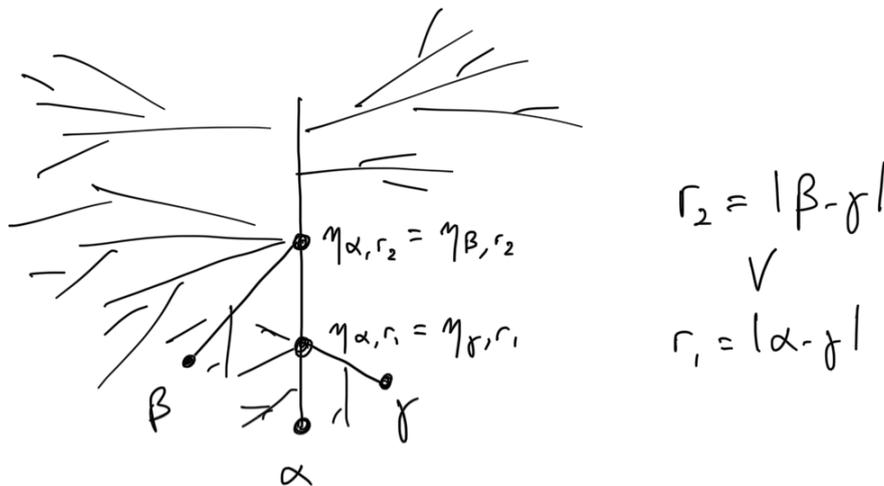


FIGURE 9. Un disque de Berkovich

Mentionnons encore quelques propriétés importantes de la théorie des espaces de Berkovich.

## — Analytification

Comme dans le cadre analytique complexe, il existe un foncteur d'analytification  $X \mapsto X^{\text{an}}$  depuis la catégorie des variétés algébriques sur  $K$ . Nous avons expliqué plus haut comment définir des disques. En prenant des réunions, on obtient des espaces affines analytiques, notés  $\mathbf{A}_K^{n,\text{an}}$ , à partir desquels on peut construire les analytifiées désirées, en considérant des sous-espaces (ouverts et fermés) et des recollements.

## — Corps résiduel

Comme dans la théorie des schémas, tout point d'un espace de Berkovich possède un corps résiduel. C'est ici un corps valué complet.

La construction s'effectue ainsi. On peut se ramener au cas d'un point  $x$  du spectre  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  d'une algèbre  $K$ -affinoïde  $\mathcal{A}$ . Le noyau de la semi-norme multiplicative  $|\cdot|_x$  associée à  $x$ ,

$$\mathfrak{p}_x := \{a \in \mathcal{A} : |a|_x = 0\},$$

est un idéal premier de  $\mathcal{A}$ . La semi-norme  $|\cdot|_x$  induit une valeur absolue sur l'anneau intègre  $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$ . Le *corps résiduel* de  $x$  est le complété  $\mathcal{H}(x)$  de son corps des fractions. Il est muni d'une valeur absolue par construction.

La construction fournit également une application naturelle

$$\text{ev}_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}(x).$$

Pour  $a \in \mathcal{A}$ , on pose  $a(x) := \text{ev}_x(a) \in \mathcal{H}(x)$ . Avec ces notations, on a  $|a|_x = |a(x)|$ , la valeur absolue du membre de droite étant celle sur  $\mathcal{H}(x)$ .

## — Produit fibré

La catégorie des espaces de Berkovich sur  $K$  possède des produits fibrés. Leurs propriétés sont similaires à celles des schémas. Par exemple, étant donné un espace de Berkovich  $X$  et un point  $x$  de  $X$ , la fibre de la projection  $X \times_K \mathbf{A}_K^{n,\text{an}} \rightarrow X$  au-dessus de  $x$  s'identifie à l'espace  $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x)}^{n,\text{an}}$  sur le corps résiduel  $\mathcal{H}(x)$ .

### 3.2. Le cas des courbes

Bien que cela ne soit pas nécessaire pour les calculs de cohomologie de  $M_g$  qui nous intéressent, nous consacrons cette section aux courbes de Berkovich. Celles-ci possèdent une description assez explicite, basée sur le théorème de réduction stable, qui fait apparaître un lien étroit avec les courbes tropicales.

Reprenons le cadre de la section 2.3. Soit  $R$  un anneau de valuation discrète, de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $k$  algébriquement clos. <sup>(1)</sup> Soit  $C$  une courbe projective lisse connexe de genre  $g \geq 2$  sur  $K$ . Comme expliqué au début de la section 2.3, quitte à remplacer  $K$  par une extension finie, la courbe  $C$  possède un modèle stable  $\mathcal{C}$  sur  $R$ .

1. Ces restrictions ne sont pas nécessaires et les résultats de cette section valent, en réalité, pour un anneau de valuation de rang 1 quelconque, modulo quelques modifications mineures : remplacement des disques par des disques virtuels, etc.

La courbe algébrique  $C$  peut être analytifiée en une courbe de Berkovich  $C^{\text{an}}$  et il existe une application  $\pi$ , dite de *spécialisation* ou de *réduction*, reliant cette dernière à la courbe résiduelle  $\mathcal{C}_s$  sur  $k$ .

Expliquons comment la construire dans le cas du spectre d’une algèbre  $K$ -affinoïde  $\mathcal{A}$ , obtenue en tensorisant par  $K$  une  $R$ -algèbre plate  $\mathcal{A}^\circ$  (ici, le complété de l’algèbre d’un ouvert affine de  $\mathcal{C}$ ). Soit  $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . L’application naturelle  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$  donne lieu à un morphisme

$$\mathcal{A}^\circ \otimes_R k \rightarrow \mathcal{H}(x)^\circ \otimes_R k \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)},$$

où  $\mathcal{H}(x)^\circ$  désigne l’anneau de valuation de  $\mathcal{H}(x)$  et  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  son corps résiduel. Il lui correspond un point de  $\text{Spec}(\mathcal{A}^\circ)$ , que nous noterons  $\pi(x)$ .

La courbe de Berkovich  $C^{\text{an}}$  est recouverte par un nombre fini de spectres d’algèbres affinoïdes du type précédent. En les choisissant convenablement, les applications associées se recollent en l’application  $\pi: C^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{C}_s$  recherchée.

Soit  $x$  un point de la courbe stable  $\mathcal{C}_s$ . Il peut être de 3 types : générique, rationnel lisse ou rationnel nodal. D’après Bosch et Lütkebohmert (1985), on connaît la structure de la préimage par  $\pi$  dans les trois cas.

1. Si  $x$  est générique, alors  $\pi^{-1}(x)$  est un singleton  $\{s_x\}$ . En outre, le corps  $\mathcal{H}(s_x)$  est un corps valué dont le corps résiduel s’identifie au corps des fonctions de la courbe  $C_x$  dont  $x$  est le point générique.
2. Si  $x$  est lisse, alors  $\pi^{-1}(x)$  est un disque ouvert.
3. Si  $x$  est nodal, alors  $\pi^{-1}(x)$  est une couronne ouverte.

Ajoutons quelques mots au sujet de la topologie des courbes, en commençant par le cas des disques et des couronnes.

— Topologie des disques

Considérons le disque fermé  $\mathcal{M}(K\{r^{-1}T\})$ . Il possède un point distingué, à savoir  $\eta_r$ , qui est maximal au sens des semi-normes associées. Ce point est également l’unique point du bord du disque ouvert

$$\mathring{\mathbf{D}}_r := \{x \in \mathcal{M}(K\{r^{-1}T\}) : |T|_x < r\}.$$

On vérifie également que l’adhérence du disque  $\mathring{\mathbf{D}}_r \cup \{\eta_r\}$  se rétracte par déformation sur  $\eta_r$ . (Sur les points du type  $\eta_{\alpha,s}$ , la rétraction est donnée par  $t \in [0, 1] \mapsto \eta_{\alpha, \max(s, tr) \cdot}$ .)

De façon générale, un disque ouvert possède un unique point dans son bord, et son adhérence se rétracte par déformation sur ce dernier.

— Topologie des couronnes

Dans le disque précédent, considérons la couronne

$$C(r', r) := \{x \in \mathcal{M}(K\{r^{-1}T\}) : r' < |T|_x < r\}$$

pour un certain  $r' \in ]0, r[$ . Elle possède une partie distinguée, appelée *squelette*, définie par

$$\Gamma(C(r', r)) = \{\eta_s : r' < s < r\}$$

et homéomorphe à l'intervalle  $]r', r[$ . La couronne se rétracte par déformation sur son squelette. (Sur les points du type  $\eta_{\alpha, u}$  avec  $|\alpha| \geq u$ , la rétraction est donnée par  $t \in [0, 1] \mapsto \eta_{\alpha, \max(u, t|\alpha)} \cdot$ )

— Topologie des courbes

Reprenons la courbe  $C^{\text{an}}$  considérée plus haut. On définit son *squelette* en prenant la réunion des points associés aux points génériques de  $\mathcal{C}_s$  et des squelettes des couronnes associées aux points nodaux :

$$\Gamma(C^{\text{an}}) := \bigcup_{x \text{ générique}} \{s_x\} \cup \bigcup_{x \text{ nodal}} \Gamma(\pi^{-1}(x)).$$

En combinant les différentes rétractions ci-dessus, on montre que  $C^{\text{an}}$  se rétracte par déformation sur  $\Gamma(C^{\text{an}})$ . Nous renvoyons à la figure 10 pour une représentation graphique de la courbe et de son squelette.

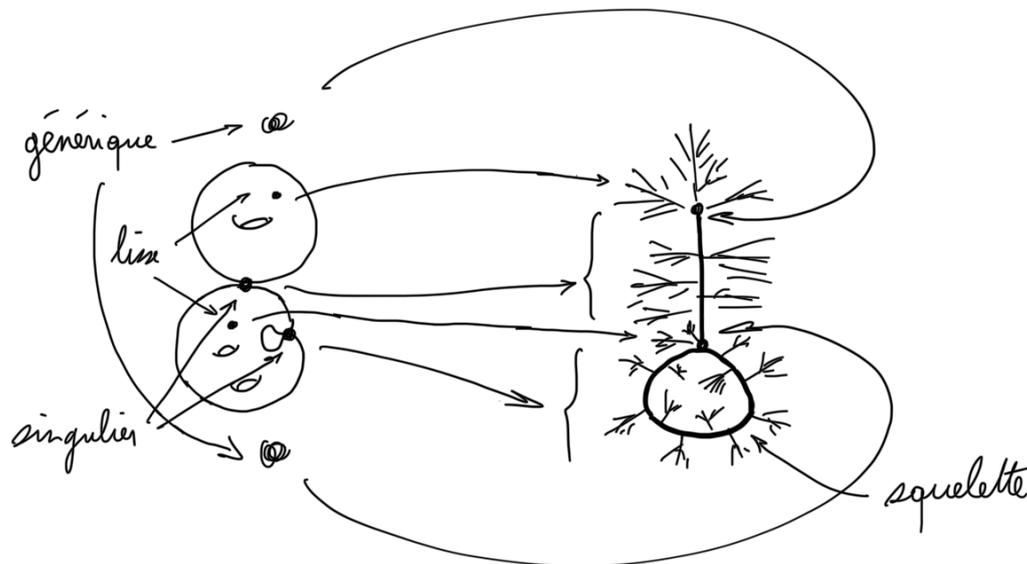


FIGURE 10. Courbe résiduelle, courbe de Berkovich et squelette

Le squelette  $\Gamma(C^{\text{an}})$  est un graphe topologique, qui n'est autre que la réalisation géométrique du graphe dual  $\Gamma(\mathcal{C}_s)$ . En termes concrets, cela signifie que, étant donné un point nodal  $x$  de  $\mathcal{C}_s$ , les bords du squelette  $\Gamma(\pi^{-1}(x))$  sont les antécédents des points génériques des composantes de  $\mathcal{C}_s$  qui se rencontrent en  $x$ . (En particulier, si  $x$  appartient à une seule composante, alors le squelette se referme en une boucle.)

Le squelette  $\Gamma(C^{\text{an}})$  possède plus de structure : on peut munir ses arêtes d'une métrique (héritée de celle sur le squelette des couronnes) et ses sommets d'un poids (défini comme le genre du corps résiduel de  $\mathcal{H}(s)$ ). On retrouve ainsi exactement la courbe tropicale de la section 2.3.

*Remarque 3.4.* — On peut prendre à rebours les arguments précédents et penser aux courbes de Berkovich comme à des courbes tropicales enrichies d’une structure analytique.

### 3.3. Le cas de la valuation triviale

La théorie des espaces analytiques ultramétriques permet, sous certaines conditions, de donner un sens à la notion de fibre générique d’un schéma formel. C’est d’ailleurs l’une des raisons qui a motivé le développement de cette théorie. Dans le cadre des schémas formels  $p$ -adiques, ou plus généralement sur un anneau de valuation non trivial (qui n’est pas un corps), une construction de fibre générique a été proposée par Raynaud (1974), puis généralisée par Berthelot (1996), et adaptée par Berkovich (1994). Dans le cas d’un corps trivialement valué, il y a lieu de modifier légèrement la construction, comme remarqué par Thuillier (2007). Concentrons-nous sur ce dernier cas.

Par la suite, nous travaillerons sur le corps  $\mathbf{C}$  muni de la valeur absolue triviale  $|\cdot|_0$ . Nous le noterons  $\mathbf{C}_0$  dans la suite de ce texte. C’est un corps valué ultramétrique complet, et la notion d’espace de Berkovich sur  $\mathbf{C}_0$  fait donc sens. Remarquons également que, puisque la valeur absolue est triviale, l’anneau de valuation de  $\mathbf{C}_0$  n’est autre que  $\mathbf{C}_0$ .

Nous considérerons des schémas formels issus de la complétion d’une variété complexe le long d’une sous-variété. Dans le cas affine, on complète un schéma  $X = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est une  $\mathbf{C}$ -algèbre de type fini, le long d’un fermé de Zariski  $Y = V(I)$ , où  $I$  est un idéal de  $A$ . Le schéma formel qui en résulte est  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(\hat{A}_I)$ , où  $\hat{A}_I$  est le complété  $I$ -adique de  $A$ .

Notons  $A_0$  l’algèbre  $A$  munie de la norme triviale. C’est une  $\mathbf{C}_0$ -algèbre affinoïde dont on peut considérer le spectre. Thuillier définit alors deux espaces :

$$\mathfrak{X}^{\square} := \{x \in \mathcal{M}(A_0) : \forall f \in I, |f(x)| < 1\}$$

et

$$\mathfrak{X}_{\eta} = \{x \in \mathcal{M}(A_0) : \exists f \in I, 0 < |f(x)| < 1\}.$$

La construction s’étend à des variétés non nécessairement affines par recollement.

**PROPOSITION 3.5.** — *Soit  $f: X' \rightarrow X$  un morphisme propre de variétés complexes. Soit  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$  tel que le morphisme  $f$  induise un isomorphisme  $X' \setminus f^{-1}(Y) \rightarrow X \setminus Y$ . Alors le morphisme d’espaces  $\mathbf{C}_0$ -analytiques  $f_{\eta}: \mathfrak{X}'_{\eta} \rightarrow \mathfrak{X}_{\eta}$  est un isomorphisme.*

Ce résultat, conséquence du critère valuatif de propreté, permet de définir une notion intrinsèque de bord d’une variété algébrique complexe. Précisément, soit  $Z$  une telle variété. Soit  $\bar{Z}$  une compactification de celle-ci et notons  $\mathfrak{Z}$  le complété de  $\bar{Z}$  le long du bord de  $Z$ . D’après la proposition 3.5, la fibre générique  $\mathfrak{Z}_{\eta}$  est un espace  $\mathbf{C}_0$ -analytique qui, à isomorphisme près, ne dépend pas du choix de la compactification  $\bar{Z}$ .

*Remarque 3.6.* — Il est intéressant de noter que le caractère explicite de la construction peut permettre de donner une interprétation du bord. Dans le cas qui nous intéresse, celui de l'espace de modules  $M_g$ , le bord au sens de Thuillier se réalise dans l'analytification sur  $\mathbf{C}_0$  de  $M_g$ . Il s'agit donc d'une partie (que l'on pourrait décrire explicitement) de l'espace de modules des courbes de Berkovich sur  $\mathbf{C}_0$ , ce dernier étant relié à l'espace de modules des courbes tropicales, comme expliqué à la section 3.2.

Thuillier (2007) pousse plus loin l'étude du bord, jusqu'à obtenir un lien avec le complexe dual. Pour ce faire, un détour par les variétés toriques est nécessaire.

Soit  $X$  une variété torique sur  $\mathbf{C}$ . Il existe un tore  $T$  sur  $\mathbf{C}$  qui agit sur  $X$ . Notons  $M$  son groupe de caractères. À tout caractère  $m \in M$  est associée une fonction inversible sur  $T$ . Nous la noterons  $\chi_m \in \mathcal{O}(T) = \mathbf{C}[M]$ .

Considérons à présent la version analytique de cette situation. On peut considérer les schémas précédents comme des schémas formels complétés le long du fermé vide, et donc leur appliquer la construction  $\beth$  définie plus haut. De façon concrète, dans le cas affine, si  $X = \text{Spec}(A)$ , alors  $X^\beth = \mathcal{M}(A_0)$ . Comme on s'y attend, l'action de  $T$  sur  $X$  induit une action de  $T^\beth$  sur  $X^\beth$ , décrite par un morphisme

$$\mu^\beth: T^\beth \times X^\beth \longrightarrow X^\beth.$$

L'action du tore permet d'identifier des polytopes réels dans  $X^\beth$ , en utilisant des points du type  $\eta_{\alpha,s}$  comme dans l'exemple 3.1. Commençons par l'expliquer de façon concrète dans le cas d'un ouvert affine invariant  $V$  de  $X$ . Son algèbre  $\mathcal{O}(V)$  s'identifie à une algèbre de la forme  $\mathbf{C}[S]$ , où  $S$  est un sous-monoïde de type fini de  $M$ . Pour tout point  $x$  de  $V^\beth$ , l'application

$$\sum_{m \in S} a_m \chi_m \in \mathbf{C}[S] \longmapsto \max_{m \in S} (|a_m| |\chi_m(x)|) \in \mathbf{R}$$

est une semi-norme multiplicative. Notons  $p(x)$  le point de  $V^\beth$  associé. Remarquons qu'il est complètement décrit par la fonction

$$m \in M \longmapsto |\chi_m(x)| \in [0, 1]$$

et que cette dernière est un morphisme de monoïdes, par multiplicativité de  $|\cdot(x)|$ . Par conséquent, l'image, notée  $\mathfrak{S}(V)$ , de l'application  $p$  définie précédemment s'identifie à l'ensemble des morphismes de monoïdes  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(S, [0, 1])$ , et possède donc une structure réelle (en coordonnées logarithmiques). Si l'on se restreint à l'orbite ouverte (lieu de non annulation de tous les  $\chi_m$ ), l'image  $\mathfrak{S}_0(V)$  s'identifie à  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(S, ]0, 1])$ , et donc à un cône (multiplicatif).

On vérifie aisément que les constructions sur les différents ouverts affines invariants se recollent et permettent de définir des espaces  $\mathfrak{S}(X)$  et  $\mathfrak{S}_0(X)$ . Plus précisément, si  $V$  est un ouvert affine invariant et  $V'$  un ouvert affine invariant contenu dans  $V$ , alors  $\mathfrak{S}_0(V')$  s'identifie à une face du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ . Le résultat suivant s'en déduit.

**THÉORÈME 3.7.** — *Le sous-espace  $\mathfrak{S}_0(X)$  de  $X^\beth$  est une réalisation de l'éventail de la variété torique  $X$ .*

*Exemple 3.8.* — Explicitons la construction dans le cas de  $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$  vue comme variété torique associée à l'éventail du réseau  $\mathbf{Z}^2$  de  $\mathbf{R}^2$  représenté à la figure 11. Posons  $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

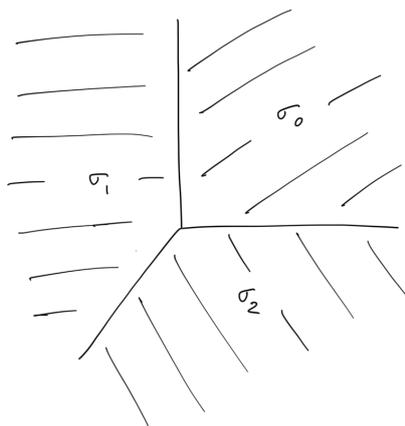


FIGURE 11. Éventail de la variété torique  $\mathbf{P}^2$

Considérons le cône  $\sigma_0$ . Il est engendré par les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$ , donc  $S_0 = \sigma_0^\vee \cap M$  est engendré par  $e_1^*$  et  $e_2^*$ . L'ouvert affine associé est  $V_0 = \text{Spec}(\mathbf{C}[Z_1, Z_2])$ . La restriction de l'espace  $V_0^{\rhd}$  à l'orbite ouverte est donné par les équations

$$\begin{cases} 0 < |Z_1| \leq 1 ; \\ 0 < |Z_2| \leq 1. \end{cases}$$

L'image  $\mathfrak{S}(V_0)$  est l'ensemble des points de la forme  $\eta_{r,s}$  satisfaisant ces équations, autrement dit,  $0 < r \leq 1$  et  $0 < s \leq 1$ .

Considérons le cône  $\sigma_1$ . Il est engendré par les vecteurs  $e_2$  et  $-e_1 + e_2$ , donc  $S_1 = \sigma_1^\vee \cap M$  est engendré par  $-e_1^*$  et  $-e_1^* + e_2^*$ . L'ouvert affine associé est  $V_1 = \text{Spec}(\mathbf{C}[Z_1^{-1}, Z_1^{-1}Z_2])$ . La restriction de l'espace  $V_1^{\rhd}$  à l'orbite ouverte est donné par les équations  $0 < |Z_1^{-1}| \leq 1$  et  $0 < |Z_1^{-1}Z_2| \leq 1$ , qui se réécrivent sous la forme

$$\begin{cases} |Z_1| \geq 1 ; \\ 0 < |Z_2| \leq |Z_1|. \end{cases}$$

Comme précédemment, l'image  $\mathfrak{S}(V_1)$  se décrit dans les mêmes termes.

Finalement, pour l'ouvert  $V_2$  associé à  $\sigma_2$ , on montre que la restriction de l'espace  $V_2^{\rhd}$  à l'orbite ouverte est donnée par les équations

$$\begin{cases} |Z_2| \geq 1 ; \\ 0 < |Z_1| \leq |Z_2|, \end{cases}$$

et de même pour  $\mathfrak{S}(V_2)$ .

On retrouve bien ainsi les équations qui définissent l'éventail initial.

On peut également effectuer le recollement sur les cônes  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S, ]0, 1])$  abstraits. Expliquons comment procéder pour  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_0, ]0, 1])$  et  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_1, ]0, 1])$ .

Identifions  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_0, ]0, 1])$  à  $]0, 1]^2$ , la première coordonnée  $z_1^0$  correspondant à l'image de  $e_1^*$  et la seconde  $z_2^0$  à l'image de  $e_2^*$ . Identifions également  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_1, ]0, 1])$  à  $]0, 1]^2$ , la première coordonnée  $z_1^1$  correspondant à l'image de  $-e_1^*$  et la seconde  $z_2^1$  à l'image de  $-e_1^* - e_2^*$ .

La face  $\sigma_0 \cap \sigma_1$  commune à  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  est engendrée par le vecteur  $e_2$ , donc  $S_{01} = (\sigma_0 \cap \sigma_1)^\vee \cap M$  est engendré par  $\pm e_1^*$  et  $e_2^*$ . Dans  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_{01}, ]0, 1])$ , l'image de  $e_1^*$  est nécessairement égale à 1, et ce cône s'identifie à  $]0, 1]$ .

Par l'inclusion  $S_0 \subset S_{01}$ ,  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_{01}, ]0, 1])$  s'identifie à la face de  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_0, ]0, 1])$  définie par  $z_1^0 = 1$  et, par l'inclusion  $S_1 \subset S_{01}$ ,  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_{01}, ]0, 1])$  s'identifie à la face de  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S_1, ]0, 1])$  définie par  $z_1^1 = 1$ .

Revenons au cas général. Le résultat du théorème 3.7 peut être précisé pour montrer que l'espace de Berkovich  $X^\triangleright$  se rétracte par déformation sur  $\mathfrak{S}(X)$ .

Commençons par proposer une interprétation plus conceptuelle de l'application  $p$ . Pour se faire, identifions le tore  $T$  au tore trivialisé  $\mathbf{G}_m^d$ , avec coordonnées  $\underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ . Remarquons tout d'abord que l'espace  $T^\triangleright$  est caractérisé par le fait que

$$\forall z \in T^\triangleright, \forall i \in \{1, \dots, d\}, |Z_i(z)| = 1.$$

En effet, puisque l'on munit l'algèbre  $\mathbf{C}[M]$  de la norme triviale, on a à la fois  $|Z_i| \leq 1$  et  $|Z_i^{-1}| = |Z_i|^{-1} \leq 1$ .

Pour  $t \in [0, 1]$ , posons  $\underline{t} := (t, \dots, t) \in \mathbf{R}^d$ . Considérons le point  $\eta_{\underline{0}, \underline{1}}$ , avec les notations de l'exemple 3.1. Il est associé à la semi-norme multiplicative

$$\sum_{i \in \mathbf{N}^d} a_i \underline{Z}^i \longmapsto \max_{i \in \mathbf{N}^d} (|a_i|) \in \mathbf{R},$$

où l'on a noté  $\underline{Z}^i = Z_1^{i_1} \cdots Z_d^{i_d}$ , et appartient donc à  $T^\triangleright$ . Remarquons que nous avons défini ce point sur  $\mathbf{C}_0$ , mais qu'il pourrait également l'être sur tout corps valué complet.

Soit  $x \in X^\triangleright$ . Dans le produit fibré  $T^\triangleright \times X^\triangleright$ , la fibre au-dessus du point  $x$  s'identifie à l'extension des scalaires de  $T^\triangleright$  à  $\mathcal{H}(x)$ . Notons  $\eta_{\underline{0}, \underline{1}, x}$  le point  $\eta_{\underline{0}, \underline{1}}$  de cette fibre. On vérifie alors que

$$\mu^\triangleright(\eta_{\underline{0}, \underline{1}, x}) = p(x),$$

où  $\mu^\triangleright: T^\triangleright \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$  est induite par l'action du tore  $T$  sur  $X$ .

On peut définir une famille d'applications de ce type en remplaçant le point  $\eta_{\underline{0}, \underline{1}}$  par d'autres points de  $T^\triangleright$ . Toujours avec les notations de l'exemple 3.1, considérons le point  $\eta_{\underline{1}, \underline{t}}$ . Il appartient encore à  $T^\triangleright$ . Posons

$$p_t(x) := \mu^\triangleright(\eta_{\underline{1}, \underline{t}, x}),$$

en adaptant les notations du paragraphe précédent.

Explicitons les deux cas extrêmes. Pour  $t = 0$ , on a  $\eta_{\underline{1}, \underline{0}} = (1, \dots, 1)$  (le point classique de  $\mathbf{C}^n$ ), donc  $p_0(x) = x$ . Pour  $t = 1$ , on a  $\eta_{\underline{1}, \underline{1}} = \eta_{\underline{0}, \underline{1}}$ , donc  $p_1(x) = p(x)$ .

En outre, l'application

$$H: (t, x) \in [0, 1] \times X^{\triangleright} \mapsto p_t(x) \in X^{\triangleright}$$

est continue. Elle réalise donc une homotopie entre l'application  $p$  et l'identité.

**THÉORÈME 3.9.** — *L'application  $p: X^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright}$  induit une rétraction par déformation de  $X^{\triangleright}$  sur  $\mathfrak{S}(X)$ .*

Les points  $\eta_{\underline{1}, t}$  croissent en fonction de  $t$  (au sens des semi-normes associées), donc il en va de même pour les points  $p_t(x)$ , quel que soit  $x \in X^{\triangleright}$ . On en déduit que l'homotopie  $H$  préserve certains sous-espaces : par exemple, ceux définis par la non-annulation des  $Z_i^{\pm 1}$ , ou encore celui où ils sont tous de valeur absolue 1. Posons

$$\rho^{-1}(X_0) := \{x \in X^{\triangleright} : Z_i^{\pm 1}(x) \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, d\},$$

et

$$r^{-1}(X_0) := \{x \in X^{\triangleright} : |Z_i(x)| = 1 \text{ pour } i = 1, \dots, d\}.$$

Notons  $o$  l'unique point maximal de  $X^{\triangleright}$ . Pour tout ouvert affine invariant  $V$ , ce point appartient à  $V^{\triangleright}$ . Il y est associé à la valeur absolue triviale sur  $\mathcal{O}(V)$ , ou encore au sommet du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ .

**COROLLAIRE 3.10.** — *L'application  $p: X^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright}$  induit une rétraction par déformation de  $\rho^{-1}(X_0)$  sur  $\mathfrak{S}_0(X)$  et de  $\rho^{-1}(X_0) \setminus r^{-1}(X_0)$  sur  $\mathfrak{S}_0(X) \setminus \{o\}$ .*

Il est intéressant de noter que l'espace  $\rho^{-1}(X_0) \setminus r^{-1}(X_0)$  peut s'interpréter comme la fibre générique au sens de Thuillier d'un certain schéma formel. Précisément, si l'on note  $Y$  le complémentaire de l'orbite ouverte  $X_0$  de  $X$  et  $\mathfrak{X}$  le complété de  $X$  le long de  $Y$ , alors on a

$$\mathfrak{X}_\eta = \rho^{-1}(X_0) \setminus r^{-1}(X_0).$$

Thuillier (2007) généralise ensuite la théorie de façon à prendre en compte les plongements toroïdaux, c'est-à-dire ceux qui, localement pour la topologie étale, sont isomorphes au plongement d'une orbite ouverte dans une variété torique. Les résultats de rétraction se généralisent, en particulier celui de la fibre générique du complété formel le long du bord du plongement sur une partie homéomorphe à l'éventail épointé.

Le texte de Thuillier (2007) se conclut par une application aux compactifications qui nous ramène au sujet principal de ce texte. Soit  $X$  une variété complexe et  $\overline{X}$  une compactification de  $X$  telle que le complémentaire  $D := \overline{X} \setminus X$  soit un diviseur à croisement normaux de  $\overline{X}$ . L'inclusion  $X \hookrightarrow \overline{X}$  est alors un plongement toroïdal, et les résultats précédents s'appliquent. La compactification  $\overline{X}$  d'une variété  $X$  par un diviseur à croisement normaux  $D$  définit un plongement toroïdal, et les résultats précédents s'appliquent. En particulier, en notant  $\mathfrak{X}$  le complété de  $\overline{X}$  le long de  $D$ , on obtient une rétraction par déformation de la fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$  sur l'éventail du plongement, qui est homéomorphe à  $|\Delta_{\text{sym}}(D)| \times ]0, +\infty[$ .

*Remarque 3.11.* — Les résultats précédents assurent que, étant donné une variété complexe lisse  $X$  et une compactification lisse  $\overline{X}$  telle que  $D := \overline{X} \setminus X$  soit un diviseur à croisements normaux de  $\overline{X}$ , le type d’homotopie de la réalisation du complexe dual de  $D$  ne dépend pas du choix de la compactification. C’est une conséquence directe du fait que le bord de Thuillier  $\mathfrak{X}_\eta$  est indépendant de ce choix, cf. proposition 3.5.

Thuillier (2007) retrouve ainsi un résultat de Stepanov (2006), démontré par des techniques issues de la résolution des singularités (factorisation faible). Signalons également que, dans la théorie de Thuillier (2007), le corps  $\mathbf{C}$  ne joue pas de rôle particulier et peut être remplacé par un autre corps  $K$ . Le résultat d’indépendance du type d’homotopie vaut encore pour peu que les compactifications considérées soient toroïdales, en particulier dès que  $K$  est parfait.

Les résultats de Thuillier (2007) ont ensuite été généralisés par Abramovich, Caporaso et Payne (2015) au cas des champs de Deligne–Mumford. Ils sont alors appliqués au cas qui nous intéresse, celui de l’espace de modules  $\mathcal{M}_g$ . C’est par ce biais que ces auteurs parviennent au théorème 2.4 (avec un facteur  $]0, +\infty[$  supplémentaire, qui n’apparaît pas dans notre cadre, car  $\Delta_g$  paramètre des courbes normalisées).

Indiquons qu’une autre partie du résultat de Abramovich, Caporaso et Payne (2015) assure que l’application de tropicalisation (cf. section 2.3)

$$\text{Trop}: (\partial\mathcal{M}_g)^{\text{an}} \longrightarrow \Delta_g \times ]0, +\infty[$$

est continue, propre et surjective. Si le théorème 2.4 peut se démontrer de façon essentiellement combinatoire, il en va autrement pour cette dernière qui passe par l’interprétation de la tropicalisation comme une rétraction et repose *in fine* sur le corollaire 3.10.

Dans ce cadre, le point de vue analytique ultramétrique se révèle particulièrement fécond. Il apporte plus de canonicité et de structure à des objets de nature combinatoire et fournit de nouvelles méthodes qui facilitent leur étude.

## 4. Complexes de graphes

Les résultats combinés des sections précédentes, précisément les théorèmes 1.7 et 2.4, montrent que l’homologie singulière de l’espace de module  $\Delta_g$  des courbes tropicales calcule une partie de la cohomologie de l’espace de module  $\mathcal{M}_g$  des courbes lisses.

THÉORÈME 4.1. — *Soit  $g \geq 2$ . Pour tout  $k \geq 2$ , on a*

$$H_{k-1}^{\text{sing}}(\Delta_g, \mathbf{Q}) \simeq \text{Gr}_{6g-6}^{\text{W}} H^{6g-6-k}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}).$$

L’espace  $\Delta_g$  étant la réalisation d’un  $\Delta$ -complexe symétrique, son homologie peut être calculée comme l’homologie d’un complexe d’espaces vectoriels explicite, comme expliqué dans la section 1.5. Nous allons décrire ce complexe et indiquer ce que l’on connaît de son homologie, en le reliant aux complexes de graphes de M. Kontsevich.

#### 4.1. Vers les complexes de graphes

Nous avons expliqué à la section 1.5 comment construire un complexe d'espace vectoriels dont l'homologie redonne celle d'un  $\Delta$ -complexe symétrique donné : on place en degré  $n$  l'espace vectoriel engendré par l'ensemble paramétrant les  $n$ -simplexes, en prenant soin d'incorporer l'action du groupe symétrique  $S_{n+1}$  sur cet ensemble.

Explicitons la construction du complexe dans le cas de l'espace de modules  $\Delta_g$  qui nous occupe. Nous reprenons pour ce faire les notations utilisées pour sa description, cf. section 2.3. Rappelons que l'ensemble  $\overline{T}_{g,n}$ , qui paramètre les  $n$ -simplexes de  $\Delta_g$ , est défini comme l'ensemble des classes d'équivalences de triplets  $(G, w, \alpha)$ , où  $(G, w)$  est un graphe pondéré stable de genre  $g$  à  $n + 1$  arêtes et  $\alpha$  un ordre sur les arêtes de  $G$  (que l'on peut représenter sous la forme d'une bijection  $\alpha: \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} A(G)$ ).

La réalisation géométrique  $\Delta_g$  du  $\Delta$ -complexe symétrique des  $\overline{T}_{g,n}$  est construite en associant à un élément  $(G, w, \alpha)$  de  $\overline{T}_{g,n}$  une copie du simplexe standard  $\Delta^n$ . Pour toute bijection  $\alpha': \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} A(G)$ , c'est le même simplexe de  $\Delta_g$  qui est associé à  $(G, w, \alpha')$ , mais son orientation peut être différente, en fonction de la parité de la permutation

$$\sigma_{\alpha', \alpha}: \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} A(G) \xrightarrow{\varphi} A(G) \xrightarrow{\alpha'^{-1}} \{0, \dots, n\}.$$

Construisons finalement le complexe calculant l'homologie de  $\Delta_g$ . Pour  $n \in \mathbf{N}$ , considérons l'espace vectoriel  $\mathbf{Q} \cdot \overline{T}_{g,n}$  de base  $\overline{T}_{g,n}$  et son sous-espace  $R_{g,n}$  engendré par les éléments de la forme  $(G, w, \alpha) - \varepsilon(\sigma_{\alpha', \alpha}) \cdot (G, w, \alpha')$ . Posons  $C_{g,n} := \mathbf{Q} \cdot \overline{T}_{g,n} / R_{g,n}$ .

Il reste à préciser la différentielle  $\delta_n: C_{g,n} \rightarrow C_{g,n-1}$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ . Il s'agit de l'application linéaire définie par

$$\delta_n(G, w, \alpha) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (G/\alpha(j), w/\alpha(j), \alpha/\alpha(j))$$

où, pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $(G/\alpha(j), w/\alpha(j))$  désigne le graphe pondéré obtenu en contractant l'arête  $\alpha(j)$  de  $G$  et  $\alpha/\alpha(j)$  l'ordre induit par  $\alpha$  sur ses arêtes.

Jusqu'ici, à cause de la condition de normalisation sur les courbes tropicales, nous n'avons considéré que des graphes possédant au moins une arête, mais cette restriction n'est plus nécessaire lorsqu'on traite de graphes pondérés abstraits (sans métrique). Notons  $S_g$  le graphe possédant un sommet de poids  $g$  et aucune arête. C'est le seul graphe de genre  $g$  à 0 arêtes. On pose  $C_{g,-1} := \mathbf{Q} \cdot \{S_g\}$ .

En étendant trivialement la différentielle, nous obtenons ainsi un complexe de  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels  $C_{g,\bullet}$ .

**THÉORÈME 4.2.** — *Le complexe  $C_{g,\bullet}$  calcule l'homologie singulière rationnelle réduite de l'espace de modules des courbes tropicales  $\Delta_g$  : pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on a*

$$H_k(C_{g,\bullet}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_k^{\text{sing}}(\Delta_g, \mathbf{Q}).$$

Intéressons-nous maintenant à un sous-complexe particulier de  $C_{g,\bullet}$ . Pour  $n \in \mathbf{N}$ , notons  $B_{g,n}$  le sous-espace vectoriel de  $C_{g,n}$  engendré par les graphes pondérés à poids non nul (c'est-à-dire dont la fonction de poids n'est pas identiquement nulle). En particulier,

on a  $B_{g,-1} = C_{g,-1} = \mathbf{Q} \cdot \{S_g\}$ . La propriété de non nullité du poids étant préservée par contraction, on obtient un sous-complexe  $B_{g,\bullet}$  de  $C_{g,\bullet}$ .

Le résultat suivant sera crucial pour calculer l'homologie de  $C_{g,\bullet}$ .

PROPOSITION 4.3. — *Le complexe  $B_{g,\bullet}$  est acyclique.*

Avant d'attaquer la preuve de ce résultat, introduisons quelques définitions.

DÉFINITION 4.4. — *Soit  $(G, w)$  un graphe pondéré. Une tige de  $(G, w)$  est une arête dont l'un des sommets est d'arité et de poids 1. On note  $T(G, w)$  l'ensemble des tiges de  $(G, w)$ . On pose  $T'(G, w) := A(G) \setminus T(G, w)$ .*

Remarque 4.5. — Soit  $(G, w)$  un graphe pondéré stable,  $a$  une arête de  $G$  et  $(G/a, w/a)$  le graphe obtenu en contractant  $a$ . On a une identification  $A(G/a) = A(G) \setminus \{a\}$ .

Si  $a$  est une tige, on a  $T(G/a, w/a) = T(G, w) \setminus \{a\}$  et  $T'(G/a, w/a) = T'(G, w)$ . En particulier, on a  $\sharp T'(G/a) = \sharp T'(G)$ .

Si  $a$  n'est pas une tige, on a  $T(G) \subset T(G/a)$ . En particulier, on a  $\sharp T'(G/a) \leq \sharp T'(G) - 1$ .

Soit  $i \in \mathbf{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , notons  $B_{g,n}^{\leq i}$  (resp.  $B_{g,n}^{=i}$ ) le sous-espace vectoriel de  $B_{g,n}$  engendré par les graphes  $G$  avec  $\sharp T'(G) \leq i$  (resp.  $\sharp T'(G) = i$ ). D'après la remarque 4.5,  $B_{g,\bullet}^{\leq i}$  est un sous-complexe de  $B_{g,\bullet}$ .

Toujours d'après la remarque 4.5, les contractions qui préservent  $B_{g,\bullet}^{=i}$  sont les contractions de tiges. Nous allons étudier plus précisément cette opération.

DÉFINITION 4.6. — *On dit qu'un graphe pondéré  $(G, w)$  stable à poids non nul est fertile si tous ses sommets de poids strictement positif sont d'arité et de poids 1.*

Remarquons qu'un graphe pondéré fertile possède au moins une tige.

LEMME 4.7. — *Tout graphe pondéré  $(G, w)$  stable à poids non nul peut être obtenu à partir d'un graphe fertile par des contractions successives de tiges. Ce graphe fertile est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. — Nous nous contenterons d'expliquer que le graphe fertile peut être obtenu en effectuant les opérations suivantes, tant que possible, cf. figure 12 :

- remplacer un sommet de poids  $w \geq 2$  par un sommet de poids  $w - 1$  et en faire partir une tige ;
- remplacer un sommet interne de poids 1 par un sommet de poids 0 et en faire partir une tige. □

LEMME 4.8. — *Soit  $i \in \mathbf{N}^*$ . L'homologie de la paire  $(B_{g,\bullet}^{\leq i}, B_{g,\bullet}^{\leq i-1})$  est nulle en tout degré.*

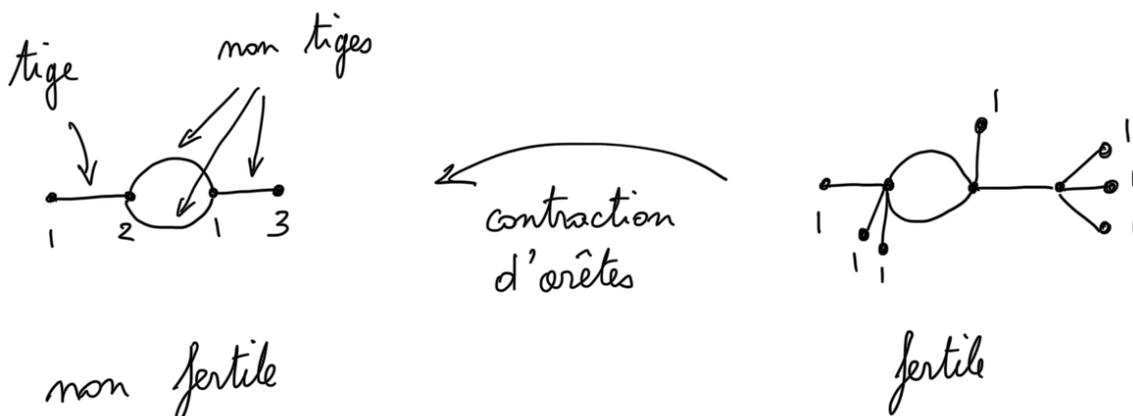


FIGURE 12. Un graphe non fertile et le graphe fertile associé

*Démonstration.* — Le complexe  $P_{g,\bullet}^i$  qui calcule l'homologie de  $(B_{g,\bullet}^{\leq i}, B_{g,\bullet}^{\leq i-1})$  est engendré par les éléments de  $B_{g,\bullet}^{\leq i}$ . En outre, d'après la remarque 4.5, dans le calcul de la différentielle, les seules contractions donnant lieu à des termes non nuls sont des contractions de tiges.

Pour tout graphe pondéré fertile  $(G, w)$  de genre  $g$  avec  $\sharp T'(G, w) = i$ , notons  $\gamma(G, w)$  l'ensemble des graphes obtenus à partir de  $G$  par des contractions successives de tiges, et notons  $P(G, w)_\bullet$  le sous-complexe de  $P_{g,\bullet}^i$  engendré par les  $\gamma(G, w)$ . Le lemme 4.7 assure que  $P_{g,\bullet}^i$  est la somme directe des différents sous-complexes  $P(G, w)_\bullet$ . Il suffit donc de montrer que ces derniers sont acycliques.

Soit  $(G, w)$  un graphe pondéré fertile de genre  $g$  avec  $\sharp T'(G) = i$ . Fixons une bijection  $\alpha: \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} A(G)$ . Considérons le simplexe standard  $\Delta^n$  de dimension  $n$  et identifions ses sommets à l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$ . Posons  $Z := \bigcup_{j \in \alpha^{-1}(T'(G, w))} F(j)$ , où, pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $F(j)$  désigne la face de  $\Delta^n$  opposée au sommet  $j$ .

Soit  $(G', w')$  un élément de  $\gamma(G, w)$ . Puisqu'il est obtenu à partir de  $(G, w)$  en contractant des arêtes,  $A(G')$  s'identifie à un sous-ensemble de  $A(G)$ . Considérons le sous-simplexe  $\Delta(G', w')$  de  $\Delta^n$  dont les sommets sont les images par  $\alpha$  des arêtes de  $G'$ .

La construction précédente permet d'identifier le complexe  $P(G, w)_\bullet$  au complexe qui calcule l'homologie relative de  $(\Delta^n, Z)$ . Il s'agit d'une vérification directe. Dans le calcul de la différentielle, la contraction d'une arête correspond à la suppression du sommet correspondant du simplexe. Lorsque l'arête n'est pas une tige, le graphe résultant appartient à  $B^{(g), i-1}$  et le simplexe associés est contenu dans  $Z$ . Les termes correspondants sont donc nuls dans l'homologie relative.

Pour finir, rappelons que  $\sharp T'(G, w) \leq n$  puisque  $(G, w)$  possède au moins une tige. Par conséquent,  $Z$  est une union de faces strictement contenue dans le bord de  $\Delta^n$ . Il s'ensuit que  $\Delta^n$  se rétracte par déformation sur  $Z$ , et donc que l'homologie relative de la paire  $(\Delta^n, Z)$  est nulle. On en déduit que le complexe  $P(G, w)_\bullet$  est acyclique, comme désiré.

Signalons une petite faille dans la preuve ci-dessus, due au fait que nous avons travaillé le graphe pondéré  $(G, w)$  lui-même et non sa classe d'isomorphisme. On complète néanmoins sans difficultés les arguments en quotientant la paire  $(\Delta^n, Z)$  par le groupe d'automorphismes de  $(G, w)$ , et en prenant soin de choisir une rétraction équivariante. La validité du résultat final n'est pas affectée.  $\square$

LEMME 4.9. — *L'homologie du complexe  $B_{g,\bullet}^0$  est nulle.*

*Démonstration.* — Par définition, le complexe  $B_{g,\bullet}^0$  est engendré par des graphes pondérés stables dont toutes les arêtes sont des tiges. Soit  $(G, w)$  un tel graphe.

Supposons que  $G$  possède au moins 2 arêtes. Toutes ces arêtes sont des tiges qui partent d'un même point et  $(G, w)$  possède donc un automorphisme qui échange 2 arêtes. La permutation associée étant impaire, l'image de  $(G, w)$  dans le complexe  $B_{g,\bullet}^0$  est nulle.

Supposons que  $G$  possède exactement 1 arête. Dans ce cas,  $(G, w)$  est le graphe  $S_{1,g-1}$  qui possède deux sommets, l'un de poids 1 et l'autre de poids  $g-1$ . La différentielle envoie  $S_{1,g-1}$  sur le graphe  $S_g$  possédant un seul sommet de poids  $g$ . En particulier,  $S_{1,g-1}$  n'est pas un cycle, donc il n'intervient pas dans le calcul de l'homologie.

Supposons que  $G$  possède exactement 0 arête. Dans ce cas,  $(G, w)$  est le graphe  $S_g$ . Nous venons de voir que c'est un bord ; son image en homologie est donc nulle.  $\square$

La proposition 4.3 est maintenant conséquence des lemmes 4.8 et 4.9.

*Remarque 4.10.* — Le complexe  $B_{g,\bullet}$  calcule l'homologie du sous-complexe  $\Delta_g^w$  de  $\Delta_g$  paramétrant les courbes tropicales de poids non nul. Chan, Galatius et Payne (2022, theorem 1.1) précisent la proposition 4.3 en montrant que le sous-complexe  $\Delta_g^w$  est contractile. Allcock, Corey et Payne (2022) approfondissent l'étude dans un texte entièrement consacré à la topologie des  $\Delta$ -complexes symétriques. Ils y démontrent que  $\Delta_g$  est simplement connexe et que le sous-complexe  $\Delta_g^{\text{bm}}$  (2) paramétrant les courbes tropicales avec un pont (arête dont la suppression déconnecte le graphe), un point d'articulation (sommet dont la suppression déconnecte le graphe), une boucle, un sommet de poids non nul ou des arêtes multiples (arêtes reliant les mêmes sommets) est contractile.

Considérons maintenant le complexe quotient  $A_{g,\bullet} := C_{g,\bullet}/B_{g,\bullet}$ . D'après la proposition 4.3, l'homologie de  $A_{g,\bullet}$  coïncide avec celle de  $C_{g,\bullet}$ , et redonne donc une partie de la cohomologie de  $\mathcal{M}_g$ , par le théorème 4.1.

THÉORÈME 4.11. — *Soit  $g \geq 2$ . Pour tout  $k \geq 2$ , on a*

$$H_{k-1}(A_{g,\bullet}) \simeq \text{Gr}_{6g-6}^W H^{6g-6-k}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}).$$

---

2. « b » pour « bridge » et « m » pour « multiple »

*Remarque 4.12.* — Dans la section 2.2, nous avons introduit l’outre-espace, ainsi que son quotient  $\text{CV}_g / \text{Out}(F_g)$  (cf. remarque 2.3). Ce dernier paramètre des courbes tropicales pures, dont la fonction poids est identiquement nulle. Il s’identifie donc à une partie  $\Delta_g^{\text{pur}}$  de  $\Delta_g$ , qui est une partie ouverte, mais pas un sous-complexe. En effet, les bords de simplexes correspondant à des contractions de boucles font apparaître des poids strictement positifs et se situent donc hors de  $\Delta_g^{\text{pur}}$ .

Considérons l’application en homologie induite par l’inclusion de  $\Delta_g^{\text{pur}}$  dans  $\Delta_g$  :

$$\iota_{g,\bullet} : \tilde{H}_\bullet(\text{Out}(F_g, \mathbf{Q}) \simeq \tilde{H}_\bullet^{\text{sing}}(\Delta_g^{\text{pur}}, \mathbf{Q}) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet^{\text{sing}}(\Delta_g, \mathbf{Q}) \simeq \text{Gr}_{6g-6}^{\text{W}} H^{6g-7-\bullet}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}).$$

D’après les résultats de dimension cohomologique pour  $\text{Out}(F_g)$  rappelés à la section 2.2, la source de  $\iota_{g,k}$  est nulle pour  $k \leq 2g - 4$ . D’après ceux pour  $\text{Mod}_g$  (cf. théorème 1.1), son but est nul pour  $k \geq 2g - 2$ . À genre  $g$  fixé, une seule des applications peut donc être non triviale, à savoir  $\iota_{g,2g-3}$ . Chan, Galatius et Payne (2022, section 7.2) donnent des exemples où tel est effectivement le cas (dans un contexte de courbes pointées, cf. section 5.1).

En particulier, bien que le complexe  $A_{g,\bullet}$  soit engendré par des courbes tropicales pures, et que  $\text{CV}_g / \text{Out}(F_g)$  se décrive également en ces termes, le premier ne calcule pas l’homologie du second.

Concluons cette section en donnant une définition directe et concrète du complexe  $A_{g,\bullet}$ . Notons qu’à cause du quotient par  $B_{g,\bullet}$ , il est engendré par des graphes pondérés dont la fonction de poids est identiquement nulle, autrement dit des graphes classiques. De même, dans l’expression de la différentielle, tous les termes donnant lieu à un graphe à poids non nul disparaissent, et ne subsistent que les termes correspondant à la contraction d’une arête plate. Récapitulons.

— Termes

Soit  $n \in \mathbf{Z}$ . Le terme  $A_{g,n}$  est le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel engendré par les éléments de la forme  $(G, \alpha)$ , où  $G$  est un graphe classique de genre  $g$  à  $n + 1$  arêtes et  $\alpha$  un ordre sur les arêtes de  $G$ , quotienté par l’espace engendré par les éléments de la forme  $(G, \alpha) - \varepsilon(\sigma) \cdot (G, \sigma(\alpha))$ , avec  $\sigma \in S_{n+1}$ .

— Différentielles

Soit  $n \in \mathbf{Z}$ . La différentielle  $\delta_n : A_{g,n} \rightarrow A_{g,n-1}$  est une application  $\mathbf{Q}$ -linéaire et il suffit de décrire son action sur les générateurs de  $A_{g,n}$ . Soit  $(G, \alpha) \in A_{g,n}$  et identifions  $\alpha$  à une bijection  $\alpha : \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} A(G)$ . Notons  $A_p(G)$  l’ensemble des arêtes plates de  $G$ . On a alors

$$\delta_n(G, \alpha) = \sum_{a \in A_p(G)} (-1)^{\alpha^{-1}(a)} (G/a, \alpha/a),$$

où  $G/a$  désigne le graphe obtenu en contractant l’arête  $a$  de  $G$  et  $\alpha/a$  l’ordre induit par  $\alpha$  sur ses arêtes.

On reconnaît dans le complexe  $A_{g,\bullet}$  le complexe  $G_{g,\bullet}$  déjà étudié par Kontsevich (1993, 1994) sous le nom de complexe de graphes commutatif. Précisons que l’on retrouve la version impaire du complexe de graphes commutatif (mentionnée respectivement aux

pages 182 et 109 des références précédentes) avec un décalage :  $A_{g,\bullet} = G_{g,\bullet}[2g - 1]$ , si l'on suit les conventions de Willwacher (2015).

*Exemple 4.13.* — Soit  $g \geq 3$ . Notons  $R_g$  le graphe polygonal à  $g$  sommets et  $g$  arêtes. (Tous ses sommets sont bivalents.) Notons  $W_g$  le graphe *roue* (wheel en anglais) obtenu en ajoutant un sommet à l'intérieur de  $R_g$  et en le reliant par une arête à tous les sommets existants, cf. figure 13. Ce graphe possède  $g + 1$  sommets et  $2g$  arêtes. Il est de genre  $g$ . Le sommet au centre est d'arité  $g$  et tous les autres sont trivalents. Avec les conventions de Willwacher (2015), ce graphe est un élément de  $G_{g,0}$ .

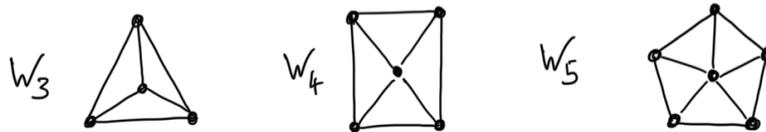


FIGURE 13. Les graphes roues de genre 3, 4, 5

En contractant une arête quelconque de  $W_g$ , on obtient un graphe possédant deux arêtes parallèles. En faisant agir la permutation qui échange ces deux arêtes, on montre que l'image du graphe contracté est nulle dans  $G_{g,1}$ . Par conséquent,  $W_g$  définit un cycle du complexe de graphes.

Le graphe  $W_g$  possède une symétrie axiale et, lorsque  $g$  est pair, celle-ci induit une permutation impaire sur l'ensemble des arêtes. On en déduit que l'image de  $W_g$  dans  $G_{g,0}$  est nulle. Lorsque  $g$  est impair, en revanche, on vérifie que les automorphismes de  $W_g$  agissent par permutations paires, ce qui montre que l'image de  $W_g$  dans  $G_{g,0}$  est nulle. Willwacher (2015) montre même que son image dans  $H_0(G_{g,\bullet})$  n'est pas nulle.

## 4.2. Homologie des complexes de graphes

Plusieurs travaux ont été consacrés aux complexes de graphes et des résultats récents ont permis de dévoiler une partie de la structure de leur homologie en degré 0. Plus précisément, d'après Willwacher (2015),  $\prod_{g=2}^{\infty} \text{Hom}(G_{g,\bullet}, \mathbf{Q})$  est muni d'une structure d'algèbre de Lie différentielle graduée et sa cohomologie en degré 0 s'identifie à l'algèbre de Lie de Grothendieck–Teichmüller  $\mathbf{grt}_1$  qui, d'après Brown (2012), contient une algèbre de Lie libre graduée sur des générateurs de degrés impairs supérieurs à 3. Signalons que les deux textes sus-cités ont fait l'objet de recensions dans ce séminaire, respectivement par Kontsevich (2019) et Deligne (2013).

Énonçons une version simplifiée, suffisante pour nos besoins. Soit  $V$  le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel gradué de base  $(\sigma_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}^*}$ , l'élément  $\sigma_{2n+1}$  étant de degré  $2n+1$  pour tout  $n$ . Notons  $\text{Lie}(V)$  l'algèbre de Lie libre sur  $V$ . Alors, il existe un morphisme injectif d'algèbres de Lie graduées

$$(2) \quad \text{Lie}(V) \hookrightarrow \left( \bigoplus_{g \geq 2} H_0(G_{g,\bullet}) \right)^{\vee}.$$

Par définition,  $\text{Lie}(V)$  possède des éléments non nuls en tout degré impair plus grand que 3. L'injection précédente permet d'en déduire des éléments non nuls dans l'homologie des complexes de graphes, et donc dans la cohomologie de l'espace de modules des courbes, par le théorème 4.11.

Il est important de noter qu'ici, et pour la première fois dans ce texte, on ne travaille plus à genre fixé. Le théorème de Willwacher porte en effet sur un objet qui combine des informations provenant de tous les genres.

**THÉORÈME 4.14.** — *Pour  $g = 3$ ,  $g = 5$  et tout  $g \geq 7$ , le gradué  $\text{Gr}_{6g-6}^{\text{W}} H^{4g-6}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  n'est pas nul. En particulier, l'espace  $H^{4g-6}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  n'est pas nul.*

*Démonstration.* — Soit  $g$  comme dans l'énoncé. Si  $g$  est impair,  $\text{Lie}(V)$  contient un élément non nul de degré  $g$ , à savoir  $\sigma_g$ . Si  $g$  est pair, et donc supérieur à 8 par hypothèse, le crochet  $[\sigma_3, \sigma_{g-3}]$  fournit un élément non nul de  $\text{Lie}(V)$  de degré  $g$ . Dans tous les cas,  $\text{Lie}(V)$  contient un élément non nul de degré  $g$ .

En composant par l'injection (2), on en déduit que  $H_0(G_{g,\bullet})$  n'est pas nul, donc que  $H_{2g-1}(A_{g,\bullet})$  n'est pas nul, en tenant compte du décalage. Le résultat découle alors du théorème 4.11, appliqué avec  $k = 2g$ .  $\square$

*Remarque 4.15.* — Comme indiqué à l'exemple 4.13, le résultat du théorème 4.14 peut être partiellement précisé, du moins dans sa version graphique : pour tout  $g \geq 3$  impair, la classe du graphe roue  $W_g$  définit un élément non nul de  $H_0(G_{g,\bullet})$ .

Par le même raisonnement que celui effectué à la fin de la preuve du théorème 4.14, il est possible de minorer la dimension de certains espaces de cohomologie de  $\mathcal{M}_g$ . Précisément, en notant  $\text{Lie}(V)_g$  le facteur de degré  $g$  de  $\text{Lie}(V)$ , on a

$$(3) \quad \forall g \geq 2, \dim(\text{Gr}_{6g-6}^{\text{W}} H^{4g-6}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})) \geq \dim(\text{Lie}(V)_g).$$

On conçoit aisément que,  $\text{Lie}(V)$  étant une algèbre de Lie libre, les dimensions de ses gradués croissent rapidement. Étudions-les précisément.

Rappelons que, pour tout espace vectoriel  $W$  gradué par  $\mathbf{N}$  dont les gradués  $W_n$  sont de dimension finie, on appelle *série de Hilbert–Poincaré* de  $W$  la série

$$f_W(t) := \sum_{n \in \mathbf{N}} \dim(W_n) t^n.$$

Remarquons que la série de Hilbert–Poincaré d'un produit tensoriel de deux espaces vectoriels gradués est le produit des séries de chacun des espaces.

La série de Hilbert–Poincaré de  $V$  se calcule sans peine :

$$f_V(t) = \sum_{n \geq 1} t^{2n+1} = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Considérons maintenant l'algèbre tensorielle  $T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ . On a

$$f_{T(V)}(t) = 1 + f_V(t) + f_V(t)^2 + \cdots = \frac{1}{1-f_V(t)} = \frac{1-t^2}{1-t^2-t^3}.$$

L'algèbre  $T(V)$  coïncide avec l'algèbre enveloppante  $U(\text{Lie}(V))$  de  $\text{Lie}(V)$ . D'après le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, cette dernière est isomorphe, en tant qu'algèbre graduée, à l'algèbre symétrique  $S(\text{Lie}(V))$  de  $\text{Lie}(V)$ . On en construit donc une base en prenant les produits d'un nombre quelconque d'éléments d'une base de  $\text{Lie}(V)$  (avec répétitions et sans ordre).

Formalisons un peu. Pour  $i \in \mathbf{N}$ , posons  $d_i := \dim(\text{Lie}(V)_i)$  et choisissons une base  $u_{i,1}, \dots, u_{i,d_i}$  de  $\text{Lie}(V)_i$ . Posons

$$I := \{(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : 1 \leq j \leq d_i\}.$$

Alors la famille des  $\prod_{(i,j) \in I} u_{i,j}^{h_{i,j}}$ , où  $(h_{i,j})_{(i,j) \in I}$  est une famille presque nulle d'éléments de  $\mathbf{N}$ , est une base de  $S(\text{Lie}(V))$ . En particulier, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a

$$\dim(S(\text{Lie}(V)_n)) := \#\left\{h = (h_{i,j})_{(i,j) \in I} \in \mathbf{N}^I : h \text{ est presque nulle et } \sum_{(i,j) \in I} ih_{i,j} = n\right\}.$$

On a donc

$$f_{S(\text{Lie}(V))}(t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \dim(S(\text{Lie}(V)_n)) t^n = \sum_{\substack{(h_{i,j})_{(i,j) \in I} \in \mathbf{N}^I \\ \text{presque nulle}}} \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{d_i} t^{ih_{i,j}}.$$

On peut réécrire ce dernier produit sous la forme

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{(h_{i,1}, \dots, h_{i,d_i}) \in \mathbf{N}^{d_i}} \prod_{j=1}^{d_i} t^{ih_{i,j}} &= \prod_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{h_{i,1} \in \mathbf{N}} t^{ih_{i,1}} \right) \cdots \left( \sum_{h_{i,d_i} \in \mathbf{N}} t^{ih_{i,d_i}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{h \in \mathbf{N}} (t^i)^h \right)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - t^i)^{d_i}}. \end{aligned}$$

Nous avons finalement montré que

$$\frac{1 - t^2}{1 - t^2 - t^3} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - t^n)^{d_n}},$$

d'où, en appliquant  $t \frac{d}{dt} \log(\cdot)$ ,

$$(4) \quad \frac{t^3(3 - t^2)}{(1 - t^2)(1 - t^2 - t^3)} = \sum_{n \geq 0} nd_n \frac{t^n}{1 - t^n}.$$

Notons  $R(t)$  la fraction rationnelle du membre de gauche. Parmi ses pôles complexes, il en existe un unique de plus petit module, qui est l'unique racine réelle de  $1 - t^2 - t^3$  :  $\alpha \simeq 0,75488\dots$ . Un calcul direct montre que le résidu de  $R$  en  $\alpha$  vaut  $-\alpha$  et on peut donc écrire

$$R(t) = \frac{-\alpha}{t - \alpha} + \sum_{n \geq 0} b_n t^n = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{\alpha^n} + b_n \right) t^n,$$

où  $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$  est une série de rayon de convergence strictement supérieur à  $\alpha$ . Notons  $R(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  le développement en série de  $R$  et posons

$$\beta_0 := \alpha^{-1} \simeq 1,32472\dots$$

(unique racine réelle de  $X^3 - X - 1$ , polynôme réciproque de  $X^3 + X^2 - 1$ ). On obtient alors l'équivalent  $a_n \sim \beta_0^n$ .

Revenant à l'équation (4), on obtient l'égalité  $a_n = \sum_{m|n} m d_m$ , d'où, par la formule d'inversion de Möbius,

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) a_m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta_0^n}{n}.$$

En combinant cet équivalent avec la minoration (3), on obtient le résultat désiré.

**THÉORÈME 4.16.** — *Pour tout  $\beta \in [0, \beta_0[$ , il existe  $C_\beta \in \mathbf{R}$  telle que, pour tout  $g \geq 2$ , on ait*

$$\dim(\mathrm{Gr}_{6g-6}^{\mathrm{W}} H^{4g-6}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})) \geq \beta^g + C_\beta,$$

*et donc*

$$\dim(H^{4g-6}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})) \geq \beta^g + C_\beta.$$

## 5. Quelques compléments

Depuis la parution de l'article de Chan, Galatius et Payne (2021), ses méthodes ont été étendues et appliquées dans d'autres situations. Nous proposons ici un aperçu des résultats obtenus.

Deux types de généralisations sont obtenues, que nous détaillons dans deux sections. Il est tout d'abord possible d'appliquer les méthodes tropicales dans le cadre d'autres espaces de modules. La méthode de Chan, Galatius et Payne (2021) se révèle, de nouveau, particulièrement efficace pour démontrer la non nullité de certains groupes de cohomologie. Une autre direction d'étude vise à modifier la stratégie de façon à calculer un gradué de poids non nul et à comprendre, autant que faire se peut, le complexe de graphes, plus subtil, qui en résulte.

### 5.1. Autres espaces de modules

On obtient un raffinement naturel de l'espace de modules  $M_g$  des courbes projectives lisses connexes de genre  $g$  en marquant sur chacune des courbes un nombre fini  $n$  fixé de points rationnels (distincts ou non). L'espace de modules  $M_{g,n}$  (resp. le champ  $\mathcal{M}_{g,n}$ ) qui en résulte possède une compactification  $\overline{M}_{g,n}$  (resp.  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ ) bien comprise et la stratégie de Chan, Galatius et Payne (2021) s'applique *mutatis mutandis*.

Pour poursuivre la stratégie, il est nécessaire de disposer d'une notion de graphe pondéré marqué. Il s'agit d'un triplet  $(G, w, N)$ , où  $(G, w)$  est un graphe pondéré et  $N$  une fonction de marquage des sommets, réalisée sous la forme  $N: \{1, \dots, n\} \rightarrow S(G)$ ,

$n$  étant le nombre de points marqués. On définit une nouvelle fonction d'arité à partir de la fonction d'arité  $n_G$  sur  $G$  par

$$n: s \in S(G) \mapsto n_G(s) + \#N^{-1}(s) \in \mathbf{N}.$$

Le graphe pondéré avec  $n$  points marqués  $(G, w, N)$  est dit *stable* si, pour tout sommet  $s$  de  $G$ , on a

$$2w(s) + n(s) \geq 3.$$

Bien entendu, il existe une version tropicale, c'est-à-dire métrique, de la notion de graphe pondéré avec  $n$  points marqués.

On peut maintenant définir l'espace de modules  $\Delta_{g,n}$  des courbes tropicales marquées stables normalisées de genre  $g$  à  $n$  points marqués, ainsi qu'un complexe de graphes marqués  $G_{g,n}$ . Dans ce cadre, Chan, Galatius et Payne (2022) démontrent les analogues des théorèmes 4.1 et 4.11, qui permettent de calculer le gradué de poids maximal de la cohomologie en termes d'espaces tropicaux ou de complexes de graphes.

Des résultats complets sont obtenus pour  $g = 1$ . Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , l'espace  $\Delta_{1,n}$  est contractile si  $n \geq 2$  et homotope à la somme pointée de  $(n-1)!/2$  sphères de dimension  $n-1$  si  $n \geq 3$ . En outre,  $H_k^{\text{sing}}(\Delta_{g,1}, \mathbf{Q})$  contient une copie de  $H_k^{\text{sing}}(\Delta_g, \mathbf{Q})$  (cf. aussi Turchin et Willwacher, 2017), ce qui permet d'obtenir un résultat de croissance exponentielle pour la dimension de  $H^{4g-4}(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbf{Q})$  semblable à celui du théorème 4.16.

Remarquons que le groupe symétrique  $S_n$  agit sur l'espace de modules  $\mathcal{M}_{g,n}$  en permutant les points marqués. Par des calculs basés sur le complexe de graphe  $G_{g,n}$ , Chan, Faber, Galatius et Payne (2022) parviennent à donner une formule explicite (mais trop compliquée pour être recopiée ici) pour la caractéristique d'Euler  $S_n$ -équivariante de  $\text{Gr}_{6g-6+2n}^{\text{W}} H^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q})$ .

En utilisant les mêmes techniques, d'autres textes proposent des calculs explicites de gradués de poids maximal de certains groupes de cohomologie pour de petites valeurs des paramètres, comme  $H^\bullet(\mathcal{M}_{2,n}, \mathbf{Q})$  pour  $n \leq 22$  par Chan (2015) et Bibby, Chan, Gadish et Yun (2023b) ou  $H^\bullet(\mathcal{M}_{3,n}, \mathbf{Q})$  pour  $n \leq 9$  par Bibby, Chan, Gadish et Yun (2023a).

La stratégie peut également être adaptée pour traiter le cas des espaces de modules  $\mathcal{H}_{g,n}$  de courbes hyperelliptiques marquées (Brandt, Chan et Kannan, 2023).

Passons à un cadre différent, celui de l'espace de module  $A_g$  des variétés abéliennes complexes principalement polarisées de dimension  $g$ , considéré par Brandt, Bruce, Chan, Melo, Moreland et Wolfe (2022). L'étude repose sur le même type d'ingrédients : compactification toroïdale (Faltings et Chai, 1990) et version tropicale de l'espace de modules (Brannetti, Melo et Viviani, 2011 ; Chan, Melo et Viviani, 2013). Les auteurs définissent également un complexe explicite  $P_{g,\bullet}$ , le complexe parfait, dont l'homologie coïncide avec l'homologie singulière de l'espace de modules des variétés abéliennes tropicales, et donc le gradué de poids maximal de la cohomologie de  $A_g$ . Dans ce cadre, le rôle du complexe de graphes de Kontsevich est joué par le complexe de Voronoï  $V_{g,\bullet}$ , introduit par Elbaz-Vincent, Gangl et Soulé (2013) pour calculer la cohomologie des groupes

$\mathrm{GL}_N(\mathbf{Z})$  et  $\mathrm{SL}_N(\mathbf{Z})$ . Les complexes parfait et les complexes de Voronoï sont reliés par une suite exacte courte de la forme

$$0 \longrightarrow P_{g-1,\bullet} \longrightarrow P_{g,\bullet} \longrightarrow V_{g,\bullet} \longrightarrow 0.$$

Les résultats connus sur les complexes de Voronoï (calculs explicites en petit degré de Lee et Szczarba (1978) et Elbaz-Vincent, Gangl et Soulé (2013), résultats d’acyclicité de Dutour Sikirić, Elbaz-Vincent, Kupers et Martinet (2019)) permettent de calculer la dimension du gradué de poids maximal dans la cohomologie de  $A_5$ ,  $A_6$  et  $A_7$  et d’obtenir des résultats d’annulation pour  $A_8$ ,  $A_9$  et  $A_{10}$ .

## 5.2. Complexes de courbes en poids non maximal

Dans une autre direction, il est possible de considérer des complexes de courbes dont l’homologie calcule des gradués de poids non maximal de la cohomologie de  $\mathcal{M}_g$  (c’est-à-dire de poids non nul dans la version à support). Cette stratégie a été mise en œuvre pour les poids  $6g - 8$  et  $6g - 17$  (autrement dit, poids 2 et 11 dans la version à support), par Payne et Willwacher (2021) et (2023) respectivement.

Afin de l’expliquer, il faut revenir à la théorie de Hodge mixte et à la suite spectrale des poids (Deligne, 1971, section 3.2), qui permet de calculer les gradués associés.

Pour tout graphe pondéré marqué stable  $(G, w, N)$  de genre  $g$  avec  $n$  points marqués, posons

$$\overline{\mathcal{M}}_{(G,w,N)} := \prod_{s \in S(G)} \overline{\mathcal{M}}_{w(s),n(s)}$$

et notons  $\mathbf{Q}_{(G,w,N)}$  une copie du corps  $\mathbf{Q}$  munie de l’action de  $\mathrm{Aut}(G, w, N)$  par la signature de son action par permutation sur l’ensemble des arêtes  $A(G)$ .

Pour tous  $k, i \in \mathbf{N}$ , le gradué  $\mathrm{Gr}_k^{\mathrm{W}} H_c^{i+k}(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q})$  s’identifie alors au  $i^{\mathrm{ème}}$  groupe de cohomologie du complexe

$$C_{g,n,k}^{\bullet} := \bigoplus_{\substack{(G,w,N) \\ \#A(G)=\bullet}} \left( H^k(\overline{\mathcal{M}}_{(G,w,N)}, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{(G,w,N)} \right)^{\mathrm{Aut}(G,w,N)}.$$

En utilisant le langage des opérades modulaires de Getzler et Kapranov (1998), on montre que ces groupes de cohomologie peuvent être calculés par un complexe de graphes décorés, le complexe de Getzler–Kapranov  $\mathrm{W}_k \mathrm{GK}_{g,n}$  (Andersson, Willwacher et Živković, 2020; Kalugin, 2022). Nous ne donnerons pas sa définition complète et nous contenterons d’indiquer que ses générateurs sont indexés par des graphes pondérés marqués  $(G, w, N)$  de genre  $g$  à  $n$  points marqués dont tout sommet  $s$  est décoré par un élément de  $H^{k_s}(\overline{\mathcal{M}}_{w(s),n(s)}, \mathbf{Q})$ , avec la condition que  $\sum_{s \in S(G)} k_s = k$ . (Si  $k$  est nul, tous les  $k_s$  sont également nuls et les décorations sont triviales.)

*Remarque 5.1.* — Dans l’optique de ce texte, il est intéressant de noter que, bien que le passage de la cohomologie de  $\mathcal{M}_{g,n}$  aux complexes de graphes décorés s’effectue essentiellement par voie opéradique, Kalugin (2022) propose une interprétation *via* des groupes de cohomologie sur  $\Delta_{g,n}$ , à coefficients dans un certain faisceau  $\mathcal{DM}_{g,n}$ . Ce

dernier est un faisceau en DG-algèbres combinatoire, constant sur les strates de la stratification de  $\Delta_{g,n}$  définie par les différents graphes pondérés marqués, sa valeur sur la strate donnée par  $(G, w, N)$  étant donnée par  $\bigotimes_{s \in S(G)} C^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{w(s), n(s)}, \mathbf{Q})$ . Pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , on a

$$H_c^i(\Delta_{g,n}, \mathcal{DM}_{g,n}) \simeq H_c^i(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}).$$

Ce résultat peut être raffiné de façon à faire intervenir les poids. Le complexe  $\mathcal{DM}_{g,n}$  possède une filtration naturelle définie par troncation, le  $k^{\text{ème}}$  complexe ne conservant que la partie de degré inférieure ou égale à  $k$ . Notons  $\text{Gr}_\bullet^{\mathcal{W}} \mathcal{DM}_{g,n}$  les gradués associées. Pour tous  $k, i \in \mathbf{N}$ , on a

$$H_c^i(\Delta_{g,n}, \text{Gr}_k^{\mathcal{W}} \mathcal{DM}_{g,n}) \simeq \text{Gr}_k^{\mathcal{W}} H_c^{i+k}(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbf{Q}).$$

Le complexe de graphes décoré  $\mathbf{W}_k \mathbf{GK}_{g,n}$  est naturellement défini à partir du faisceau  $R\Gamma_c(\Delta_{g,n}, \text{Gr}_k^{\mathcal{W}} \mathcal{DM}_{g,n})$  sur  $\Delta_{g,n}$ .

En général, le complexe  $\mathbf{W}_k \mathbf{GK}_{g,n}$  semble faire intervenir trop de données pour être réellement exploitable. Pour certains poids cependant, des simplifications se produisent.

Rappelons que l'on a  $H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g',n'}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$  et  $H^1(\overline{\mathcal{M}}_{g',n'}) = 0$  pour toutes valeurs de  $g'$  et  $n'$ . Par conséquent, lorsque  $k = 2$ , la seule possibilité pour qu'un graphe de  $\mathbf{W}_2 \mathbf{GK}_{g,n}$  n'ait aucune décoration nulle est qu'un unique sommet soit décoré par un élément de  $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g',n'}, \mathbf{Q})$  et les autres par des éléments de  $H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g',n'}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$  (que l'on peut ignorer). Des bases pour les espaces vectoriels  $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g',n'}, \mathbf{Q})$  étant connues, on peut obtenir des descriptions explicites des graphes possibles.

Lorsque  $k = 11$ , une situation analogue se présente car tous les espaces vectoriels  $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g',n'}, \mathbf{Q})$  sont nuls pour  $k \leq 9$  impair, d'après Bergström, Faber et Payne (2022). Les graphes de  $\mathbf{W}_{11} \mathbf{GK}_{g,n}$  ont donc un sommet distingué décoré par un élément de  $H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{g',n'}, \mathbf{Q})$ .

Dans les deux cas, poids 2 et poids 11, des calculs explicites sur les graphes de Getzler–Kapranov montrent que leur homologie s'exprime à partir de celle du complexe de graphe de Kontsevich. Il s'ensuit que les espaces vectoriels  $\text{Gr}_2^{\mathcal{W}} H_c^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  et  $\text{Gr}_{11}^{\mathcal{W}} H_c^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  s'expriment à partir de certains  $W_0 H_c^{k'}(\mathcal{M}_{g'}, \mathbf{Q})$ .

Donnons un exemple explicite. Pour tous  $g, k \geq 0$ , notons  $V_{g,k}$  la partie de genre  $g$  et de degré  $k$  de

$$V := \bigwedge^2 \left( \bigoplus_{g', k' \geq 0} W_0 H_c^{k'}(\mathcal{M}_{g'}, \mathbf{Q}) \right),$$

le genre (resp. degré) d'un tenseur élémentaire étant donné par la somme des genres (resp. degrés) des composantes. D'après Payne et Willwacher (2021, theorem 1.2), l'espace  $\text{Gr}_2^{\mathcal{W}} H_c^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  contient  $V_{g,k-3}$  et  $V_{g-1,k-4}$ .

D'après le théorème 4.14,  $W_0 H_c^6(\mathcal{M}_3, \mathbf{Q})$  et  $W_0 H_c^{10}(\mathcal{M}_5, \mathbf{Q})$  sont non nuls, ainsi que tous les  $W_0 H_c^{2g}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  pour  $g \geq 7$ . En prenant des produits tensoriels, on montre ainsi que  $V_{g+3,2g+6} \neq \{0\}$  pour  $g = 5$  et  $g \geq 7$ , et donc, en réindexant, que  $V_{g,2g} \neq \{0\}$  pour  $g = 8$  et  $g \geq 10$ . Par l'inclusion  $\text{Gr}_2^{\mathcal{W}} H_c^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}) \supset V_{g,k-3}$  appliquée avec  $k = 2g + 3$ , il s'ensuit que  $\text{Gr}_2^{\mathcal{W}} H_c^{2g+3}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}) \neq \{0\}$ , et donc que  $\text{Gr}_{6g-8}^{\mathcal{W}} H^{4g-9}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}) \neq \{0\}$ , pour

$g = 8$  et  $g \geq 10$ . On obtient ainsi une famille explicite de groupes de cohomologie non nuls de degré impair de  $\mathcal{M}_g$ .

En utilisant les mêmes arguments, combinés au théorème 4.16 plutôt qu’au théorème 4.14, on montre que la dimension de  $\mathrm{Gr}_2^{\mathrm{W}} H_c^{2g+3}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$ , et donc de  $\mathrm{Gr}_{6g-8}^{\mathrm{W}} H^{4g-9}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$ , croît exponentiellement en fonction de  $g$ .

De la même façon, l’inclusion  $\mathrm{Gr}_2^{\mathrm{W}} H_c^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}) \supset V_{g-1, k-4}$  fournit des groupes de cohomologie non nuls (de la forme  $H^{4g-8}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$ ) et la croissance exponentielle de leur dimension.

Notons que, dès qu’on dispose d’un nouveau groupe non nul, le raisonnement précédent permet d’en obtenir de nombreux autres, ainsi que des familles à croissance exponentielle. C’est encore plus frappant dans le cas de poids 11, où des puissances symétriques possédant plus de facteurs apparaissent.

Nous terminons cet exposé par un résultat de croissance exponentielle des groupes de cohomologie de  $\mathcal{M}_g$ , obtenu en combinant les résultats de Payne et Willwacher (2021) et (2023).

**THÉORÈME 5.2.** — *Pour tout  $k \in \{0, \dots, 53\} \setminus \{1, 4, 7, 51\}$ , la dimension de  $H^{4g-k}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$  croît exponentiellement en  $g$ .*

## Références

- Dan Abramovich, Lucia Caporaso et Sam Payne (2015). « The tropicalization of the moduli space of curves », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **48** (4), p. 765-809.
- Daniel Allcock, Daniel Corey et Sam Payne (2022). « Tropical moduli spaces as symmetric  $\Delta$ -complexes », *Bull. Lond. Math. Soc.* **54** (1), p. 193-205.
- Assar Andersson, Thomas Willwacher et Marko Živković, (2020). *Oriented hairy graphs and moduli spaces of curves*. arXiv : [2005.00439](https://arxiv.org/abs/2005.00439) [math.QA].
- Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba et Phillip A. Griffiths (2011). *Geometry of algebraic curves. Volume II. With a contribution by Joseph Daniel Harris*. T. 268. Grundlehren Math. Wiss. Berlin : Springer.
- Kai Behrend (2004). « Cohomology of stacks », in : *School and conference on intersection theory and moduli. Lectures given at the school and conference, Trieste, Italy, September 9–27, 2002*. Trieste : ICTP - The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, p. 249-294.
- Jonas Bergström, Carel Faber et Sam Payne (2022). *Polynomial point counts and odd cohomology vanishing on moduli spaces of stable curves*, arXiv : [2206.07759](https://arxiv.org/abs/2206.07759) [math.AG].
- Vladimir G. Berkovich (1990). *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. T. 33. Math. Surv. Monogr. Providence, RI : American Mathematical Society.

- (1994). « Vanishing cycles for formal schemes », *Invent. Math.* **115** (3), p. 539–571.
- Pierre Berthelot (1996). *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie*. Prépublication de l'IRMAR 96-03.
- Christin Bibby, Melody Chan, Nir Gadish et Claudia He Yun (2023a). *A Serre spectral sequence for the moduli space of tropical curves*, arXiv : [2307.01960 \[math.AG\]](#).
- (2023b). *Homology representations of compactified configurations on graphs applied to  $\mathcal{M}_{2,n}$* , arXiv : [2109.03302 \[math.CO\]](#).
- Siegfried Bosch et Werner Lütkebohmert (1985). « Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I », *Math. Ann.* **270**, p. 349–379.
- Madeline Brandt, Juliette Bruce, Melody Chan, Margarida Melo, Gwyneth Moreland et Corey Wolfe (2022). *On the Top-Weight Rational Cohomology of  $A_g$* , arXiv : [2012.02892 \[math.AG\]](#).
- Madeline Brandt, Melody Chan et Siddarth Kannan (2023). *On the weight zero compactly supported cohomology of  $\mathcal{H}_{g,n}$* , arXiv : [2307.01819 \[math.AG\]](#).
- Silvia Brannetti, Margarida Melo et Filippo Viviani (2011). « On the tropical Torelli map », *Adv. Math.* **226** (3), p. 2546–2586.
- Francis Brown (2012). « Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$  », *Ann. Math. (2)* **175** (2), p. 949–976.
- Melody Chan (2015). *Topology of the tropical moduli spaces  $M_{2,n}$* , arXiv : [1507.03878 \[math.CO\]](#).
- (2017). *Lectures on tropical curves and their moduli spaces*, arXiv : [1606.02778 \[math.AG\]](#).
- (2021). « Moduli spaces of curves : classical and tropical », *Notices Am. Math. Soc.* **68** (10), p. 1700–1713.
- Melody Chan, Carel Faber, Søren Galatius et Sam Payne (2022). *The  $S_n$ -equivariant top weight Euler characteristic of  $M_{g,n}$* , arXiv : [1904.06367 \[math.AG\]](#).
- Melody Chan, Søren Galatius et Sam Payne (2021). « Tropical curves, graph complexes, and top weight cohomology of  $\mathcal{M}_g$  », *J. Am. Math. Soc.* **34** (2), p. 565–594.
- (2022). « Topology of moduli spaces of tropical curves with marked points », in : *Facets of algebraic geometry. A collection in honor of William Fulton's 80th birthday. Volume 1*. Cambridge : Cambridge University Press, p. 77–131.
- Melody Chan, Margarida Melo et Filippo Viviani (2013). « Tropical Teichmüller and Siegel spaces », in : *Algebraic and combinatorial aspects of tropical geometry. Proceedings based on the CIEM workshop on tropical geometry, International Centre for Mathematical Meetings (CIEM), Castro Urdiales, Spain, December 12–16, 2011*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), p. 45–85.
- Thomas Church, Benson Farb et Andrew Putman (2012). « The rational cohomology of the mapping class group vanishes in its virtual cohomological dimension », *Int. Math. Res. Not.* **2012** (21), p. 5025–5030.

- Marc Culler et Karen Vogtmann (1986). « Moduli of graphs and automorphisms of free groups », *Invent. Math.* **84**, p. 91-119.
- Pierre Deligne (1971). « Théorie de Hodge. II. » *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **40**, p. 5-57.
- (2013). « Multizêtas, d'après Francis Brown », in : *Séminaire Bourbaki. Volume 2011/2012. Exposés 1043–1058*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 161-185, ex.
- Pierre Deligne et David Mumford (1969). « The irreducibility of the space of curves of a given genus », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **36**, p. 75-109.
- Antoine Ducros (2007). « Espaces analytiques  $p$ -adiques au sens de Berkovich », in : *Séminaire Bourbaki. Volume 2005/2006. Exposés Nos. 952–966*. Paris : Société Mathématique de France, 137-176, ex.
- Mathieu Dutour Sikirić, Philippe Elbaz-Vincent, Alexander Kupers et Jacques Martinet (2019). *Voronoi complexes in higher dimensions, cohomology of  $GL_N(\mathbb{Z})$  for  $N \geq 8$  and the triviality of  $K_8(\mathbb{Z})$* , arXiv : [1910.11598](https://arxiv.org/abs/1910.11598) [math.KT].
- Philippe Elbaz-Vincent, Herbert Gangl et Christophe Soulé (2013). « Perfect forms,  $K$ -theory and the cohomology of modular groups », *Adv. Math.* **245**, p. 587-624.
- Gerd Faltings et Ching-Li Chai (1990). *Degeneration of abelian varieties*. T. 22. *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, 3. Folge. Berlin etc. : Springer-Verlag.
- Ezra Getzler et Mikhaïl M. Kapranov (1998). « Modular operads », *Compos. Math.* **110** (1), p. 65-126.
- Godfrey H. Hardy et Srinivasa Ramanujan (1916). « Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. (A problem in the analytic theory of numbers.). » *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* **16**, p. 112-132.
- John L. Harer (1985). « Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces », *Ann. of Math. (2)* **121** (2), p. 215-249.
- (1986). « The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface », *Invent. Math.* **84**, p. 157-176.
- John L. Harer et Don Zagier (1986). « The Euler characteristic of the moduli space of curves », *Invent. Math.* **85**, p. 457-485.
- Johan de Jong et al. (2008-). *The Stacks Project*. Available at <http://stacks.math.columbia.edu> (cité ci-dessus avec l'acronyme : SP).
- Alexey Kalugin (2022). *Getzler–Kapranov complexes and moduli stacks of curves*, arXiv : [2010.15804](https://arxiv.org/abs/2010.15804) [math.AG].
- Maxim Kontsevich (1993). « Formal (non)-commutative symplectic geometry », in : *The Gelfand Seminars, 1990-1992*. Basel : Birkhäuser, p. 173-187.
- (1994). « Feynman diagrams and low-dimensional topology », in : *First European congress of mathematics (ECM), Paris, France, July 6-10, 1992. Volume II : Invited lectures (Part 2)*. Basel : Birkhäuser, p. 97-121.

- (2019). « Derived Grothendieck–Teichmüller group and graph complexes [after T. Willwacher] », in : *Séminaire Bourbaki. Volume 2016/2017. Exposés 1120–1135*. Société Mathématique de France (SMF), ex.
- Ronnie Lee et R. H. Szczarba (1978). « On the torsion in  $K_4(\mathbb{Z})$  and  $K_5(\mathbb{Z})$  », *Duke Math. J.* **45**, p. 101-129.
- Ib Madsen et Michael Weiss (2007). « The stable moduli space of Riemann surfaces : Mumford’s conjecture », *Ann. Math. (2)* **165** (3), p. 843-941.
- Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai et Masaaki Suzuki (2013). « Abelianizations of derivation Lie algebras of the free associative algebra and the free Lie algebra », *Duke Math. J.* **162** (5), p. 965-1002.
- David Mumford (1983). *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*. Arithmetic and geometry, Pap. dedic. I. R. Shafarevich, Vol. II : Geometry, Prog. Math. 36, 271-328 (1983).
- Frédéric Paulin (2011). « Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surface », in : 339. Séminaire Bourbaki. Vol. 2009/2010. Exposés 1012–1026, Exp. No. 1023, ix, 323-356.
- Sam Payne (2020). *Moduli spaces and tropical geometry*. eprint : <https://web.math.utexas.edu/users/sampayne/pdf/ModuliAndTropicalGeometry.pdf>.
- Sam Payne et Thomas Willwacher (2021). *Weight two compactly supported cohomology of moduli spaces of curves*, arXiv : [2110.05711](https://arxiv.org/abs/2110.05711) [math.AG].
- (2023). *Weight 11 compactly supported cohomology of moduli spaces of curves*, arXiv : [2302.04204](https://arxiv.org/abs/2302.04204) [math.AG].
- Michel Raynaud (1974). « Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl, . . . », in : *Table Ronde d’Analyse Non Archimédienne (Paris, 1972)*. T. Tome 102. Supplément au Bull. Soc. Math. France. Soc. Math. France, Paris, p. 319-327.
- Dmitry A. Stepanov (2006). « A remark on the dual complex of a resolution of singularities », *Uspekhi Mat. Nauk* **61** (1(367)), p. 185-186.
- Amaury Thuillier (2007). « Toroidal geometry and non-archimedean analytic geometry. Application to the homotopy type of certain formal schemes », *Manuscr. Math.* **123** (4), p. 381-451.
- Orsola Tommasi (2005). « Rational cohomology of the moduli space of genus 4 curves », *Compos. Math.* **141** (2), p. 359-384.
- Victor Turchin et Thomas Willwacher (2017). « Commutative hairy graphs and representations of  $\text{Out}(F_r)$  », *J. Topol.* **10** (2), p. 386-411.
- Filippo Viviani (2013). « Tropicalizing vs. Compactifying the Torelli morphism », in : *Tropical and non-Archimedean geometry. Bellairs workshop in number theory, tropical and non-Archimedean geometry, Bellairs Research Institute, Holetown, Barbados, USA, May 6–13, 2011*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS); Montreal : Centre de Recherches Mathématiques, p. 181-210.
- Karen Vogtmann (2008). « What is . . . outer space? », *Notices Am. Math. Soc.* **55** (7), p. 784-786.

Karen Vogtmann (2015). « On the geometry of outer space », *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* **52** (1), p. 27-46.

Thomas Willwacher (2015). « M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck–Teichmüller Lie algebra », *Invent. Math.* **200** (3), p. 671-760.

Jérôme Poineau

Normandie Univ., UNICAEN, CNRS,  
Laboratoire Nicolas Oresme,  
14000 Caen, France

*E-mail* : [jerome.poineau@unicaen.fr](mailto:jerome.poineau@unicaen.fr)