Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 24 JUIN 2023

Exposé n° 1209

Daniel JUTEAU

Catégories tensorielles symétriques en caractéristique *p*, *d'après K. Coulembier, P. Etingof, V. Ostrik...*

Le formalisme tannakien a d'abord été développé par l'école de Grothendieck pour les besoins de la théorie des motifs. L'idée principale est que se donner un groupe (algébrique affine sur un corps k, disons algébriquement clos) est essentiellement équivalent à se donner sa catégorie de représentations en tant que catégorie monoïdale symétrique, munie du foncteur d'oubli (dit foncteur fibre) vers la catégorie des espaces vectoriels : une catégorie pré-tannakienne (monoïdale symétrique, et vérifiant des conditions nécessaires naturelles) admettant un « foncteur fibre » est forcément équivalente à la catégorie des représentations du groupe des automorphismes tensoriels du foncteur fibre.

Dans le cas de la caractéristique 0, Deligne a montré en 1990 qu'une catégorie pré-tannakienne $\mathcal{C}$ admet un foncteur fibre (i.e. est tannakienne) si et seulement si tout objet a une puissance alternée qui est nulle. En 2002, il a montré un résultat plus général : si on suppose seulement que $\mathcal{C}$ est à croissance modérée (pour tout objet V, la longueur de $V^{\otimes n}$ est sous-exponentielle), alors $\mathcal{C}$ a une sorte de foncteur fibre, non pas vers les espaces vectoriels a priori, mais vers les super espaces vectoriels (espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués).

L'extension de ces résultats au cas où k est de caractéristique $p > 0$ a été un problème ouvert pendant une vingtaine d'années, mais de grands progrès ont été faits récemment. En particulier, Ostrik a identifié une catégorie de Verlinde Ver_p comme but naturel des « foncteurs fibres » en caractéristique p. Plus récemment, Coulembier, Etingof et Ostrik ont donné une certaine réponse à notre question : ils ont caractérisé les catégories pré-tannakiennes admettant un foncteur tensoriel symétrique vers Ver_p comme celles qui sont Frobenius-exactes et de croissance modérée (cette dernière condition pouvant être remplacée par : tout objet est annulé par une puissance alternée). Un cas particulier, qui est aussi une étape importante dans la preuve, est une caractérisation des catégories tannakiennes en caractéristique p. Nous donnerons un aperçu de ces résultats, ainsi que des exemples d'applications aux représentations modulaires.

Symmetric tensor categories in characteristic *p*, *after K. Coulembier, P. Etingof, V. Ostrik...*

The tannakian formalism was first developed by the Grothendieck school, for the needs of the theory of motives. The main idea is that giving a group (algebraic, affine over a field k, say algebraically closed), is essentially equivalent as giving its category of representations as a monoidal symmetric category, together with the forgetful functor (aka the fiber functor) to the category of vector spaces : a pre-Tannakian category (i.e. a symmetric monoidal category satisfying natural necessary conditions) admitting a fiber functor is necessarily equivalent to the category of representations of the automorphism group of the fiber functor.

In the characteristic zero case, Deligne showed in 1990 that a pre-Tannakian category $\mathcal{C}$ has a fiber functor (i.e. is Tannakian) if and only if every object has some alternating power which vanishes. In 2002, he showed a more general result : if we only assume that $\mathcal{C}$ has moderate growth (for each object V, the length of is subexponential), then $\mathcal{C}$ has a kind of fiber functor, not quite to vector spaces, but to super vector spaces (i.e. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded vector spaces).

Extending those results to the case where k has characteristic $p > 0$ has been an open problem for about 20 years, but there has been a lot of progress recently. In particular, Ostrik identified a Verlinde category Ver_p as a naturel range for the "fiber functors" in characteristic p. More recently, Coulembier, Etingof and Ostrik gave some answer to our question : they characterized pre-Tannkian categories admitting a symmetric tensor functor to Ver_p as those which are Frobenius-exact and of moderate growth (the latter condition can be replaced by : every object is killed by some alternating power). A particular case, which is also an important step in the proof, is a characterization of Tannakian categories in characteristic p. We will give an outline of those results, and some examples of applications to modular representations.

Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.
The text of the talk will be made available after the Seminar.