

# Séminaire N. Bourbaki

**SAMEDI 24 JUIN 2023**

Exposé n° 1208

Anne-Laure DALIBARD

## **Non-unicité des solutions de Leray de l'équation de Navier–Stokes avec terme source,**

*d'après Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo*

---

La dynamique des fluides visqueux incompressibles est décrite par les équations de Navier–Stokes, pour lesquelles on dispose principalement de deux façons de construire des solutions en dimension trois. La première, due à Leray et étendue par Hopf, repose sur une méthode de compacité, et conduit à l'existence de solutions dites solutions « faibles », globales (c'est-à-dire définies pour tout temps). La seconde, due initialement à Fujita et Kato et généralisée ensuite, consiste à construire des solutions dites « fortes » par une méthode de point fixe, dans un espace fonctionnel à forte régularité. Les solutions fortes ainsi obtenues sont naturellement uniques, mais sont a priori locales. Cette dichotomie conduit naturellement à la question suivante, restée ouverte pendant presque un siècle : les solutions de Leray–Hopf sont-elles uniques ?

Récemment, Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo ont apporté une réponse négative à cette question fondamentale, en considérant le cas d'un fluide initialement au repos et soumis à une force extérieure. Leur preuve repose sur la construction d'un profil linéairement instable dans des variables auto-similaires et s'inspire d'un résultat de Vishik pour l'équation d'Euler, ainsi que des travaux de Sverak et de ses collaborateurs.

## **Non uniqueness of Leray's solutions to the Navier–Stokes system with a forcing term,**

*after Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo*

---

The dynamics of viscous incompressible fluids is described by the Navier–Stokes equations, for which there are mainly two ways to construct solutions in dimension three. The first one, due to Jean Leray and extended by Eberhard Hopf, is based on a compactness method, and leads to the existence of global « weak » solutions. The second, initially due to Fujita and Kato and later generalised, consists in constructing "strong" solutions by a fixed point method, in a functional space with high regularity. The strong solutions thus obtained are naturally unique, but are only local in time. This dichotomy naturally leads to the following question, which has remained open for almost a century : are Leray–Hopf solutions unique ?

Recently, Dallas Albritton, Elia Brué and Maria Colombo gave a negative answer to this fundamental question, considering the case of a fluid initially at rest and subject to an external force. Their proof is based on the construction of a linearly unstable profile in self-similar variables and is inspired by a result of Vishik for the Euler equation, as well as the work of Sverak and his collaborators.

---

*Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.*

*The text of the talk will be made available after the Seminar.*