Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 1 AVRIL 2023

Exposé n° 1205

Jonathan HICKMAN

Pointwise convergence for the Schrödinger equation, *after Xiumin Du and Ruixiang Zhang*

For an initial datum $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, consider the linear Schrödinger equation

$$\begin{cases} iu_t - \Delta_x u = 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

In 1980, Carleson asked which additional conditions on f guarantee

$$(\star) \qquad \lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x) \qquad \text{for almost every } x \in \mathbf{R}^n.$$

More precisely, what is the minimal Sobolev regularity index s such that $(\star)$ holds whenever $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$?

Whilst the $n = 1$ case was fully understood by the early 1980s, in higher dimensions the situation is much more nuanced. Nevertheless, a recent series of dramatic developments brought about an almost complete resolution of the problem. First Bourgain 2016 produced a subtle counterexample demonstrating that pointwise convergence can fail for certain $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$ with $s < \frac{n}{2(n+1)}$. Complementing this, convergence was then shown to hold for $s > \frac{n}{2(n+1)}$ when $n = 2$ in a landmark paper of Du, Guth and Li 2017 and later in all dimensions in equally important work of Du and Zhang 2019.

This seminar will explore the positive result of Du and Zhang 2019. The argument combines sophisticated modern machinery from harmonic analysis such as the multilinear Strichartz estimates of Bennett, Carbery and Tao 2006 and the ℓ^2 decoupling theory of Bourgain and Demeter 2015. However, equally important are a variety of elementary guiding principles, rooted in Fourier analysis, which govern the behaviour of solutions to the Schrödinger equation. The talk will focus on these basic Fourier analytic principles, building intuition and presenting a powerful toolbox for tackling problems in modern PDE and harmonic analysis.

Convergence ponctuelle pour l'équation de Schrödinger, *d'après Xiumin Du et Ruixiang Zhang*

Pour une donnée initiale $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, considérons l'équation de Schrödinger linéaire

$$\begin{cases} iu_t - \Delta_x u = 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

En 1980, Carleson demande quelles conditions supplémentaires sur f guarantissent

$$(\star) \qquad \lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x) \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbf{R}^n.$$

Plus précisément, quelle est l'indice de régularité Sobolev minimal s s tel que $(\star)$ ait lieu pour tout $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$?

Alors que le cas de $n = 1$ était entièrement compris au début des années 1980, la situation est beaucoup plus nuancée en dimension supérieure. Néanmoins, une série récente de développements spectaculaires a permis de résoudre presque complètement le problème. Tout d'abord, Bourgain en 2016 a produit un contre-exemple subtil démontrant que la convergence ponctuelle peut échouer pour certains $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$ avec $s < \frac{n}{2(n+1)}$. En complément, la convergence a ensuite été démontrée pour $s > \frac{n}{2(n+1)}$ lorsque $n = 2$ dans un article marquant de Du, Guth et Li (2017) et plus tard en toute dimension dans un travail tout aussi important de Du et Zhang en 2019.

Ce séminaire explorera ce résultat positif de Du et Zhang de 2019. L'argument combine des mécanismes modernes sophistiqués de l'analyse harmonique tels que les estimées multilinéaires de Strichartz de Bennett, Carbery et Tao (2006) et la théorie de découplage ℓ^2 de Bourgain et Demeter (2015). Cependant, une série de principes directeurs élémentaires, enracinés dans l'analyse de Fourier, qui régissent le comportement des solutions de l'équation de Schrödinger, sont tout aussi importants. L'exposé se concentrera sur ces principes de l'analyse de Fourier, en développant l'intuition et en présentant une boîte à outils puissante pour aborder les problèmes des EDP modernes et de l'analyse harmonique.

Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.
The text of the talk will be made available after the Seminar.