

# Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 1 AVRIL 2023

Exposé n° 1204

Étienne GHYS

## **Le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension 2 qui respectent l'aire et l'orientation n'est pas un groupe simple, d'après D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière et S. Seyfaddini**

---

Depuis la fin des années 1970, on sait que la composante neutre du groupe des difféomorphismes à support compact d'une variété connexe est un groupe simple. Dans le cas des difféomorphismes qui préservent une forme volume ou une forme symplectique, on dispose d'un résultat analogue : il y a alors un sous-groupe « évident » qui est simple. Pour les homéomorphismes qui respectent le volume, la situation est comprise lorsque la dimension est supérieure ou égale à 3. Le cas des surfaces, et tout particulièrement de la sphère de dimension 2, a résisté à de nombreux efforts depuis une quarantaine d'années. Le théorème de D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière et S. Seyfaddini est une surprise : le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension 2 qui respectent l'aire et l'orientation n'est pas un groupe simple. La démonstration est un tour de force et fait largement usage de l'homologie de Floer périodique. J'essaierai de présenter le contexte ainsi que les grandes lignes de ce beau résultat.

## **The group of area-preserving and orientation-preserving homeomorphisms of the 2-dimensional sphere is not a simple group, after D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière and S. Seyfaddini**

---

Since the late 1970s, it has been known that the neutral component of the group of compactly supported diffeomorphisms of a connected manifold is a simple group. In the case of diffeomorphisms preserving a volume form or a symplectic form, we have a similar result : there is then an "obvious" subgroup that is simple. For volume-preserving homeomorphisms, the situation is understood when the dimension is greater than or equal to 3. The case of surfaces, and especially of the 2-dimensional sphere, has resisted many efforts over the last forty years. The theorem of D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière and S. Seyfaddini is a surprise : the group of homeomorphisms of the 2-dimensional sphere which respect the area and orientation is *not* a simple group. The proof is a tour de force and makes extensive use of periodic Floer homology. I will try to present the context as well as the main lines of this beautiful result.

---

*Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.  
The text of the talk will be made available after the Seminar.*