Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 18 JUIN 2022

Exposé n° 1196

Sarah PELUSE

Recent progress on bounds for sets with no three terms in arithmetic progression,
d'après Bloom, Sisask, Croot, Lev, Pach, Ellenberg, Gijswijt

A famous conjecture of Erdős states that if S is a subset of the positive integers and the sum of the reciprocals of elements of S diverges, then S contains arbitrarily long arithmetic progressions. If one could prove, for each positive integer k, sufficiently good bounds for the size of the largest subset of the first N integers lacking k-term arithmetic progressions, then Erdős's conjecture would follow. There is thus great interest in the problem of proving the strongest possible bounds for sets lacking arithmetic progressions of a fixed length. In this talk, I will survey the recent advances of Bloom–Sisask on this problem for length three progressions and of Croot–Lev–Pach and Ellenberg–Gijswijt on the analogous problem in $\mathbf{F}_3^n$ (the "cap set problem"). These two advances rely on very different techniques —Fourier analytic methods and a version of the polynomial method, respectively— and I will give an overview of both.

Progrès récents sur la taille des ensembles sans progression arithmétique de longueur trois,
after Bloom, Sisask, Croot, Lev, Pach, Ellenberg, Gijswijt

Une célèbre conjecture d'Erdős affirme que si la somme des inverses d'un sous-ensemble S des entiers naturels est divergente, alors S contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire. Si l'on pouvait trouver, pour tout entier k, des bornes efficaces sur la taille du plus grand ensemble contenu dans les N premiers entiers et ne possédant pas de progression arithmétique de longueur k, la conjecture de Erdős s'ensuivrait. Il y a donc une attention considérable au problème de trouver les meilleures bornes pour la taille des ensembles sans progression arithmétique de longueur fixée. Dans cet exposé, je ferai le point sur les avancées récentes de Bloom–Sisask sur ce problème pour les progressions de longueur trois et de Croot–Lev–Pach et Ellenberg–Gijswijt sur le problème analogue dans $\mathbf{F}_3^n$ (le « problème de l'ensemble indépendant maximal », « *cap set problem* »). Ces deux avancées reposent sur des techniques très différentes —des méthodes de Fourier analytiques et une version de la méthode polynomiale, respectivement— que je présenterai au cours de l'exposé.

Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.
The text of the talk will be made available after the Seminar.