Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 2 AVRIL 2022

Exposé n° 1194
Yves MEYER

Mesures cristallines et applications, *d'après Pavel Kurasov, Alexander Olevskii, Peter Sarnak et Maryna Viazovska*

Une mesure cristalline est une mesure atomique sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est localement fini et dont la transformée de Fourier au sens des distributions est également une mesure atomique portée par un ensemble localement fini. L'exemple le plus simple est le peigne de Dirac. Les mesures cristallines ont été définies et étudiées dès les années cinquante. Jean-Pierre Kahane et Szolem Mandelbrojt (1958) ont cherché à déterminer les fonctions méromorphes dans le plan complexe ayant un seul pole en $s = 1$ et qui vérifient le même type d'équation fonctionnelle que la fonction zeta. Ces auteurs montrèrent qu'une mesure cristalline est toujours attachée à une telle fonction méromorphe. Cette même année, André Guinand construisait des mesures cristallines très différentes des peignes de Dirac. Puis le sujet fut abandonné pendant près de trente ans. La découverte des quasicristaux par Don Shechtman en 1982 renouvela l'intérêt porté aux mesures cristallines. En premier lieu Nir Lev et Alexander Olevskii observèrent que la preuve donnée par Guinand était incomplète et construisirent une mesure cristalline sur la droite réelle qui ne se réduit pas à un peigne de Dirac. Nous verrons ensuite que la version discrètisée des mesures cristallines est reliée à un problème classique en traitement du signal et de l'image. Enfin les mesures cristallines sont présentes dans le problème suivant. Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Une fonction f de la classe de Schwartz peut-elle être reconstruite en utilisant seulement sa restriction à Λ et la restriction de sa transformée de Fourier à F ? En résolvant ce problème Maryna Viazovska a, du même coup, trouvé la solution du problème de Kepler d'empilement des boules en dimension 8 et 24. Nous terminerons cet exposé par un théorème remarquable dû à D. Radchenko, A. Bondarenko et K. Seip. Il s'agit d'une variante, sans terme intégral, de la formule sommatoire de Riemann–Weil.

Crystalline measures and applications, *after Pavel Kurasov, Alexander Olevskii, Peter Sarnak. and Maryna Viazovska*

A crystalline measure is an atomic measure on $\mathbb{R}^n$ whose support is locally finite and whose Fourier transform in the sense of distributions is also an atomic measure carried by a locally finite set. The simplest example is the Dirac comb. Crystalline measures have been defined and studied since the 1950s. Jean-Pierre Kahane and Szolem Mandelbrojt (1958) sought to determine meromorphic functions in the complex plane with a single pole at $s = 1$ and which verify the same type of functional equation as the zeta function. These authors showed that a crystalline measure is always attached to such a meromorphic function. In the same year,

André Guinand constructed crystalline measures very different from Dirac combs. Then the subject was abandoned for almost thirty years. The discovery of quasicrystals by Don Shechtman in 1982 renewed interest in crystalline measures. First Nir Lev and Alexander Olevskii observed that the proof given by Guinand was incomplete and constructed a crystalline measure on the real line that does not reduce to a Dirac comb. We will then see that the discretized version of crystalline measures is related to a classical problem in signal and image processing. Finally, crystalline measures are present in the following problem. Let $Lambda \subset \mathbb{R}^n$ and $F \subset \mathbb{R}^n$ be two locally finite sets. Can a function f of the Schwartz class be reconstructed using only its restriction to $Lambda$ and the restriction of its Fourier transform to F? By solving this problem Maryna Viazovska has, at the same time, found the solution of the Kepler problem of stacking balls in dimension 8 and 24. We will end this presentation with a remarkable theorem due to D. Radchenko, A. Bondarenko and K. Seip. It is a variant, without integral term, of the summation formula of Riemann-Weil.

Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.
The text of the talk will be made available after the Seminar.