Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 27 NOVEMBRE 2021

Exposé n° 1187

Uli WAGNER

High-Dimensional Expanders,
after Gromov, Kaufman, Kazhdan, Lubotzky, and others

Expander graphs (sparse but highly connected graphs) have, since their inception, been the source of deep links between Mathematics and Computer Science as well as applications to other areas. In recent years, a fascinating theory of high-dimensional expanders has begun to emerge, which is still in a formative stage but has nonetheless already lead to a number of striking results. Unlike for graphs, in higher dimensions there is a rich array of non-equivalent notions of expansion (coboundary expansion, cosystolic expansion, topological expansion, spectral expansion, etc.), with differents strengths and applications. In this talk, we will survey this landscape of high-dimensional expansion, with a focus on two main results. First, we will present Gromov's Topological Overlap Theorem, which asserts that coboundary expansion (a quantitative version of vanishing mod 2 cohomology) implies topological expansion (roughly, the property that for every map from a simplicial complex to a manifold of the same dimension, the images of a positive fraction of the simplices have a point in common). Second, we will outline a construction of bounded degree 2-dimensional topological expanders, due to Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky.

Expanseurs de dimension supérieure,
d'après Gromov, Kaufman, Kazhdan, Lubotzky et d'autres

Les graphes expanseurs (creux mais très connexes) ont été, depuis leur conception, la source de liens profonds antre les mathématiques et l'informatique ainsi que d'applications à d'autres domaines. Ces dernières années, une théorie passionnante des expanseurs en dimension supérieure a vu le jour ; encore en phase de développement, cette théorie a néanmoins donné lieu à nombre de résultats frappants. Contrairement au cas des graphes, il y a en dimension supérieure une panoplie de notions d'expansion non équivalentes (des cobords, cosystolique, topologique, spectrale, etc.) avec différents avantages et applications. Dans cet exposé, nous exposerons un panorama de l'expansion en dimension supérieure en mettant en avant deux résultats importants. D'abord nous présenterons le théorème de chevauchement topologique de Gromov qui affirme que l'expansion des cobords (une version quantitative de l'annulation de la cohomologie modulo 2) implique l'expansion topologique (en gros la propriété que, pour toute application d'un complexe simplicial vers une variété de la même dimension, une fraction positive des simplexes ont une image commune). Ensuite,

nous donnerons les grandes lignes d'une construction d'expanseurs topologiques de dimension 2 et de degré borné, due à Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky.