Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
74e année, 2021–2022, nº 1183

FLOT DE RICCI ET DIFFÉOMORPHISMES DE VARIÉTÉS DE DIMENSION 3.
[D'après R. Bamler et B. Kleiner]

par **Sylvain Maillot**

1. TYPE D'HOMOTOPIE DES GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES

Dans tout cet exposé M désigne une variété lisse, sans bord, orientable, connexe et compacte. On munit l'ensemble $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M de la topologie $\mathcal{C}^\infty$. On note $\mathrm{Diff}^+(M)$ (resp. $\mathrm{Diff}^-(M)$) l'ensemble des difféomorphismes de M qui préservent (resp. renversent) l'orientation. Il est bien connu que $\mathrm{Diff}(M)$ est une variété de Fréchet localement homéomorphe à l'espace des champs de vecteurs lisses sur M. Elle a le type d'homotopie d'un CW complexe (Palais, 1966) et est déterminée à homéomorphisme près par son type d'homotopie (Bessaga et Pełczyński, 1975). On est donc conduit au problème suivant :

Problème. — *Calculer les groupes d'homotopie de* $\mathrm{Diff}(M)$.

Comme toujours en topologie des variétés, les méthodes utilisées pour résoudre ce problème dépendent fortement de la dimension de M. Dans la suite de cette section, nous faisons un rapide tour d'horizon des dimensions autres que la dimension 3, à laquelle nous allons consacrer le reste de ce texte. Nous renvoyons à Hatcher (2003) pour un survol plus détaillé.

On note S^n la sphère unité dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$. Son groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(S^n)$ s'identifie au groupe orthogonal $\mathrm{O}(n+1)$.

Si M est de dimension 1, elle est difféomorphe au cercle S^1. Il est facile de voir que l'injection canonique de $\mathrm{Isom}(S^1)$ dans $\mathrm{Diff}(S^1)$ est une équivalence d'homotopie. En particulier, $\mathrm{Diff}(S^1)$ a exactement deux composantes connexes, qui sont $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ et $\mathrm{Diff}^-(S^1)$. Le groupe $\pi_1 \mathrm{Diff}^+(S^1)$ est infini cyclique, engendré par un lacet de rotations dont l'angle varie de 0 à 2π. Pour tout $k \geq 2$ on a $\pi_k \mathrm{Diff}^+(S^1) = 0$.

Passons à la dimension 2. S. Smale a démontré que l'énoncé analogue est vrai :

Théorème 1.1 (Smale, 1959). — *L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(S^2)$ *dans* $\mathrm{Diff}(S^2)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Ainsi, $\mathrm{Diff}(S^2)$ a de nouveau deux composantes connexes, $\mathrm{Diff}^+(S^2)$ et $\mathrm{Diff}^-(S^2)$. Le groupe $\pi_1 \mathrm{Diff}^+(S^2)$ est cyclique d'ordre 2, engendré par un lacet de rotations d'axe fixe et dont l'angle varie de 0 à 2π.

Le cas suivant est celui du tore de dimension 2. Son premier groupe d'homologie à coefficients entiers est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. On démontre que l'application de $\mathrm{Diff}(T^2)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ qui à un difféomorphisme associe son action en homologie induit une bijection de $\pi_0 \mathrm{Diff}(T^2)$ sur $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$. De plus, chaque composante connexe de $\mathrm{Diff}(T^2)$ a le type d'homotopie de T^2.

Dans le cas d'une surface hyperbolique, chaque composante connexe de $\mathrm{Diff}(M)$ est contractile (Earle et Eells, 1969 ; Gramain, 1973, 1974). Cela est lié au fait que l'espace de Teichmüller est contractile.

Nous renvoyons à Hatcher (2003) pour une discussion des « grandes » dimensions, c'est-à-dire $n \geq 5$. Nous nous contenterons de signaler que l'énoncé analogue au théorème 1.1 est faux : par exemple, il existe des difféomorphismes de S^6 qui préservent l'orientation, mais ne sont pas isotopes à l'identité. C'est ce fait qui a permis à Milnor de démontrer l'existence de structures lisses exotiques sur S^7.

Enfin, il y a très peu de résultats en dimension 4. On ne sait rien du type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(S^4)$, ni de l'existence d'éventuelles structures lisses exotiques sur S^4.

2. CAS DE LA DIMENSION 3

Supposons à présent que M est de dimension 3. Le résultat fondamental est l'analogue du théorème 1.1. Conjecturé par Smale, il a été démontré par Hatcher :

Théorème 2.1 (Hatcher, 1983). — *L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(S^3)$ *dans* $\mathrm{Diff}(S^3)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Il est naturel de chercher à généraliser ce résultat au cas où M est géométrique au sens de W. Thurston, c'est-à-dire admet une métrique riemannienne localement isométrique à l'une des huit géométries modèles S^3, $S^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^3$, Nil, Sol, $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})}$, $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{H}^3$ (Boileau, Maillot et Porti, 2003 ; Scott, 1983 ; Thurston, 1997). On pourrait s'attendre à ce que le type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(M)$ soit donné par un groupe de Lie, par exemple le groupe d'isométries pour une métrique bien choisie, ou peut-être un groupe un peu plus gros, comme celui des transformations affines. Or Hatcher a démontré également le résultat suivant :

Théorème 2.2 (Hatcher, 1981). — *L'espace* $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$ *a le type d'homotopie de* $\mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Diff}(S^2) \times \Omega\, \mathrm{Diff}(S^2)$.

On rappelle que ΩX est l'espace des lacets pointés dans X. En combinant les théorèmes 1.1 et 2.2, on obtient que $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$ a le type d'homotopie de $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(3) \times \Omega\, \mathrm{SO}(3)$. Comme $H_{2k}(\Omega\, \mathrm{SO}(3)) \neq 0$ pour tout entier k, il en résulte qu'il n'existe aucun groupe de Lie homotopiquement équivalent à $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$.

Le cas de $S^1 \times S^2$ est cependant exceptionnel. Pour les autres variétés géométriques, on conjecture que le type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(M)$ est bien celui d'un groupe de Lie qui reflète la géométrie. Cette conjecture est aujourd'hui démontrée dans un grand nombre de cas. Nous limiterons notre discussion aux cas les plus rigides des variétés sphériques et hyperboliques, et renvoyons encore à Hatcher (2003), ainsi qu'à la bibliographie de Bamler et Kleiner (2019b) pour une discussion des autres cas.

Rappelons que M est dite *sphérique* (resp. *hyperbolique*) si elle admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à 1 (resp. -1). Une telle métrique est unique à l'action de $\mathrm{Diff}(M)$ près : cela résulte du théorème de rigidité de G. De Rham dans le cas sphérique (De Rham, 1950) et de celui de G. Mostow dans le cas hyperbolique (Mostow, 1973). La conjecture de Smale généralisée affirme que l'injection canonique de $\mathrm{Isom}(M)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est une équivalence d'homotopie.

Dans le cas hyperbolique, Gabai a démontré cette conjecture :

Théorème 2.3 (Gabai, 2001). — *Soit M une variété de dimension 3 hyperbolique. L'injection canonique de $\mathrm{Isom}(M)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est une équivalence d'homotopie.*

Le cas des variétés sphériques a une longue histoire, résumée dans la monographie Hong, Kalliongis, McCullough et Rubinstein (2012). Les méthodes topologiques permettent de montrer que $\pi_0 \, \mathrm{Isom}(M) = \pi_0 \, \mathrm{Diff}(M)$ pour toutes les variétés sphériques, en calculant explicitement ces groupes. Elles permettent également de traiter l'homotopie supérieure dans de nombreux cas, en se ramenant au théorème 2.1.

En 2017, Bamler et Kleiner ont démontré la conjecture de Smale généralisée pour toutes les variétés sphériques sauf $\mathbf{R}P^3$ (Bamler et Kleiner, 2017a). Cette preuve utilise le théorème 2.1, et ne redémontre donc pas le cas de S^3. Elle permet également de redémontrer le théorème 2.3, toujours modulo le théorème 2.1.

En 2019 les mêmes auteurs ont finalement obtenu une preuve de la conjecture valable dans tous les cas, et qui n'utilise pas le théorème 2.1 :

Théorème 2.4 (Bamler et Kleiner, 2019b). — *Soit M une variété de dimension 3 sphérique. L'injection canonique de $\mathrm{Isom}(M)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est une équivalence d'homotopie.*

La méthode utilisée permet également de donner une nouvelle preuve du théorème 2.3.

3. ESPACES DE MÉTRIQUES RIEMANNIENNES

Dans toute la suite du texte, on suppose que M est de dimension 3. On note $\mathrm{Met}(M)$ l'espace des métriques riemanniennes lisses sur M. Muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$, c'est une variété de Fréchet. On note $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ le sous-espace formé des métriques localement isométriques à S^3 ou $S^2 \times \mathbf{R}$.

Théorème 3.1 (Bamler et Kleiner, 2019b). — *L'espace* $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ *est vide ou contractile.*

Le théorème 2.4 se déduit du théorème 3.1 de la façon suivante : soit M une 3-variété sphérique. Fixons $g_0 \in \mathrm{Met}_{CC}(M)$ et considérons l'application $\pi : \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Met}_{CC}(M)$ qui à ϕ associe $\phi_*(g_0)$. D'après De Rham (1950) l'application π est surjective. On montre que c'est en fait une fibration, dont la fibre est par définition $\mathrm{Isom}(M, g_0)$. On conclut grâce à la suite exacte longue en homotopie.

De façon similaire, le théorème 3.1 permet de donner une nouvelle démonstration du théorème 2.2, ainsi que la détermination du type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}P^3 \# \mathbf{R}P^3)$.

Notons $\mathrm{Met}_{PSC}(M)$ l'espace des métriques à courbure scalaire strictement positive sur M. Cet espace est non-vide si et seulement si M est une somme connexe de variétés sphériques et/ou de copies de $S^1 \times S^2$ (Perelman, 2003) :

Théorème 3.2 (Bamler et Kleiner, 2019b). — *L'espace* $\mathrm{Met}_{PSC}(M)$ *est vide ou contractile.*

Le théorème 3.2 vient compléter un résultat de F. Coda Marques qui prouvait la connexité par arcs de cet espace (Marques, 2012). Notons qu'en grandes dimensions cet espace n'est en général pas contractile, ni même connexe par arcs. Nous renvoyons à Rosenberg (2007) pour un survol.

4. L'APPROCHE PAR LE FLOT DE RICCI

Supposons M sphérique. Comme $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ est une variété de Fréchet séparable, pour démontrer le théorème 3.1, il suffit de prouver que tous ses groupes d'homotopie sont nuls.

Soit k un entier naturel, et soit f une application continue de S^k dans $\mathrm{Met}_{CC}(M)$. Comme l'espace $\mathrm{Met}(M)$ est contractile, f admet un prolongement $\bar{f} : B^{k+1} \to \mathrm{Met}(M)$. Si l'on disposait d'une façon canonique de déformer une métrique riemannienne quelconque en une métrique à courbure constante, et ce de façon continue par rapport à un multi-paramètre, on obtiendrait une application $g : B^{k+1} \to \mathrm{Met}_{CC}(M)$ qui prolonge f, ce qui résoudrait notre problème.

Le point de départ est de considérer les solutions d'une équation aux dérivées partielles introduite par R. Hamilton :

$$\frac{dg}{dt} = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}, \tag{1}$$

où Ric désigne la courbure de Ricci. Nous appelerons *flot de Ricci* un couple $(N, \{g(t)\}_{t\in I})$ où N est une variété lisse (toujours sans bord, mais pas nécessairement compacte) et $g(\cdot)$ est une famille de métriques riemanniennes sur N dépendant de façon lisse d'un paramètre t prenant ses valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et vérifiant l'équation (1).

Pour x dans N et t dans I on note $B(x,t,r)$ la boule de centre x et de rayon r pour la métrique $g(t)$. On note $R(x,t)$ la courbure scalaire au point x pour la métrique $g(t)$.

Pour toute métrique g_0 sur notre variété compacte M, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe un unique flot de Ricci $(M, \{g(t)\}_{t\in[0,\varepsilon[})$ satisfaisant la condition initiale $g(0) = g_0$ (Hamilton, 1982). On peut donc considérer le temps $T_{max} \in]0,+\infty]$ tel que l'intervalle de définition maximal d'un tel flot soit $[0, T_{max}[$. Si $T_{max} < +\infty$ on dit que le flot admet une singularité au temps T_{max}.

La première intuition est que l'équation (1) est similaire à l'équation de la chaleur ; elle a donc des propriétés régularisantes et dans les cas les plus favorables, la courbure tend à s'uniformiser :

Théorème 4.1 (Hamilton, 1982). — *Supposons que g_0 est à courbure de Ricci strictement positive. Alors $T_{max} < +\infty$ et il existe une fonction $\lambda : [0, T_{max}[\to]0,+\infty[$ ayant pour limite $+\infty$ en T_{max} telle que la métrique rééchelonnée $\lambda(t)g(t)$ converge à difféomorphisme près vers une métrique à courbure constante.*

En général, si le flot admet une singularité, on sait que le maximum de la courbure scalaire tend vers l'infini quand $t \to T_{max}$. On peut considérer l'ensemble $\Omega \subset M$ des points x tels que la courbure scalaire en (x,t) reste bornée quand $t \to T_{max}$. L'ensemble Ω est un ouvert de M (Perelman, 2003). On sait que sur Ω le flot converge, mais la théorie générale ne permet pas de prolonger le flot, puisque en général Ω n'est pas compact.

Dans sa preuve de la conjecture de géométrisation, Perelman introduit une fonction de cutoff $\delta(t)$ qui permet de prolonger le flot au-delà de T_{max} en effectuant des chirurgies aux petites échelles. Cette contruction est insuffisante pour démontrer le théorème 3.1, car elle n'est pas continue par rapport à un paramètre. Toutefois, l'analyse des régions où la courbure scalaire devient grande joue un rôle important, et nous allons la discuter de façon détaillée dans la section suivante.

5. KAPPA-SOLUTIONS ET VOISINAGES CANONIQUES

Un élément crucial qui a permis à Perelman de réaliser le programme de Hamilton pour résoudre la conjecture de géométrisation est l'étude d'une classe de flots de Ricci, appelés κ-solutions, qui servent de modèles pour l'étude locale des régions de grande courbure des flots de Ricci compacts. La définition peut être donnée en toutes dimensions, mais nous nous contenterons ici de la dimension 3.

Définition 5.1. — *Soit $\kappa > 0$. On appelle κ-*solution *un flot de Ricci $(N, \{g(t)\}_{t\in]-\infty,0]}$ où N est une variété de dimension 3, satisfaisant les conditions ci-dessous :*

1. *Pour tout t, la métrique $g(t)$ est complète, à courbure scalaire > 0 et à courbure sectionnelle ≥ 0.*

2. *La courbure sectionnelle de $g(t)$ est uniformément bornée sur tout intervalle compact $I \subset]-\infty, 0]$.*
3. *Pour tout $(x,t) \in N \times]-\infty, 0]$ et tout $r > 0$, si toutes les courbures sectionnelles sur $B(x,t,r)$ sont comprises entre $-r^{-2}$ et r^{-2}, alors $\mathrm{Vol}(B(x,t,r)) \geq \kappa r^3$.*

Voici une liste d'exemples de κ-solutions :

1. La sphère $N = S^3$ et $g(t) = (1-4t)g_{S^3}$.
2. Le cylindre $N = S^2 \times \mathbf{R}$ et $g(t) = (1-2t)g_{S^2} + g_{\mathbf{R}}$.
3. Le soliton de Bryant $N = \mathbf{R}^3$ et $g(t)$ est pour tout t rotationnellement symétrique ; la géométrie asymptotique à t fixé et $x \to \infty$ est cylindrique.
4. $N = S^3$ ou $N = \mathbf{R}P^3$, $g(t)$ est pour tout t rotationnellement symétrique.

Ici g_{S^3}, g_{S^2} et $g_{\mathbf{R}}$ sont les métriques standard convenablement normalisées.

Perelman a développé la théorie générale des κ-solutions. Il a démontré que l'espace des κ-solutions est compact modulo échelle, et que pour tout t la géométrie de $(N, g(t))$ est cylindrique en dehors d'un compact. Brendle (Brendle, 2018, 2019) (voir aussi Bamler et Kleiner, 2019a) a démontré que les seules κ-solutions sont celles ci-dessus ainsi que leurs quotients métriques.

Nous allons à présent expliquer comment les κ-solutions interviennent dans la théorie des flots de Ricci compacts. Pour cela nous donnons deux définitions.

Définition 5.2. — *Soit (M_0, g_0, x_0) une variété riemannienne pointée. On dit que la variété riemannienne pointée (M, g, x) est* ε-proche *de (M_0, g_0, x_0) s'il existe un plongement ϕ de $B(x_0, \varepsilon^{-1})$ dans M tel que $\phi(x_0) = x$ et la norme $\mathcal{C}^{1/\varepsilon}$ du tenseur $\phi^* g - g_0$ est majorée par ε.*

On dit que (M, g, x) est ε-homothétique *à (M_0, g_0, x_0) s'il existe $\lambda > 0$ tel que $(M, \lambda g, x)$ est ε-proche de (M_0, g_0, x_0).*

Définition 5.3. — *Soit $(M, \{g(t)\}_{t \in I})$ un flot de Ricci. On dit que ce flot a la* propriété des voisinages canoniques aux échelles $\leq r$ avec précision ε *si pour tout $(x,t) \in M \times I$ satisfaisant $R(x,t) > r^{-2}$ il existe $\kappa > 0$, une κ-solution $(N, h(\cdot))$ et un point $x_0 \in N$ tel que $R(x_0, 0) = 1$ et $(M, g(t), x)$ est ε-homothétique à $(N, g(0), x_0)$.*

Une métrique riemannienne sur M est *normalisée* si la courbure sectionnelle est bornée en valeur absolue par 1 et chaque boule de rayon 1 a un volume minoré par la moitié du volume de la boule euclidienne de rayon 1.

Théorème 5.4 (Perelman, 2002). — *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 0$ il existe $r = r(\varepsilon, T) > 0$ tel que pour tout $t_1 \in]0, T]$, tout flot de Ricci compact $(M, \{g(t)\}_{t \in [0, t_1]})$ à condition initiale normalisée a la propriété des voisinages canoniques aux échelles $\leq r$ avec précision ε.*

6. FLOTS DE RICCI SINGULIERS

Grâce aux résultats décrits dans la section précédente, Perelman construit un objet appelé flot de Ricci avec (r, δ)-cutoff. On peut le décrire comme une famille à un paramètre de variétés riemanniennes $(M(t), g(t))$ où on autorise un ensemble discret de temps singuliers où la variété change et la métrique varie de façon discontinue. La construction dépend de deux paramètres : le paramètre d'échelle r intervenant dans la propriété des voisinages canoniques, traitée comme hypothèse *a priori*, et le paramètre de cutoff δ qui gouverne l'échelle à laquelle on effectue les chirurgies. Comme la façon dont la topologie de la variété change à chaque chirurgie est contrôlée, cela permet de déterminer la topologie de la variété initiale. Pour plus de détails nous renvoyons à Perelman (2003) ainsi qu'à Bessières, Besson, Boileau, Maillot et Porti (2010), Cao et Zhu (2006), Kleiner et Lott (2008) et Morgan et Tian (2007).

A cause de la présence de paramètres, cette construction n'est pas canonique, et ne permet donc pas de réaliser les déformations nécessaires pour démontrer les théorèmes 3.1 et 3.2. Pour y remédier, Kleiner et Lott ont démontré un théorème de compacité permettant de prouver que, quand le paramètre de cutoff δ tend vers 0, le flot de Ricci avec (r, δ)-cutoff converge vers une déformation canonique. Donnons maintenant les définitions nécessaires à l'énoncé de leur résultat.

Définition 6.1. — *Un* espace-temps de Ricci *est un quadruplet* $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ *où* $\mathcal{M}$ *est une variété à bord lisse de dimension 4,* $\mathbf{t}$ *est une fonction de* $\mathcal{M}$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *dont les ensembles de niveau sont notés* $\mathcal{M}_t = \mathbf{t}^{-1}(t)$*,* ∂_t *est un champ de vecteurs sur* $\mathcal{M}$ *et* g *est un produit scalaire sur le fibré* $\ker(d\mathbf{t}) \subset T\mathcal{M}$*, tels que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1. *La fonction* $\mathbf{t}$ *n'a pas de point critique.*
2. *Le bord de* $\mathcal{M}$ *est égal à* $\mathcal{M}_0$*.*
3. *La fonction* $\partial_t \mathbf{t}$ *est constante égale à 1.*
4. *L'équation*

$$\mathcal{L}_{\partial_t} g = -2\mathrm{Ric}(g) \qquad (2)$$

est vérifiée en tout point de $\mathcal{M}$*.*

Noter que chaque tranche temporelle $\mathcal{M}_t$ est munie d'une métrique riemannienne, que l'on notera g_t ; la courbure de Ricci intervenant dans l'équation (2) est celle de cette métrique.

On dit que deux espaces-temps de Ricci $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ et $(\mathcal{M}', \mathbf{t}', \partial_t', g')$ sont *isométriques* s'il existe un difféomorphisme $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ qui conjugue les champs de vecteurs ∂_t et ∂_t' et induit pour tout t une isométrie de $(\mathcal{M}_t, g_t)$ sur $(\mathcal{M}_t', g_t')$.

Tout flot de Ricci $(M, \{g(t)\}_{t\in[0,T[})$ peut être vu comme un espace-temps de Ricci où $\mathcal{M} = M \times [0, T[$, $\mathbf{t}$ est la projection sur le deuxième facteur et ∂_t est un champ de vecteur unitaire transverse aux fibres de cette projection.

On a une notion d'espace-temps de Ricci *complet*. La définition utilisée dans BAMLER et KLEINER (2019b) fait référence à une fonction d'échelle que nous ne discuterons pas. Disons simplement qu'en première approximation elle revient à demander que la courbure scalaire tend vers l'infini quand on sort de tout compact de $\mathcal{M}$.

Voici maintenant la notion la plus importante :

DÉFINITION 6.2. — *Un* flot de Ricci singulier *est un espace-temps de Ricci complet* $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ *qui a les propriétés suivantes :*

1. $\mathcal{M}_0$ *est compact.*
2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $T \in \mathbf{R}_+$ *il existe* $r = r(\varepsilon, T) > 0$ *tel que la propriété des voisinages canoniques aux échelles* $\leq r$ *avec précision* ε *est satisfaite en tout point de* $\mathbf{t}^{-1}([0, T])$.

S'il existe $t_1 > 0$ *tel que pour tout* $t \geq t_1$ *on a* $\mathcal{M}_t = \emptyset$, *on dit que le flot est* éteint.

THÉORÈME 6.3 (KLEINER et LOTT, 2017). — *Pour toute métrique riemannienne* h *sur* M *il existe un flot de Ricci singulier* $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ *tel que* $(\mathcal{M}_0, g_0)$ *est isométrique à* (M, h).

THÉORÈME 6.4 (BAMLER et KLEINER, 2017b). — *Soient* $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ *et* $(\mathcal{M}', \mathbf{t}', \partial'_t, g')$ *deux flots de Ricci singuliers tels que* $(\mathcal{M}_0, g_0)$ *est isométrique à* $(\mathcal{M}'_0, g'_0)$. *Alors* $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ *et* $(\mathcal{M}', \mathbf{t}', \partial'_t, g')$ *sont isométriques.*

Ce dernier théorème est une conséquence d'un théorème de stabilité disant que si $(\mathcal{M}_0, g_0)$ est presque isométrique à $(\mathcal{M}'_0, g'_0)$, alors $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ et $(\mathcal{M}', \mathbf{t}', \partial'_t, g')$ sont presque isométriques. Ainsi, le flot de Ricci singulier est unique et dépend continûment d'un multi-paramètre.

En général, le flot de Ricci singulier existe pour tout temps. Par exemple, si $M = T^3$ et g_0 est une métrique plate, alors le flot de Ricci singulier est le flot de Ricci constant, défini sur $[0, +\infty[$. Dans les cas qui nous intéressent, cependant, le flot de Ricci singulier est automatiquement éteint :

THÉORÈME 6.5 (BAMLER et KLEINER, 2017a ; KLEINER et LOTT, 2017)

Si M *est une somme connexe de variétés sphériques et de copies de* $S^1 \times S^2$, *alors tout flot de Ricci singulier* $(\mathcal{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ *tel que* $\mathcal{M}_0$ *est difféomorphe à* M *est éteint.*

RÉFÉRENCES

Richard BAMLER et Bruce KLEINER (2017a). *Ricci flow and diffeomorphism groups of 3-manifolds*. prépublication arXiv 1712.06197.

——— (2017b). *Uniqueness and Stability of Ricci flow through singularities*. prépublication arXiv 1709.04122.

——— (2019a). *On the rotational symmetry of 3-dimensional κ-solutions*. prépublication arXiv 1904.05388.

——— (2019b). *Ricci flow and contractibility of spaces of metrics.* prépublication arXiv 1909.08710.

Czesław Bessaga et Aleksander Pełczyński (1975). *Selected topics in infinite-dimensional topology.* Monografie Matematyczne, Tom 58. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, p. 353.

Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti (2010). *Geometrisation of 3-manifolds.* T. 13. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, p. x+237.

Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti (2003). *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures.* T. 15. Panoramas et Synthèses. Société Mathématique de France, Paris, p. viii+167.

Simon Brendle (2018). *Rotational symmetry of ancient solutions to the Ricci flow in dimension* 3. prépublication arXiv 1811.02559.

——— (2019). *Rotational symmetry of ancient solutions to the Ricci flow in dimension* 3 *– The compact case.* prépublication arXiv 1904.07835.

Huai-Dong Cao et Xi-Ping Zhu (2006). « A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow », *Asian J. Math.* **10** (2), p. 165-492.

Georges De Rham (1950). « Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **2**, 51-67 (1951).

Clifford J. Earle et James Eells (1969). « A fibre bundle description of Teichmüller theory », *J. Differential Geometry* **3**, p. 19-43.

David Gabai (2001). « The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds : $\mathrm{Isom}(M^3) \simeq \mathrm{Diff}(M^3)$ », *J. Differential Geom.* **58** (1), p. 113-149.

André Gramain (1973). « Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6**, p. 53-66.

——— (1974). « Groupe des difféomorphismes et espace de Teichmüller d'une surface (d'après C. Earle et J. Eells) », in : *Séminaire Bourbaki, 25ème année (1972/1973), Exp. No. 426*, 157-170. Lecture Notes in Math., Vol. 383.

Richard S. Hamilton (1982). « Three-manifolds with positive Ricci curvature », *J. Differential Geometry* **17** (2), p. 255-306.

Allen Hatcher (1981). « On the diffeomorphism group of $S^1 \times S^2$ », *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (2), p. 427-430.

——— (1983). « A proof of the Smale conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq \mathrm{O}(4)$ », *Ann. of Math. (2)* **117** (3), p. 553-607.

——— (2003). *A 50-year view of diffeomorphism groups.* URL : http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/.

Sungbok Hong, John Kalliongis, Darryl McCullough et J. Hyam Rubinstein (2012). *Diffeomorphisms of elliptic 3-manifolds.* T. 2055. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, p. x+155.

Bruce Kleiner et John Lott (2008). « Notes on Perelman's papers », *Geom. Topol.* **12** (5), p. 2587-2855.

——— (2017). « Singular Ricci flows I », *Acta Math.* **219** (1), p. 65-134.

Fernando C. Marques (2012). « Deforming three-manifolds with positive scalar curvature », *Ann. of Math. (2)* **176** (2), p. 815-863.

John Morgan et Gang Tian (2007). *Ricci flow and the Poincaré conjecture.* T. 3. Clay Mathematics Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, p. xlii+521.

George D. Mostow (1973). *Strong rigidity of locally symmetric spaces.* Annals of Mathematics Studies, No. 78. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, p. v+195.

Richard S. Palais (1966). « Homotopy theory of infinite dimensional manifolds », *Topology* **5**, p. 1-16.

Grisha Perelman (2002). *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* ArXiv : math.DG/0211159.

——— (2003). *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* ArXiv : math.DG/0303109.

Jonathan Rosenberg (2007). « Manifolds of positive scalar curvature : a progress report », in : *Surveys in differential geometry. Vol. XI.* T. 11. Surv. Differ. Geom. Int. Press, Somerville, MA, p. 259-294.

Peter Scott (1983). « The geometries of 3-manifolds », *Bull. London Math. Soc.* **15** (5), p. 401-487.

Stephen Smale (1959). « Diffeomorphisms of the 2-sphere », *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, p. 621-626.

William P. Thurston (1997). *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.* T. 35. Princeton Mathematical Series. Edited by Silvio Levy. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. x+311.

Sylvain Maillot

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,
CNRS, Université de Montpellier
E-mail : sylvain.maillot@umontpellier.fr