Séminaire BOURBAKI Mai 2021
73e année, 2020–2021, nº 1180

LA PROPRIÉTÉ (T) POUR LES GROUPES POLONAIS ROELCKE-PRÉCOMPACTS
[d'après Ibarlucía, s'appuyant sur des travaux de Ben Yaacov et Tsankov]

par **François Le Maître**

INTRODUCTION

Née au début des années 2000 dans les travaux de Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov (2008), la théorie des modèles métrique, ou théorie des modèles continue, permet d'étendre des techniques issues de la théorie des modèles classique à de nouveaux objets issus de l'analyse.

Dans ce texte, nous allons nous intéresser à une utilisation récente et remarquable de la théorie des modèles continue dans le cadre des groupes polonais : la preuve par Ibarlucía (2021) du fait que tout groupe polonais Roelcke-précompact a la propriété (T) de Kazhdan.

Cette preuve illustre très bien la capacité de la théorie des modèles à offrir une approche unifiée à des problèmes (ou plutôt ici, des groupes) a priori très différents. Elle s'appuie sur une notion avancée (tout du moins à mes yeux !) de théorie des modèles continue, la stabilité locale. Elle utilise également le langage des imaginaires métriques (Ben Yaacov, 2018), ce qui la rend particulièrement élégante mais difficile à comprendre pour une personne peu familière avec la théorie des modèles continue.

Il m'a donc semblé préférable de donner la preuve dans un cas particulier mais significatif afin que cet exposé reste accessible à un lectorat large. Pour la même raison, j'ai évité de recourir aux imaginaires métriques au prix d'un argument final plus pédestre. Le cas particulier est celui du groupe $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ des transformations préservant la mesure de l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ. Pour ce groupe, on peut énoncer le théorème d'Ibarlucía comme suit.

Théorème 0.1 (Ibarlucía, 2021). — *Il existe deux transformations préservant la mesure $T_1, T_2 \in \mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ telles que pour toute $\pi : \mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ représentation unitaire continue sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, s'il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ non nul tel que*

$$\|\pi(T_1)\xi - \xi\| < \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\|\xi\| \;\; et \;\; \|\pi(T_2)\xi - \xi\| < \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\|\xi\|\,,$$

alors il existe en fait un vecteur $\xi' \in \mathcal{H}$ non nul invariant*, c'est-à-dire tel que pour tout T dans $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, on ait $\pi(T)\xi' = \xi'$.*

Après une première section qui expose quelques exemples de groupes polonais, dont $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$, nous présentons la classe des groupes polonais Roelcke-précompacts. On en donne diverses caractérisations, dues à Ben Yaacov et Tsankov, notamment la description comme groupes d'automorphismes agissant de manière approximativement oligomorphe. La section 3 donne un bref aperçu de la propriété (T) dans le cadre des groupes polonais. Le théorème d'Ibarlucía y est énoncé sous sa forme générale et contextualisé. On explicite les transformations T_1 et T_2 qui apparaissent dans l'énoncé ci-dessus, qui proviendront d'une action "très libre" préservant la mesure du groupe libre à deux générateurs $\mathbb{F}_2$. On y justifie aussi la présence de la constante $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ dans l'énoncé ci-dessus tout en expliquant pourquoi ce résultat se ramène à montrer que toute représentation orthogonale de $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ sans vecteurs invariants se restreint en une représentation de $\mathbb{F}_2$ qui est un multiple de sa représentation régulière (théorème 3.10). Pour des raisons de simplicité, on se focalisera sur un énoncé plus faible et on montrera simplement qu'une telle représentation contient une copie de la représentation régulière de $\mathbb{F}_2$ (théorème 3.11). On indiquera cependant au lectorat familier avec l'indépendance relative dans les espaces de probabilité comment obtenir le théorème 3.10, et ce à la toute fin de l'exposé.

Les deux sections suivantes mettent en place les bases de théorie des modèles métrique nécessaire à la preuve. Tout groupe polonais peut en effet se voir comme groupe d'automorphismes d'une *structure métrique séparable*. Cette dernière le reflète particulièrement bien dans le cadre du théorème de Ryll-Nardzewski où le groupe est Roelcke-précompact et la structure $\aleph_0$-catégorique. Cette idée cruciale est exploitée depuis quelques années (Ben Yaacov, 2018 ; Ben Yaacov, Ibarlucía et Tsankov, 2018 ; Ibarlucía, 2016, 2017) et est apparue pour la première fois dans les travaux de Ben Yaacov et Tsankov (2016).

Étant donnée une structure métrique, on définit dans la section 4 une algèbre de fonctions à valeurs réelles sur cette structure (la $\mathbb{R}$-algèbre de Banach des *prédicats définissables*) qui correspond à *ce que la théorie des modèles continue peut nous dire de cette structure*. Un des points essentiels est que cette algèbre de fonctions peut en fait être *interprétée* dans toute structure satisfaisant la même *théorie* que notre structure de départ, et il nous faudra commencer par développer les notion de *langage métrique* et de *formules* associées afin de définir proprement ce qu'on entend par là.

Une autre particularité importante de l'algèbre des prédicats définissables est qu'elle est stable par infimums ou supremums sur la structure elle-même. Comme on le verra, cette propriété est cruciale dans la preuve du théorème principal. Les *types* sont les caractères (morphismes à valeur réelle) de l'algèbre des prédicats définissables, l'exemple de base d'un type étant donné par l'évaluation des prédicats définissables sur un point de la structure. On a alors une correspondance de Gelfand qui nous permet d'identifier les prédicats définissables aux fonctions continues sur l'espace des types. Certaines sous-structures particulières (les sous-structures *élémentaires*) interpréteront les prédicats définissables de la même manière que la structure ambiante, et en particulier elles verront les mêmes infimums et supremums que cette dernière lorsque ça a du sens.

Les *sous-ensembles définissables* d'une structure, étudiés dans la section 5, sont en quelque sorte les sous-ensembles que la théorie des modèles "voit". Notamment, lorsque l'on applique un infimum ou un supremum à un prédicat définissable restreint à un sous-ensemble définissable, on obtient un prédicat définissable (cf. proposition 5.10), ce qui est crucial pour la preuve du théorème 0.1. Le théorème de Ryll-Nardzewski implique en effet que le complété à gauche du groupe des automorphismes de toute structure $\aleph_0$-catégorique s'identifie à un sous-ensemble définissable de la structure, permettant ainsi de "transférer" une action par isométries du groupe sur la structure (cf. Ben Yaacov (2018) pour une formulation précise en termes d'imaginaires métriques). On renvoie à l'appendice pour la preuve du théorème de Ryll-Nardzewski ; on l'établira de manière directe pour $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ à la fin de la section 5, prouvant au passage que la théorie de la structure qui lui est associée a l'*élimination des quantificateurs*.

Nous donnerons enfin les éléments de preuve du théorème 0.1 dans la section 6. On partira d'une représentation orthogonale de G sans vecteurs invariants que l'on l'étendra en une représentation orthogonale de son complété à gauche, de sorte à transférer la représentation orthogonale sur la structure via le théorème de Ryll-Nardzewski. Il s'agira alors d'exploiter les propriétés d'indépendance de l'action préservant la mesure du groupe libre afin de voir que la restriction de notre représentation orthogonale au groupe libre est un multiple de sa représentation régulière. C'est ici que la théorie des modèles jouera son rôle, permettant de transférer une propriété d'une sous-structure élémentaire à la structure entière pour mener à une contradiction.

Terminons cette introduction en en mentionnant les différences entre la preuve pour $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ et celle du théorème général d'Ibarlucía, qui nécessite un travail supplémentaire conséquent. Dans le cas général, on part d'une action "très libre" du groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur une structure $\aleph_0$-catégorique *quelconque*, pour laquelle la liberté de l'action s'énonce en termes de *relation d'indépendance stable*. Pour exhiber une telle action, on utilise notamment une construction combinatoire astucieuse d'*intervalles* sur $\mathbb{F}_2$ ayant des propriétés qui généralisent celles des intervalles de $\mathbb{Z}$. De plus, il faut se débarrasser de la "partie compacte" de G : les raisonnements de la section 6 n'auraient aucune chance d'aboutir pour un groupe compact puisqu'ils reposent sur la richesse du complété à gauche. Enfin, il faut exploiter les propriétés combinatoires des intervalles de $\mathbb{F}_2$ afin de comprendre la représentation que l'on obtient. Je renvoie le lectorat à Ibarlucía (2021), notamment la fin de l'introduction qui décrit clairement la construction si l'on remplace $\mathbb{F}_2$ par $\mathbb{Z}$, en espérant que cet exposé lui aura auparavant fourni quelques clés de lecture.

Remerciements. — Je remercie chaleureusement Tomás Ibarlucía et Todor Tsankov pour les conversations enrichissantes que nous avons pu avoir autour de la théorie des modèles continue, et que j'espère que nous continuerons d'avoir ! Merci à Todor également pour m'avoir indiqué une preuve du théorème de Ryll-Nardzewski qui ne fasse pas appel au théorème de compacité. Enfin, un grand merci à Nicolas Bourbaki, Alessandro Carderi, Colin Jahel, Adriane Kaïchouh, Romain Tessera et Todor Tsankov pour leur relecture attentive.

Table des matières

1. QUELQUES EXEMPLES DE GROUPES POLONAIS

Un **espace polonais** [1] est un espace topologique séparable admettant une distance compatible complète. Un **groupe polonais** est un groupe topologique dont la topologie est polonaise. Les groupes polonais apparaissent naturellement comme groupes de symétries de diverses structures mathématiques. Lorsque la structure est “de dimension

1. Cette terminologie, suggérée initialement « pour rire » par Godement à Bourbaki en 1949, rend hommage aux nombreuses contributions des mathématiciens polonais dans ce domaine, cf. note au bas de la page 67 de Godement (2003).

finie” on obtient assez souvent un groupe localement compact, mais les groupes polonais dont il sera question dans cet exposé proviendront plutôt de structures de dimension infinie (mais néammoins séparables), comme par exemple un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Voici trois faits très utiles sur les espaces et groupes polonais.

Fait 1.1. — *Tout produit dénombrable d'espaces polonais est un espace polonais.*

Fait 1.2. — *Tout fermé d'un espace polonais est un espace polonais.*

Fait 1.3. — *Les sous-groupes d'un groupe polonais qui sont polonais pour la topologie induite sont exactement ses sous-groupes fermés.*

Le premier fait se montre en exhibant une distance compatible complète sur le produit, comme celle que l'on considère dans la convention donnée en début de section 2. Le deuxième est immédiat une fois qu'on sait qu'un espace métrique est séparable si et seulement s'il est à base dénombrable d'ouverts. Le troisième utilise un renforcement du deuxième qui caractérise les sous-espaces polonais d'un espace polonais comme en étant les G_δ (intersections dénombrables d'ouverts), et est une jolie application du théorème de Baire (voir la proposition 2.2.1 de Gao, 2009).

1.1. Groupes d'automorphismes de structures dénombrables

L'intérêt de la définition qui suit réside dans la variété des exemples qu'elle permet de traiter.

Définition 1.4. — *Soit X un ensemble non vide. Une* ***structure discrète*** *sur X est la donnée d'une famille $(f_i)_{i\in I}$ de* ***fonctions*** *et d'une famille $(R_j)_{j\in J}$ de* ***relations*** *telles que*

- *pour tout $i \in I$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $f_i : X^{n_i} \to X$ (n_i est appelé l'****arité*** *de la fonction f_i)*
- *pour tout $j \in J$, il existe $m_j \in \mathbb{N}$ tel que $R_j \subseteq X^{m_j}$ (m_j est appelé l'****arité*** *de la relation R_j)*

Remarquons que l'on autorise des fonctions d'arité 0, que l'on voit comme des éléments de X, aussi appelées **constantes**. Par exemple un groupe $(G, e, \cdot, ^{-1})$ est une structure où e est la constante représentant l'élément neutre, $\cdot$ est le produit de groupe et $^{-1}$ le passage à l'inverse.

Voici des exemples qui devraient vous convaincre, si besoin est, qu'un grand nombre de structures qui apparaissent en mathématiques peuvent être vues comme des structures discrètes, au prix d'un nombre parfois élevé de fonctions et de relations.

- Un graphe orienté $G = (V, E)$ (sans arête multiple) est une structure discrète sur l'ensemble V, avec pour unique relation $E \subseteq V \times V$. Un graphe colorié par deux couleurs de sommets 0 et 1 peut aussi être vu comme une structure discrète en ajoutant deux relation unaires R_0 et R_1 qui encodent respectivement l'ensemble des sommets de couleur 0 et ceux de couleur 1. On peut également voir comme des structures discrètes les graphes à arêtes multiples (en ajoutant des relations binaires) ou encore les complexes simpliciaux (en ajoutant des relations n-aires).

— Un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ est une structure discrète : outre le vecteur nul qui est une fonction d'arité 0 (constante) et l'addition (fonction binaire), on se donne pour chaque $k \in \mathbb{K}$ une fonction $m_k : E \to E$ qui représente la multiplication par le scalaire k.

Un **plongement** d'une structure discrète $(X, (f_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J})$ est une *injection* $\varphi\colon X \to X$ qui commute aux relations et aux fonctions : pour tout $i \in I$, tout $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$,

$$\varphi(f_i(x_1, \dots, x_{n_i})) = f_i(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{n_i}))$$

et pour tout $j \in J$, tout $(x_1, \dots, x_{m_j}) \in X^{m_j}$,

$$(x_1, \dots, x_{m_j}) \in R_j \iff (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \in R_j.$$

Un **automorphisme** est un plongement surjectif.

Proposition 1.5. — *Soit G le groupe des automorphismes d'une structure dénombrable X. Alors G est un groupe polonais pour la topologie produit sur X^X, X étant muni de la topologie discrète.*

Démonstration. — La composition définit une application continue $X^X \times X^X \to X^X$, et le passage à l'inverse définit une application continue $G \to G$ puisque l'ouvert fermé de (pré)-base $\{g \in G : g(x) = y\}$ est envoyé sur l'ouvert-fermé $\{g \in G : g(y) = x\}$ par l'inversion. Ainsi G est bien un groupe topologique.

Pour voir que G est polonais pour la topologie induite par X^X, on commence par remarquer que l'espace des plongements $X \to X$ est un fermé, donc polonais. L'application qui à $g \in G$ associe (g, g^{-1}) est un homéomorphisme sur son image, et cette image est l'espace fermé (donc polonais) des couples de plongements (f, g) tels que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_X$, donc G est bien polonais. □

Remarque 1.6. — La structure uniforme induite par X^X sur $\mathrm{Aut}(X)$ est la structure uniforme gauche sur G. La même preuve montre en fait que le groupe des automorphismes de toute structure discrète est *Raikov-complet.*

Étant donnée une structure dénombrable infinie, il est fort possible que son groupe d'automorphismes soit dénombrable (donc discret), voire trivial. En général, les structures que nous considérerons posséderont beaucoup d'automorphismes. Voici un petit échantillon de structures dénombrables dont les groupes d'automorphismes sont non dénombrables.

Exemple 1.7. — Si l'on ne met aucune structure sur X dénombrable infini, on obtient le groupe $\mathfrak{S}(X)$ des permutations de X, aussi noté $\mathfrak{S}_\infty$ quand $X = \mathbb{N}$. Remarquons que quand on a une structure discrète sur X dénombrable infini, en identifiant X à $\mathbb{N}$ on ne change pas son groupe d'automorphismes. Ainsi le groupe des automorphismes de toute structure dénombrable est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathfrak{S}_\infty$.

Exemple 1.8. — Considérons le graphe complet sur l'ensemble $\mathbb{N}$ (sans boucles, non orienté). Chaque arête est alors retirée avec probabilité $1/2$, indépendamment. On obtient presque sûrement toujours le même graphe à isomorphisme près, appelé le **graphe aléatoire**. C'est le seul graphe dénombrable non vide satisfaisant la propriété (*) suivante : pour tous ensembles de sommets S_1 et S_2 finis et disjoints, on peut trouver un sommet $s \notin S_1 \cup S_2$ relié à tous les éléments de S_1 mais à aucun élément de S_2. La preuve de ce fait utilise un argument de va-et-vient que l'on donne tout de suite après. Ce graphe est souvent noté R (pour random), son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(R)$ est un groupe polonais. On renvoie à Cameron (1997) pour plus d'informations.

Démonstration de l'unicité du graphe aléatoire à isomorphisme près.

Soient G et H deux graphes dénombrables non vides satisfaisant la propriété (*), alors ils sont nécessairement infinis. Notons V et W leurs ensembles de sommets respectifs. Énumérons $V = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $W = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$. La construction par va-et-vient se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en construisant des bijections $\varphi_n : V_n \to W_n$ où

- — V_n est un sous-ensemble fini de V contenant $\{v_0, \ldots, v_n\}$;
- — W_n est un sous-ensemble fini de W contenant $\{w_0, \ldots, w_n\}$
- — φ_n est un isomorphisme entre les graphes induits sur V_n et W_n ;

On commence par φ_0 qui envoie v_0 sur w_0. Puis, φ_n étant construit, on l'étend en deux étapes (va puis vient !) de la manière suivante, obtenant une application ψ_n intermédiaire après la première étape.

- — *Va.* Si v_{n+1} était dans le domaine de φ_n on pose simplement $\psi_n = \varphi_n$. Sinon, soit S_1 l'ensemble des éléments de V_n reliés à v_n et $S_2 = V_n \setminus S_1$. Alors on demande que ψ_n prolonge φ_n et on choisit $\psi_n(v_n)$ de sorte à ce qu'il soit relié à tous les éléments de $\varphi_n(S_1)$, mais à aucun élément de $\varphi_n(S_2)$. Par construction ψ_n est toujours un isomorphisme entre les graphes induits sur son image et son domaine.
- — *Vient.* Si w_{n+1} est dans l'image de ψ_n, on pose $\varphi_{n+1} = \psi_n$. Sinon, on applique la même construction que précédemment à ψ_n^{-1} de sorte à obtenir ψ_{n+1} dont le domaine contienne w_{n+1}, et on pose $\varphi_{n+1} = \psi_{n+1}^{-1}$.

Alors l'application φ obtenue comme réunion des φ_n est l'isomorphisme de graphes attendu. $\square$

Exemple 1.9. — On munit l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels de l'ordre induit par les réels, on obtient la structure discrète $(\mathbb{Q}, <)$ dont le groupe polonais d'automorphismes est noté $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$. L'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, <)$ est à isomorphisme près le seul ordre total dénombrable non vide dense (tout intervalle ouvert est non vide) sans maximum ni minimum, ce qui se montre encore par va-et-vient. Les sous-groupes dénombrables de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ sont exactement les groupes dénombrables ordonnables. On ne sait pas si ces derniers peuvent avoir la propriété (T), mais $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ tout entier a la propriété (T) (Tsankov, 2012). Profitons-en pour mentionner la très jolie construction par Duchesne (2020) de groupes polonais unitairement représentables avec la propriété (T) plongés de manière non élémentaire dans le groupe des homéomorphismes du cercle .

Exemple 1.10. — Soit Σ une surface de type infini, son *groupe modulaire étendu* $\mathrm{Map}^{\pm}(\Sigma)$ est le quotient du groupe des homéomorphismes de Σ par le sous-groupe des homéomorphismes isotopes à l'identité. On peut construire un *graphe des courbes* dont les sommets sont les courbes (applications continues $\mathbb{S}^1 \to \Sigma$ à homotopie et renversement d'orientation près), reliées par une arête si elles admettent des représentants disjoints. Alors $\mathrm{Map}^{\pm}(\Sigma)$ s'identifie au groupe d'automorphismes de ce graphe (Bavard, Dowdall et Rafi, 2020 ; Hernández Hernández, Morales et Valdez, 2018), et est donc un groupe d'automorphismes de structure dénombrable. On recommande le survol d'Aramayona et Vlamis (2020) pour plus d'informations sur ces groupes.

Les groupes d'automorphismes de structures dénombrables sont tous des groupes topologiques non archimédiens, c'est-à-dire que l'identité admet une base de voisinages formée de sous-groupes ouverts (donc également fermés). On peut montrer que tout groupe polonais non archimédien est isomorphe au groupe d'automorphismes d'une structure dénombrable (en particulier, c'est le cas de tout groupe polonais localement compact totalement discontinu). Nous verrons une construction métrique similaire qui permet d'englober tous les groupes polonais (cf. remarque 2.20).

1.2. Groupes d'automorphismes de structures métriques séparables

Définition 1.11. — *Une **structure métrique** est un espace métrique **complet** (X, d) muni d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ de **fonctions** et d'une famille $(R_j)_{j \in J}$ de **relations** telles que*

- *pour tout $i \in I$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $f_i : X^{n_i} \to X$, et f_i est uniformément continue* [2] *;*
- *pour tout $j \in J$, il existe $m_j \in \mathbb{N}$ tel que $R_j : X^{m_j} \to \mathbb{R}$, et R_j est uniformément continue.*

Par rapport au cas discret, *la distance d remplace l'égalité* qui était implicitement vue comme une relation sur X puisqu'on travaille avec des plongements. Toute structure discrète peut être vue comme une structure métrique en la munissant de la distance discrète [3], et en remplaçant chaque relation R_j par la relation métrique $1 - \chi_{R_j}$, où χ_{R_j} désigne la fonction caractéristique de R_j.

Remarque 1.12. — Nous ne demandons pas pour l'instant que la distance sur X soit bornée, mais un grand nombre de résultats de théorie des modèles s'appuient sur cette hypothèse supplémentaire. On verra que pour les groupes d'automorphismes Roelcke-précompacts de structures métriques on peut toujours supposer d bornée quitte à changer la structure.

2. Si on n'est pas familier avec les espaces uniformes, on munit X^{n_i} de la distance donnée dans la convention en début de section 2 afin de donner du sens à l'uniforme continuité de f_i.

3. La distance discrète est définie par $\delta(x, y) = 0$ si $x = y$ et $\delta(x, y) = 1$ sinon.

On appelle **plongement** d'une structure métrique $(X, d, (f_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J})$ toute application isométrique $X \to X$ telle que pour tout $i \in I$, tout $(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$,

$$\varphi(f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})) = f_i(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n_i}))$$

et pour tout $j \in J$, tout $(x_1, \ldots, x_{m_j}) \in X^{m_j}$,

$$R_j(x_1, \ldots, x_{m_j}) = R_j(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{m_j})).$$

Un **automorphisme** est un plongement surjectif.

Proposition 1.13. — *Soit G le groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable (X, d). Alors G est un groupe polonais pour la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie produit sur X^X, la structure X étant munie de la topologie induite par la distance d.*

Démonstration. — Considérons l'espace 1-Lip(X, X) des applications 1-lipschitziennes de X vers lui-même, muni de la topologie produit. En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait qu'on a des applications 1-lipschitziennes, on montre que la composition définit une application continue 1-Lip$(X, X) \times$ 1-Lip$(X, X) \to$ 1-Lip(X, X). Le passage à l'inverse définit également une application continue $G \to G$ puisque l'ouvert de (pré)-base $\{g \in G : d(g(x), y) < \epsilon\}$ est envoyé sur l'ouvert $\{g \in G : d(g(y), x) < \epsilon\}$ par l'inversion. Ainsi, G est bien un groupe topologique.

Fixons un sous-ensemble $D \subseteq X$ dénombrable dense. L'application de restriction 1-Lip$(X, X) \to$ 1-Lip(D, X) est bijective car X est complet, et c'est un homéomorphisme si on munit également 1-Lip(D, X) de la topologie produit. L'espace X^D est polonais pour la topologie produit. Or 1-Lip(D, X) est fermé dans X^D, donc il est polonais, ainsi 1-Lip(X, X) est lui-même polonais.

Pour voir que G est polonais pour la topologie induite par X^X, on remarque alors que l'espace des plongements $X \to X$ est fermé dans 1-Lip(X, X), donc polonais. L'application qui à $g \in G$ associe (g, g^{-1}) est un homéomorphisme sur son image, et cette image est l'espace fermé (donc polonais) des couples de plongements (f, g) tels que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_X$, donc G est bien polonais. $\square$

Remarque 1.14. — Si G est le groupe d'automorphismes d'une structure métrique (X, d), on a $g_n \to g$ si et seulement si pour tout $x \in X$, $d(g_n(x), g(x)) \to 0$ quand $n \to +\infty$. La topologie du groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable étant métrisable, elle est complètement décrite par cette remarque.

Voici deux exemples de groupes d'automorphismes de structures métriques séparables qui jouent un rôle important dans cet exposé.

Exemple 1.15. — Soit (X, d) un espace métrique séparable complet, vu comme une structure sans relation ni fonction. Alors son groupe d'automorphismes est égal à son groupe d'isométries Iso(X, d), qui est donc un groupe polonais pour la topologie de la convergence simple.

Exemple 1.16. — Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel séparable. On le munit de la relation donnée par le produit scalaire $\mathcal{H}^2 \to \mathbb{R}$, de la fonction d'addition des vecteurs, de la constante vecteur nul, ainsi que, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, de la fonction multiplication par le scalaire t. Le groupe des automorphismes de la structure ainsi obtenue est le groupe orthogonal de $\mathcal{H}$, noté $\mathcal{O}(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{H}$ est séparable, on obtient donc un groupe polonais, et sa topologie est la topologie induite par la topologie forte de l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, qui coïncide avec la topologie faible en restriction à $\mathcal{O}(\mathcal{H})$.

De manière similaire, le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des unitaires d'un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ séparable est un groupe polonais pour la topologie forte.

Nous allons maintenant présenter dans une section à part le *groupe des transformations préservant la mesure* de l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ, noté $\mathrm{Aut}([0, 1], \lambda)$. On va le définir directement comme groupe des automorphismes d'une structure métrique appelée *algèbre de mesure*.

1.3. Le groupe des automorphismes de l'algèbre de mesure de $([0, 1], \lambda)$

Considérons un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$. La mesure μ permet de munir la tribu $\mathcal{B}$ d'une pseudo-distance d_μ donnée par $d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B)$.

Montrons que d_μ est complète : soit (A_n) une suite de Cauchy, quitte à extraire on peut supposer que $d_\mu(A_n \triangle A_{n+1}) < 2^{-n}$. D'après le lemme de Borel–Cantelli, pour presque tout $x \in X$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin A_n \triangle A_{n+1}$ pour tout $n \geq N$, ce qui veut dire que x ne “change plus d'avis” quant au fait d'appartenir à A_n ou non. On vérifie alors que l'ensemble $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n$ est la limite recherchée.

Étant donné un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$, l'**algèbre de mesure** de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, notée $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$, est la structure dont l'espace métrique sous-jacent est obtenu par séparation de $(\mathcal{B}, d_\mu)$: on identifie deux ensembles $A, B \in \mathcal{B}$ lorsque $\mu(A \triangle B) = 0$.

On munit notre algèbre de mesure des fonctions induites par la différence symétrique, l'intersection et l'union (que l'on continue de noter $\triangle$, $\cap$ et $\cup$), qui sont 1-lipschitziennes donc uniformément continues. On le munit également de la relation 1-lipschitzienne induite par la mesure μ (que l'on continue de noter μ) et on ajoute deux constantes représentant la classe d'équivalence de l'ensemble vide $\emptyset$ et celle de X tout entier. On obtient alors une structure métrique $(\mathrm{MAlg}(X, \mu), d_\mu, \emptyset, X, \cup, \cap, \triangle, \mu)$.

Remarque 1.17. — Le nom “algèbre de mesure” vient du fait que munie des opérations appropriées, il s'agit d'une *algèbre booléenne*, mais la suite de l'exposé ne supposera pas de familiarité avec ces dernières. On recommande le chapitre 2 de Cori et Lascar (2003) pour une introduction aux algèbres booléennes, et l'encyclopédique Fremlin (2002) pour la théorie des algèbres de mesure.

Définition 1.18. — *Étant donné un espace de probabilité* $(X, \mathcal{B}, \mu)$*, on note* $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ *le groupe d'automorphismes de la structure métrique* $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$*.*

Puisque la distance d_μ est toujours complète, $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ est polonais dès lors que $(\mathrm{MAlg}(X,\mu),d_\mu)$ est séparable. En utilisant des réunions finies d'intervalles aux extrémités rationnelles, on montre que c'est le cas pour $X=[0,1]$ muni de sa tribu borélienne et μ la mesure de Lebesgue λ. Ainsi, $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ est bien un groupe polonais. Il est souvent présenté de manière plus directe comme un groupe de bijections bimesurables (ou *transformations*) préservant la mesure de $([0,1],\lambda)$, identifiées si elles coïncident sur un ensemble de mesure pleine. Il est clair que si T est une bijection bimesurable préservant la mesure entre deux sous-ensembles de mesure pleine de $[0,1]$, alors T induit un élément de $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$, et réciproquement on peut montrer que tout automorphisme de $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ se relève en une bijection bimesurable préservant la mesure (voir par exemple Glasner, 2003, Thm. 2.15), mais nous n'en aurons pas besoin.

On a la propriété fondamentale suivante, dite d'homogénéité approximative. Pour nous, une **partition** d'un espace de probabilité (X,μ) est une famille finie $(A_i)_{i=1}^n$ d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ deux à deux disjoints telle que $X=A_1\sqcup\cdots\sqcup A_n$ (on autorise certains A_i à être vides).

Proposition 1.19. — *Soient* $(A_1,\dots,A_n)$ *et* $(B_1,\dots,B_n)$ *deux partitions de* $([0,1],\lambda)$ *telles que pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$*, on a* $\mu(A_i)=\mu(B_i)$*. Alors pour tout* $\epsilon>0$*, il existe* T *dans* $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ *tel que pour tout* $i=1,\dots,n$*, on a* $\mu(T(A_i)\triangle B_i)<\epsilon$*.*

Démonstration. — On se ramène tout d'abord, par densité, au cas où les A_i et les B_i sont des réunions finies d'intervalles semi-ouverts à extrémités rationnelles. Si $q\geq 1$ est le plus grand commun multiple des dénominateurs des extrémités de ces intervalles, on écrit alors chaque A_i et B_i comme réunion disjointe de $q\mu(A_i)=q\mu(B_i)$ intervalles de la forme $[\frac{k}{q},\frac{k+1}{q}[$. On trouve alors la bijection recherchée en recollant des translations qui envoient les intervalles dans A_i sur ceux dans B_i. □

Remarque 1.20. — On peut en fait montrer que la structure est exactement homogène, c'est-à-dire qu'on peut trouver $T\in\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ tel que $T(A_i)=B_i$. Une manière de procéder est de construire par va-et-vient un isomorphisme entre des sous-algèbres finies "de plus en plus denses", en étendant successivement l'isomorphisme naturel entre l'algèbre de mesure finie engendrée par les A_i et celle engendrée par les B_i.

On a une notion naturelle d'isomorphisme d'algèbres de mesure, de sorte qu'étant donnés deux espaces de probabilités $(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ et $(Y,\mathcal{B}_Y,\nu)$, si $\varphi: X_0\to Y_0$ est une bijection bimesurable entre deux sous-ensembles mesurables X_0 et Y_0 de mesure pleine, alors φ induit un isomorphisme entre leurs algèbres de mesures. En particulier, on peut utiliser l'écriture dyadique pour vérifier que l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ est isomorphe à l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\mu)$, où μ est la mesure de Bernoulli standard $(\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$.

Ceci nous permet d'identifier $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ à $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\mu)$, ou plus généralement à $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^X,(\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes X})$, où X est un ensemble dénombrable infini [(4)]. Dans la suite de l'exposé on utilisera une algèbre de mesure de cette forme pour construire explicitement l'action préservant la mesure de $\mathbb{F}_2$ dont on aura besoin pour la preuve du théorème principal (cf. section 3.2).

2. GROUPES POLONAIS ROELCKE-PRÉCOMPACTS

On va s'intéresser aux actions continues des groupes polonais sur des espaces métriques afin de caractériser les groupes polonais Roelcke-précompacts. Le thème des actions isométriques continues de groupes polonais a pris une grande importance depuis les travaux de Rosendal sur la propriété (OB), puis sur la géométrie des groupes polonais en général (Rosendal, 2018), mais on en dira très peu de choses ici.

Un outil important est l'espace des adhérences d'orbites d'une action isométrique ou des actions diagonales associées à cette action. Ceci implique de faire un choix de distance sur les espaces produits de sorte qu'un produit d'actions isométriques reste isométrique.

Convention. — *Étant donnés des espaces métriques $(X_i,d_i)_{i\geq 1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on munira systématiquement l'espace produit $\prod_{i=1}^n X_i$ de la distance compatible d^n donnée par*

$$d^n((x_i)_{i=1}^n,(y_i)_{i=1}^n):=\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i).$$

De plus, on munira $\prod_{i\geq 1}X_i$ de la distance compatible d^ω donnée par

$$d^\omega((x_i)_{i\geq 1},(y_i)_{i\geq 1}):=\sum_{i\geq 1}2^{-i}\min(1,d(x_i,y_i)).$$

Notons que si chaque d_i est complète, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ la distance d^n est complète, et d^ω est également complète.

Cette section suppose parfois une certaine familiarité avec les structures uniformes, comme définies dans le chapitre 2 de Bourbaki (2007), notamment afin de présenter la notion de Roelcke-précompacité dans son cadre naturel (section 2.2). Nous fournirons toutefois des caractérisations qu'un lecteur peu familier avec ces dernières pourra préférer (cf. section 2.3).

On suit de près la section 2 de l'article de Ben Yaacov et Tsankov (2016).

Remarque 2.1. — Dans la convention précédente, n'importe quel choix de distance qui induise la structure uniforme produit et tel que tout produit d'isométries soit une isométrie sur l'espace produit conviendrait.

4. C'est aussi une conséquence du résultat suivant, plus difficile à démontrer : si X est un espace polonais muni d'une mesure de probabilité μ borélienne sans atomes, alors il existe une bijection bimesurable entre X et $[0,1]$ qui préserve la mesure (cf. le théorème 17.41 de Kechris, 1995).

2.1. Actions approximativement oligomorphes

Soit G un groupe agissant par isométries sur un espace métrique (X, d), alors on peut munir X d'une pseudo-distance [5] G-invariante $\tilde{d}_G$ définie par

$$\tilde{d}_G(x, y) := \inf_{g \in G} d(g \cdot x, y).$$

Remarquons tout de suite que comme l'action est isométrique

$$\tilde{d}_G(x, y) = \inf_{g,h \in G} d(h^{-1}g \cdot x, h^{-1} \cdot y) = \inf_{g,h \in G} d(g \cdot x, h \cdot y).$$

On a $\tilde{d}_G(x, y) = 0$ si et seulement si $\overline{Gx} = \overline{Gy}$, et on note $(G \backslash\!\backslash X, d_G)$ l'espace métrique obtenu par séparation, qui s'identifie donc à l'espace des adhérences d'orbites. L'application de passage au quotient $x \mapsto \overline{Gx}$ est uniformément continue et surjective.

Soit (Y, d_Y) un espace métrique. Par passage au quotient, on a une identification naturelle entre les fonctions continues G-invariantes $X \to Y$ et les fonctions continues $G \backslash\!\backslash X \to Y$. Cette identification préserve l'uniforme continuité.

Lemme 2.2. — *Si (X, d) est un espace métrique complet et G agit par isométries sur X, alors $(G \backslash\!\backslash X, d_G)$ est un espace métrique complet.*

Démonstration. — Pour $x \in X$, on note $[x]$ l'adhérence de sa G-orbite. Soit $([x_n])$ une suite de Cauchy, il suffit de montrer qu'elle admet une sous-suite convergente. Quitte à extraire, on peut supposer que $d_G([x_n], [x_{n+1}]) < 2^{-n}$. On construit alors par récurrence une suite (y_n) en posant $y_0 = x_0$ puis en choisissant pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un élément $y_{n+1} \in [x_{n+1}]$ tel que $d(y_{n+1}, y_n) < 2^{-n}$. La suite (y_n) est de Cauchy et sa limite y satisfait bien $[y] = \lim_{n \to +\infty} [x_n]$. □

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'action diagonale de G sur X^n (donnée par $g \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (g \cdot x_1, \ldots, g \cdot x_n)$) est isométrique pour la distance d^n définie au début de cette section.

Définition 2.3. — *Une action par isométries d'un groupe G sur un espace métrique (X, d) est* ***approximativement cocompacte*** *si l'espace métrique $(G \backslash\!\backslash X, d_G)$ est précompact.*

Concrètement, une action par isométries de G sur (X, d) est approximativement cocompacte si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe une partie finie $X_0 \subseteq X$ telle que pour tout x dans X, il existe $g \in G$ tel que $d(g \cdot x, X_0) < \epsilon$ (on rappelle que pour $A \subseteq X$ non vide on définit $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$).

D'après le lemme 2.2, l'action de G sur un espace métrique *complet* (X, d) est approximativement cocompacte si et seulement si l'espace métrique $(G \backslash\!\backslash X, d_G)$ est compact. De plus par densité l'action de G par isométries sur un espace métrique (X, d) est approximativement cocompacte si et seulement si son extension au complété $(\widehat{X}, d)$ est

5. Le fait que ce soit bien une pseudo-distance utilise de manière cruciale le fait que G agisse par isométries.

approximativement cocompacte, et le complété $\widehat{G \mathbin{\backslash\!\backslash} X}$ s'identifie naturellement à $G \mathbin{\backslash\!\backslash} \widehat{X}$. Enfin, si (Y, d_Y) est un espace métrique complet et l'action par isométries de G sur (X, d) est approximativement cocompacte, alors les fonctions continues $G \mathbin{\backslash\!\backslash} \widehat{X} \to Y$ s'identifient aux fonctions uniformément continues bornées G-invariantes $X \to Y$.

Exemple 2.4. — Soit G un groupe polonais, soit $d_{\mathcal{L}}$ une distance invariante à gauche sur G. Alors l'action par translation à gauche de G sur $(G, d_{\mathcal{L}})$ est approximativement cocompacte puisque transitive, et l'action par translation à gauche sur le complété de $(G, d_{\mathcal{L}})$ est donc également approximativement cocompacte. Par contre, on verra que l'action diagonale par translation à gauche de G sur $(G \times G, d_{\mathcal{L}}^2)$ est approximativement cocompacte si et seulement si G est Roelcke-précompact. Pour l'heure, remarquons que si $d_{\mathcal{L}}$ n'est pas bornée, alors $G \mathbin{\backslash\!\backslash} (G \times G)$ n'est pas borné, donc pas précompact et l'action n'est ainsi pas approximativement cocompacte.

Définition 2.5. — *Une action par isométries d'un groupe G sur un espace métrique (X, d) est **approximativement oligomorphe** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'action diagonale de G sur (X^n, d^n) est approximativement cocompacte.*

Remarque 2.6. — Comme remarqué par Ben Yaacov et Tsankov (2016), étant donnée une action par isométries de G sur (X, d), cette action est approximativement oligomorphe si et seulement si l'action diagonale de G sur $(X^{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}})$ est approximativement cocompacte. L'implication directe se montre en revenant à la définition, notant que la distance $d^{\mathbb{N}}$ est très peu sensible à ce qui se passe sur de grandes coordonnées. Pour la réciproque, on note que la projection $X^{\mathbb{N}} \to G \mathbin{\backslash\!\backslash} X^n$ est uniformément continue et surjective. Elle passe donc au quotient en une application $G \mathbin{\backslash\!\backslash} X^{\mathbb{N}} \to G \mathbin{\backslash\!\backslash} X^n$ uniformément continue surjective. Ainsi, si $G \mathbin{\backslash\!\backslash} X^{\mathbb{N}}$ est précompact alors $G \mathbin{\backslash\!\backslash} X^n$ aussi.

Exemple 2.7. — Considérons un groupe G agissant sur un ensemble discret X muni de la distance discrète afin que l'action soit isométrique. Les orbites de G sont alors fermées et la distance d_G est la distance discrète sur l'espace des orbites. L'action est approximativement oligomorphe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'action de G sur X^n n'a qu'un nombre fini d'orbites, ce qui signifie que l'action est *oligomorphe*. Un exemple de base est fourni par l'action de $\mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$.

Un autre exemple est donné par le groupe $\mathrm{Aut}(R)$ des automorphismes du graphe aléatoire (exemple 1.8). On montre que deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont dans la même orbite si et seulement l'application $x_i \mapsto y_i$ est un isomorphisme pour les graphes induits (c'est clairement une condition nécessaire, la réciproque se montre par le même va-et-vient que celui qui suit l'exemple 1.8, en remplaçant φ_0 par l'isomorphisme entre graphes induits $x_i \mapsto y_i$). En particulier, $\mathrm{Aut}(R) \mathbin{\backslash\!\backslash} \mathbb{N}^n$ est bien fini.

Exemple 2.8. — L'action de $\mathrm{Aut}([0,1], \lambda)$ sur $\mathrm{MAlg}([0,1], \lambda)$ est approximativement oligomorphe. On va le montrer en détail puisqu'il s'agit du fil rouge de cet exposé.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'espace des partitions à n éléments de $([0,1], \lambda)$.

Pour $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$, notons $A^0 := A$ et $A^1 := X \setminus A = X \triangle A$. L'application $\Phi\colon (A_1,\dots,A_n) \mapsto \big(\mu(A_1^{\delta(1)} \cap \dots \cap A_n^{\delta(n)})\big)_{\delta\in\{0,1\}^n}$ est une injection G-équivariante de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)^n$ dans $\mathcal{P}_{2^n}$ qui est bilipschitzienne (pour voir que son inverse est bien lipschitzien, on note que A_i se reconstruit comme la réunion des $A^{\delta(1)} \cap \dots \cap A^{\delta(n)}$ pour δ dans $\{0,1\}^n$ satisfaisant $\delta(i) = 0$).

Il suffit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Aut}(X,\mu) \mathbin{\backslash\!\backslash} \mathcal{P}_n$ est précompact. Il est immédiat par la proposition 1.19 que l'orbite fermée de $(A_1,\dots,A_n)$ est déterminée par la mesure de probabilité sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ donnée par $(\mu(A_1),\dots,\mu(A_n))$. Comme l'espace $\mathfrak{P}_n$ des mesures de probabilité sur $\{1,\dots,n\}$ est compact, il suffit alors de remarquer que la bijection

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_n &\to \mathrm{Aut}(X,\mu) \mathbin{\backslash\!\backslash} \mathcal{P}_n \\ (p_1,\dots,p_n) &\mapsto [[0,p_1],[p_1,p_1+p_2],\dots,[1-p_n,1]] \end{aligned}$$

est continue pour conclure.

Remarque 2.9. — En mettant les deux étapes ci-dessus bout à bout, on voit que l'espace d'orbites fermées $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \mathbin{\backslash\!\backslash} \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^n$ est naturellement homéomorphe à l'espace des mesures de probabilité sur $\{0,1\}^n$, ce qui permet ensuite de montrer que $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \mathbin{\backslash\!\backslash} \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^{\mathbb{N}}$ est naturellement homéomorphe à l'espace des mesures de probabilité sur l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 2.10. — Bien que les orbites de l'action diagonale de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ sur $\mathrm{MAlg}(X,\mu)^n$ soient fermées pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et ce, d'après la remarque 1.20), celle de l'action diagonale sur $\mathrm{MAlg}(X,\mu)^{\mathbb{N}}$ ne le sont pas. Cette action n'est pas cocompacte, mais seulement approximativement cocompacte.

En utilisant la théorie des modèles continue, Ben Yaacov a montré que le groupe polonais Roelcke-précompact $\mathrm{Aut}^*([0,1],\lambda)$ des transformations qui quasi-préservent la mesure de Lebesgue n'admet *aucune* action par isométries cocompacte sur un espace métrique complet (Ben Yaacov, 2018).

2.2. Complété de Roelcke d'un groupe polonais

Dans ce qui suit, étant donné un groupe G, une partie $A \subseteq G$ et un élément $g \in G$, on note $Ag := \{ag\colon a \in A\}$ et $gA := \{ga\colon a \in A\}$. Si de plus $B \subseteq G$, on note $AB := \{ab\colon a \in A, b \in B\}$.

Rappelons tout d'abord que tout groupe topologique G est muni d'une structure uniforme à gauche, notée $\mathcal{L}$, qui est engendrée par les entourages de la diagonale de la forme $\{(g,h) \in G^2\colon g \in hU\}$ où U parcourt les voisinages ouverts de l'identité. Il est également muni d'une structure uniforme à droite, notée $\mathcal{R}$, engendrée par les entourages de la diagonale de la forme $\{(g,h) \in G^2\colon g \in Uh\}$ où U parcourt les voisinages ouverts de l'identité. L'application $g \mapsto g^{-1}$ induit un isomorphisme d'espaces uniformes entre $(G,\mathcal{L})$ et $(G,\mathcal{R})$.

Toute distance $d_{\mathcal{L}}$ sur G compatible avec sa topologie et invariante à gauche induit la structure uniforme $\mathcal{L}$. De même, toute distance $d_{\mathcal{R}}$ sur G compatible avec sa topologie et invariante à droite induit $\mathcal{R}$. Lorsque G est polonais, de telles distances existent bien d'après le théorème de Birkhoff–Kakutani (cf. Gao, 2009, Thm. 2.1.1). Si G est le groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable (X, d_X), une distance compatible invariante à gauche $d_{\mathcal{L}}$ peut se construire comme suit : on fixe $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans X et on pose

$$d_{\mathcal{L}}(g,h) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} \min(1, d_X(g\cdot\alpha_i, h\cdot\alpha_i)).$$

Par définition, la **structure de Roelcke** est la structure uniforme la plus grande contenue à la fois dans les structures uniformes à gauche et à droite. Elle est notée $\mathcal{L}\wedge\mathcal{R}$.

Remarque 2.11. — Une quatrième structure uniforme naturelle sur un groupe topologique quelconque est celle de Raikov, qui est la plus petite contenant à la fois les structures uniformes à gauche et à droite. Si $d_{\mathcal{L}}$ et $d_{\mathcal{R}}$ sont compatibles, invariantes à gauche et à droite respectivement, alors $d_{\mathcal{L}} + d_{\mathcal{R}}$ est compatible et induit la structure uniforme de Raikov. On peut alors caractériser les groupes polonais comme étant les groupes topologiques à base dénombrable d'ouverts *Raikov-complets* (complets pour la structure uniforme de Raikov).

Lemme 2.12. — *Une base de la structure uniforme de Roelcke est donnée par les entourages de la diagonale de la forme*

$$\{(g,h)\colon g\in G, h\in UgU\},$$

où U parcourt une base de voisinages de l'identité de G.

Démonstration. — Si U est un voisinage de l'identité, il contient cette dernière, donc pour tout $g\in G$ l'ensemble UgU contient à la fois Ug et gU. Ainsi l'ensemble $\{(g,h)\colon g\in G, h\in UgU\}$ contient à la fois $\{(g,h)\colon g\in G, h\in Ug\}$ et $\{(g,h)\colon g\in G, h\in gU\}$ donc est bien dans $\mathcal{L}\wedge\mathcal{R}$.

Réciproquement, si $W\in\mathcal{L}\wedge\mathcal{R}$, alors on trouve $W'\in\mathcal{L}\wedge\mathcal{R}$ tel que $W'\circ W'\subseteq W$. Par définition, W' contient à la fois un élément de $\mathcal{L}$ et un élément de $\mathcal{R}$. Quitte à prendre un voisinage de l'identité symétrique U suffisamment petit, on a donc que $g\in hU$ ou $g\in Uh$ implique $(g,h)\in W'$. En composant on voit que si $h\in UgU$ alors $(g,h)\in W'\circ W'$, donc $(g,h)\in W$. □

Le lemme précédent et la continuité de la multiplication impliquent que la structure uniforme de Roelcke est bien compatible avec la topologie.

Définition 2.13. — *Un groupe polonais est* ***Roelcke-précompact*** *lorsque sa structure uniforme de Roelcke est précompacte.*

Remarque 2.14. — D'après le lemme précédent, G est Roelcke-précompact si et seulement si pour tout voisinage ouvert de l'identité $U\subseteq G$, on peut trouver une partie finie $F\subseteq G$ telle que $G\subseteq UFU$.

Supposons désormais G métrisable, soit $d_{\mathcal{L}}$ une distance invariante à gauche sur G. L'action diagonale à gauche de G sur $G \times G$ muni de la distance $d((g_1, g_2), (h_1, h_2)) := d_{\mathcal{L}}(g_1, g_2) + d_{\mathcal{L}}(h_1, h_2)$ est une action par isométries. Ses orbites sont fermées donc $G \backslash\!\!\backslash (G \times G) = G \backslash (G \times G)$, et la distance quotient sur $G \backslash\!\!\backslash (G \times G)$ est donnée par

$$d_G([1, g_1], [1, g_2]) = \inf_{h \in G} \left(d_{\mathcal{L}}(h, 1) + d_{\mathcal{L}}(hg_1, g_2) \right).$$

Si on pose $d_{\mathcal{R}}(g, h) := d_{\mathcal{L}}(g^{-1}, h^{-1})$, alors $d_{\mathcal{R}}$ est une distance compatible invariante à droite sur G. En remplaçant h par hg_1^{-1} et en utilisant la symétrie, on trouve

$$d_G([1, g_1], [1, g_2]) = \inf_{h \in G} \left(d_{\mathcal{L}}(g_1, h) + d_{\mathcal{R}}(h, g_2) \right).$$

L'application $g \mapsto (1, g)$ passe au quotient en une bijection entre G et $G \backslash\!\!\backslash (G \times G) = G \backslash (G \times G)$. Le lemme suivant nous dit que modulo cette identification entre G et $G \backslash\!\!\backslash (G \times G)$, on a obtenu une distance compatible avec la structure de Roelcke.

Lemme 2.15. — *Une distance compatible avec la structure uniforme de Roelcke sur G est donnée par*

$$d_{\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}}(g_1, g_2) = \inf_{h \in G} \left(d_{\mathcal{L}}(g_1, h) + d_{\mathcal{R}}(h, g_2) \right).$$

Démonstration. — Donnons-nous un voisinage symétrique de l'identité U de diamètre au plus ϵ pour $d_{\mathcal{L}}$ (et donc par symétrie de diamètre au plus ϵ pour $d_{\mathcal{R}}$). Si $g_1 \in Ug_2U$, on écrit $g_1u_1 = u_2g_2$ avec $u_1, u_2 \in U$, alors $d_{\mathcal{L}}(g_1, g_1u_1) \leq \epsilon$ et $d_{\mathcal{R}}(g_2, u_2g_2) \leq \epsilon$ donc $d_{\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}}(g_1, g_2) \leq 2\epsilon$.

Réciproquement, si on se donne $\epsilon > 0$ et une boule ouverte U autour de l'identité de rayon ϵ pour la distance $d_{\mathcal{L}}$ et pour la distance $d_{\mathcal{R}}$, si $d_{\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}}(g_1, g_2) < \epsilon$, on trouve h tel que $d_{\mathcal{L}}(g_1, h) + d_{\mathcal{R}}(h, g_2) < \epsilon$, ainsi $g_1 \in hU$ et $h \in Ug_2$ donc $g_1 \in Ug_2U$. □

Soit maintenant $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$ le complété à gauche de G, notons toujours $d_{\mathcal{L}}$ la distance obtenue sur $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$ et d la distance sur $\widehat{G}_{\mathcal{L}} \times \widehat{G}_{\mathcal{L}}$ définie par $d((g_1, g_2), (h_1, h_2)) = d_{\mathcal{L}}(g_1, g_2) + d_{\mathcal{L}}(h_1, h_2)$. L'action précédente de G s'étend par densité et complétude en une action isométrique sur $(\widehat{G}_{\mathcal{L}} \times \widehat{G}_{\mathcal{L}}, d)$.

L'espace métrique quotient $G \backslash\!\!\backslash (\widehat{G}_{\mathcal{L}} \times \widehat{G}_{\mathcal{L}})$ est complet. D'après le lemme précédent l'application $g \mapsto [1, g]$ est un plongement isométrique de $(G, d_{\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}})$ dans $G \backslash\!\!\backslash (G_{\mathcal{L}} \times G_{\mathcal{L}})$, et son image est dense. Ceci montre le lemme suivant, où par **complété de Roelcke** on entend complété pour la structure uniforme de Roelcke.

Lemme 2.16. — *Le complété de Roelcke de G s'identifie à l'espace métrique complet* $G \backslash\!\!\backslash (\widehat{G}_{\mathcal{L}} \times \widehat{G}_{\mathcal{L}})$. □

2.3. Caractérisations des groupes polonais Roelcke-précompacts

On vient d'identifier le complété de Roelcke de G avec l'espace métrique $G\backslash\!\backslash(\widehat{G}_{\mathcal{L}}\times\widehat{G}_{\mathcal{L}})$, ce qui a pour corollaire immédiat le résultat suivant.

Proposition 2.17. — *Soit G un groupe polonais, soit $d_{\mathcal{L}}$ une distance invariante à gauche sur G compatible avec sa topologie et soit $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$ le complété de G pour $d_{\mathcal{L}}$. Alors G est Roelcke-précompact si et seulement si $G\backslash\!\backslash(\widehat{G}_{\mathcal{L}}\times\widehat{G}_{\mathcal{L}})$ est compact.* □

Remarque 2.18. — Dans le cas où G admet une distance invariante à gauche compatible complète (autrement dit, si sa structure uniforme gauche est complète), on a $\widehat{G}_{\mathcal{L}}=G$ et donc $G\backslash\!\backslash(\widehat{G}_{\mathcal{L}}\times\widehat{G}_{\mathcal{L}})=G\backslash\!\backslash(G\times G)=G\backslash(G\times G)$, qui est homéomorphe à G. Ainsi G est Roelcke-précompact si et seulement si G est compact. Cette remarque s'applique en particulier aux groupes polonais localement compacts car ils admettent toujours une distance invariante à gauche compatible complète.

On peut maintenant donner les caractérisations de la Roelcke-précompacité d'un groupe polonais G en termes d'actions *continues* par isométries sur des espaces métriques (X,d), c'est-à-dire de morphismes continus $G\to\mathrm{Iso}(X,d)$. Ce résultat va nous fournir de nombreux exemples de groupes polonais Roelcke-précompacts.

Théorème 2.19 (Ben Yaacov et Tsankov, 2016, Thm. 2.4)
Soit G un groupe polonais. S'équivalent :

(i) G est Roelcke-précompact ;

(ii) dès que G agit continûment par isométries sur des espaces métriques X et Y de manière approximativement cocompacte, l'action diagonale sur $X\times Y$ est approximativement cocompacte ;

(iii) dès que G agit continûment par isométries sur un espace métrique de manière approximativement cocompacte, l'action est approximativement oligomorphe ;

(iv) on peut plonger G dans le groupe d'isométries d'un espace métrique (X,d) complet séparable de sorte que l'action associée sur X soit approximativement oligomorphe ;

(v) le groupe G est isomorphe au groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable sur laquelle il agit de manière approximativement oligomorphe.

Démonstration. — On montre d'abord que les quatre premières assertions sont équivalentes via la chaîne d'implications (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i).

(i) ⇒ (ii). Supposons que G agit continûment par isométries sur (X,d_X) et (Y,d_Y) de manière approximativement cocompacte. On rappelle que par convention on munit $X\times Y$ de la distance d^2 donnée par

$$d^2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2).$$

Soit $\epsilon>0$, on va montrer que l'on peut recouvrir $G\backslash\!\backslash X\times Y$ par un nombre fini de boules de rayon 4ϵ.

Par précompacité on trouve $X_0 \subseteq X$ et $Y_0 \subseteq Y$ finis tels que $G \mathbin{\backslash\!\backslash} X$ soit recouvert par la réunion sur $x \in X_0$ de boules de rayon ϵ centrées en $[x]$ et que $G \mathbin{\backslash\!\backslash} Y$ soit recouvert par la réunion sur $y \in Y_0$ de boules de rayon ϵ centrées en $[y]$. Par continuité de l'action de G sur X et sur Y, on trouve un voisinage de l'identité $U \subseteq G$ tel que pour tout x dans X_0, $d_X(g \cdot x, x) < \epsilon$ et pour tout $y \in Y_0$, $d_Y(g \cdot y, y) < \epsilon$.

D'après le lemme 2.12, on dispose d'une partie finie $F \subseteq G$ telle que $G = UFU$. On va montrer que tout $[x, y] \in G \mathbin{\backslash\!\backslash} (X \times Y)$ est à distance au plus 2ϵ d'un élément du projeté de $(F \cdot X_0 \times Y_0)$ sur $G \mathbin{\backslash\!\backslash} (X \times Y)$.

Soit donc $[x, y] \in G \mathbin{\backslash\!\backslash} (X \times Y)$. Alors il existe $g_1 \in G$ tel que $g_1 \cdot x$ soit ϵ-proche de X_0, donc quitte à remplacer (x, y) par $(g_1 \cdot x, g_1 \cdot y)$ on peut et va supposer que x est ϵ-proche de $x_0 \in X_0$.

On dispose de $g \in G$ tel que $g \cdot y$ soit ϵ-proche de $y_0 \in Y_0$. On écrit $g = u_1 f u_2$ avec $u_1, u_2 \in U$ et $f \in F$.

Comme $d(x, x_0) < \epsilon$ et l'action est par isométries, l'élément $fu_2 \cdot x$ est ϵ-proche de $fu_2 \cdot x_0$, lui-même ϵ-proche de $f \cdot x_0$ puisque $d(x_0, u_2 \cdot x_0) < \epsilon$, donc par inégalité triangulaire $d(fu_2 \cdot x, f \cdot x_0) < 2\epsilon$.

D'autre part, $d(fu_2 \cdot y, y_0) = d(u_1 f u_2 \cdot y, u_1 \cdot y_0)$, or $d(u_1 \cdot y_0, y_0) < \epsilon$, donc $d(u_1 f u_2 \cdot y, u_1 \cdot y_0) < \epsilon + d(u_1 f u_2 \cdot y, y_0)$ et on conclut que $d(fu_2 \cdot y, y_0) < 2\epsilon$.

Ainsi $d^2(fu_2 \cdot (x, y), (f \cdot x_0, y_0)) < 4\epsilon$. On conclut que tout élément de $G \mathbin{\backslash\!\backslash} X \times Y$ est à distance au plus 4ϵ d'un élément du projeté de l'ensemble fini $F \cdot X_0 \times Y$ sur $G \mathbin{\backslash\!\backslash} X \times Y$. Comme ϵ était arbitraire, ceci montre bien que l'action diagonale sur $X \times Y$ est approximativement cocompacte.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si l'action de G sur X est approximativement cocompacte, alors la condition (ii) donne par récurrence que l'action sur X^n est approximativement cocompacte pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc l'action $G \curvearrowright X$ est approximativement oligomorphe.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). L'action transitive de G sur $(G, d_{\mathcal{L}})$ est isométrique, continue, et l'application $G \to \mathrm{Iso}(G_{\mathcal{L}})$ associée est un plongement de groupes topologiques puisque $g_n \to g$ si et seulement si $g_n \cdot e \to g \cdot e$.

Par complétude cette action s'étend de manière unique en un plongement $G \to \mathrm{Iso}(\widehat{G}_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{L}})$, et l'action associée est approximativement cocompacte, donc approximativement oligomorphe par (iii).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Soit $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dense d'éléments de X, l'application $\Phi : (G, d_{\mathcal{L}}) \to X^{\mathbb{N}}$ définie par $\Phi(g) = (g \cdot \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est uniformément continue. Par densité de $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et comme G est plongé dans $\mathrm{Iso}(X, d)$, l'application réciproque est également uniformément continue.

De plus, Φ est G-équivariante, et Φ est donc un plongement bi-uniformément continu de l'action $G \curvearrowright G_{\mathcal{L}}$ dans $G \curvearrowright X^{\mathbb{N}}$. L'application $\Phi \times \Phi$ est alors un plongement bi-uniformément continu de l'action diagonale $G \curvearrowright G_{\mathcal{L}} \times G_{\mathcal{L}}$ dans $G \curvearrowright X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \simeq X^{\mathbb{N}}$.

Comme $G \curvearrowright X^n$ est approximativement cocompacte pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'action $G \curvearrowright X^{\mathbb{N}}$ est également approximativement cocompacte (cf. remarque 2.6). L'existence d'un plongement bi-uniformément continu de $G \curvearrowright G_{\mathcal{L}} \times G_{\mathcal{L}}$ dans $G \curvearrowright X^{\mathbb{N}}$ nous garantit alors que $G \curvearrowright G_{\mathcal{L}} \times G_{\mathcal{L}}$ est également approximativement cocompacte, ce qui d'après la proposition 2.17 montre que G est Roelcke-précompact.

On a donc montré que les quatre premières assertions sont équivalentes. Reste à montrer que (iv) et (v) sont équivalentes. L'implication (v) $\Rightarrow$ (iv) est claire, et pour montrer la réciproque on va suivre une construction de Melleray qui montre que tout groupe polonais est isomorphe au groupe des automorphismes d'une structure métrique séparable.

On suppose donc que G est plongé dans $\mathrm{Iso}(X, d)$ et agit de manière approximativement oligomorphe. On identifie G à sont image dans $\mathrm{Iso}(X, d)$ qui est fermée. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque adhérence d'orbite $[(x_1, \ldots, x_n)] \in G \mathbin{\backslash\!\backslash} X^n$, on considère la relation $R_{[(x_1,\ldots,x_n)]}$ donnée par $R_{[(x_1,\ldots,x_n)]}(y_1, \ldots, y_n) = d^n((y_1, \ldots, y_n), [x_1, \ldots, x_n])$. Montrons que l'ajout à X de toutes les relations $R_{[(x_1,\ldots,x_n)]}$ réduit son groupe d'automorphismes à G.

Tout d'abord, il est clair que tout élément de G est un automorphisme de notre structure. Pour la réciproque, on remarque tout d'abord que d'après le fait 1.3 le groupe G est plongé comme sous-groupe fermé de $\mathrm{Iso}(X, d)$ car les deux sont polonais. Soit maintenant σ un automorphisme de (X, d) muni de la structure définie ci-dessus. Montrons que σ est dans l'adhérence de G, ce qui terminera la preuve puisque G est fermé.

Donnons-nous $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $\epsilon > 0$, on doit trouver $g \in G$ tel que $d(\sigma(x_i), g \cdot x_i) < \epsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Or $R_{[(x_1,\ldots,x_n)]}(x_1, \ldots, x_n) = 0$, donc comme σ est un automorphisme $R_{[(x_1,\ldots,x_n)]}(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 0$, ce qui par définition de $R_{[(x_1,\ldots,x_n)]}$ donne le résultat voulu. $\square$

Remarque 2.20. — Dans la construction précédente, on aurait pu se contenter de choisir des sous-ensembles dénombrables denses D_n de X^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ afin de n'ajouter à la structure que les $R_{(x_1,\ldots,x_n)}$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in D_n$; on obtient alors G comme groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable avec un nombre dénombrable de relations, et aucune fonction. De plus, la preuve montre que tout groupe polonais, Roelcke-précompact ou non, se réalise comme groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable.

Exemple 2.21. — Les exemples d'actions approximativement oligomorphes de la section 2.1 nous fournissent des des groupes polonais Roelcke-précompacts via la caractérisation (v) du théorème précédent. Ainsi le groupe $\mathfrak{S}_\infty$ des permutations de $\mathbb{N}$, le groupe $\mathrm{Aut}(R)$ des automorphismes du graphe aléatoire et le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ des bijections préservant l'ordre des rationnels sont des groupes d'automorphismes de structures dénombrables dont l'action naturelle est oligomorphe : ils sont Roelcke-précompacts [6]. Dans le cadre continu, l'exemple 2.8 nous montre que le groupe $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ des transformations préservant la mesure de l'intervalle est Roelcke-précompact (Glasner, 2012). Le groupe des transformations qui *quasi*-préservent la mesure de l'intervalle et le groupe des transformations préservant la mesure de $\mathbb{R}$ sont également Roelcke-précompacts. Le groupe des homéomorphismes de l'intervalle $[0,1]$ préservant son orientation est Roelcke-précompact car il contient une copie de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ comme sous-groupe dense. Une version continue naturelle de $\mathrm{Aut}(R)$ est le groupe $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_1)$ des isométries de l'espace d'Urysohn borné [7], qui est également Roelcke-précompact. Les groupes $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ sont Roelcke-précompacts (Uspenskij, 1998), ce qui peut se voir en appliquant la caractérisation (iv) à leurs actions naturelles sur les boules unités de leurs espaces de Hilbert respectifs.

Remarque 2.22. — Rappelons que d'après la remarque 2.18, les seuls groupes localement compacts polonais qui sont Roelcke-précompacts sont les groupes compacts polonais. La classe des groupes polonais Roelcke-précompacts a de nombreuses propriétés de stabilité analogues à celles des groupes compacts (cf. Tsankov, 2012, sec. 2.1), à l'exception notable de la stabilité par passage à un sous-groupe fermé puisque tout groupe polonais est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_1)$ des isométries de l'espace d'Urysohn borné (Uspenskij, 1990).

Terminons cette section en mentionnant une propriété importante des groupes polonais Roelcke-précompacts qui fait le lien avec la théorie géométrique des groupes polonais et motive également l'étude des groupes polonais localement Roelcke-précompacts dans ce cadre (Zielinski, 2018).

Proposition 2.23 (Rosendal, 2009, Thm. 6.1). — *Soit G un groupe polonais Roelcke-précompact. Alors toute G-action continue par isométries sur un espace métrique (X,d) a ses orbites bornées.*

Démonstration. — Soit $x\in X$, alors $G\curvearrowright G\cdot x$ est approximativement cocompacte, donc d'après (ii) du théorème précédent $G\curvearrowright G\cdot x\times G\cdot x$ est approximativement cocompacte. En particulier la pseudo-distance d_G^2 est bornée par un certain $K>0$. Prenons $g\in G$, alors en calculant $d_G^2((x,x),(x,g\cdot x))$ on obtient $\inf_{h\in G} d(hg\cdot x,x)+d(h\cdot x,x)\leq K$. Comme tout $h\in G$ est une isométrie, on a donc $\inf_{h\in G} d(g\cdot x,h^{-1}\cdot x)+d(x,h^{-1}x)\leq K$. Par inégalité triangulaire, on conclut que $d(g\cdot x,x)\leq K$, et l'orbite de x est donc bien bornée. □

6. Dans le cadre restreint des groupes d'automorphismes de structures dénombrables, le théorème qui précède est dû à Tsankov (2012).

7. On renvoie au survol de Melleray (2008) pour des informations sur les espaces d'Urysohn en général.

3. AUTOUR DE LA PROPRIÉTÉ (T) POUR LES GROUPES POLONAIS

3.1. Propriété (T), propriété (FH)

Si G est un groupe topologique et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (réel) non nul, une **représentation orthogonale** de G sur $\mathcal{H}$ est la donnée d'un morphisme de groupes *continu* $\pi : G \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ est le groupe orthogonal de $\mathcal{H}$, muni de la topologie de la convergence simple[8] (appelée aussi topologie forte, et qui sur $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ coïncide avec la topologie faible).

Définition 3.1. — *Soit $\pi : G \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ une représentation orthogonale. Soit $Q \subseteq G$, on dit qu'un vecteur $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ est (Q, ϵ)-**invariant** si pour tout $g \in Q$,*

$$\|\pi(g)\xi - \xi\| < \epsilon \|\xi\| .$$

*La représentation π a des **vecteurs presque invariants** si pour toute partie compacte $K \subseteq G$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ qui est (K, ϵ)-invariant. Elle a un **vecteur invariant** s'il existe $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tel que $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in G$.*

Définition 3.2. — *Un groupe topologique a la **propriété (T)** si toute représentation orthogonale de G qui a des vecteurs presque invariants admet en fait un vecteur invariant.*

Remarque 3.3. — La propriété (T) est souvent énoncée en parlant de représentations *unitaires* sur un espace de Hilbert *complexe*. Les deux versions sont équivalentes, ce qui se voit en utilisant d'une part le fait que tout espace de Hilbert complexe est un espace de Hilbert réel si on le munit de la partie réelle de son produit scalaire, et d'autre part la "complexification" d'un espace de Hilbert réel qui permet d'en faire un espace de Hilbert complexe (cf. la preuve du lemme 11 du chapitre 4 de De La Harpe et Valette, 1989). On a introduit la propriété (T) dans le cadre réel parce que l'algèbre des fonctions définissables que nous fournira la théorie des modèles continue est une algèbre réelle.

Remarque 3.4. — Remarquons que si G n'a pas de représentation orthogonale non triviale, alors G a la propriété (T). Ne possédant pas de mesure de Haar, de nombreux groupes polonais n'ont en fait aucune représentation orthogonale et ont donc la propriété (T), comme par exemple le groupe des homéomorphismes préservant l'orientation de l'intervalle $[0, 1]$ (Megrelishvili, 2001). Cependant, si X est discret et G agit sur X continûment, alors on a une représentation orthogonale associée $G \to \mathcal{O}(\ell^2(X))$ donnée par : pour tout $g \in G$, $\xi \in \ell^2(X)$ et $x \in X$, $(\pi(g)\xi)(x) = \xi(g^{-1}x)$. En particulier, tous les groupes d'automorphismes de structures dénombrables admettent des représentations orthogonales. Notons aussi que $\mathrm{Aut}([0, 1], \lambda)$ admet une représentation orthogonale sur $\mathrm{L}^2([0, 1], \lambda)$ définie de manière similaire.

Voici une caractérisation souvent utilisée comme définition de la propriété (T).

8. Comme G agit par *isométries* sur $\mathcal{H}$ via π, la continuité de π équivaut à la continuité de l'application d'action $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui à (g, ξ) associe $\pi(g)\xi$.

Lemme 3.5. — *Un groupe topologique G a la propriété (T) si et seulement s'il existe $K \subseteq G$ compact et $\epsilon > 0$ tel que toute représentation orthogonale π admettant des vecteurs (K, ϵ)-invariants admet un vecteur invariant.*

Démonstration. — Il est clair que la condition donnée par le lemme est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : supposons que G a la propriété (T), mais que pour tout $K \subseteq G$ compact et $\epsilon > 0$, G admet une représentation orthogonale $\pi_{K,\epsilon}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{K,\epsilon}$ avec un vecteur (K, ϵ)-invariant mais sans vecteur invariant. Alors la représentation obtenue comme somme directe de toutes les $\pi_{K,\epsilon}$ a des vecteurs presque invariants, mais n'a pas de vecteurs invariants, contredisant que G a la propriété (T). □

Lorsqu'on dispose d'une partie $K \subseteq G$ et d'un $\epsilon > 0$ tels que toute représentation ayant des vecteurs (K, ϵ)-invariants admet un vecteur invariant, on dit que (K, ϵ) est une **paire de Kazhdan** pour G. Le lemme précédent nous dit que G a la propriété (T) si et seulement s'il admet une paire de Kazhdan (K, ϵ) avec K compact. Pour tout groupe topologique G, le théorème de projection sur un convexe fermé permet de montrer que $(G, \sqrt{2})$ est une paire de Kazhdan, en particulier les groupes compacts ont la propriété (T). Il est intéressant, étant donné un groupe topologique, de déterminer ses paires de Kazhdan, par exemple pour le groupe des entiers muni de la topologie discrète (Badea, Grivaux et Matheron, 2019) !

Lorque G admet une paire de Kazhdan (K, ϵ) avec K *finie*, on dit que G a la **propriété (T) forte**. On renvoie à l'excellent De La Harpe et Valette (1989) pour des applications frappantes de la propriété (T) dans le cadre des groupes localement compacts.

Une propriété cousine de la propriété (T) qui a également été étudiée pour les groupes polonais est la propriété (FH) [9].

Définition 3.6. — *Un groupe topologique G a la propriété (FH) si toute les G-actions continues affines par isométries sur des espaces de Hilbert réels admettent un point fixe.*

On peut montrer que la propriété (T) implique la propriété (FH) en toute généralité (cf. De La Harpe et Valette, 1989, Chap. 4). Pour les groupes localement compacts σ-compacts, Delorme et Guichardet ont montré que la propriété (FH) équivaut à la propriété (T) mais ce n'est pas le cas pour les groupes polonais généraux (Pestov, 2018).

Remarque 3.7. — Un affaiblissement naturel de la propriété (T) pour les groupes polonais, introduit récemment par Ando, Doucha et Matsuzawa (2020, Sec. 2.2), implique également la propriété (FH) et lui est en fait équivalent dans de nombreux cas.

9. F pour fixe, H pour Hilbert.

Un des points importants pour montrer la propriété (FH) pour un groupe topologique G est de voir par le lemme du centre que G a la propriété (FH) si et seulement si toute G-action continue par isométries affines sur un espace de Hilbert a ses orbites bornées (cf. De La Harpe et Valette, 1989, Chap. 4, Lem. 3). Ainsi, la proposition 2.23 implique que tous les groupes polonais Roelcke-précompacts ont la propriété (FH).

3.2. Utilisation du groupe libre

Si Γ est un groupe discret, il est dit **moyennable** lorsque sa représentation régulière sur $\ell^2(\Gamma)$ (donnée par $\pi(\gamma)\xi(g) = \xi(\gamma^{-1}g)$) admet des vecteurs presque invariants. Un exemple prototypique est le groupe $\mathbb{Z}$, pour lequel on vérifie qu'étant donnés une partie finie $K \subseteq \mathbb{Z}$ et $\epsilon > 0$, la fonction caractéristique $\chi_{\{0,\dots,n\}}$ est (K, ϵ)-invariante pour n suffisamment grand.

Inversement, le groupe libre à deux générateurs $\mathbb{F}_2$ n'est pas moyennable (von Neumann, 1929)[10]. On dispose donc d'une partie finie $F \subseteq \mathbb{F}_2$ et de $\epsilon > 0$ tels que la représentation régulière $\pi : \mathbb{F}_2 \to \mathcal{O}(\ell^2(\mathbb{F}_2))$ n'admet aucun vecteur non nul (F, ϵ)-invariant. Le théorème de Kesten donne une version quantitative de ce fait qui fournit les constantes du théorème 0.1 (Kesten, 1959, Thm. 3). La version qu'on en donne est une reformulation qui se prouve utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz (cf. Bekka, 2003, pp. 515-516).

Théorème 3.8 (Kesten). — *Soit $\mathbb{F}_2 = \langle a, b\rangle$ le groupe libre à 2 générateurs, soit $\pi : \mathbb{F}_2 \to \mathcal{O}(\ell^2(\mathbb{F}_2))$ sa représentation régulière. Alors π n'a pas de vecteurs non nuls $(\{a, b\}, \sqrt{2-\sqrt{3}})$-invariants : pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a*

$$\|\pi(a)\xi - \xi\| \geq \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\|\xi\| \ \ \textit{ou}\ \ \|\pi(b)\xi - \xi\| \geq \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\|\xi\|\,.$$

Remarquons que ce théorème reste vrai pour une représentation qui serait un multiple de la représentation régulière, c'est-à-dire un produit tensoriel de la représentation régulière avec une représentation triviale.

Bekka a utilisé le théorème de Kesten afin de montrer entre autres que lorsque $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie, le groupe polonais Roelcke-précompact $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ a la propriété (T) (Bekka, 2003). Sa démonstration s'appuie sur une classification des représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{O}(\mathcal{H})$, et le fait que toutes ses représentations se décomposent comme somme directe de sous-représentations irréductibles[11] (Ol'shanskii, 1978). Mentionnons également les travaux de Shalom,

10. Une manière concrète de s'en rendre compte est de passer par la caractérisation de la moyennabilité en termes d'ensembles de Følner et de faire un *schéma de Ponzi* sur le groupe libre, cf. Gromov (2007, Cor. 6.18).

11. Il est bien connu que toute représentation unitaire d'un groupe localement compact polonais se décompose en une *intégrale* directe de sous-représentations irréductibles. Ce fait est faux pour les groupes polonais en général, par exemple le groupe polonais abélien des fonctions mesurables à valeur dans le cercle n'a pas de représentation unitaire irréductible , mais il admet beaucoup de représentations unitaires, qui ont d'ailleurs été classifiées par Solecki (2014).

qui avait auparavant montré entre autres que le groupe des applications continues du cercle à valeurs dans $Sl_n(\mathbb{C})$ a la propriété (T) pour tout $n \geq 3$ avec une approche différente (Shalom, 1999, Cor. 4).

Tsankov (2012) a prouvé que les représentations unitaires des groupes d'automorphismes de structures dénombrables se décomposent toutes en somme directe de représentations irréductibles, et a classifié ces dernières. Comme Bekka l'avait fait auparavant pour $\mathcal{O}(\mathcal{H})$, il a pu ensuite utiliser cette classification pour identifier une large classe de groupes d'automorphismes de structures dénombrables ayant la propriété (T) avec des paires de Kazhdan explicites, s'appuyant sur le théorème de Kesten. Il demandait aussi si tout groupe polonais Roelcke-précompact a la propriété (T).

Evans et Tsankov (2016) ont ensuite étendu son résultat pour répondre par l'affirmative dans le cadre des groupes polonais non archimédiens. Le résultat d'Ibarlucía y répond affirmativement en toute généralité, englobant les résultats de Bekka et d'Evans–Tsankov.

Théorème 3.9 (Ibarlucía, 2021). — *Soit G un groupe polonais Roelcke-précompact. Alors G a la propriété (T).*

Le résultat d'Ibarlucía est d'autant plus remarquable qu'il ne fait pas appel à une classification des représentations unitaires irréductibles, classification qui est probablement hors de portée pour les groupes polonais Roelcke-précompacts en général. Comme expliqué plus haut, on va donner la preuve seulement dans le cas où $G = \mathrm{Aut}([0,1], \lambda)$, avec à la clé un énoncé plus précis puisqu'on montre en fait la propriété (T) forte[12] (Ibarlucía, 2021, Sec. 5). Notons que les représentations unitaires de ce groupe ont été classifiées par Neretin (1992), mais le fait que tout représentation unitaire se décompose en somme directe d'irréductibles ne semble écrit nulle part.

Définissons maintenant les deux éléments $T_1, T_2 \in \mathrm{Aut}([0,1], \lambda)$ qui permettront de montrer que le groupe $\mathrm{Aut}([0,1], \lambda)$ a la propriété (T) forte, et plus précisément qui satisferont que $(\{T_1, T_2, \}, \sqrt{2 - \sqrt{3}})$ est une paire de Kazhdan (théorème 0.1). Pour cela, comme mentionné à la fin de la section 1.3, il est plus clair de travailler dans l'algèbre de mesure de $X = \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{F}_2}$ muni de la mesure $(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes(\mathbb{N} \times \mathbb{F}_2)}$. On définit alors une action préservant la mesure de probabilité du groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur (X, μ) qui est un *décalage de Bernoulli* : pour $x \in X$, $(n, g) \in \mathbb{N} \times \mathbb{F}_2$ et $\gamma \in \mathbb{F}_2$,

$$(\gamma \cdot x)(n, g) = x(n, \gamma^{-1} g).$$

Cette action induit une action de $\mathbb{F}_2$ par automorphismes sur l'algèbre de mesure de (X, μ), et une fois qu'on a choisis une identification entre cette dernière et $\mathrm{MAlg}([0,1], \lambda)$,

12. Il existe des groupes polonais compacts (en particulier, Roelcke-précompacts) qui n'ont pas la propriété (T) forte, comme le cercle (cf. la proposition 5 de Bekka (2003) pour un énoncé plus général). Ainsi l'énoncé du théorème 3.9 est optimal.

on obtient les éléments T_1 et T_2 du théorème 0.1 en prenant les transformations correspondant aux générateurs a et b du groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b\rangle$. On peut désormais ramener le théorème 0.1 à l'énoncé suivant qui suit la même stratégie que Bekka.

THÉORÈME 3.10. — *Soit* $\pi : \mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ *une représentation orthogonale sans vecteurs invariants. Alors* $\pi_{\restriction\langle T_1,T_2\rangle}$ *est un multiple de la représentation régulière du groupe libre engendré par* T_1 *et* T_2*.*

Démonstration du théorème 0.1 à partir du théorème 3.10. — La preuve se fait par contraposition. Soit $\pi : \mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ une représentation orthogonale sans vecteurs invariants. D'après le théorème 3.10 elle se retreint à $\mathbb{F}_2 = \langle T_1, T_2\rangle$ en un multiple de sa représentation régulière et le théorème de Kesten empêche alors l'existence de vecteurs $(\{T_1,T_2\}, \sqrt{2-\sqrt{3}})$-invariants. □

Nous ébaucherons la preuve du résultat ci-dessus après avoir donné une preuve complète du théorème plus faible qui suit (cf. section 6). Les sections 4 et 5 prépareront le terrain.

THÉORÈME 3.11. — *Soit* $\pi : \mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ *une représentation orthogonale sans vecteurs invariants. Alors* $\pi_{\restriction\langle T_1,T_2\rangle}$ contient *la représentation régulière du groupe libre engendré par* T_1 *et* T_2*.*

Terminons cette partie en mentionnant que puisque les groupes polonais n'ont pas de mesure de Haar a priori, ils n'ont pas de représentation régulière et la définition de la moyennabilité qu'on a donné en début de partie n'a pas de sens dans leur cadre. Une bonne généralisation existe cependant, et les groupes polonais peuvent de plus exhiber un phénomène d'*extrême moyennabilité* inexistant dans le cadre localement compact. On renvoie à l'ouvrage de PESTOV (2006) pour ces aspects fascinants.

4. BASES DE THÉORIE DES MODÈLES CONTINUE

Nous allons maintenant introduire le cadre de la théorie des modèles continue, qui s'avère être un outil puissant non seulement pour l'étude des groupes d'automorphismes de structures métriques, mais aussi pour l'étude de ces structures elles-mêmes (cf., par exemple, FARAH, 2014). Notre présentation est très partielle puisque notre objectif est d'arriver rapidement aux résultats d'Ibarlucía sur la propriété (T) pour $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$. On omet notamment le théorème de Löwenheim–Skolem, la construction d'ultraproduits, le théorème de compacité ou encore l'existence de modèles monstrueux qui sont incontournables pour aller plus loin et comprendre la preuve d'Ibarlucía en général. On renvoie pour cela à BEN YAACOV, BERENSTEIN, HENSON et USVYATSOV (2008) qui est notre principale source. On a suivi un traitement proche de FARAH, HART, LUPINI, ROBERT, TIKUISIS, VIGNATI et WINTER (2016) et HALLBÄCK (2020) dans la présentation de l'algèbre des prédicats définissables.

4.1. Langages, formules, théories

Étant donné le groupe des automorphismes d'une structure métrique, on va avoir besoin de parler de sous-structures, mais aussi de plongements entre des structures non nécessairement liées à notre structure de départ. Évidemment, on ne peut pas considérer des plongements entre des objets de nature différente, et la notion de *langage* permet de formaliser cette restriction en fixant une fois pour toute des *symboles* de fonctions et de relations, qui seront ensuite *interprétés* dans les structures appropriées. On commence par donner la définition d'un langage dans le cadre discret.

DÉFINITION 4.1. — *Un* ***langage discret*** *est un couple* $\mathcal{L} = ((f_i, n_i)_{i \in I}, (R_j, m_j)_{j \in J})$, *où les* f_i *et* R_j *sont des symboles deux à deux distincts, et les* n_i *et* m_j *sont des entiers représentant leurs arités respectives. Les* f_i *sont appelés* ***symboles de fonctions****, les* R_j *sont les* ***symboles de relations****. Quand* f_i *est d'arité* $n_i = 0$*, on dit aussi que* f_i *est un* ***symbole de constante****.*

La définition dans le cas métrique est compliquée par le fait que l'on voudra que les interprétations des symboles du langage soient uniformément continues bornées, et ce d'une manière qui ne dépende pas de la structure considérée. Rappelons qu'étant donnés deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et une application $\delta \colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, une application $f : X \to Y$ est dite uniformément continue de **module de continuité uniforme** δ si pour tout $\epsilon > 0$ et tous $x_1, x_2 \in X$, si $d_X(x_1, x_2) < \delta(\epsilon)$ alors $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

Dans la définition qui suit, les distances sur les puissances M^n sont celles de la convention donnée en début de section 2.3, et on munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle, induite par la valeur absolue.

DÉFINITION 4.2. — *Un* ***langage métrique*** *est un langage discret*

$$\mathcal{L} = ((f_i, n_i)_{i \in I}, (R_j, m_j)_{j \in J})$$

où on se donne en plus

- *pour chaque* $i \in I$ *un module de continuité uniforme* δ_i *;*
- *pour chaque* $j \in J$ *un module de continuité uniforme* δ_j *et une* borne $D_j > 0$ *;*
- *une borne* $D > 0$.

Une ***$\mathcal{L}$-structure*** *est alors un espace métrique* complet (M, d^M) *de diamètre au plus* D *muni des* interprétations *suivantes :*

- *pour chaque symbole de fonction* f_i*, on a une application* $f_i^M : M^{n_i} \to M$ *de module de continuité uniforme* δ_i *;*
- *pour chaque symbole de relation* R_j*, on a une application* $R_j^M : M^{m_j} \to [0, D_j]$ *de module de continuité uniforme* δ_j*.*

Comme dans la définition des structures métriques, on autorise les symboles de fonctions 0-aires qui correspondent alors à des éléments de la structure M. Le symbole de distance d est également interprété comme d^M dans M.

Exemple 4.3. — Tout espace métrique complet est une structure dont le langage est l'ensemble vide (on parle alors du langage des espaces métriques).

Exemple 4.4. — Les algèbres de mesure telles que définies dans la section 1.3 sont des $\mathcal{L}$-structures pour le langage $\mathcal{L}$ qui suit. Tout d'abord, on prendra pour chaque symbole de relation ou de fonction le module de continuité uniforme $\delta = \mathrm{id}_{]0,+\infty[}$ (module de continuité uniforme des fonctions 1-lipschitziennes), et la borne $D = 1$. Le langage est alors constitué des symboles suivants dont on précise les interprétations dans une algèbre de mesure $(\mathrm{MAlg}(X,\mu), d_\mu, \emptyset, X, \cup, \cap, \triangle, \mu)$.

- deux symboles de fonctions $\mathbb{0}$ et $\mathbb{1}$ d'arité 0 (constantes), qui seront interprétées comme $\emptyset$ et X
- trois symboles de fonctions $\vee, \wedge$ et $\boldsymbol{+}$ d'arité 2 et de module de continuité uniforme δ, qui seront interprétées comme $\cup, \cap$ et $\triangle$ respectivement.
- un symbole de relation m d'arité 1, de module de continuité uniforme δ, qui sera interprété comme μ.

Le langage des algèbres de mesure est donc formellement la famille

$$\Big(((\mathbb{0},0),(\mathbb{1},0),(\vee,2),(\wedge,2),(\boldsymbol{+},2))\,,\ ((m,1))) \Big),$$

avec les modules de continuité uniforme tous égaux à $\mathrm{id}_{]0,+\infty[}$ et les bornes toutes égales à 1.

On suppose également avoir à disposition un ensemble infini de **symboles de variables** $\{x_1,\ldots,x_k,\ldots\}$ et que pour chaque tel symbole de variable x_k on dispose des **symboles de quantification** $\inf_{x_k}$ et $\sup_{x_k}$.

Un langage métrique $\mathcal{L}$ étant fixé, nous allons maintenant définir les briques de base des *formules*. Formellement, une formule est une suite finie de symboles, mais qui est destinée à avoir un sens (une interprétation) dans les structures que nous considérerons. La définition que nous donnons des termes et formules est imprécise afin de ne pas nous noyer dans des notations, et on peut rendre tout cela plus rigoureux, de la même manière que l'on peut définir proprement les polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ comme étant des suites de support fini à valeurs dans $\mathbb{K}$. On renvoie donc le lecteur inquiet à Cori et Lascar (2003, Chap. 3) pour un traitement complet dans le cadre de la théorie des modèles classique.

Définition 4.5. — *On définit les* ***$\mathcal{L}$-termes*** *(et leurs* ***ensembles de variables libres****) par induction de la manière suivante :*

1. *Chaque symbole de variables x_k est un terme dont l'ensemble des variables libres est $\{x_k\}$.*
2. *Si f est un symbole de fonction d'arité n et $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes, alors $f(t_1,\ldots,t_n)$ est un terme dont l'ensemble des variables libres est la réunion des ensembles de variables libres de $t_1,\ldots,t_n$.*

En particulier pour $n = 0$, les symboles de constantes sont des termes dont l'ensemble de variables libres est vide.

Exemple 4.6. — Dans le langage des algèbres de mesure, $\mathbb{1} + x_1$ est un terme, que l'on interprétera bientôt comme le passage au complémentaire. Un autre exemple est donné par $x_1 \vee x_2$, qu'on interprétera comme l'opération de réunion.

DÉFINITION 4.7. — *Une **formule atomique** est une expression de la forme*

$$R(t_1, \ldots, t_m),$$

où $t_1, \ldots, t_m$ sont des $\mathcal{L}$-termes et R est un symbole de relation d'arité m. Son ensemble de variables libres est la réunion des ensembles de variables libres des termes qui la constituent.

Exemple 4.8. — Dans le langage des espaces métriques, les seules formules atomiques sont de la forme $d(x_i, x_j)$. Dans le langage des algèbres de mesure, $m((x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \mathbb{0}))$ est une formule atomique.

Un **connecteur logique** est une fonction continue $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ici encore, on s'autorise $n = 0$, auquel cas c est un réel. On note $\mathbf{1}$ le connecteur logique d'arité nulle correspondant au réel 1 et $\mathbf{0}$ le connecteur logique correspondant au réel 0. On notera également $\dot{-} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction qui à $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ associe $t_1 \dot{-} t_2 := \max(t_1 - t_2, 0)$.

DÉFINITION 4.9. — *L'ensemble des **formules** (et les ensembles de variables libres associés) est défini par induction de la manière suivante :*

1. *Toute formule atomique est une formule ;*
2. *Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des formules et $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un connecteur logique alors $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une formule dont l'ensemble des variables libres est égal à la réunion des ensembles de variables libres de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;*
3. *Si φ est une formule et x_k est un symbole de variable alors $\inf_{x_k} \varphi$ et $\sup_{x_k} \varphi$ sont des formules, dont l'ensemble des variables libres est celui de φ privé de $\{x_k\}$.*

Exemple 4.10. — La formule $\inf_{x_2} m(x_1 \wedge x_2)$ est une formule dans le langage des algèbres de mesure dont la seule variable libre est x_1.

Un **énoncé** est une formule dont l'ensemble des variables libres est vide. On notera $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ une formule dont l'ensemble des variables libres est inclus dans $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Étant donnés une structure métrique M de signature $\mathcal{L}$, une formule $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, et un uplet $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$, on peut enfin définir l'**interprétation** φ^M de $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ dans M évaluée en $(a_1, \ldots, a_k)$, qui est un nombre réel que l'on notera $\varphi^M(a_1, \ldots, a_k)$. Cette dernière est obtenue en remplaçant x_i par a_i dans la formule, chaque symbole de fonction ou relation par son interprétation, en interprétant chaque connecteur logique comme la fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ correspondante, et les symboles $\inf_{x_i}$ et $\sup_{x_i}$ comme des infimums/supremums portant sur $x_i \in M$. On obtient alors une fonction $\varphi^M : M^k \to \mathbb{R}$. Pour une définition formelle de l'interprétation d'une formule, on renvoie à BEN YAACOV, BERENSTEIN, HENSON et USVYATSOV (2008, Def. 3.3), ici on se contente de donner quelques exemples dans le cadre des algèbres de mesure.

Exemple 4.11. — Soit (M, d^M) un espace métrique complet borné.

Alors $\varphi(x_1, x_2) := d(x_1, x_2)$ est une formule à deux variables libres dont l'interprétation dans M est la fonction d^M. Ainsi l'énoncé

$$\sup_{x_1} \sup_{x_2} d(x_1, x_2)$$

s'interprète comme le supremum des $d^M(a_1, a_2)$ où $(a_1, a_2) \in M^2$, c'est-à-dire le *diamètre* de (M, d^M). Un autre exemple est fourni par la formule $d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$ qui s'interprète comme la distance produit sur M^n suivant la convention donnée au début de la section 2.

Exemple 4.12. — Soit $M = \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ une algèbre de mesure. La formule $\varphi_1(x_1) := \inf_{x_2} m(x_1 \wedge x_2)$ s'interprète dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ comme la fonction $\varphi_1^M : \mathrm{MAlg}(X, \mu) \to \mathbb{R}$ qui à $A \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ associe

$$\inf_{B \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)} \mu(A \cap B).$$

Notons que φ^M est constante égale à 0, puisque on peut prendre pour B l'ensemble vide. On va utiliser des connecteurs logiques pour la rendre plus intéressante. Considérons la formule suivante :

$$\varphi_2(x_1) := \inf_{x_2} \left| m(x_1 \wedge x_2) - \frac{m(x_1)}{2} \right|,$$

alors $\varphi_2^M(A) = 0$ si et seulement si on peut trouver des sous-ensembles de A de mesure arbitrairement proche de $\frac{\mu(A)}{2}$. On peut alors donner un énoncé dont l'interprétation est nulle si et seulement si $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ est sans atomes :

$$\sup_{x_1} \inf_{x_2} \left| m(x_1 \wedge x_2) - \frac{m(x_1)}{2} \right|.$$

Nous avons maintenant à notre disposition, pour chaque $\mathcal{L}$-structure M, d'un ensemble de fonctions uniformément continues bornées sur M et ses puissances, qui sont les interprétations φ^M de formules φ. De plus, en utilisant les bornes et modules de continuité uniforme fournis par la définition 4.2 et le fait que la restriction de tout connecteur logique à un compact est uniformément continue, on peut trouver pour chaque formule φ une borne ainsi qu'un module d'uniforme continuité valables dans *toutes* les interprétations de φ (cf. Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008, Thm. 3.5).

Identifions deux formules lorsque leurs interprétations sont les mêmes dans toute $\mathcal{L}$-structure (on dit aussi qu'elles sont logiquement équivalentes). On munit alors l'ensemble $\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}$ des formules d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre commutative en utilisant les connecteurs logiques correspondants à la multiplication par un réel, à l'addition et à la multiplication. On note $\mathfrak{F}_n^{\mathcal{L}}$ la sous-algèbre des formules dont les variables libres sont parmi $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour $n = 0$, on obtient l'algèbre des *énoncés* φ (formules sans variables libres), qui ont donc une interprétation $\varphi^M \in \mathbb{R}$ dans chaque $\mathcal{L}$-structure M.

Définition 4.13. — *La **théorie** d'une $\mathcal{L}$-structure M est l'application linéaire qui à chaque énoncé $\varphi \in \mathfrak{F}_0^{\mathcal{L}}$ associe φ^M.*

Comme une application linéaire est complètement déterminée par son noyau, on appellera en fait théorie de M, notée $\mathrm{Th}(M)$, le noyau de l'application $\varphi \mapsto \varphi^M$. De manière générale, une **théorie** est un ensemble T formé d'énoncés. On dit que M est un **modèle** d'une théorie T si $T \subseteq \mathrm{Th}(M)$. Les théories admettant des modèles sont dites **consistantes**, et si de plus tous les modèles de T ont la même théorie (interprètent identiquement *tous* les énoncés), on dit que T est **complète**. Dans ce qui suit, on s'intéressera uniquement à des théories complètes. Notons que par définition, si on se fixe une $\mathcal{L}$-structure M, la théorie $\mathrm{Th}(M)$ est complète.

Remarque 4.14. — Un enjeu important (mais secondaire dans le cadre de cet exposé) est de trouver une **axiomatisation** naturelle de $\mathrm{Th}(M)$, c'est-à-dire une théorie complète *la plus petite* (et la plus naturelle) possible au sein de $\mathrm{Th}(M)$. On pourra par exemple consulter Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov (2008, Sec. 16) pour une axiomatisation de la théorie de l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$, qui est en fait égale à celle de toute algèbre de mesure sans atomes.

4.2. Prédicats définissables et espace des types

Fixons désormais une théorie T complète. Si M est un modèle de T, on peut alors définir une semi-norme sur l'algèbre des formules en considérant la norme infinie de leurs interprétations dans M :

$$\|\varphi(x_1,\dots,x_k)\|_{M,T} = \sup_{(a_1,\dots,a_k)\in M^k} \left|\varphi^M(a_1,\dots,a_k)\right|.$$

Notons au passage l'importance d'avoir dans la définition 4.2 des bornes sur les symboles de relation afin que cette expression soit bien finie. Le lemme suivant dit que la semi-norme obtenue ne dépend pas du modèle de T choisi.

Lemme 4.15. — *Si M et N sont deux modèles de T et si $\varphi(x_1,\dots,x_k)$ est une formule, alors*

$$\|\varphi(x_1,\dots,x_k)\|_{M,T} = \|\varphi(x_1,\dots,x_k)\|_{N,T}.$$

Démonstration. — Considérons l'énoncé $\sup_{x_1}\cdots\sup_{x_k}|\varphi(x_1,\dots,x_k)|$. Par définition, son interprétation dans M (resp. N) est égale à $\|\varphi(x_1,\dots,x_k)\|_{M,T}$ (resp. $\|\varphi(x_1,\dots,x_k)\|_{N,T}$), or comme M et N sont de modèles de T complète ces interprétations doivent être égales. $\square$

On peut donc définir sans ambiguité une semi-norme $\|\cdot\|_T$ sur l'algèbre des formules en posant $\|\varphi(x_1,\dots,x_k)\|_T = \|\varphi(x_1,\dots,x_k)\|_{M,T}$ où M est un modèle de T.

Autrement dit, si T est une théorie complète, on vient de munir $\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}$ d'une semi-norme de sorte que l'application qui à $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \mathfrak{F}_n^{\mathcal{L}}$ associe son interprétation sur M^n

soit un plongement isométrique [13] $(\mathfrak{F}_n^{\mathcal{L}}, \|\cdot\|_T) \to (UCB(M^n), \|\cdot\|_\infty)$ (où $UCB(M^n)$ est l'algèbre des fonctions uniformément continues bornées sur M), et ce quel que soit le modèle M de T.

Remarque 4.16. — Si φ est une formule, on peut montrer que son module de continuité uniforme est également encodé dans la théorie T complète. Dans le cas où $\varphi(x_1)$ n'a qu'une variable libre on procède ainsi : à $\epsilon, \delta > 0$ fixé, dire que dans un modèle M de T, on a pour tous $(a_1, a_2) \in M^2$ l'implication $d(a_1, a_2) \leq \delta \Rightarrow \left|\varphi^M(a_1) - \varphi^M(a_2)\right| \leq \epsilon$ équivaut à dire que M satisfait l'énoncé suivant, où l'on rappelle que le connecteur logique binaire $\dot{-}$ est défini par $t_1 \dot{-} t_2 = \max(t_1 - t_2, 0)$:

$$\sup_{x_1,x_2} \min\Big(\delta \dot{-} d(x_1, x_2), |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \dot{-} \epsilon\Big),$$

ce qui permet de conclure par complétude de T. On aurait donc pu se passer des modules d'uniforme continuité dans la définition 4.2. Cependant, cela poserait problème au sein d'une théorie incomplète (comme par exemple dans Farah, Hart, Lupini, Robert, Tikuisis, Vignati et Winter, 2016) puisque l'absence de module d'uniforme continuité commun à toutes les structures empêche la construction d'ultraproduits raisonnables. On a donc préféré donner la définition générale.

Remarque 4.17. — De même, la théorie encode quelles formules sont à valeurs positives. Par exemple, une formule $\varphi(x_1)$ est à valeurs positives si et seulement si l'énoncé suivant est dans T : $\inf_{x_1} \min(\varphi(x_1), \mathbf{0})$.

Définition 4.18. — *Étant donnée une théorie T complète, l'algèbre $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}$ des **prédicats définissables** est la $\mathbb{R}$-algèbre de Banach obtenue par séparation puis complétion de $(\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}, \|\cdot\|_T)$.*

Remarque 4.19. — En toute rigueur, on devrait parler de l'algèbre des prédicats T-définissables puisque la notion dépend de la théorie complète T sous-jacente.

Convention. — *Dans ce qui suit, on aura affaire à des uplets finis et infinis (mais dénombrables), et on dira qu'on a des n-uplets pour un $n \leq \omega$; plus précisément $n < \omega$ veut dire que $n \in \mathbb{N}$, et $n = \omega$ veut dire que l'on travaille sur des suites indexées par $\mathbb{N}$.*

Pour $n \leq \omega$, définissons $\mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$ comme l'adhérence dans $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}$ de $\mathfrak{F}_n^{\mathcal{L}}$. C'est par définition la sous-algèbre des prédicats définissables dont les variables libres sont parmi $\{x_1, \ldots, x_n\}$, pour $n = \omega$ on a $\mathfrak{P}_\omega^{\mathcal{L},T} = \mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}$. Notons qu'il existe des prédicats définissables *avec une infinité de variables libres*, par exemple $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$ (que l'on définit formellement comme étant la limite de suite de Cauchy des formules données par les

13. Comme on a seulement une semi-norme sur l'espace de départ, ce n'est pas une injection donc le terme de plongement est peut-être abusif, mais on va tout de suite quotienter par l'idéal des éléments de semi-norme nulle de manière à avoir une vraie norme, et donc un vrai plongement par passage au quotient.

sommes partielles). Un prédicat définissable sans variable libre (cas $n = 0$) sera appelé un **énoncé**, ce qui étend naturellement la définition donnée en section 4.1.

On a quotienté $\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}$ par l'idéal $\mathfrak{I}$ des formules dont les interprétations sont toujours nulles, ainsi les éléments de la pré-algèbre de Banach $\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}_n$ ont toujours une interprétation bien définie dans chaque modèle de T, qui définit une application uniformément continue et bornée sur M^n. Comme tout élément de $\mathfrak{P}^{\mathcal{L}}_n$ est limite uniforme d'éléments de $\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}_n/\mathfrak{I}$, tout prédicat définissable $\varphi \in \mathfrak{P}^{\mathcal{L}}_n$ a une interprétation bien définie φ^M dans tout modèle M de T, qui est une fonction uniformément continue sur M^n.

Ceci nous permet en particulier de voir que si M est un modèle de T, et $n < \omega$ chaque élément $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ définit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre non nul noté $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n) : \mathfrak{P}^{\mathcal{L}}_n \to \mathbb{R}$, défini par

$$\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)(\varphi) = \varphi^M(a_1, \ldots, a_n).$$

De même pour $n = \omega$ chaque suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définit un morphisme $\mathfrak{P}^{\mathcal{L}}_\omega \to \mathbb{R}$ donné par

$$\mathrm{tp}((a_i)_{i\in\mathbb{N}})(\varphi) = \varphi^M((a_i)_{i\in\mathbb{N}}).$$

Définition 4.20. — *Soit T une théorie complète et $n \le \omega$. L'espace des n-**types** sur T est l'espace des morphismes multiplicatifs non nuls $p : \mathfrak{P}^{\mathcal{L}}_n \to \mathbb{R}$ continus de norme ≤ 1.*

Notons que par densité et continuité, tout type est complètement déterminé par sa restriction aux formules.

Remarque 4.21. — En fait tout morphisme $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}_n \to \mathbb{R}$ est automatiquement continu de norme ≤ 1 car il préserve l'ordre naturel sur $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}_n$ et envoie $\mathbf{1}$ sur 1, et tout prédicat définissable φ satisfait l'inégalité $\varphi \le \|\varphi\|_T \mathbf{1}$.

On munit l'espace des types de la topologie faible-*, ce qui en fait un espace topologique compact (cette topologie est appelée la **topologie logique** dans Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008). Étant donné un type p, on notera souvent $\varphi(p)$ l'élément $p(\varphi)$ afin d'avoir une notation cohérente avec la définition du type d'un élément de M^n.

Définition 4.22. — *Pour un type $p \in S_n(T)$, un modèle M de T et un uplet $\bar{a} \in M^n$, on dit que $\bar{a}$ **réalise** le type p lorsque $\mathrm{tp}(\bar{a}) = p$.*

Remarque 4.23. — Le théorème de compacité garantit que pour tout n-type $p \in S_n(T)$, on peut trouver un modèle de T dans lequel il existe une réalisation de p.

Comme pour les théories, on identifiera un type et son noyau, donc on dira qu'une formule *appartient à* p ou *est dans* p si elle appartient à son noyau.

Exemple 4.24. — Dans l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}([0,1], \lambda)$, si $\varphi(x_1, x_2) := m(x_1 \wedge x_2)$, et $p = \mathrm{tp}([0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{4}, 1])$, alors $p(\varphi) = \mu([\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]) = \frac{1}{12}$. Ainsi la formule $\varphi - \frac{1}{12}$ appartient à p.

Remarque 4.25. — Il est utile de noter qu'une *base* de la topologie logique est donnnée par les ouverts de la forme $U_{\varphi,\epsilon} := \{p : |\varphi(p)| < \epsilon\}$, puisque une intersection finie d'ouverts de la forme U_{φ_i,ϵ_i} contient l'ouvert $U_{\max_i \varphi_i, \min_i \epsilon_i}$.

Chaque prédicat définissable $\varphi \in \mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$ définit une fonction continue $\widehat{\varphi}$ sur l'espace des types $S_n(T)$ par $\widehat{\varphi}(p) = p(\varphi)$. La première partie du théorème qui suit est un cas très particulier d'un théorème de Arens (le corollaire du théorème 6 dans Arens, 1947).

Théorème 4.26 (Dualité de Gelfand). — *Pour tout $n \leq \omega$, l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Banach entre $\mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$ et l'espace $\mathcal{C}(S_n(T), \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $S_n(T)$ à valeurs réelles. De plus, si $n < \omega$, pour tout modèle M de T, l'application $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mapsto \mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)$ est uniformément continue d'image dense dans $S_n(T)$. De même l'application $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M^\omega \mapsto \mathrm{tp}((a_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est uniformément continue d'image dense dans $S_n(T)$.*

Démonstration. — Supposons $n < \omega$. L'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est une contraction puisque les éléments de $S_n(T)$ sont de norme ≤ 1. Elle est en fait isométrique puisque si φ est une formule,

$$\|\varphi\|_T = \sup_{(a_1,\ldots,a_n)\in M^n} \left|\varphi^M(a_1, \ldots, a_n)\right| = \sup_{(a_1,\ldots,a_n)\in M^n} \widehat{\varphi}(\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)) \leq \|\widehat{\varphi}\| .$$

La surjectivité de $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ découle du théorème de Stone–Weierstrass, puisque par définition l'algèbre formée par les $\widehat{\varphi}$ sépare les points de l'espace compact $S_n(T)$.

Enfin, le fait que l'application $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mapsto \mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)$ soit d'image dense provient du fait que toute fonction continue $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}(S_n(T), \mathbb{R})$ est complètement déterminée par sa restriction à $\mathrm{tp}(M^n)$, qui n'est d'autre que la restriction de φ à M^n, et ce d'après le lemme 4.15. Son uniforme continuité découle du fait que chaque φ^M est uniformément continu. Pour $n = \omega$ la preuve est identique, il faut juste adapter la notation. □

Remarque 4.27. — Pour $n \leq \omega$, définissons $UC(M^n)$ comme l'algèbre des fonctions uniformément continues bornées $M^n \to \mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. La fin de la preuve utilise que pour $n \leq \omega$, l'application $\mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T} \to UC(M^n)$ qui associe à un prédicat définissable son interprétation dans M modèle de T est un une plongement isométrique (ce qui découle directement de la définition de $\|\cdot\|_T$ et du lemme 4.15). *Il pourra ainsi être plus commode de voir l'algèbre des prédicats définissables comme une algèbre de fonctions sur M^ω où M est un modèle fixé de T, ce que l'on s'autorisera à faire implicitement par la suite.*

Remarque 4.28. — Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, les fonctions polynomiales à coefficients rationnels sont denses dans l'espace des fonctions continues sur K à valeurs réelles. Il en découle que dans la définition des connecteurs logiques, on aurait pu se contenter de prendre pour connecteurs les fonctions **0** et **1** (connecteur 0-aire), les multiplications par des scalaires $q \in \mathbb{Q}$ (connnecteurs unaires) la multiplication et l'addition sur les réels (connecteurs binaires), et les projections $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (connecteurs

n-aires). On obtient ainsi naturellement, sous l'hypothèse que $\mathcal{L}$ soit dénombrable, une $\mathbb{Q}$-algèbre dénombrable de formules qui nous donne, après séparation/complétion, la même $\mathbb{R}$-algèbre de prédicats définissables. En particulier, sous l'hypothèse que $\mathcal{L}$ est dénombrable, $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}$ est une algèbre de Banach séparable, et donc pour tout $n \leq \omega$, l'espace $S_n(T)$ est compact *métrisable*.

Terminons cette section en étendant un certain nombre d'opérations sur les formules aux prédicats définissables. Tout d'abord, les quantificateurs $\sup_{x_k}$ et $\inf_{x_k}$ induisent chacun une contraction sur l'espace des formules $(\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}, \|\cdot\|_T)$. Ces dernières s'étendent donc de manière unique en des contractions sur $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}$. En particulier si $\varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ est un prédicat définissable, $\inf_{x_k} \varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ l'est aussi, et son interprétation dans un modèle M de T satisfera, pour tous $(a_i)_{i\in\omega} \in M^\omega$:

$$\Big(\inf_{x_k} \varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots)\Big)^M (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots) = \inf_{a_k \in M} \varphi^M(a_1, \ldots, a_k, \ldots).$$

On peut également prendre un infimum de n'importe quel prédicat définissable sur *un sous-ensemble infini de l'ensemble des variables* puisqu'une telle opération nous définit une contraction de norme 1 sur l'ensemble des formules $(\mathfrak{F}^{\mathcal{L}}, \|\cdot\|_T)$, et de même pour le supremum. Si $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots)$ est l'uplet (possiblement infini) des variables sur lesquelles on prend l'infimum et $\varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ est un prédicat définissable, on note simplement

$$\inf_{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots)} \varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$$

le prédicat définissable obtenu. Si on avait pris l'infimum sur toutes les variables, l'interprétation sera un nombre réel, qui correspond au minimum du prédicat définissable sur l'espace des types (par densité de M^ω dans $S_\omega(T)$).

Enfin, la composition par un connecteur logique $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nous définit une application uniformément continue $(\mathfrak{F}^{\mathcal{L}})^n \to \mathfrak{F}^{\mathcal{L}}$, et donc si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des prédicats définissable, alors $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'est aussi et s'interprète dans chaque modèle M comme $c \circ (\varphi_1^M, \ldots, \varphi_n^M)$.

4.3. Formules sans quantificateur, plongements élémentaires

Remettons nous dans le cadre général, sans théorie T sous-jacente pour le moment mais avec un langage $\mathcal{L}$ fixé. On a déjà défini dans la section 1.2 ce que l'on entend par un plongement d'une $\mathcal{L}$-structure vers elle même, et on définit de même un **plongement** $\rho : M \to N$, où M et N sont deux $\mathcal{L}$-structures, comme une isométrie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- pour tout symbole de relation n-aire R, tout $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, on a $R^M(a_1, \ldots, a_n) = R^N(\rho(a_1), \ldots, \rho(a_n))$, et
- pour tout symbole de fonction n-aire f, tout $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, on a $f^M(a_1, \ldots, a_n) = f^N(\rho(a_1), \ldots, \rho(a_n))$.

Autrement dit, un plongement commute aux interprétations de symboles de relations et de fonctions, ce qui implique qu'il commute aux interprétations des formules atomiques.

Plus généralement, une **formule sans quantificateur** est une formule obtenue en appliquant des connecteurs logiques à des formules atomiques (autrement dit, par rapport aux formules en général, on s'interdit d'utiliser la règle 3 de la définition 4.9). Les formules sans quantificateur forment une sous-algèbre de l'algèbre des formules, et une preuve par induction immédiate montre le lemme suivant.

LEMME 4.29. — *Soient M et N deux $\mathcal{L}$-structures, soit $\rho : M \to N$ un plongement. Alors pour toute formule sans quantificateur $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ et tout $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ on a $\varphi^M(a_1, \dots, a_n) = \varphi^N(\rho(a_1), \dots, \rho(a_n))$.* □.

Il n'est par contre pas vrai qu'un plongement commute aux formules en général, même entre deux structures partageant la même théorie. C'est d'ailleurs une des raisons de la richesse de la théorie des modèles.

Exemple 4.30. — Considérons par exemple le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ vu comme structure métrique pour la distance discrète δ et la formule

$$\varphi(y) = \inf_x \delta(y, x + x).$$

Cette formule est satisfaite par $a \in \mathbb{Z}$ (i.e. $\varphi^{\mathbb{Z}}(a) = 0$) si et seulement si a est divisible par 2. Alors si $m_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est le plongement $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donné par la multiplication par 2, on a que $\varphi^{\mathbb{Z}}(1) = 1$ mais $\varphi^{\mathbb{Z}}(m_2(1)) = 0$, et ce plongement n'est donc pas élémentaire au sens suivant.

DÉFINITION 4.31. — *Un plongement $\rho : M \to N$ est dit **élémentaire** s'il commute aux interprétations des formules : pour toute formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, tout $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ on a $\varphi^M(a_1, \dots, a_n) = \varphi^N(\rho(a_1), \dots, \rho(a_n))$.*

Une **sous-structure** d'une structure M est un sous-ensemble fermé N de M qui est stable par les interprétations des symboles de fonctions, de sorte à être elle-même une structure pour les interprétations des symboles de $\mathcal{L}$ restreints à N. L'image d'un plongement est toujours une sous-structure. Par définition une sous-structure N de M est **élémentaire** si l'inclusion de N dans M est un plongement élémentaire : pour toute formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, on a $\varphi^M(a_1, \dots, a_n) = \varphi^N(a_1, \dots, a_n)$. En particulier si φ est un énoncé alors $\varphi^M = \varphi^N$ donc $\mathrm{Th}(N) = \mathrm{Th}(M)$.

L'exemple précédent se reformule alors en disant que $2\mathbb{Z}$ n'est pas une sous-structure élémentaire du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ car $\varphi^{\mathbb{Z}}(2) \neq \varphi^{2\mathbb{Z}}(2)$. On pourrait résumer grossièrement ce fait en disant que $2\mathbb{Z}$ n'a pas assez d'éléments pour voir les même infimums que $\mathbb{Z}$. Par contre, tout *isomorphisme* (plongement surjectif) entre deux structures est élémentaire puisqu'il établit une bijection entre les ensembles sur lesquels les infimums et supremums portent.

Remarque 4.32. — Lorsque M est une sous-structure élémentaire de N, on dit aussi que N est une extension élémentaire de M. La construction d'extensions élémentaires est fondamentale en théorie des modèles et fait souvent appel au théorème de compacité. Elle apparaît d'ailleurs de manière cruciale dans la preuve du théorème d'Ibarlucía dans sa version générale (voir la section 3 d'Ibarlucía, 2021).

Remarque 4.33. — Soit G le groupe des automorphismes d'une structure métrique M. Alors tout élément de G définit un isomorphisme de M vers elle-même, donc est élémentaire. On verra plus tard (et c'est la raison principale pour laquelle on a besoin des plongements élémentaires) que dans les cas qui nous intéressent, l'adhérence de G dans M^M sera égale au semi-groupe des plongements élémentaires de M dans elle-même.

En combinant l'observation que tout automorphisme est élémentaire avec le théorème 4.26, on obtient le résultat suivant qui fait le lien avec la section 2.

Proposition 4.34. — *Soit T une théorie complète. Soit M un modèle de T et $n \leq \omega$. L'application* $\mathrm{tp} : M^n \to S_n(T)$ *passe au quotient en une application uniformément continue* $\mathrm{Aut}(M) \backslash\backslash M^n \to S_n(T)$. □

Remarque 4.35. — En général, l'application $\mathrm{Aut}(M) \backslash\backslash M^n \to S_n(T)$ n'est ni injective ni surjective. Quand l'action de $\mathrm{Aut}(M)$ sur M^n est approximativement cocompacte, par compacité de $\mathrm{Aut}(M) \backslash\backslash M^n$ on obtient qu'elle est surjective, et on verra même qu'elle est bijective, ce qui demande plus de travail (cf. théorème A.11). Avant ça, on établira directement dans le cas concret de $\mathrm{MAlg}([0,1], \lambda)$ que c'est une bijection, établissant au passage que sa théorie *élimine les quantificateurs* (cf. théorème 4.41).

Finissons cette section par une connexion fondamentale entre les plongements élémentaires d'une structure séparable et l'espace des suites réalisant un certain type. Soit T une théorie complète, soient M et N deux modèles de T. Si $\rho : M \to N$ est un plongement élémentaire, alors par densité des formules dans l'espace des prédicats définissables, on a que pour tout suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{tp}((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \mathrm{tp}(\rho(a_i)_{i\in\mathbb{N}})$. De plus, par le théorème 4.26, cette propriété caractérise les plongements élémentaires. On va renverser le point de vue sur les plongements élémentaires en s'appuyant sur cette remarque.

Proposition 4.36. — *Soit T une théorie complète, soient M et N deux modèles séparables de T. Soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans M, soit p son type. L'application qui à un plongement élémentaire $\rho : M \to N$ associe la suite $(\rho(\alpha_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une injection dont l'image est l'ensemble des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que* $\mathrm{tp}((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = p$.

Démonstration. — Notons Φ l'application $\rho \mapsto (\rho(\alpha_i))_{i\in\mathbb{N}}$. L'injectivité de Φ est conséquence de la densité de (α_i) et du fait que dans un espace métrique complet, tout isométrie est déterminée par sa restriction à une partie dense. D'après le paragraphe précédent, l'image de Φ est incluse dans l'ensemble des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $\mathrm{tp}((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = p$.

Réciproquement, soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{tp}((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = p$. Alors en particulier, $d(a_i, a_j) = p(d(x_i, x_j)) = d(\alpha_i, \alpha_j)$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, donc l'application qui associe à chaque

α_i l'élément a_i est une isométrie qui s'étend de manière unique en une isométrie $\rho : M \to N$. On voit ensuite que ρ est un plongement en notant plus généralement que $\varphi^N(a_1, \ldots, a_n) = \varphi^M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour toute formule atomique φ, et en utilisant la densité. On montre enfin que ρ est élémentaire par le même raisonnement, en considérant cette fois-ci toutes les formules φ. $\square$

Remarque 4.37. — La même preuve fonctionne si l'on suppose seulement que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ engendre M (ce qui veut dire que la plus petite sous structure contenant les α_i est égale à M ; rappelons que par définition une sous-structure est fermée).

4.4. Élimination des quantificateurs

Définition 4.38. — *On dit qu'une théorie complète T* ***élimine les quantificateurs*** *lorsque la sous-algèbre des formules sans quantificateur est dense dans l'algèbre des prédicats définissables.*

Remarquons que si une théorie élimine les quantificateurs, alors tout plongement entre des modèles de T est élémentaire. On va utiliser la preuve que l'action de $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ sur $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ est approximativement oligomorphe pour montrer que la théorie de $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ élimine les quantificateurs.

Avant ça, définissons les types sans quantificateur. Disons qu'un prédicat définissable est *sans quantificateur* s'il est dans l'adhérence des formules sans quantificateur, et notons $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}_{\mathrm{qf}}$ l'espace des prédicats définissables sans quantificateur. Pour $n \leq \omega$, on note $\mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}_{n,\mathrm{qf}} = \mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}_{n} \cap \mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}_{\mathrm{qf}}$.

Définition 4.39. — *Soit $n \leq \omega$. Un n-type sans quantificateur est un morphisme continu de norme* 1 *de l'algèbre des prédicats définissables sans quantificateur dans* $\mathbb{R}$.

On note $S_n^{\mathrm{qf}}(T)$ l'espace des types sans quantificateur (qf pour *quantifier free*). De même que pour les types, on montre que c'est un espace compact. Si M est un modèle de T, pour chaque $\bar{a} \in M^n$ on a un type sans quantificateur associé $p = \mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(\bar{a})$ défini par $p(\varphi) = \varphi(\bar{a})$, et l'application $\bar{a} \mapsto \mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(\bar{a})$ est d'image dense. On a une projection naturelle $\pi : S_n(T) \to S_n^{\mathrm{qf}}(T)$ donnée par $\pi(p)(\varphi) = p(\varphi)$ de sorte que pour tout $\bar{a} \in M^n$,

$$\pi(\mathrm{tp}(\bar{a})) = \mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(\bar{a}).$$

L'application $\mathrm{tp} : M^n \to S_n^{\mathrm{qf}}(T)$ étant d'image dense, on en déduit que π est surjective. Par dualité, $\pi : S_\omega(T) \to S_\omega^{\mathrm{qf}}(T)$ est injective si et seulement si T élimine les quantificateurs. Enfin, on a l'analogue suivant de la proposition 4.34.

Proposition 4.40. — *Soit T une théorie complète. Soit M un modèle de T et $n \leq \omega$. L'application* $\mathrm{tp}_{\mathrm{qf}} : M^n \to S_n^{\mathrm{qf}}(T)$ *passe au quotient en une application uniformément continue* $\mathrm{Aut}(M) \backslash\backslash M^n \to S_n^{\mathrm{qf}}(T)$. $\square$

Théorème 4.41. — *La théorie T de* $\mathrm{MAlg}([0,1],\mu)$ *élimine les quantificateurs, et pour tout $n \leq \omega$, l'application* $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \backslash\backslash \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^n \to S_n(T)$ *est une bijection.*

Démonstration. — Comme l'action de $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ sur $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ est approximativement oligomorphe (exemple 2.8), on a d'après les propositions 4.34 et 4.40 que les applications $\mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}$ et tp sont surjectives pour tout $n \leq \omega$ par compacité et densité. Soit $n \leq \omega$. On note $\pi : S_n(T) \to S_n^{\mathrm{qf}}(T)$ la projection naturelle. Pour tout $\bar{a} \in M^n$, on a $\pi(\mathrm{tp}(\bar{a})) = \mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(\bar{a})$, donc pour montrer que π est injective (et donc que T élimine les quantificateurs), il suffit de montrer que l'application $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)\backslash\!\!\backslash\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^n \to S_n^{\mathrm{qf}}(T)$ est injective.

Supposons d'abord $n < \omega$. Soient $[A_1,\ldots,A_n]$ et $[B_1,\ldots,B_n]$ des éléments de $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)\backslash\!\!\backslash\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^n$ tels que $\mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(A_1,\ldots,A_n) = \mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(B_1,\ldots,B_n)$. Considérons, pour chaque $\delta \in \{\mathbb{0},\mathbb{1}\}^n$, la formule sans quantificateur

$$\varphi_\delta(x_1,\ldots,x_n) = m((\delta(1) \mathbin{\boldsymbol{+}} x_1) \wedge \cdots \wedge (\delta(n) \mathbin{\boldsymbol{+}} x_n)).$$

Alors, en reprenant les notations de l'exemple 2.8, φ_δ^M est la fonction qui à $(C_1,\ldots,C_n) \in \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^n$ associe

$$\Phi(C_1,\ldots,C_n)(\delta) = \lambda(C_1^{\delta(1)} \cap \cdots \cap C_n^{\delta(n)}).$$

Comme $\mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(A_1,\ldots,A_n) = \mathrm{tp}_{\mathrm{qf}}(B_1,\ldots,B_n)$, on a $\varphi_\delta^M(A_1,\ldots,A_n) = \varphi_\delta^M(B_1,\ldots,B_n)$ pour tout $\delta \in \{\mathbb{0},\mathbb{1}\}^n$, et donc $\Phi(A_1,\ldots,A_n) = \Phi(B_1,\ldots,B_n)$. Comme Φ est injective d'après la preuve au sein de l'exemple 2.8, on conclut que $[A_1,\ldots,A_n] = [B_1,\ldots,B_n]$ comme voulu.

Le cas $n = \omega$ est maintenant une conséquence aisée des cas $n < \omega$ que l'on vient d'établir. $\square$

Remarque 4.42. — Le fait que l'application $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)\backslash\!\!\backslash\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^n \to S_n(T)$ soit une bijection se généralise aux structures métriques séparables dont le groupe d'automorphismes agit de manière approximativement oligomorphe (théorème A.11). Il s'agit d'une partie du théorème de Ryll-Nardzewski, qui comme expliqué dans l'introduction joue un rôle fondamental dans la preuve d'Ibarlucía ainsi que dans l'analyse des groupes polonais Roelcke-précompacts en général.

5. DÉFINISSABILITÉ DE SOUS-ENSEMBLES

On fixe dans cette section $n \leq \omega$ et une théorie complète T. On va travailler sur des prédicats définissables dans $\mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$. Afin d'alléger les notations, on notera désormais $\bar{x} := x_1,\ldots,x_n$ (si $n < \omega$) et $\bar{x} := x_1,\ldots$ si $n = \omega$. Ainsi, un élément de $\mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$ sera noté $\varphi(\bar{x})$.

Quitte à réindexer notre ensemble de variables, on suppose qu'on a également des variables $y_1,\ldots,y_n,\ldots$ (par exemple en remplaçant x_{2n} par x_n et x_{2n+1} par y_n pour chaque $n < \omega$), et on notera de même $\bar{y} := y_1,\ldots,y_n$ (si $n < \omega$) et $\bar{y} := y_1,\ldots$ si $n = \omega$.

On commence par un détour par la notion d'implication en théorie des modèles métrique.

5.1. Implications

Le fait de n'avoir que des infimums et des supremums pour quantifier rend la notion d'implication plus subtile en théorie des modèles continue qu'en théorie des modèles classique, prenant une forme quantitative. Le but reste de donner une condition sur deux prédicats définissables $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ qui fera que dans *tout* modèle M de T, si un uplet $\bar{a} \in M^n$ *satisfait* $\varphi(\bar{x})$ (c'est-à-dire si $\varphi^M(\bar{a}) = 0$), alors $\bar{a}$ satisfait également $\psi(\bar{x})$ (et donc $\psi^M(\bar{b}) = 0$).

Définition 5.1. — *Soit T une théorie complète, soient $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux prédicats définissables. On dit que $\varphi(\bar{x})$* ***implique*** *$\psi(\bar{x})$ si il existe un modèle M de T tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\bar{a} \in M^n$,*

$$\textit{si } \left|\varphi^M(\bar{a})\right| \leq \delta \textit{ alors } \left|\psi^N(\bar{a})\right| \leq \epsilon.$$

Exemple 5.2. — Dans la théorie d'une algèbre de mesure, la formule qui dit que deux ensembles sont de mesure égale implique la formule qui dit que la mesure de leur union est plus petite que deux fois la mesure du premier. Plus précisément, la formule $|m(x_1) - m(x_2)|$ implique la formule $m(x_1 \vee x_2) \dot{-} 2m(x_1)$.

En utilisant des idées très proches de celles de la remarque 4.16, on montre que si $\varphi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$, alors elle le fait "de manière uniforme sur les modèles de T".

Proposition 5.3. — *Si $\varphi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour* tout *modèle N de T, et tout $\bar{b} \in N^n$,*

$$\textit{si } \left|\varphi^N(\bar{b})\right| \leq \delta \textit{ alors } \left|\psi^N(\bar{b})\right| \leq \epsilon.$$

En particulier, si $\varphi^N(\bar{b}) = 0$ alors $\psi^N(\bar{b}) = 0$.

Démonstration. — Soit M un modèle de T témoignant du fait que $\varphi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$. Soit $\epsilon > 0$, on dispose de $\delta > 0$ tel que pour tout $\bar{a} \in M^n$, si $|\varphi(\bar{a})| \leq \delta$ alors $|\psi(\bar{a})| \leq \epsilon$. Mais ceci est équivalent à dire que M satisfait l'énoncé suivant :

$$\sup_{\bar{x}} \min\Big(\delta \dot{-} |\varphi(\bar{x})|\,, |\psi(\bar{x})| \dot{-} \epsilon\Big).$$

Par complétude de T, un tel énoncé sera satisfait dans tout modèle de T, ce qui nous donne le résultat voulu. □

Le lemme suivant va nous permettre de donner une autre manière de comprendre l'implication.

Lemme 5.4. — *Soit X un ensemble. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ bornées telles que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $f(x) \leq \delta$ implique $g(x) \leq \epsilon$. Alors il existe $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\alpha(0) = 0$ et pour tout $x \in X$, $g(x) \leq \alpha(f(x))$.*

Démonstration. — Posons dans un premier temps, pour $t \geq 0$,

$$\beta(t) = \sup\{g(x) \colon f(x) \leq t\}.$$

Alors β est croissante, et par hypothèse on a $\lim_{t\to 0} \beta(t) = 0$. De plus par définition pour tout $t \geq 0$, on a que pour tout $x \in X$, si $g(x) \leq t$ alors $f(x) \leq \beta(t)$, et donc on a $g(x) \leq \beta(f(x))$. Le seul problème est que β n'est pas continue. On prend alors une suite strictement croissante indexée par les entiers relatifs $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels strictement positifs avec $\lim_{n\to-\infty} t_n = 0$ (par exemple $t_n = 2^n$), et on définit $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ comme l'unique fonction affine sur chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ telle que $\alpha(t_n) = \beta(t_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $\alpha(0) = 0$. La fonction α est continue et puisque $\alpha \geq \beta$ on a bien que pour tout $x \in X$, $g(x) \leq \alpha(f(x))$. □

Proposition 5.5. — *Soit T une théorie complète, soient $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux prédicats définissables. S'équivalent :*

(i) $\varphi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$;

(ii) Il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha(0) = 0$ et telle que dans tout modèle M de T on a, pour tout $\bar{a} \in M^n$, que $\left|\varphi^M(\bar{a})\right| \leq \alpha(\psi^M(\bar{a}))$.

(iii) Il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha(0) = 0$ et il existe un modèle M de T tel que pour tout $\bar{a} \in M^n$, on a $\left|\varphi^M(\bar{a})\right| \leq \alpha(\psi^M(\bar{a}))$.

Démonstration. — On va montrer que (ii) équivaut à (iii), puis que (i) équivaut à (iii).

L'implication (ii) ⇒ (iii) est claire. Réciproquement, si (iii) est satisfaite, la fonction continue α donnée par hypothèse est un connecteur logique, ainsi $\alpha(\psi(\bar{x}))$ est un prédicat définissable, et on remarque que M satisfait l'énoncé

$$\sup_{\bar{x}} \left(\left|\varphi^M(\bar{x})\right| \dot{-} \alpha(\psi(\bar{x}))\right).$$

Comme T est complète, tout modèle de T satisfera cet énoncé, ce qui veut dire que (ii) est vérifiée.

Si (i) est satisfaite, soit M un modèle témoignant du fait que $\varphi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$. Par le lemme 5.4 on dispose de $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\alpha(0) = 0$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\left|\varphi^M(\bar{a})\right| \leq \alpha(\psi^M(\bar{a}))$. On la prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $\alpha(t) = 0$ pour tout $t < 0$, et (iii) est alors établie. Réciproquement si (iii) est satisfaite, la continuité de α nous assure que M témoigne du fait que $\varphi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$, donc (i) est vérifiée. □

Remarque 5.6. — En utilisant le théorème de compacité, on peut montrer que $\varphi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$ si et seulement si dans *tout* modèle M de T, on a pour tout $\bar{a} \in M^n$ que si $\varphi^M(\bar{a}) = 0$, alors $\psi^M(\bar{a}) = 0$ (cf. Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008, Prop. 7.15).

5.2. Définissabilité dans un modèle

On va avoir besoin de travailler sur M^n pour $n \leq \omega$ avec une distance compatible. Afin de gagner en lisibilité, on utilise les notations suivantes. Pour $n < \omega$, on note désormais d le prédicat définissable à $2n$ variables libres $d(x_1, y_1) + \cdots + d(x_n, y_n)$, et si $n = \omega$ on note également d le prédicat définissable $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d(x_i, y_i)$ si $n = \omega$. Ce prédicat définissable s'interprète donc comme une distance compatible sur M^n si M est un modèle de T.

Définition 5.7. — *Soit $D \subseteq M^n$ non vide, où $n \leq \omega$. On dit que D est définissable si la fonction $\bar{a} \in M^n \mapsto d^M(\bar{a}, D)$ coïncide avec l'interprétation sur M^n d'un prédicat définissable.*

Au vu de la remarque 4.27, un tel prédicat définissable est alors unique, et on s'autorisera un abus de langage en disant directement que $d(\bar{x}, D)$ est un prédicat définissable.

En pratique, on dispose d'un critère plus souple pour décider de la définissabilité d'un sous-ensemble de M^n. Il s'appuie sur le lemme 5.4 qui nous avait fourni une autre manière de comprendre l'implication.

Théorème 5.8. — *Un sous-ensemble D de M^n est définissable si et seulement s'il existe un prédicat définissable $\varphi(\bar{x}) \in \mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$ à valeurs positives tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $D = (\varphi^M)^{-1}(\{0\})$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, si $\varphi^M(\bar{a}) \leq \delta$ alors $d(\bar{a}, D) \leq \epsilon$.*

Remarque 5.9. — Une fois que l'on sait que $d(\bar{x}, D)$ est définissable, on voit que notre nouvelle condition de définissabilité demande en particulier que $\varphi(\bar{x})$ implique $d(\bar{x}, D)$. De plus, on a également que $d(\bar{x}, D)$ implique $\varphi(\bar{x})$ par uniforme continuité de φ^M et le fait que $D \subseteq (\varphi^M)^{-1}(\{0\})$.

Démonstration. — L'implication directe est claire. Réciproquement, supposons donc donné un prédicat définissable $\varphi(\bar{x})$ dont D est l'ensemble des zéros et tel que pour tout $\bar{a} \in M^n$, on a l'implication $\varphi^M(\bar{a}) \leq \delta \Rightarrow d(\bar{a}, D) \leq \epsilon$. Quitte à remplacer φ par $|\varphi|$, on peut supposer que φ est à valeurs positives.

Par le lemme 5.4 (où $X = M^n$), il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $\bar{a} \in M^n$, $d(\bar{a}, D) \leq \alpha(\varphi^M(\bar{a}))$. On étend alors α en un connecteur logique en posant $\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$.

Considérons le prédicat définissable [14]

$$\psi(\bar{x}) = \inf_{\bar{y}} \alpha(\varphi(\bar{x})) + d(\bar{x}, \bar{y}).$$

On va montrer que son interprétation sur M coïncide avec la fonction $d^M(\cdot, D)$, ce qui montrera bien que cette dernière est un prédicat définissable.

14. Noter que la définition qui suit fait sens d'après la fin de la section précédente : ici l'infimum peut porter sur un uplet dénombrable infini.

Soit donc $\bar{a} \in M^n$. On a $d^M(\bar{a}, D) \leq \alpha(\varphi^M(\bar{x}))$ et donc $\psi^M(\bar{a}) \geq d^M(\bar{a}, D)$. Inversement, on dispose d'une suite $(\bar{d}_m)$ d'éléments de A telle que $d^M(\bar{a}, \bar{d}_m) \to d^M(\bar{a}, D)$, et comme $\alpha(\varphi(\bar{d}_m)) = 0$ pour tout m, on conclut que $\psi^M(\bar{a}) \leq d^M(\bar{a}, D)$ comme voulu. □

Si A est un ensemble définissable dans M modèle d'une théorie complète T, on peut donc lui associer un prédicat définissable particulier : la distance à A dans M. On va montrer dans la section suivante que ce prédicat restera la distance à une partie non vide dans *tout* modèle de T, en utilisant une caractérisation des fonctions distances à des fermés donnée par Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov (2008, Thm. 9.12).

Finissons cette section par une propriété importante qui nous permet de définir des prédicats définissables à partir de sous-ensembles définissables.

Proposition 5.10. — *Soient $n, m \leq \omega$. Soit D un sous-ensemble de M^m définissable, soit $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ un prédicat définissable. Alors la fonction $\tilde{\psi} : M^n \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$\tilde{\psi}(\bar{a}) = \sup_{\bar{b} \in D} \varphi^M(\bar{a}, \bar{b})$$

coïncide avec l'interprétation d'un unique prédicat définissable.

Démonstration. — La fonction $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}) \mapsto \left|\varphi^M(\bar{a}_1, \bar{b}) - \varphi^M(\bar{a}_2, \bar{c})\right|$ est uniformément continue, donc d'après le lemme 5.4 on dispose de $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tous $\bar{a} \in M^n$, et $\bar{b}, \bar{c} \in M^m$, on a $\left|\varphi^M(\bar{a}, \bar{b}) - \varphi^M(\bar{a}, \bar{c})\right| \leq \alpha(d^M(\bar{b}, \bar{c}))$ et $\alpha(0) = 0$. Commme à la fin de la preuve du théorème 5.8, on va conclure la preuve en montrant que $\tilde{\psi}$ coïncide avec l'interprétation du prédicat définissable $\psi(\bar{x}) := \sup_{\bar{y}} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \alpha(d(\bar{y}, D)))$ par double inégalité.

Si $\bar{a} \in M^n$, par définition on a $\psi^M(\bar{a}) \geq \tilde{\psi}(\bar{a})$. Réciproquement, à $\epsilon > 0$ fixé, prenons $\bar{c} \in M^n$. Par continuité de α et définition de $d^M(\cdot, D)$, on trouve $\bar{b} \in D$ tel que $\left|\alpha(d^M(\bar{c}, \bar{b})) - \alpha(d^M(\bar{c}, D))\right| < \epsilon$. Alors par définition $\varphi^M(\bar{a}, \bar{b}) \leq \tilde{\psi}(\bar{a})$, et comme $\left|\varphi^M(\bar{a}, \bar{b}) - \varphi^M(\bar{a}, \bar{c})\right| \leq \alpha(d^M(\bar{b}, \bar{c}))$, on a

$$\varphi^M(\bar{a}, \bar{c}) \leq \varphi^M(\bar{a}, \bar{b}) + \alpha(d^M(\bar{b}, \bar{c})) \leq \tilde{\psi}(\bar{a}) + \alpha(d^M(\bar{c}, D)) + \epsilon.$$

Ainsi $\varphi^M(\bar{a}, \bar{c}) - \alpha(d^M(\bar{c}, D)) \leq \tilde{\psi}(\bar{a}) + \epsilon$, ce qui en faisant tendre ϵ vers 0 nous donne bien $\psi^M(\bar{a}) \leq \tilde{\psi}(\bar{a})$. □

Remarque 5.11. — Encore une fois, le prédicat définissable ψ dont l'interprétation sur M coïncide avec $\tilde{\psi}$ est unique, et on se permettra de le noter $\sup_{\bar{y} \in D} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$. On utilisera aussi la notation suivante lorsque l'on préfère ne pas travailler dans un modèle fixé et que l'on a noté $\phi(\bar{y})$ le prédicat définissable $d(\bar{y}, D)$:

$$\sup_{\phi(\bar{y})=0} \varphi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Remarque 5.12. — Le même résultat est vrai en remplaçant le supremum par un infimum, et c'est sous cette forme qu'il apparait dans Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov (2008, Thm. 9.17).

5.3. Définissabilité dans tous les modèles, types isolés

Soit T une théorie complète et soit M un modèle de T. À un sous-ensemble définissable D de M^n correspond un unique prédicat définissable s'interprétant dans M comme la distance à l'ensemble D, que l'on a noté abusivement $d(\bar{x}, D)$. Le but de cette section est de vérifier que ce prédicat définissable s'interprète dans *tout* modèle N de T comme la distance à un sous-ensemble fermé non vide de N^n. On va ensuite utiliser ceci pour montrer que si p est un n-type dont l'ensemble D des réalisations est définissable dans *un* modèle M, alors $d(\bar{x}, D)$ s'interprète dans *tout* modèle N de T comme la distance à l'ensemble des réalisations de p dans N, qui est non vide.

Afin de voir que $d(\bar{x}, D)$ s'interprète toujours comme la distance à un sous-ensemble fermé non vide, il nous faut voir que la théorie T "sait" que $d(\bar{x}, D)$ est la distance à un sous-ensemble fermé (Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008, Thm. 9.12). Remarquons qu'une axiomatisation similaire des distances à des sous-ensembles fermés était déjà apparue en théorie descriptive des ensembles, afin de munir l'espace des fermés de tout espace métrique complet séparable d'une topologie polonaise appelée topologie de Wijsman (Beer, 1991).

Lemme 5.13. — *Soit (X, d) un espace métrique complet non vide. Alors une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}^+$ est la distance à l'ensemble non vide de ses zéros si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes pour tout $x \in X$:*

$$\inf_{y \in X} \max(f(y), |f(x) - d(x, y)|) = 0; \tag{1}$$

$$f(x) = \inf_{y \in X} f(y) + d(x, y). \tag{2}$$

Démonstration. — Pour voir l'implication directe, prenons $D \subseteq X$ non vide fermé et considérons l'application $f : x \mapsto d(D, x)$. On constate directement que la condition (1) est vérifiée en considérant, pour chaque $\epsilon > 0$, un élément $y \in D$ tel que $d(D, x) \leq d(y, x) < d(D, x) + \epsilon$. On montre de même que $\inf_{y \in X} f(y) + d(x, y) \leq f(x)$, ce qui en utilisant le fait que f est 1-lipschitzienne nous permet de conclure que (2) est satisfaite.

Réciproquement, soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les conditions (1) et (2), et soit $x \in X$. Soit D l'ensemble des zéros de f, on va d'abord montrer que $d(x, D) \leq f(x)$ en exhibant pour tout $\epsilon > 0$ un $y \in D$ tel que $d(x, y) \leq f(x) + \epsilon$, ce qui montrera en particulier que D est non vide.

Soit donc $\epsilon > 0$. On doit trouver $y \in D$ tel que $d(x, y) \leq f(x) + \epsilon$, et on va l'obtenir comme limite d'une suite de Cauchy. On pose $y_0 = x$ puis, y_i étant construit, on applique la condition (1) pour choisir $y_{i+1} \in X$ tel que

$$f(y_{i+1}) \leq \frac{\epsilon}{2^{i+3}} \text{ et } |f(y_i) - d(y_i, y_{i+1})| \leq \frac{\epsilon}{2^{i+2}}.$$

En assemblant ces deux conditions, on obtient que pour tout $i \geq 1$, $d(y_i, y_{i+1}) \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$, donc la suite (y_i) est de Cauchy et de plus sa limite y satisfait

$$d(y_0, y) \leq d(y_0, y_1) + \sum_{i \geq 1} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} = d(y_0, y_1) + \frac{\epsilon}{2} \leq f(x) + \epsilon,$$

la dernière inégalité étant conséquence du fait que $|d(y_0, y_1) - f(y_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $y_0 = x$. Comme f est continue à valeurs positives et comme pour tout $i \geq 1$ on a $f(y_{i+1}) \leq \frac{\epsilon}{2^{i+3}}$, on a de plus $f(y) = 0$, et donc $y \in D$ comme voulu. Ainsi on a bien que $d(x, D) \leq f(x)+\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, et donc que $d(x, D) \leq f(x)$.

Enfin, la condition (2) nous garantit que pour tout $x \in X$ et tout $y \in D$, on a $f(x) \leq d(x, y)$, et donc $f(x) \leq d(x, D)$, ce qui termine la preuve. □

Proposition 5.14. — *Soit M un modèle d'une théorie T complète, soit $n \leq \omega$, soit $D \subseteq M^n$ définissable. Alors le prédicat définissable $d(\bar{x}, D)$ s'interprète dans tout modèle de T comme la distance à un sous-ensemble fermé non vide.*

Démonstration. — Le fait que $d^M(\bar{x}, D)$ soit une fonction positive se traduit par le fait que M satisfasse l'énoncé $\inf_{\bar{x}} \min(\mathbf{0}, d(\bar{x}, D))$. De plus, les conditions (1) et (2) se traduisent par le fait que M satisfasse les énoncés suivants, qui sont donc dans T :

(i) $\sup_{\bar{x}} \inf_{\bar{y}} d(\bar{x}, D) - d(\bar{x}, \bar{y})$;

(ii) $\sup_{\bar{x}} \left| d(\bar{x}, D) - \inf_{\bar{y}} (d(\bar{x}, D) + d(\bar{x}, \bar{y})) \right|$.

Ainsi $d(\bar{x}, D)$ sera interprétée dans tout modèle de T comme la distance à un ensemble non vide d'après la proposition précédente. □

Définition 5.15. — *Soit T une théorie complète. Un type $p \in S_n(T)$ est dit **isolé** s'il existe un modèle M dans lequel l'ensemble des réalisations de p est définissable (en particulier, non vide).*

Théorème 5.16. — *Soit $p \in S_n(T)$ un type isolé. Alors p est réalisé dans tout modèle de T, et il existe un (unique) prédicat définissable $d(\bar{x}, p)$ dont l'interprétation dans tout modèle de T est la distance à l'ensemble des réalisations de p.*

Démonstration. — Soit M un modèle de T tel que l'ensemble D des réalisations de p soit définissable. On pose alors $d(\bar{x}, p) := d(\bar{x}, D)$. Ce prédicat définissable appartient clairement à p. Pour chaque prédicat définissable $\varphi(\bar{x})$ appartenant à p, l'uniforme continuité de φ^M nous donne que $d(\bar{x}, p)$ implique $\varphi(\bar{x})$. En effet à $\epsilon > 0$ fixé on dispose de $\delta > 0$ tel que pour tous $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$, si $d^M(\bar{a}, \bar{b}) < \delta$ alors $\left|\varphi^M(\bar{a}) - \varphi^M(\bar{b})\right| < \epsilon$. Donc si $d(\bar{a}, p) < \delta$ on dispose de $\bar{b}$ satisfaisant p tel que $d^M(\bar{a}, \bar{b}) < \delta$, donc $\varphi^M(\bar{b}) = 0$ et donc $\left|\varphi^M(\bar{a})\right| < \epsilon$.

Soit alors N un modèle quelconque de T. Soit D' l'ensemble des zéros de $d^N(\bar{x}, p)$. Alors comme $d(\bar{x}, p)$ appartient à p, toute réalisation de p doit appartenir à D'. Réciproquement, soit $\bar{a} \in D'$, soit $\varphi(\bar{x}) \in p$. Comme $d(\bar{x}, p)$ implique $\varphi(\bar{x})$, on a bien $\varphi^N(\bar{a}) = 0$. Ainsi $\bar{a}$ est une réalisation de p, ce qui termine la preuve. □

Nous pouvons enfin appliquer le résultat précédent dans le cas simple de $\mathrm{MAlg}([0, 1], \lambda)$. Le cas général est donné dans la proposition A.10.

Théorème 5.17. — *Soit T la théorie de* $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$. *Alors tout ω-type $p \in S_\omega(T)$ est isolé.*

Démonstration. — On a déjà vu que p est réalisé dans $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ (théorème 4.41). Soit $D \subseteq \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^{\mathbb{N}}$ l'ensemble fermé $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$-invariant des réalisations de p. Considérons la fonction $\tilde{\varphi}$ sur $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^{\mathbb{N}}$ donnée par $\tilde{\varphi}(\bar{a}) = d^{\mathrm{MAlg}(X,\mu)}(\bar{a}, D)$. Alors $\tilde{\varphi}$ est $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$-invariante, c'est donc l'interprétation d'un prédicat définissable. On conclut que l'ensemble des réalisations de p est définissable, donc p est bien isolé. □

6. PREUVE DU THÉORÈME 3.11

Soit T la théorie de l'algèbre de mesure $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$. Nous avons déjà montré que l'action de $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ sur $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$ est approximativement oligomorphe (cf. exemple 2.8), ce qui nous a permis d'identifier $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \mathbin{\backslash\!\!\backslash} \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^{\mathbb{N}}$ avec $S_\omega(T)$. Rappelons que les fonctions continues $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \mathbin{\backslash\!\!\backslash} \mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ s'identifient par passage au quotient avec les fonctions $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ continues $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$-invariantes : *l'algèbre des prédicats définissables s'identifie à l'algèbre des fonctions* $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *continues* $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$*-invariantes.*

Il va désormais être plus commode, comme expliqué à la fin de la section 3, de travailler dans l'algèbre de mesure de $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{F}_2}$ muni de la mesure $\mu = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes(\mathbb{N}\times\mathbb{F}_2)}$. Elle est isomorphe à l'algèbre de mesure de $Y := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure $\nu := (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$ puisque l'on peut trouver, en utilisant une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{F}_2$, une bijection bimesurable $Y \to X$ qui préserve la mesure.

Pour $\gamma \in \mathbb{F}_2$, soit $f_\gamma : X \to Y$ définie par $f_\gamma(x) = (x(n,\gamma))_{n\in\mathbb{N}}$. Alors f_γ préserve la mesure : pour tout borélien $A \subseteq Y$, $\nu(A) = \mu(f_\gamma^{-1}(A))$. On vérifie alors que l'application qui à un borélien A de Y associe $f_\gamma^{-1}(A)$ passe au quotient en un plongement d'algèbres de mesure que l'on note $f_\gamma^* : \mathrm{MAlg}(Y,\nu) \to \mathrm{MAlg}(X,\mu)$.

Remarque 6.1. — Ce passage au quotient est un phénomène complètement général. De plus, sous de bonnes hypothèses, tout plongement entre algèbres de mesure est de cette forme (voir la première section du chapitre 2 de Glasner (2003)).

Notons M_γ l'image de f_γ^*, qui est une sous-structure de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ correspondant à la sous-algèbre des parties f_γ-mesurables. Il est crucial pour la suite de remarquer que pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{F}_2$ distincts, les sous-structures M_{γ_1} et M_{γ_2} sont **indépendantes** au sens de la théorie des probabilités : pour tout $A \in M_{\gamma_1}$ et tout $B \in M_{\gamma_2}$, on a $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Ainsi si on fixe $A \in M_{\gamma_1}$, alors pour $B \in M_{\gamma_2}$ la valeur de $\mu(A \cap B)$ *ne dépend que de* $\mu(B)$. En particulier elle ne dépend que du type de B. Plus généralement, on a la formulation suivante, qui est un cas particulier du fait que la *relation d'indépendance stable* coïncide avec l'indépendance usuelle des probabilités (Ben Yaacov, 2006, Thm. 4.1, voir aussi Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008, Sec 16).

Lemme 6.2. — *Soient M_1 et M_2 deux sous-structures de* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ *qui sont des modèles indépendants de T. Soit $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ un prédicat définissable. Alors pour tout $\bar{A} \in M_1^{\mathbb{N}}$, la fonction $\bar{B} \in M_2^{\mathbb{N}} \mapsto \varphi(\bar{A},\bar{B})$ coïncide avec l'interprétation dans M_2 d'un prédicat définissable que l'on note $\mathsf{d}_{\bar{A},\varphi}(\bar{y})$.*

Démonstration. — On a besoin de revisiter l'exemple 2.8. Pour $A \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)$ on note $A^0 = A$ et $A^1 = X \setminus A$. On note $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ l'ensemble dénombrable des suites finies d'éléments de $\{0,1\}$. Un élément de $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ est de la forme $\delta = (\delta(1),\dots,\delta(n))$ pour un unique $n \in \mathbb{N}$ appelé sa *longueur*, noté $|\delta|$. Pour une suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$, on note alors

$$\Phi([(A_i)_{i\in\mathbb{N}}]) = (\mu(A_1^{\delta(1)} \cap \dots \cap A_{|\delta|}^{\delta(|\delta|)}))_{\delta\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}} \in [0,1]^{\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}.$$

Alors $\Phi : \mathrm{Aut}(X,\mu) \mathbin{\backslash\!\backslash} \mathrm{MAlg}(X,\mu)^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ est continue, injective d'après la preuve de l'exemple 2.8, et $\mathrm{Aut}(X,\mu) \mathbin{\backslash\!\backslash} \mathrm{MAlg}(X,\mu)^{\mathbb{N}}$ est compact d'après la remarque 2.6. L'image de Φ est donc un compact de $[0,1]^{\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ que l'on note $\mathfrak{P}$. *L'application Φ nous fournit alors une identification entre les prédicats définissables (vus comme fonctions continues* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$*-invariantes sur* $\mathrm{MAlg}(X,\mu)^{\mathbb{N}}$*) et les fonctions continues sur $\mathfrak{P}$.*

Soit $\tilde{\varphi}$ la fonction continue sur $\mathfrak{P}$ obtenue via cette identification, alors par définition pour tous $\bar{A} = (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)^{\mathbb{N}}$ et $\bar{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{MAlg}(X,\mu)^{\mathbb{N}}$ on a

$$\varphi^{\mathrm{MAlg}(X,\mu)}(\bar{A},\bar{B}) = \tilde{\varphi}(\Phi(A_1,B_1,A_2,B_2,\dots)).$$

Pour une suite finie $\delta \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ notons δ_1 la suite extraite en ne prenant que les termes impairs de δ, et δ_2 la suite extraite en ne prenant que les termes pairs de δ. Alors si $\bar{A} \in M_1^{\mathbb{N}}$ et $\bar{B} \in M_2^{\mathbb{N}}$, on a par indépendance

$$\Phi(A_1,B_1,A_2,B_2,\dots)_\delta = \mu(A_1^{\delta_1(1)} \cap A_2^{\delta_1(2)} \dots \cap A_{|\delta_1|}^{\delta_1(|\delta_1|)})\mu(B_1^{\delta_2(1)} \cap B_2^{\delta_2(2)} \dots \cap B_{|\delta_2|}^{\delta_2(|\delta_2|)})$$

En particulier, si $\bar{A} \in M_1^{\mathbb{N}}$ est fixé, la fonction $M_2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ qui à $\bar{B}$ associe le réel $\tilde{\varphi}(\Phi(A_1,B_1,A_2,B_2,\dots))$ est une fonction qui dépend continûment du type de $\bar{B}$, et c'est donc l'interprétation dans M_2 d'un prédicat définissable d'après le théorème 4.26 (en des termes plus dynamiques, c'est une fonction $\mathrm{Aut}(M_2)$-invariante, donc l'interprétation d'un prédicat définissable d'après le début de cette section). □

Remarque 6.3. — Notons $()$ la suite vide, de longueur 0. Si $\delta = (\delta(1),\dots,\delta(n))$ et $\epsilon \in \{0,1\}$, on note $\delta \frown \epsilon$ la suite finie $(\delta(1),\dots,\delta(n),\epsilon)$. On peut vérifier que l'ensemble $\mathfrak{P}$ défini ci-dessus est le sous-ensemble fermé du compact $[0,1]^{\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ formé des familles $(p_\delta)_{\delta\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}} \in [0,1]^{\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ telles que $t_{()} = 1$ et pour tout $\delta \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$,

$$p_\delta = p_{\delta\frown 0} + p_{\delta\frown 1}.$$

Cet ensemble s'identifie naturellement à l'espace des mesures de probabilité sur les boréliens de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$: on construit une telle mesure en assignant à chaque ouvert-fermé

$$N_\delta := \{(x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \colon (x_1,\dots,x_{|\delta|}) = \delta\}$$

la mesure p_δ. Ceci concrétise la remarque 2.9.

Rappelons qu'on a fixé une action de $\mathbb{F}_2 = \langle a, b\rangle$ sur (X, μ) donnée par : pour tout $x \in X$, $(n, g) \in \mathbb{N} \times \mathbb{F}_2$ et $\gamma \in \mathbb{F}_2$,

$$(\gamma \cdot x)(n, g) = x(n, \gamma^{-1}g).$$

Cette dernière induit une action par automorphisme sur $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ en passant au quotient son action sur les boréliens de X donnée par [15] : pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_2$, pour tout $A \subseteq X$ borélien, $\gamma A = \{\gamma \cdot x \colon x \in A\}$. On vérifie alors que pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_2$, et tout $B \in \mathrm{MAlg}(Y, \nu)$,

$$\gamma(f_g^* B) = f_{\gamma g}^* B.$$

En particulier $\gamma M_g = M_{\gamma g}$ pour tous $\gamma, g \in \mathbb{F}_2$. On identifie $\mathbb{F}_2$ au sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ donné par cette action. Finissons ces préliminaires avec un ersatz du corollaire A.14.

Proposition 6.4. — *L'adhérence de* $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ *dans* $\mathrm{MAlg}(X, \mu)^{\mathrm{MAlg}(X,\mu)}$ *est l'ensemble des plongements élémentaires* $\mathrm{MAlg}(X, \mu) \to \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ *et s'identifie naturellement au complété de* $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ *pour sa structure uniforme gauche.*

Démonstration. — Il est clair que l'adhérence de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ est incluse dans l'espace fermé des plongements élémentaires. Réciproquement, si $\rho : \mathrm{MAlg}(X, \mu) \to \mathrm{MAlg}(X, \mu)$ est un plongement élémentaire et si on se donne $A_1, \dots, A_n \in \mathrm{MAlg}(X, \mu)$, alors $\mathrm{tp}(\rho(A_1), \dots, \rho(A_n)) = \mathrm{tp}(A_1, \dots, A_n)$ et donc d'après le théorème 4.41 on a que $(\rho(A_1), \dots, \rho(A_n))$ est dans l'adhérence de la $\mathrm{Aut}(X, \mu)$-orbite de $(A_1, \dots, A_n)$, ce qui conclut la preuve. L'identification avec le complété $\widehat{\mathrm{Aut}(X, \mu)}_{\mathcal{L}}$ provient du fait que si on fixe $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$, la distance sur l'espace des plongements élémentaires $d(\rho_1, \rho_2) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} d_\mu(\rho_1(A_i), \rho_2(A_i))$ est complète et se restreint à $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ en une distance invariante à gauche qui induit sa topologie. $\square$

Remarque 6.5. — Rappelons que puisque T élimine les quantificateurs, tous les plongements sont élémentaires, et on peut donc enlever l'adjectif "élémentaire" dans la proposition précédente.

Démonstration du théorème 3.11. — Soit $\pi : \mathrm{Aut}(X, \mu) \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ une représentation orthogonale sans vecteurs invariants, on veut montrer que π se restreint à $\mathbb{F}_2$ en une représentation contenant sa représentation régulière. Comme toute représentation orthogonale est somme directe de sous-représentations cycliques, il suffit de montrer le résultat lorsque π est cyclique, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\pi(\mathrm{Aut}(X, \mu))\xi$ engendre un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. Supposons donc π cyclique et fixons un tel vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ de norme 1.

Notons $\mathrm{Iso}(\mathcal{H})$ le semi-groupe des isométries linéaires (non nécessairement surjectives) de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. On identifie par la proposition précédente le complété à gauche de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ au semi-groupe $\mathcal{E}(M, M)$ des plongements élémentaires $M \to M$ où $M = \mathrm{MAlg}(X, \mu)$.

15. On peut remarquer que l'action naturelle est en fait une action à droite, nous sollicitons donc l'indulgence des puristes pour ce choix peu fonctoriel.

La représentation π s'étend par uniforme continuité en une application continue que l'on note toujours $\pi : \mathcal{E}(M,M) \to \mathrm{Iso}(\mathcal{H})$. Pour $g \in \mathbb{F}_2$, notons $\mathcal{E}(M, M_g)$ le sous-semi-groupe des plongements élémentaires de M dont l'image est contenue dans M_g. Avant de continuer la preuve, remarquons que $\mathcal{E}(M, M_g)$ est non vide, et que pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_2$, comme $\gamma M_g = M_{\gamma g}$ on a $\gamma\mathcal{E}(M, M_g) = \mathcal{E}(M, M_{\gamma g})$. On définit enfin le sous-espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_g = \overline{\mathrm{Vect}\,(\pi(\mathcal{E}(M, M_g))\xi)},$$

et on a donc $\pi(\gamma)\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_{\gamma g}$. Il suffit alors de montrer que pour tous $g_1, g_2 \in \mathbb{F}_2$ distincts, $\mathcal{H}_{g_1}$ est orthogonal à $\mathcal{H}_{g_2}$, ce qui va reposer de manière cruciale sur le fait que M_{g_1} et M_{g_2} sont indépendants. Ce qui suit est une reformulation de la preuve de la seconde partie de la proposition 4.1 de Ibarlucía (2021) dans notre cadre restreint.

Fixons donc $g_1 \neq g_2 \in \mathbb{F}_2$, supposons par l'absurde que $\mathcal{H}_{g_1}$ ne soit pas orthogonal à $\mathcal{H}_{g_2}$. On dispose alors d'un élément $\rho_0 \in \mathcal{E}(M, M_{g_1})$ tel que la projection orthogonale η de $\pi(\rho_0)\xi$ sur $\mathcal{H}_{g_2}$ ne soit pas nulle. Alors comme π n'a pas de vecteurs invariants et ξ est cyclique, on trouve $\epsilon > 0$, et $T_1, T_2 \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ tels que

$$|\langle \eta - \pi(T_1)\eta, \pi(T_2)\xi\rangle| > \epsilon \tag{3}$$

Il est maintenant temps d'utiliser l'identification entre $\mathcal{E}(M,N)$ et l'espace des réalisations d'un ω-type dans N donnée par la proposition 4.36 ; pour rendre cette dernière plus lisible et plus proche des notations de la proposition, on note désormais par des minuscules les éléments de nos algèbres de mesure. Fixons donc $\bar\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans M, soit $p := \mathrm{tp}(\bar\alpha)$. Pour chaque modèle N de T, l'ensemble des suites $\bar a \in N^\omega$ tels que $\mathrm{tp}(\bar a) = p$ s'identifie aux plongements élémentaires de M dans N via $\rho \mapsto \rho(\bar\alpha)$. Pour chaque $\bar a \in N^{\mathbb{N}}$ tel que $\mathrm{tp}(\bar a) = p$, on note $\rho_{\bar a}$ le plongement élémentaire correspondant, de sorte que $\rho_{\bar a}(\bar\alpha) = \bar a$. Remarquons que pour tout $\bar a \in M^{\mathbb{N}}$ tel que $\mathrm{tp}(\bar a) = p$, tout $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, on a $\rho_{T\bar a}(\bar\alpha) = T\bar a = T\rho_{\bar a}(\bar\alpha)$ donc $\rho_{T\bar a} = T\rho_{\bar a}$ par densité de $\bar\alpha$.

Pour un modèle N de T, on note $p(N)$ l'ensemble des réalisations de p dans N. Considérons la fonction $\tilde\varphi : (\bar a, \bar b) \in p(M)^2 \mapsto \langle \pi(\rho_{\bar a})\xi, \pi(\rho_{\bar b})\xi\rangle$. C'est une fonction continue $\mathrm{Aut}(X,\mu)$-invariante, donc elle définit une fonction continue sur l'espace fermé $[p(M) \times p(M)] \subseteq \mathrm{Aut}(X,\mu)^{\mathbb{N}} \backslash\!\backslash M^{\mathbb{N}}$. Par le lemme de Tietze–Urysohn, elle se prolonge en une fonction continue sur le compact $\mathrm{Aut}(X,\mu)^{\mathbb{N}} \backslash\!\backslash M^{\mathbb{N}}$. On note $\varphi(\bar x, \bar y)$ le prédicat définissable correspondant, on a alors : pour tous $\bar a, \bar b \in p(M)$

$$\varphi^M(\bar a, \bar b) = \langle \pi(\rho_{\bar a})\xi, \pi(\rho_{\bar b})\xi\rangle\,. \tag{4}$$

On va maintenant approcher le vecteur η par une combinaison linéaire afin d'aboutir à une contradiction. On fixe des plongements $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{E}(M, M_{g_2})$ et des réels $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tels que

$$\left\| \eta - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(\rho_i)\xi \right\| \leq \frac{\epsilon}{4}. \tag{5}$$

Par le même raisonnement qui a mené à la définition de φ, on trouve un prédicat définissable $\psi(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\bar{y})$ tel que pour tous $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{b}\in p(M)$, on a

$$\psi^M(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{b}) = \langle \lambda_1\pi(\rho_{\bar{a}_1})\xi+\dots+\lambda_n\pi(\rho_{\bar{a}_n})\xi, \pi(\rho_{\bar{b}})\xi\rangle\,.$$

Remarquons que comme M_{g_2} est une sous-structure élémentaire de M, on a $p(M_{g_2})\subseteq p(M)$ et un cas particulier de l'équation précédente est donc que pour tous $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{b}\in p(M_{g_2})$

$$\psi^{M_{g_2}}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{b}) = \langle \lambda_1\pi(\rho_{\bar{a}_1})\xi+\dots+\lambda_n\pi(\rho_{\bar{a}_n})\xi, \pi(\rho_{\bar{b}})\xi\rangle\,. \tag{6}$$

Soit $\bar{c}=\rho_0(\bar{\alpha})\in M_{g_1}^{\mathbb{N}}$, de sorte que $\rho_0=\rho_{\bar{c}}$. D'après le lemme 6.2, on dispose d'un prédicat définissable $\mathsf{d}_{\bar{c},\varphi}(\bar{y})$ tel que $\varphi^M(\bar{c},\bar{b})=\mathsf{d}_{\bar{c},\varphi}^{M_{g_2}}(\bar{b})$ pour tous $\bar{b}\in M_{g_2}^{\mathbb{N}}$.

Remarquons que pour tout $\bar{b}\in p(M_{g_2})$ on a

$$\varphi^M(\bar{c},\bar{b}) = \langle \pi(\rho_{\bar{c}})\xi,\pi(\rho_{\bar{b}})\xi\rangle = \langle \eta,\pi(\rho_{\bar{b}})\xi\rangle$$

puisque η est la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_{g_2}$ de $\pi(\rho_{\bar{c}})\xi=\pi(\rho_0)\xi$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz et l'inéquation (5) on a que pour tout $\bar{b}\in M_{g_2}^{\mathbb{N}}$ tel que $\mathrm{tp}(\bar{b})=p$,

$$\left|\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\pi(\rho_i)\xi,\pi(\rho_{\bar{b}})\xi\right\rangle - \langle \pi(\rho_{\bar{c}})\xi,\pi(\rho_{\bar{b}})\xi\rangle\right| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

On reformule cette inégalité une dernière fois avant le tour de magie : notons $\bar{a}_i=\rho_i(\bar{\alpha})\in M_{g_2}^{\mathbb{N}}$, alors en utilisant (4) et (6), on a que pour tout $\bar{b}\in M_{g_2}^{\mathbb{N}}$ tel que $\mathrm{tp}(\bar{b})=p$,

$$\left|\psi^{M_{g_2}}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{b}) - \mathsf{d}_{\bar{c},\varphi}^{M_{g_2}}(\bar{b})\right| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

D'après le théorème 5.17 et le théorème 5.16, on dispose d'un prédicat définissable $d(\bar{x},p)$ qui s'interprète dans tout modèle de T comme la distance à l'ensemble des réalisations de p, donc le prédicat définissable suivant est bien défini d'après la proposition 5.10 :

$$\kappa(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n) := \sup_{d(\bar{y},p)=0} \left|\psi(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\bar{y}) - \mathsf{d}_{\bar{c},\varphi}(\bar{y})\right|.$$

L'inégalité que nous venions d'obtenir se reformule alors en le fait que

$$\kappa^{M_{g_2}}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n) \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Mais alors, comme l'inclusion de M_{g_2} dans M est élémentaire, on obtient que

$$\kappa^{M}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n) \leq \frac{\epsilon}{4},$$

ce qui veut dire que pour tout $\bar{d}\in p(M)$, on a

$$\left|\psi^{M}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{d}) - \mathsf{d}_{\bar{c},\varphi}^{M}(\bar{d})\right| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Or $\mathsf{d}_{\bar{c},\varphi}^{M}$ est un prédicat définissable, en particulier il est $\mathrm{Aut}(X,\mu)$-invariant. D'autre part $\psi^M(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{d})=\langle\sum_{i=1}^n\lambda_i\pi(\rho_i)\xi,\pi(\rho_{\bar{d}})\xi\rangle$ donc par inégalité triangulaire pour tout $T\in\mathrm{Aut}(X,\mu)$,

$$\left|\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\pi(\rho_i)\xi,\pi(\rho_{\bar{d}})\xi\right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\pi(\rho_i)\xi,\pi(\rho_{T^{-1}\bar{d}})\xi\right\rangle\right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Notons $\tilde{\eta} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(\rho_i)\xi$, qui d'après (5) est $\epsilon/4$-proche de η. L'inégalité précédente se réécrit

$$|\langle \tilde{\eta}, \pi(\rho_{\bar{d}})\xi\rangle - \langle \tilde{\eta}, \pi(\rho_{T^{-1}\bar{d}})\xi\rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Or $\rho_{T^{-1}\bar{d}} = T^{-1}\rho_{\bar{d}}$ et $\pi_{\restriction \mathrm{Aut}(X,\mu)}$ est orthogonale, donc on trouve que pour tout $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ et tout $\bar{d} \in p(M)$,

$$|\langle \tilde{\eta}, \pi(\rho_{\bar{d}})\xi\rangle - \langle \pi(T)\tilde{\eta}, \pi(\rho_{\bar{d}})\xi\rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Autrement dit, pour tout $\rho \in \mathcal{E}(M,M)$ on a

$$|\langle \tilde{\eta} - \pi(T)\tilde{\eta}, \pi(\rho)\xi\rangle| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

En particulier, en reprenant les notations de l'équation (3), pour $\rho = T_2$ et $T = T_1$ on a

$$|\langle \tilde{\eta} - \pi(T_1)\tilde{\eta}, \pi(T_2)\xi\rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

ce qui au vu de (3), du fait que $\|\eta - \tilde{\eta}\| \leq \frac{\epsilon}{4}$, et de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, est la contradiction attendue. □

Pour finir, donnons des éléments de preuve du théorème 3.10. La difficulté est que les $(\mathcal{H}_g)$ précédents ne nous permettent pas de recouvrir complètement $\mathcal{H}$, et on a a priori aucune idée de ce à quoi ressemble la représentation $\pi_{\restriction \mathbb{F}_2}$ en dehors de $\bigoplus_{g\in\mathbb{F}_2} \mathcal{H}_g$. Pour corriger ce problème, on considère pour chaque partie finie $F \Subset \mathbb{F}_2$ la sous-structure M_F des parties f_F-mesurables, où $f_F : X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}\times F}$ associe à $x \in X$ la suite $(x(n,f))_{n\in\mathbb{N}, f\in F}$. Notons qu'avec nos notations précédentes M_g devient $M_{\{g\}}$, et que pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_2$ et tout $F \Subset \mathbb{F}_2$ on a $\gamma M_F = M_{\gamma F}$. En particulier, si on note

$$\mathcal{H}_F = \overline{\mathrm{Vect}\,(\pi(\mathcal{E}(M, M_F))\xi)},$$

alors $\mathcal{H}_{\gamma F} = \pi(\gamma)\mathcal{H}_F$. La réunion des M_F est dense dans M, ce qui permet de montrer que $\mathrm{Aut}(X,\mu) \subseteq \overline{(\bigcup_{F\Subset\mathbb{F}_2} \mathcal{E}(M, M_F))}$, et donc que $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Vect}\,(\bigcup_{F\Subset\mathbb{F}_2} \mathcal{H}_F)}$. La preuve précédente donne plus généralement que $\mathcal{H}_{F_1} \perp \mathcal{H}_{F_2}$ dès lors que F_1 et F_2 sont deux parties finies disjointes de $\mathbb{F}_2$. La clé est qu'on a la version *relative* plus générale suivante, où on note $\mathcal{H}_1 \perp_{\mathcal{H}_3} \mathcal{H}_2$ lorsque $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_3 \perp \mathcal{H}_2 \ominus \mathcal{H}_3$ (le sous-espace $\mathcal{H}_i \ominus \mathcal{H}_j$ étant l'orthogonal de $\mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_i$ au sein de $\mathcal{H}_i$).

Lemme 6.6 (Ibarlucía, 2021, Lem. 4.1). — *Pour tous $F_1, F_2 \Subset \mathbb{F}_2$, on a $\mathcal{H}_{F_1} \perp_{\mathcal{H}_{F_1\cap F_2}} \mathcal{H}_{F_2}$.*

Une fois ce lemme établi, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_n = \overline{\mathrm{Vect}(\bigcup_{|F|=n} \mathcal{H}_F)}$, puis $\mathcal{H}_n = \mathcal{K}_n \ominus \mathcal{K}_{n-1}$, et on montre que la restriction de la représentation de $\mathbb{F}_2$ à chaque $\mathcal{H}_n$ est un multiple de la représentation régulière en observant que pour toute partie finie $F \Subset \mathbb{F}_2$ de taille n et tout $\gamma \in \mathbb{F}_2 \setminus \{1\}$ on a $\pi(\gamma)\mathcal{H}_F \perp_{\mathcal{K}_{n-1}} \mathcal{H}_F$. Ceci finit d'établir le théorème 3.10 modulo le lemme ci-dessus.

Ce dernier s'appuie une version relative du lemme 6.2, où l'indépendance relative est celle de la théorie des probabilités. Pour l'énoncer on utilise la notion importante de *A-définissabilité* dans un modèle M de T complète, pour une partie $A \subseteq M$ que l'on introduit brièvement. Étant donnée $A \subseteq M$ on *enrichit* le langage $\mathcal{L}$ de notre théorie T en ajoutant, pour chaque $a \in A$, un symbole de constante c_a, interprété dans M comme a. On note $\mathcal{L}_A$ le langage obtenu. On travaille alors avec la théorie de M dans ce nouveau langage que l'on note $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}_A}(M)$, et on a une notion de prédicat définissable dans cette théorie complète, que l'on appelle prédicat A-définissable. Par exemple, si $\varphi(x_1, x_2)$ était un prédicat définissable et $a \in A$ est fixé, $\varphi(x_1, c_a)$ est un prédicat A-définissable, interprété dans M comme la fonction $\varphi^M(\cdot, a)$. Une remarque important à faire est que si N est une sous-structure élémentaire (pour le langage $\mathcal{L}$) de M qui contient A, alors on peut la voir naturellement comme une sous $\mathcal{L}_A$-structure de M qui reste élémentaire. Voici donc la version relative du lemme 6.2 qui sert pour la preuve du lemme 6.6.

Lemme 6.7. — *Soient M_1, M_2 et M_3 deux sous-structures de* $\mathrm{MAlg}(X, \mu)$ *qui sont des modèles de T, supposons que M_1 et M_2 sont relativement indépendants au dessus de M_3. Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ un prédicat définissable. Alors pour tout $\bar{a} \in M_1^{\mathbb{N}}$, la fonction $\bar{b} \in M_2^{\mathbb{N}} \mapsto \varphi(\bar{a}, \bar{b})$ coïncide avec l'interprétation dans M_2 d'un prédicat M_3-définissable.*

La preuve élémentaire que nous avons fait du lemme 6.2 peut s'adapter en utilisant l'espérance conditionnelle et en s'appuyant sur l'observation suivante, que l'on montre par densité des fonctions en escalier : si N est une sous-algèbre de $M = \mathrm{MAlg}(X, \mu)$, et $f : (X, \mu) \to \mathbb{R}$ est une fonction N-mesurable intégrable, alors la fonction $A \in M \mapsto \int_A f(x) d\mu(x)$ coïncide avec l'interprétation un prédicat N-définissable.

APPENDICE A. LE THÉORÈME DE RYLL-NARDZEWSKI

A.1. Va-et-vient

Cette section forme une partie importante de la preuve du théorème A.11 de Ryll-Nardzewski que l'on énoncera dans la dernière section, et est une bonne application des outils développés dans la section 5.

Théorème A.1. — *Soit T une théorie complète, supposons que pour tout $m < \omega$, tout m-type est isolé. Soient M et N deux modèles* séparables *de T. Soit $n < \omega$, soient $\bar{a} \in M^n$ et $\bar{b} \in N^n$ tels que $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$, et soit $\epsilon > 0$. Alors il existe un isomorphisme $\varphi : M \to N$ tel que $d^N(\varphi(\bar{a}), \bar{b}) < \epsilon$.*

Remarque A.2. — Le théorème reste vrai pour $n = \omega$ puisque la distance sur un produit infini n'est pas très sensible à ce qui se passe dans les grandes coordonnées.

Remarque A.3. — Pour $N = M$, la conclusion du théorème se reformule en disant que l'application naturelle $\mathrm{Aut}(M) \backslash\backslash M^n \to S_n(T)$ est injective. Dans ce cas, on dit aussi que la structure M est *approximativement homogène*.

Démonstration du théorème A.1. — On va faire un argument de va-et-vient utilisant le point crucial suivant, qui par symétrie reste valable en échangeant les rôles de M et N.

LEMME A.4. — *Soient* $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^n$ *tels que* $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$. *Soit* $c \in M$ *et* $\epsilon > 0$. *Alors il existe* $c' \in N$ *et* $\bar{b}' \in N^n$ *tel que* $\mathrm{tp}(\bar{a}, c) = \mathrm{tp}(\bar{b}', c')$ *et* $d^N(\bar{b}, \bar{b}') < \epsilon$.

Preuve du lemme. — Soit p le type de $(\bar{a}, c)$. D'après le théorème 5.16, on dispose d'un prédicat définissable $d(\cdot, p)$ dont l'interprétation dans tout modèle de T est la distance à l'ensemble des réalisations de p. Le type de $\bar{a}$ contient alors le prédicat définissable suivant :

$$\inf_y d((\bar{x}, y), p).$$

Soit D l'ensemble des réalisations de p dans N. Comme $\mathrm{tp}\,\bar{a} = \mathrm{tp}\,\bar{b}$, on trouve $c_1 \in N$ tel que $d^N((\bar{b}, c_1), D) < \epsilon$. Donc il existe $(\bar{b}', c') \in N^n \times N$ réalisant $\mathrm{tp}(\bar{a}, c)$ avec $d^N((\bar{b}, c), (\bar{b}', c')) < \epsilon$ en particulier $d^N(\bar{b}, \bar{b}') < \epsilon$. $\square_{\text{lemme}}$

Soient maintenant $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ avec $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$ et $\epsilon > 0$. On voudrait définir un isomorphisme qui étende l'application $\bar{a} \mapsto \bar{b}$, mais ce n'est pas possible en général, et il va donc falloir perturber les choses en suivant le lemme précédent. Soit $\epsilon > 0$, fixons une suite $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum_k \epsilon_k < \epsilon$.

On va construire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ deux suites $(\bar{u}_k)$ et $(\bar{v}_k)$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les uplets $\bar{u}_k$ et $\bar{v}_k$ sont des $(n+2k)$-uplets de même type, $\bar{u}_0 = \bar{a}$, $\bar{v}_0 = \bar{b}$, et si on note π_{n+2k} la projection sur les $n + 2k$ premières coordonnées alors

$$d^M(\bar{u}_k, \pi_{n+2k}(\bar{u}_{k+1})) < \epsilon_k,$$
$$d(\bar{v}_k, \pi_{n+2k}(\bar{v}_{k+1})) < \epsilon_k.$$

Pour que cette construction nous permette de construire un isomorphisme entre M et N, on a besoin de se donner également une partie $C^M \subseteq M$ dénombrable dense et une énumération $(c_k^M)_{k \in \mathbb{N}}$ de C telle que chaque élément de C^M apparaisse une infinité de fois dans l'énumération. On se donne de même une énumération $(c_k^N)_{k \in \mathbb{N}}$ d'une partie dénombrable dense C^N de N où chaque élément apparait une infinité de fois. On va faire en sorte que pour tout k, c_k^M apparaisse dans l'uplet $\bar{u}_k$, et c_k^N apparaisse dans l'uplet $\bar{v}_k$.

La construction par récurrence se fait de la manière suivante : on doit commencer par $\bar{u}_0 = \bar{a}$ et $\bar{v}_0 = \bar{b}$. Puis, $\bar{u}_k$ et $\bar{v}_k$ étant construits,

— On considère le $(n+2k+1)$-uplet $(\bar{v}_k, c_{k+1}^N)$, et on applique alors le lemme A.4 pour trouver $\bar{w}_{k+1}$ tel que $\mathrm{tp}(\bar{w}_{k+1}) = \mathrm{tp}(\bar{v}_k, c_{k+1})$ et $d(\pi_{n+2k}(\bar{w}_{k+1}), \bar{x}_k) < \epsilon_k$ (étape du *va*).

— On pose ensuite $\bar{u}_{k+1} = (\bar{w}_{k+1}, c_{k+1}^M)$, et le lemme A.4 nous fournit $\bar{v}_{k+1}$ de même type que $\bar{u}_{k+1}$ avec $d(\pi_{n+2k+1}(\bar{y}_{k+1}), (\bar{y}_k, c_{k+1})) < \epsilon_k$ donc en particulier $d(\pi_{n+2k}(\bar{y}_{k+1}), \bar{y}_k) < \epsilon_k)$ (étape du *vient*).

Puisque $\sum_k \epsilon_k$ est finie, pour tout $n \geq 1$ la n-ième composante de $\bar{u}_k$ (resp. $\bar{v}_k$) converge, et on note u_n (resp. v_n) sa limite. On pose $\bar{u} = (u_1, \ldots)$ et $\bar{v} = (v_1, \ldots)$, alors par construction $\mathrm{tp}(\bar{u}) = \mathrm{tp}(\bar{v})$. De plus $\bar{u}$ est d'image dense dans M puisque pour chaque élément $c \in C^M$ il y a une infinité de $k \geq 1$ tels que c apparaisse dans $\bar{u}_k$, et de même $\bar{v}$ est d'image dense dans N.

Comme $\bar{u}$ et $\bar{v}$ ont le même type [16] et sont d'image dense, l'application $\alpha : x_i \mapsto y_i$ est une isométrie qui doit préserver les interprétations des fonctions et des relations. Elle s'étend donc par complétude en l'automorphisme de M recherché, qui envoie $\bar{a}$ à distance au plus ϵ de $\bar{b}$ puisque $\sum_k \epsilon_k < \epsilon$. □

En appliquant le théorème pour des uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ vides, notons qu'on a le corollaire suivant, qui fait partie du théorème de Ryll-Nardzewski.

Corollaire A.5. — *Soit T une théorie complète dont tous les n-types sont isolés pour $n < \omega$. Alors tous les modèles séparables de T sont isomorphes.* □

Lorsque tous les modèles séparables d'une théorie sont isomorphes, on dit qu'elle est **$\aleph_0$-catégorique** ou **séparablement catégorique**. En utilisant le théorème de compacité, on montre la réciproque du corollaire précédent : si on a une théorie dans un langage dénombrable qui est $\aleph_0$-catégorique, alors tous ses n-types sont isolés. Mentionnons également le théorème d'omission des types, qui donne un cadre plus général au résultat ci-dessus et à ce qui suit (cf. Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008, Sec. 12).

A.2. Distance sur l'espace des types

Afin de prouver le théorème de Ryll-Nardzewski, on a besoin d'une distance sur l'espace des types qui raffine sa topologie et en fait un espace *topométrique* (Ben Yaacov, 2008). La définition de cette distance évoquera des souvenirs à la lectrice familière avec la distance de Wasserstein et le théorème de Kantorovich–Rubinstein (cf. Lecture 20 dans Dudley, 1976), ou encore avec les algèbres de Banach de fonctions lipschitziennes (voir en particulier l'équation (2.1) de Sherbert, 1963). Ce n'est pas la définition originelle de Ben Yaacov et Usvyatsov (2010), mais on peut montrer qu'elle lui est équivalente (cf. Hallbäck, 2020, Thm. 3.3.14). Commençons par isoler un sous-ensemble important de l'algèbre des prédicats définissables.

Définition A.6. — *Soit T une théorie complète et $K \geq 0$. Un prédicat définissable $\varphi \in \mathfrak{P}^{\mathcal{L},T}$ est dit K-lipschitzien s'il admet une interprétation K-lipschitzienne dans un modèle de T.*

D'après la remarque 4.16, toute théorie complète *sait* quels prédicats définissables sont K-lipschitziens, puisque ceux sont ceux qui admettent la fonction $K\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}$ comme module d'uniforme continuité. En particulier si φ est K-lipschitzien, alors φ^M est K-lipschitzien dans *tout* modèle M de T.

Définition A.7. — *Soit T une théorie complète, soit $n \leq \omega$. Pour deux types $p, q \in S_n(T)$, leur distance est donnée par*

$$\partial(p,q) = \sup\left\{|\varphi(p) - \varphi(q)| : \varphi \in \mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T} \text{ est 1-lipschitzien}\right\}.$$

16. En fait ici seulement le fait qu'ils aient le même type sans quantificateur compte.

Le lemme suivant va nous permettre de voir que ∂ est bien une distance.

Lemme A.8. — *Pour tout $n \le \omega$, la sous-algèbre des prédicats définissables lipschitziens est dense dans $\mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$.*

Démonstration. — Soit $\varphi(\bar{x}) \in \mathfrak{P}_n^{\mathcal{L},T}$ un prédicat définissable, et fixons un modèle M de T. Pour chaque $K \ge 0$, considérons le prédicat définissable

$$\varphi_K(\bar{x}) = \inf_{\bar{y}} \left(\varphi(\bar{y}) + K d(\bar{x}, \bar{y})\right).$$

Montrons tout d'abord que φ_K est bien K-lipschitzien. Soit $\bar{b} \in M^n$, la fonction $\varphi^M_{K,\bar{b}} : \bar{x} \in M^n \mapsto \varphi^M(\bar{b}) + K d(\bar{x}, \bar{b})$ est K-lipschitienne. L'interprétation de φ_K dans M étant l'infimum des fonctions K-lipschitziennes $\varphi^M_{K,\bar{b}}$, elle doit donc elle même être K-lipschitzienne.

Reste à montrer que $\|\varphi - \varphi_K\|_T$ tend vers 0 quand K tend vers $+\infty$. Remarquons que par définition $\varphi_K \le \varphi$. Soit maintenant $\epsilon > 0$. Comme φ est uniformément continue on dispose de $\delta > 0$ tel que $d^M(\bar{a}, \bar{b}) < \delta$ implique $\left|\varphi^M(\bar{a}) - \varphi^M(\bar{b})\right| < \epsilon$. Soit $K > 0$ tel que $\frac{2\|\varphi\|_T}{K} < \min(\delta, \epsilon)$.

Prenons $\bar{a} \in M^n$. Pour $\bar{b} \in M^n$, on a deux cas à considérer.

— Si $d^M(\bar{a}, \bar{b}) < \delta$, alors $\varphi^M(\bar{b})$ est ϵ-proche de $\varphi^M(\bar{a})$, et $K d^M(\bar{a}, \bar{b}) < \epsilon$, donc $\varphi^M(\bar{b}) + K d^M(\bar{a}, \bar{b})$ est 2ϵ-proche de $\varphi^M(\bar{a})$.

— Sinon $d^M(\bar{a}, \bar{b}) \ge \delta$, alors on a $K d^M(\bar{a}, \bar{b}) \ge 2 \|\varphi\|_T$ et donc $\varphi^M(\bar{b}) + K d^M(\bar{a}, \bar{b}) \ge \varphi^M(\bar{a})$.

On conclut donc en prenant l'infimum sur tous les $\bar{b}$ dans M^n que $\left|\varphi^M(\bar{a}) - \varphi^M_K(\bar{a})\right| \le 2\epsilon$.

Ceci étant valable pour tout $\bar{a} \in M^n$, on a montré que $\left\|\varphi^M - \varphi^M_K\right\|_\infty \le 2\epsilon$ dès lors que K vérifie $\frac{2\|\varphi\|_T}{K} < \min(\delta, \epsilon)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition A.9. — *La fonction ∂ est bien une distance sur $S_n(T)$, elle raffine la topologie logique, et pour tous $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$, on a $\partial(\mathrm{tp}(\bar{a}), \mathrm{tp}(\bar{b})) \le d^M(\bar{a}, \bar{b})$.*

Démonstration. — Le fait que ∂ satisfasse l'inégalité triangulaire et soit symétrique est clair, seul la séparation pourrait poser problème. On va la montrer directement en montrant le deuxième point de la proposition, à savoir que ∂ raffine la topologie compacte (donc séparée) de l'espace des types.

Soit donc p un n-type, soit U un voisinage de p. On dispose alors d'un prédicat définissable φ et d'un $\epsilon > 0$ tels que $U \supseteq \{q \in S_n(T) : |\varphi(q) - \varphi(p)| \le \epsilon\}$.

D'après le lemme précédent, on dispose d'un prédicat définissable ψ qui est K-lipschitzien pour un certain $K > 0$ et tel que $\|\varphi - \psi\|_T < \frac{\epsilon}{3}$. Alors pour tout q tel que $\partial(p, q) < \frac{\epsilon}{3K}$, on aura $\left|\frac{\psi(p)}{K} - \frac{\psi(q)}{K}\right| \le \frac{\epsilon}{3K}$. En utilisant l'inégalité triangulaire ainsi que l'inégalité $\|\varphi - \psi\|_T < \frac{\epsilon}{3}$, on conclut que la ∂ boule de rayon $\frac{\epsilon}{3K}$ autour de p est bien contenue dans U, ce qui termine la preuve que ∂ raffine la topologie logique.

Il nous reste alors à montrer que $\partial(\mathrm{tp}(\bar{a}), \mathrm{tp}(\bar{b})) \leq d^M(\bar{a}, \bar{b})$, mais c'est une conséquence immédiate du fait que dans la définition de ∂, on ne considère que des prédicats 1-lipschitziens. $\square$

A.3. Preuve du théorème de Ryll-Nardzewski

On commence par une proposition importante qui fait le lien avec la section 2 et généralise ce qu'on avait fait pour $\mathrm{Aut}([0,1], \lambda)$ (voir le théorème 5.17).

Proposition A.10. — *Soit T une théorie complète, soit M un modèle de T et soit $n < \omega$. Si l'action diagonale de $\mathrm{Aut}(M)$ sur M^n est approximativement cocompacte, alors tout n-type $p \in S_n(T)$ est isolé.*

Démonstration. — Considérons l'application $\mathrm{tp} : M^n \to S_n(T)$ qui à $\bar{a} \in M^n$ associe $\mathrm{tp}(\bar{a})$. C'est une contraction si on munit $S_n(T)$ de la distance ∂, elle passe donc au quotient en une contraction $\tilde{\mathrm{tp}} : \mathrm{Aut}(M) \mathbin{\backslash\!\backslash} M^n \to S_n(T)$. Par compacité et densité de l'image de tp dans $S_n(T)$, l'application $\tilde{\mathrm{tp}}$ est surjective, donc tp elle-même est surjective : tous les n-types sont réalisés dans M.

L'application $\tilde{\mathrm{tp}} : (\mathrm{Aut}(M) \mathbin{\backslash\!\backslash} M^n, d^M_{\mathrm{Aut}(M)}) \to (S_n(T), \partial)$ est une contraction, en particulier elle est continue. Donc $(S_n(T), \partial)$ est compact, et comme ∂ raffine la topologie de $S_n(T)$ on conclut par compacité que ∂ induit la topologie de $S_n(T)$.

Soit maintenant un n-type p, soit D l'ensemble de ses réalisations dans M^n, on doit montrer que $d(\cdot, D)$ est un prédicat définissable. La fonction $\partial(\cdot, p)$ est continue sur l'espace des types : par le théorème 4.26, c'est un prédicat définissable, et son ensemble de zéros dans M est clairement l'ensemble D des réalisations de p.

Il suffit maintenant de montrer que $\partial(\cdot, p)$ satisfait les hypothèses du théorème 5.8, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\bar{b} \in M^n$, si $\partial(\mathrm{tp}(\bar{b}), p) < \delta$ alors $d(\bar{b}, D) < \epsilon$. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas : on dispose alors d'une suite $(\bar{b}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\partial(\mathrm{tp}(\bar{b}_k), p) \to 0$ mais $d(\bar{b}_k, D) \geq \epsilon$ pour tout k. Par compacité de $\mathrm{Aut}(M) \mathbin{\backslash\!\backslash} M^n$, la suite $([\bar{b}_k])_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Soit $[\bar{b}]$ sa limite, alors par continuité de ∂ on a $\mathrm{tp}(\bar{b}) = p$ et d'autre part $d(\bar{b}, D) \geq \epsilon$, ce qui est contradictoire. $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de Ryll-Nardzewski sous sa forme pertinente pour l'étude des groupes polonais Roelcke-précompacts.

Théorème A.11. — *Soit G le groupe d'automorphismes d'une structure métrique (M, d) séparable. Si l'action de G sur M est approximativement oligomorphe, alors pour tout $n \leq \omega$ l'application de $G \mathbin{\backslash\!\backslash} M^n$ dans $S_n(T)$ est une bijection, et T est $\aleph_0$-catégorique.*

Démonstration. — Soit $n < \omega$. D'après la proposition précédente, tout n-type est isolé, en particulier tout n-type est réalisé dans M : $G \mathbin{\backslash\!\backslash} M^n \to S_n(T)$ obtenue par passage au quotient est surjective. Son injectivité est une conséquence immédiate du théorème A.1 pour $M = N$. Le fait que T soit $\aleph_0$-catégorique découle du corollaire A.5 puisque tout n-type est isolé. Le cas $n = \omega$ découle du cas précédent. $\square$

Remarque A.12. — Une application directe du théorème 4.26 nous donne sous les hypothèses du théorème ci-dessus une interprétation très concrète des prédicats définissables vus comme des fonctions sur M^n : ce sont exactement les fonctions continues sur M^n qui sont G-invariantes.

Remarque A.13. — Le théorème de Ryll-Nardzewski sous sa forme générale dit en plus que réciproquement, si la théorie d'une structure est $\aleph_0$-catégorique *et le langage est dénombrable* alors son groupe d'automorphismes agit de manière approximativement oligomorphe sur la structure. Pour le voir, il faut faire appel au théorème d'omission des types, cf. la section 12 de Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov (2008). Ce théorème tire son nom de son homologue en théorie des modèles classique, dû à Ryll-Nardzewski mais aussi indépendamment à Engeler et Svenonius en 1959. La version métrique ci-dessus est due à Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov.

Corollaire A.14. — *Soit G le groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable (M, d), supposons que l'action de G sur M soit approximativement oligomorphe. Alors l'adhérence de G dans M^M est égale à l'ensemble des plongements élémentaires de M dans M, et s'identifie naturellement au complété $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$ de G pour sa structure uniforme gauche.*

Démonstration. — L'ensemble des plongements élémentaires de M dans M étant l'ensemble des plongements qui commutent aux interprétations des prédicats définissables, c'est un fermé de M^M. Puisque tout automorphisme est un plongement élémentaire, l'adhérence de G est incluse dans ce fermé.

Ensuite, montrons que G est dense. Soit $\rho : M \to M$ un plongement élémentaire. Soient $a_1, \ldots, a_n \in M^n$ et $\epsilon > 0$, il s'agit de trouver $g \in G$ tel que $d(ga_i, \rho(a_i)) < \epsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Mais comme ρ est élémentaire, $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}(\rho(a_1), \ldots, \rho(a_n))$, et donc par injectivité de l'application $G \mathbin{\backslash\!\backslash} M^n \to S_n(T)$ on conclut que $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(\rho(a_1), \ldots, \rho(a_n))$ sont dans la même adhérence de G-orbite pour l'action diagonale de G sur M^n, ce qui donne immédiatement le résultat voulu.

Pour montrer que l'adhérence de G dans M^M s'identifie avec $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$, il reste à montrer que la structure uniforme induite sur G coïncide avec sa sa structure uniforme à gauche puisque M^M est un espace uniforme complet. Or cette dernière est clairement invariante par G-multiplication à gauche et compatible avec la topologie de G, ce qui termine la preuve [17]. □

Mis bout à bout avec la proposition 4.36 qui identifiait les plongements élémentaires à un ensemble d'éléments de $M^{\mathbb{N}}$ partageant le même type (et formant donc un sous-ensemble définissable de $M^{\mathbb{N}}$ d'après la Proposition A.10), le corollaire précédent nous fournit donc une identification naturelle entre $\widehat{G}_{\mathcal{L}}$ et un sous-ensemble définissable de $M^{\mathbb{N}}$.

17. Plus concrètement, on peut comme dans la preuve de la proposition 6.4 fixer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable dense dans M, considérer la distance $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d^M(\rho(a_n), \rho'(a_n))$ sur l'espace fermé des applications 1-lipschitziennes $M \to M$ et constater qu'elle définit une distance compatible complète qui se restreint en une distance invariante à gauche sur G.

Cette identification a été utilisée de manière cruciale pour $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ au début de la preuve du théorème 3.11 et reste fondamentale dans le cas général. Elle est également le premier pas d'un théorème de Ben Yaacov et Kaïchouh [18] qui dit que deux groupes d'automorphismes de structures métriques $\aleph_0$-catégoriques sont topologiquement isomorphes si et seulement si les structures sous-jacentes sont *bi-interprétables*, généralisant au cas métrique un résultat d'Ahlbrandt et Ziegler (1986).

RÉFÉRENCES

Gisela Ahlbrandt et Martin Ziegler (1986). « Quasi Finitely Axiomatizable Totally Categorical Theories », *Annals of Pure and Applied Logic*, **30** (1), p. 63-82. doi : 10.1016/0168-0072(86)90037-0.

Hiroshi Ando, Michal Doucha et Yasumichi Matsuzawa (2020). « Large Scale Geometry of Banach-Lie Groups », *prépublication*. arXiv : 2011.10376.

Javier Aramayona et Nicholas G. Vlamis (2020). « Big Mapping Class Groups : An Overview », in : *In the Tradition of Thurston : Geometry and Topology*. Sous la dir. de Ken'ichi Ohshika et Athanase Papadopoulos. Cham : Springer International Publishing, p. 459-496. doi : 10.1007/978-3-030-55928-1_12.

Richard Arens (1947). « Representation of *-Algebras », *Duke Mathematical Journal*, **14** (2), p. 269-282. doi : 10.1215/S0012-7094-47-01419-1.

Catalin Badea, Sophie Grivaux et Étienne Matheron (2019). « Rigidity Sequences, Kazhdan Sets and Group Topologies on the Integers », *to appear in J. Anal. Math.* arXiv : 1812.09014.

Juliette Bavard, Spencer Dowdall et Kasra Rafi (2020). « Isomorphisms Between Big Mapping Class Groups », *International Mathematics Research Notices*, **2020** (10), p. 3084-3099. doi : 10.1093/imrn/rny093.

Gerald Beer (1991). « A Polish Topology for the Closed Subsets of a Polish Space », *Proceedings of the American Mathematical Society*, **113** (4), p. 1123-1133. doi : 10.1090/S0002-9939-1991-1065940-6.

Bachir Bekka (2003). « Kazhdan's Property (T) for the Unitary Group of a Separable Hilbert Space », *Geometric & Functional Analysis GAFA*, **13** (3), p. 509-520. doi : 10.1007/s00039-003-0420-0.

Itaï Ben Yaacov (2006). « Schrödinger's Cat », *Israel Journal of Mathematics*, **153** (1), p. 157-191. doi : 10.1007/BF02771782.

——— (2008). « Topometric Spaces and Perturbations of Metric Structures », *Logic and Analysis*, **1** (3), p. 235. doi : 10.1007/s11813-008-0009-x.

18. Plus précisément, le fait que nous venons d'établir correspond à la proposition 12 de Ben Yaacov et Kaïchouh (2016).

——— (2018). « On a Roelcke-Precompact Polish Group That Cannot Act Transitively on a Complete Metric Space », *Israel Journal of Mathematics*, **224** (1), p. 105-132. DOI : 10.1007/s11856-018-1638-8.

Itaï Ben Yaacov, Alexander Berenstein, C. Ward Henson et Alexander Usvyatsov (2008). « Model Theory for Metric Structures », in : *Model Theory with Applications to Algebra and Analysis. Vol. 2.* T. 350. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 315-427. DOI : 10.1017/CBO9780511735219.011.

Itaï Ben Yaacov, Tomás Ibarlucía et Todor Tsankov (2018). « Eberlein Oligomorphic Groups », *Transactions of the American Mathematical Society*, **370** (3), p. 2181-2209. DOI : 10.1090/tran/7227.

Itaï Ben Yaacov et Adriane Kaïchouh (2016). « Reconstruction of separably categorical metric structures », *The Journal of Symbolic Logic*, **81** (1), p. 216-224. DOI : 10.1017/jsl.2014.80.

Itaï Ben Yaacov et Todor Tsankov (2016). « Weakly Almost Periodic Functions, Model-Theoretic Stability, and Minimality of Topological Groups », *Transactions of the American Mathematical Society*, **368** (11), p. 8267-8294. DOI : 10.1090/tran/6883.

Itaï Ben Yaacov et Alexander Usvyatsov (2010). « Continuous First Order Logic and Local Stability », *Transactions of the American Mathematical Society*, **362** (10), p. 5213-5259. DOI : 10.1090/S0002-9947-10-04837-3.

Nicolas Bourbaki (2007). *Topologie Générale : Chapitres 1 à 4*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. DOI : 10.1007/978-3-540-33982-3.

Peter J. Cameron (1997). « The Random Graph », in : *The Mathematics of Paul Erdös II*. Sous la dir. de Ronald L. Graham et Jaroslav Nešetřil. Algorithms and Combinatorics. Berlin, Heidelberg : Springer, p. 333-351. DOI : 10.1007/978-3-642-60406-5_32.

René Cori et Daniel Lascar (2003). *Logique mathématique - Tome 1 - Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats*. Paris : Dunod.

Pierre De La Harpe et Alain Valette (1989). *La Propriété (T) de Kazhdan Pour Les Groupes Localement Compacts*. Astérisque 175. Société mathématique de France.

Bruno Duchesne (2020). « A Group with Property (T) Acting on the Circle », *prépublication*. arXiv : 2011.12861.

Richard M. Dudley (1976). *Probabilities and Metrics : Convergence of Laws on Metric Spaces, with a View to Statistical Testing*. Aarhus : Aarhus Universitet, Matematisk Institut.

David M. Evans et Todor Tsankov (2016). « Free Actions of Free Groups on Countable Structures and Property (T) », *Fundamenta Mathematicae*, **232**, p. 49-63. DOI : 10.4064/fm232-1-4.

Ilijas Farah (2014). « Logic and Operator Algebras ». In : *Proceedings of the ICM*. T. II, p. 15-39. arXiv : 1404.4978.

Ilijas Farah, Bradd Hart, Martino Lupini, Leonel Robert, Aaron Tikuisis, Alessandro Vignati et Wilhelm Winter (2016). « Model Theory of C^*-Algebras », *to appear in Memoirs of the AMS*. arXiv : 1602.08072.

David H. Fremlin (2002). *Measure Theory Vol. 3 : Measure Algebras*. Colchester : Torres Fremlin.

Su Gao (2009). *Invariant Descriptive Set Theory*. T. 293. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL.

Eli Glasner (2003). *Ergodic Theory via Joinings*. T. 101. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society. doi : 10.1090/surv/101.

——— (2012). « The Group Aut (μ) Is Roelcke Precompact », *Canadian Mathematical Bulletin*, **55** (2), p. 297-302. doi : 10.4153/CMB-2011-083-2.

Roger Godement (2003). *Analyse Mathématique IV : Intégration et Théorie Spectrale, Analyse Harmonique, Le Jardin Des Délices Modulaires*. Springer.

Mikhael Gromov (2007). *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Boston : Birkhäuser.

Andreas Hallbäck (2020). « Metric Model Theory, Polish Groups & Diversities ». Thèse de Doctorat. Université de Paris.

Jesus Hernández Hernández, Israel Morales et Ferrán Valdez (2018). « Isomorphisms between Curve Graphs of Infinite-Type Surfaces Are Geometric », *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **48** (6), p. 1887-1904. doi : 10.1216/RMJ-2018-48-6-1887.

Tomás Ibarlucía (2016). « The Dynamical Hierarchy for Roelcke Precompact Polish Groups », *Israel Journal of Mathematics*, **215** (2), p. 965-1009. doi : 10.1007/s11856-016-1399-1.

——— (2017). « Automorphism groups of randomized structures », *The Journal of Symbolic Logic*, **82** (3), p. 1150-1179. doi : 10.1017/jsl.2017.2.

——— (2021). « Infinite-Dimensional Polish Groups and Property (T) », *Inventiones mathematicae*, **223** (2), p. 725-757. doi : 10.1007/s00222-020-00998-z.

Alexander S. Kechris (1995). *Classical Descriptive Set Theory*. T. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York. doi : 10.1007/978-1-4612-4190-4.

Harry Kesten (1959). « Symmetric Random Walks on Groups », *Transactions of the American Mathematical Society*, **92** (2), p. 336-354. doi : 10.2307/1993160.

Michael G. Megrelishvili (2001). « Every Semitopological Semigroup Compactification of the Group $\mathrm{H}^+[0,1]$ Is Trivial », *Semigroup Forum*, **63** (3), p. 357-370. doi : 10.1007/s002330010076.

Julien Melleray (2008). « Some Geometric and Dynamical Properties of the Urysohn Space », *Topology and its Applications*. Special Issue : Workshop on the Urysohn Space, **155** (14), p. 1531-1560. doi : 10.1016/j.topol.2007.04.029.

Yurii A. Neretin (1992). « Categories of Bistochastic Measures and Representations of Some Infinite- Dimensional Groups », *Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics*, **75** (1), p. 197-219.

Grigori I. Ol'shanskii (1978). « Unitary Representations of the Infinite-Dimensional Classical Groups U(p,∞), SO(p,∞), Sp(p,∞) and the Corresponding Motion Groups », *Functional Analysis and Its Applications*, **12** (3), p. 185-195. doi : 10.1007/BF01681430.

Vladimir Pestov (2006). *Dynamics of Infinite-Dimensional Groups*. T. 40. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI. doi : 10.1090/ulect/040.

——— (2018). « Amenability versus Property (T) for Non-Locally Compact Topological Groups », *Transactions of the American Mathematical Society*, **370** (10), p. 7417-7436. doi : 10.1090/tran/7256.

Christian Rosendal (2009). « A Topological Version of the Bergman Property », *Forum Mathematicum*, **21** (2), p. 299-332. doi : 10.1515/FORUM.2009.014.

——— (2018). *Coarse Geometry of Topological Groups*. Preliminary Version.

Yehuda Shalom (1999). « Bounded generation and Kazhdan's property (T) », *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, **90**, p. 145-168.

Donald Sherbert (1963). « Banach Algebras of Lipschitz Functions », *Pacific Journal of Mathematics*, **13** (4), p. 1387-1399. doi : 10.2140/pjm.1963.13.1387.

Sławomir Solecki (2014). « Unitary Representations of the Groups of Measurable and Continuous Functions with Values in the Circle », *Journal of Functional Analysis*, **267** (9), p. 3105-3124. doi : 10.1016/j.jfa.2014.08.003.

Todor Tsankov (2012). « Unitary Representations of Oligomorphic Groups », *Geometric and Functional Analysis*, **22** (2), p. 528-555. doi : 10.1007/s00039-012-0156-9.

Vladimir Vladimirovich Uspenskij (1990). « On the Group of Isometries of the Urysohn Universal Metric Space », *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **31** (1), p. 181-182.

——— (1998). « The Roelcke Compactification of Unitary Groups ». In : *Abelian Groups, Module Theory, and Topology*, p. 411-419.

John von Neumann (1929). « Zur allgemeinen Theorie des Masses », *Fundamenta Mathematicae*, **13** (1), p. 73-116.

Joseph Zielinski (2018). « Locally Roelcke Precompact Polish Groups », *prépublication*. arXiv : 1806.03752.

François Le Maître

Université de Paris et Sorbonne Université
CNRS, IMJ-PRG
F-75006 Paris, France
E-mail : francois.le-maitre@imj-prg.fr