

**SOUS-VARIÉTÉS TOTALEMENT GÉODÉSIQUES  
DES ESPACES DE MODULES DE RIEMANN**  
[d'après Eskin, McMullen, Mukamel, Wright]

par **Élise Goujard**

## INTRODUCTION

Soit  $\mathcal{M}_{g,n}$  l'espace de modules des surfaces de Riemann de genre  $g$  à  $n$  points marqués. Cet espace est muni de la métrique de Teichmüller qui permet de comparer les structures conformes sur les surfaces. Cette métrique, qui coïncide avec la métrique de Kobayashi, est une métrique de Finsler non riemannienne. Une sous-variété de  $\mathcal{M}_{g,n}$  est dite *totalelement géodésique* si elle contient toutes les géodésiques de Teichmüller qui lui sont tangentes. Les sous-variétés totalelement géodésiques de dimension (complexe) 1, appelées courbes de Teichmüller, sont relativement bien étudiées depuis les premières constructions de Veech dans les années 80 ; elles sont en particulier infiniment nombreuses dans chaque espace de modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Récemment, Wright a montré, en s'appuyant sur des résultats de finitude d'Eskin, Filip et Wright, qu'en dimension plus grande, ce n'était plus le cas : il n'y a qu'un nombre fini de telles sous-variétés dans chaque  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Un premier exemple de telle sous-variété primitive de dimension 2 dans  $\mathcal{M}_{1,3}$  a été construit par McMullen, Mukamel et Wright à partir de courbes cubiques projectives ; Eskin, McMullen, Mukamel et Wright ont ensuite trouvé deux autres exemples de telles sous-variétés.

## Remerciements

Je remercie chaleureusement Christophe Bavard, Yohan Brunebarbe, Vincent Delecroix, Duc-Manh Nguyen, Yohann Le Floch et Nicolas Bourbaki pour leurs commentaires et leur lecture attentive des premières versions de ce texte. Je remercie également plus généralement mes collègues de Bordeaux pour leurs questions, discussions et suggestions à propos de ces résultats et de leur présentation.

## 1. FINITUDE DES SOUS-VARIÉTÉS TOTALEMENT GÉODÉSIQUES

Soit  $X$  une surface de Riemann de genre  $g$  à  $n$  points marqués. Un marquage sur  $X$  est un difféomorphisme  $f$  d'une surface fixée  $S$  de genre  $g$  à  $n$  points marqués dans  $X$ , qui respecte l'ensemble des points marqués. On définit une relation d'équivalence sur

l'ensemble des surfaces marquées de la façon suivante :  $(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2)$  s'il existe un biholomorphisme  $g: X_1 \rightarrow X_2$  préservant les points marqués tel que  $g \circ f_1$  est isotope à  $f_2$ . On définit l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  comme l'ensemble des classes d'équivalence de ces surfaces marquées.

L'espace de modules  $\mathcal{M}_{g,n}$  des surfaces de Riemann de genre  $g$  à  $n$  points marqués est l'ensemble de ces surfaces modulo les biholomorphismes préservant les points marqués. Il s'agit du quotient de  $\mathcal{T}_{g,n}$  par le groupe modulaire  $\text{Mod}_{g,n}$ , le groupe des difféomorphismes d'une surface de genre  $g$  à  $n$  points marqués préservant l'orientation et le marquage des points, à isotopie près. Le groupe  $\text{Mod}_{g,n}$  agit proprement et discontinûment (avec points fixes) sur  $\mathcal{T}_{g,n}$ ; les stabilisateurs pour cette action sont finis. On notera  $\pi: \mathcal{T}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n}/\text{Mod}_{g,n}$  la projection naturelle.

L'espace  $\mathcal{T}_{g,n}$  est une variété analytique complexe de dimension  $3g - 3 + n$ , tandis que l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}$  a une structure d'orbivariété complexe (de même dimension). Par abus de langage, on parlera de sous-variétés de  $\mathcal{M}_{g,n}$  pour désigner des sous-orbivariétés.

### 1.1. Métrique de Teichmüller

La métrique de Teichmüller sur  $\mathcal{T}_{g,n}$  permet de comparer les structures conformes sur les surfaces de genre  $g$  à  $n$  points marqués. Soient deux surfaces  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{T}_{g,n}$  et une application différentiable  $f: X \rightarrow Y$ . Alors  $f$  agit en envoyant localement des cercles infinitésimaux sur des ellipses infinitésimales. On appelle coefficient d'excentricité de  $f$  et on note  $K(f)$  le supremum de tous les coefficients d'excentricité locaux obtenus ainsi. Ce coefficient mesure le taux de non-conformité :  $f$  est dite conforme si  $K(f) = 1$  et quasiconforme si  $K(f)$  est fini. D'après un théorème de Teichmüller, l'infimum du logarithme de  $K(f)$ , sur l'ensemble des difféomorphismes quasiconformes isotopes à l'identité, est atteint en une fonction (dite *extrémale*), unique à composition par des applications conformes près, telle que tous les coefficients d'excentricité locaux de cette fonction sont constants, excepté en un nombre fini de points. Cet infimum définit alors la *distance de Teichmüller* entre  $X$  et  $Y$ . L'espace  $\mathcal{T}_{g,n}$  muni de la métrique induite par cette distance est complet.

Une différentielle quadratique méromorphe sur  $X$  est une section méromorphe du carré symétrique du fibré cotangent  $T^*X$  (expressions locales de la forme  $f(z)dz^2$  avec  $f$  méromorphe). Pour une surface de Riemann  $X$  à  $n$  points marqués, on note  $\mathcal{Q}^1(X)$  l'espace vectoriel des différentielles quadratiques intégrables sur  $X$ , avec pôles uniquement en les points marqués (la condition d'intégrabilité assure que ces pôles sont au plus simples). D'après un résultat classique en théorie de Teichmüller, l'espace tangent à  $\mathcal{T}_{g,n}$  au point  $X$  est canoniquement isomorphe au dual de  $\mathcal{Q}^1(X)$  (pour  $q \in \mathcal{Q}^1(X)$ , la différentielle de Beltrami  $\bar{q}/|q|$  représente un vecteur tangent à  $X$ ). Ainsi  $\mathcal{T}_{g,n}$  est muni d'une métrique de Finsler : il suffit de prendre sur chaque espace tangent la norme duale à la norme  $L^1$  sur  $\mathcal{Q}^1(X)$  (norme de  $q \in \mathcal{Q}^1(X)$  donnée par  $\|q\| = \int_X |q|$ ). Cette métrique de Finsler coïncide avec la métrique de Teichmüller, à un facteur  $1/2$  près. La métrique de Teichmüller n'est par contre pas riemannienne.

Enfin, la métrique de Teichmüller coïncide avec la métrique de Kobayashi d'après un théorème de ROYDEN (1971).

## 1.2. Courbes de Teichmüller et autres sous-variétés totalement géodésiques

On appellera *géodésique complexe* ou *disque de Teichmüller* de  $\mathcal{T}_{g,n}$  tout plongement isométrique holomorphe du demi-plan hyperbolique  $\mathbb{H}$  dans  $\mathcal{T}_{g,n}$ , en munissant chaque espace de sa métrique de Kobayashi : métrique hyperbolique sur  $\mathbb{H}$  et métrique de Teichmüller sur  $\mathcal{T}_{g,n}$ . Étant donnés deux points distincts de  $\mathcal{T}_{g,n}$ , il existe une unique géodésique complexe passant par ces deux points : c'est l'unique plongement isométrique du demi-plan de Poincaré contenant la géodésique réelle passant par ces deux points.

Une sous-variété complexe de  $\mathcal{T}_{g,n}$  est dite *totalement géodésique* si elle contient les géodésiques complexes passant par chacune de ses paires de points distincts, ou de façon équivalente, si elle contient toutes les géodésiques complexes passant en point donné dans toutes les directions tangentes à la sous-variété en ce point. Une sous-variété de  $\mathcal{M}_{g,n}$  est dite *totalement géodésique* si une composante de sa préimage par  $\pi$  est totalement géodésique (dans ce cas toute composante de sa préimage l'est également). La dimension d'une sous-variété de  $\mathcal{T}_{g,n}$  ou  $\mathcal{M}_{g,n}$  sera toujours sa dimension complexe.

Les sous-variétés totalement géodésiques de  $\mathcal{M}_{g,n}$  de dimension 1 sont également appelées *courbes de Teichmüller*. Elles sont plus généralement définies via l'action de  $GL^+(2, \mathbb{R})$  sur l'espace de modules des différentielles quadratiques comme on le précisera dans le prochain paragraphe. L'image de presque tout disque de Teichmüller (au sens de la mesure de Masur–Veech) est dense dans  $\mathcal{M}_{g,n}$  d'après des résultats de MASUR (1982) et VEECH (1982).

## 1.3. Relation avec les sous-variétés linéaires invariantes de $\mathcal{Q}_{g,n}$

On a vu précédemment que l'espace de Teichmüller des différentielles quadratiques intégrables sur une surface de genre  $g$  à  $n$  points marqués (classes d'équivalences modulo les difféomorphismes préservant le marquage des points isotopes à l'identité), s'identifiait au fibré cotangent à  $\mathcal{T}_{g,n}$ . Le groupe modulaire agit par image inverse sur les différentielles quadratiques, il agit donc naturellement sur l'espace de Teichmüller et on note  $\mathcal{Q}_{g,n}$  l'espace quotient par cette action (espace de modules des différentielles quadratiques). On construit de manière similaire l'espace de modules des différentielles abéliennes (1-formes holomorphes) sur une surface de genre  $g$ , qu'on notera  $\mathcal{H}_g$ .

Rappelons ici quelques propriétés de l'espace de modules  $\mathcal{H}_g$  ( $\mathcal{Q}_{g,n}$  vérifie des propriétés similaires mais plus longues à exposer ; dans la suite de l'exposé nous allons toujours nous ramener à des différentielles abéliennes, voir paragraphe 1.3.2).

L'espace  $\mathcal{H}_g$  est stratifié par la donnée des ordres des zéros des différentielles. Plus précisément, pour  $k$  une partition de  $2g - 2$  on note  $\mathcal{H}(k)$  l'ensemble des  $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g$  dont les zéros de la forme  $\omega$  sont d'ordres donnés par  $k$ . Alors  $\mathcal{H}_g$  est la réunion de toutes les strates  $\mathcal{H}(k)$  pour toutes les partitions  $k$  de  $2g - 2$ . De plus, ces strates sont des orbivariétés complexes de dimension  $2g + \ell(k) - 1$  (où  $\ell(k)$  est le nombre d'éléments de la

partition  $k$ ), localement modelées sur les groupes d'homologie relative via l'application des périodes, comme précisé ci-dessous.

Pour un point  $(X, \omega)$  de  $\mathcal{H}(k)$ , on note  $\Sigma$  le lieu des zéros de  $\omega$  et  $r = |\Sigma| = \ell(k)$ . On fixe une base de  $H_1(X, \Sigma, \mathbb{Z})$  en concaténant une base symplectique de  $H_1(X, \mathbb{Z})$  et  $r - 1$  chemins reliant un zéro fixé de  $\omega$  aux  $r - 1$  autres. Les intégrales de  $\omega$  le long de ces cycles sont appelées périodes de  $\omega$  et fournissent des coordonnées locales de la strate  $\mathcal{H}(k)$  au voisinage de  $(X, \omega)$  : l'application qui à  $\omega$  associe ses périodes est un homéomorphisme local. Les changements de coordonnées étant linéaires, ces coordonnées des périodes munissent chaque strate d'une structure affine.

L'action de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  sur l'ensemble des couples  $(X, \omega)$  est donnée pour  $A \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  par  $A \cdot (X, \omega) = (X', \omega')$  où

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \Re \omega' \\ \Im \omega' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Re \omega \\ \Im \omega \end{pmatrix},$$

et  $X'$  est l'unique structure de surface de Riemann sur la surface topologique sous-jacente à  $X$  rendant  $\omega'$  holomorphe. Cette action commute avec l'action du groupe modulaire donc induit une action sur  $\mathcal{H}_g$ , qui préserve naturellement chaque strate. Elle se visualise particulièrement bien en interprétant  $(X, \omega)$  comme une surface de translation et en choisissant un patron polygonal plat pour celle-ci (voir les explications du paragraphe 2.2). On peut définir une action similaire de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathcal{Q}_{g,n}$  en considérant les racines carrées de différentielles quadratiques.

L'action du groupe à un paramètre de matrices  $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$  pour  $t$  réel joue un rôle particulier puisqu'il s'agit de l'action du flot de Teichmüller (flot géodésique pour la métrique de Teichmüller), par des résultats de Teichmüller. C'est-à-dire que  $\{(X_t, g_t \cdot \omega), t \in \mathbb{R}\}$  (où  $X_t$  est la surface de Riemann pour laquelle  $g_t \cdot \omega$  est holomorphe) est la géodésique (réelle) de Teichmüller passant par  $X$  dans la direction du vecteur tangent correspondant à  $\omega^2$  (on définit de même la géodésique engendrée par une différentielle quadratique  $q$ ). L'action de  $g_t$  encode l'action de l'application extrémale de Teichmüller : les axes des ellipses infinitésimales obtenues, d'excentricité constante, sont donnés par les directions horizontales et verticales induites par  $\omega^2$  (ou  $q$ ).

Notons que  $\omega$  et  $A \cdot \omega$  induisent la même structure complexe sur la surface sous-jacente si et seulement si  $A$  est la composée d'une rotation (élément de  $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ ) par une dilatation (c'est-à-dire que  $\omega$  et  $A \cdot \omega$  sont reliées par la multiplication par un nombre complexe non nul).

Ainsi, les disques de Teichmüller correspondent à l'image dans  $\mathcal{T}_{g,n}$  des orbites par l'action de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  sur l'espace de Teichmüller des différentielles quadratiques (ces orbites sont de la forme  $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \cdot q$  par la discussion précédente ; rappelons que  $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  s'identifie à  $\mathbb{H}$ ). On appellera disque de Teichmüller *engendré* par une différentielle abélienne  $\omega$  en un point  $X \in \mathcal{T}_{g,n}$  l'image de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \cdot (X, \omega)$  dans  $\mathcal{T}_{g,n}$ . Il s'agit de la réunion des géodésiques réelles émises depuis  $X$  dans les directions  $e^{i\theta} \omega^2$

pour  $\theta$  variant dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Si la projection sur  $\mathcal{M}_{g,n}$  d'une telle orbite est fermée, c'est une courbe de Teichmüller.

**1.3.1.** *Sous-variétés linéaires invariantes de  $\mathcal{H}(k)$ .* — On appellera *sous-variété linéaire* d'une strate  $\mathcal{H}(k)$  toute sous-variété complexe immergée de  $\mathcal{H}(k)$ , donnée par des équations linéaires à coefficients réels dans les coordonnées des périodes. Une telle sous-variété est souvent appelée « sous-variété affine (ou linéaire) *invariante* » dans la littérature, pour la raison suivante.

**PROPOSITION 1.1.** — *Une sous-variété linéaire fermée de  $\mathcal{H}(k)$  est  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -invariante.*

*Démonstration.* —  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  agit naturellement sur n'importe quel espace vectoriel complexe admettant une structure réelle. En particulier, l'action de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  sur  $(X, \omega) \in \mathcal{H}(k)$  se traduit en coordonnées des périodes par l'action naturelle de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  sur l'espace vectoriel  $H^1(X, \Sigma, \mathbb{C}) = H^1(X, \Sigma, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  (observer l'équation (1)). Une sous-variété linéaire  $M$  correspond localement à des sous-espaces vectoriels définis sur  $\mathbb{R}$  dans ces coordonnées des périodes, ces espaces sont donc préservés par l'action de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ . L'action de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathcal{H}(k)$  se restreint donc en une action sur  $M$ , bien définie globalement ( $M$  est fermée).  $\square$

La réciproque de ce résultat est le fameux théorème (voir QUINT (2016) pour l'exposé Bourbaki correspondant) :

**THÉORÈME 1.2** (ESKIN, MIRZAKHANI et MOHAMMADI, 2015)

*Tout sous-ensemble fermé  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -invariant de  $\mathcal{H}(k)$  est une union finie de sous-variétés linéaires. En particulier l'adhérence de l'orbite d'un point par  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  est une sous-variété linéaire.*

D'après un résultat de FILIP (2016), ces sous-variétés linéaires invariantes sont également des variétés algébriques de  $\mathcal{H}(k)$ , définies sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Enfin les sous-variétés linéaires forment un ensemble dénombrable dans chaque strate (ESKIN, MIRZAKHANI et MOHAMMADI, 2015) et elles sont définies (en tant que sous-variétés linéaires) sur des corps de nombres (Wright).

**1.3.2.** *Des différentielles quadratiques aux différentielles abéliennes.* — Pour toute différentielle quadratique  $q$  sur une surface de Riemann  $Y$  de genre  $g$  qui n'est pas le carré d'une différentielle holomorphe, il existe un unique revêtement ramifié minimal  $X \mapsto Y$  de degré 2, appelé revêtement d'orientation, tel que  $q$  se relève en le carré d'une différentielle abélienne  $\omega$  sur  $X$ . Ce revêtement est muni d'une involution qui change le signe de la forme  $\omega$ . Les points de branchement se trouvent aux singularités d'ordre impair de  $q$ . Le genre  $\hat{g}$  de  $X$  se déduit des ordres des singularités de  $q$ .

Réciproquement la donnée de  $(X, \omega) \in \mathcal{H}_{\hat{g}}$  munie d'une involution  $J$  qui préserve  $\omega^2$  induit une différentielle quadratique  $q = \omega^2/J$  sur la surface  $Y = X/J$  (qui n'est pas le carré d'une différentielle abélienne si  $J^*\omega = -\omega$ ).

Dans chaque cas, l'involution  $J$  considérée commute avec l'action de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ . Cette propriété permet de ramener l'étude des sous-variétés invariantes de  $\mathcal{Q}_{g,n}$  à celle des sous-variétés invariantes de  $\mathcal{H}_{\hat{g}}$ .

**1.3.3. Sous-variétés totalement géodésiques de  $\mathcal{M}_{g,n}$  et sous-variétés linéaires invariantes de  $\mathcal{Q}_{g,n}$ .** — Dans la suite de cette partie, pour  $N$  une sous-variété de  $\mathcal{M}_{g,n}$ , on notera  $QN$  l'ensemble des couples  $(Y, q)$  où  $Y \in N$  et  $q$  est une différentielle quadratique sur  $Y$  qui engendre un disque de Teichmüller contenu dans  $N$ . Cet espace est également stratifié par la donnée des ordres des singularités des différentielles. Enfin, on note  $\Omega N$  l'ensemble des revêtements doubles d'orientation des points de la strate de plus grande dimension de  $QN$ , comme décrit précédemment. Chaque point de  $\Omega N$  consiste en un triplet  $(X, \omega, J)$  composé de  $X \in \mathcal{H}_{\hat{g}}$ ,  $\omega$  une différentielle abélienne et  $J$  une involution préservant  $\omega^2$ .

Un des points clés de l'étude des sous-variétés totalement géodésiques de  $\mathcal{M}_{g,n}$  est le résultat suivant (qu'on peut extraire des articles de WRIGHT (2020) et ESKIN, MCMULLEN, MUKAMEL et WRIGHT (2020)) :

PROPOSITION 1.3. — *Soit  $N$  une sous-variété de  $\mathcal{M}_{g,n}$  de dimension  $d$ . Alors*

$$(N \text{ est totalement géodésique}) \iff (\Omega N \text{ est une sous-variété linéaire invariante de dimension } 2d \text{ de } \mathcal{H}_{\hat{g}}).$$

*Démonstration.* — Soit  $N$  une sous-variété (immergée) de  $\mathcal{M}_{g,n}$  de dimension  $d$ .

Supposons que  $\Omega N$  est une sous-variété linéaire invariante de dimension  $2d$ . Alors par construction pour tout point  $X$  de  $N$ ,  $N$  contient toutes les géodésiques complexes passant par  $X$  car elles sont les projections d'orbites par  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  de points  $(X, \omega, J)$  de  $\Omega N$ .

Réciproquement, si  $N$  est totalement géodésique, comme  $N$  est de dimension  $d$ , en chaque point  $X$  de  $N$  passe une famille de dimension  $d - 1$  de géodésiques complexes, qui est engendrée par une famille de dimension  $d$  de différentielles quadratiques (voir la discussion avant 1.3.1). Ainsi  $QN$  est de dimension  $2d$  et il en est de même pour  $\Omega N$ . □

Notons que la sous-variété linéaire  $\Omega N$  apparaissant dans la proposition est spécifiquement construite à partir de  $N$ , il ne s'agit pas de n'importe quelle variété linéaire de dimension paire.

Les résultats de FILIP (2016) impliquent que toute sous-variété totalement géodésique fermée de  $\mathcal{M}_{g,n}$  est algébrique.

#### 1.4. Résultats de finitude et de rigidité en dimension supérieure

Les courbes de Teichmüller sont infiniment nombreuses dans  $\mathcal{M}_{g,n}$ . On peut en construire par exemple en projetant les orbites par l'action de  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  de surfaces dites à petits carreaux, voir par exemple MATHEUS (2021). Notons que ces exemples ne

sont pas primitifs (voir la discussion au début du paragraphe 3 à ce sujet). En dimension plus grande, la situation est totalement différente :

**THÉORÈME 1.4** (WRIGHT, 2020). — *Il n’y a qu’un nombre fini de sous-variétés totalement géodésiques de  $\mathcal{M}_{g,n}$  de dimension plus grande que 2.*

La preuve de ce résultat est détaillée dans la partie 2.

Les sous-variétés totalement géodésiques sont également plus rigides en dimension supérieure (résultat admis ici) :

**THÉORÈME 1.5** (WRIGHT, 2020). — *L’image d’une sous-variété totalement géodésique de dimension plus grande que 2 de  $\mathcal{T}_{g,n}$  dans  $\mathcal{M}_{g,n}$  est fermée.*

## 2. PREUVE DU RÉSULTAT DE FINITUDE

### 2.1. Périodes relatives, absolues et notion de rang

Soit  $M$  une sous-variété linéaire de  $\mathcal{H}_g$ . Il existe sur  $M$  un fibré plat naturel dont la fibre au dessus d’un point  $(X, \omega)$  est donnée par  $H^1(X, \Sigma, \mathbb{C})$ . Le fibré tangent  $TM$  à  $M$  est naturellement un sous-fibré plat de ce fibré. Dans la suite de cette section on considérera la projection naturelle

$$p: H^1(X, \Sigma, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}).$$

Rappelons que la forme d’intersection naturelle sur  $H^1(X, \mathbb{C})$  est symplectique et cette propriété se retrouve pour des sous-variétés linéaires :

**THÉORÈME 2.1** (AVILA, ESKIN et MÖLLER, 2017). — *Les sous-variétés linéaires sont symplectiques, au sens où la forme d’intersection est non dégénérée sur  $p(TM)$ .*

Ce résultat motive la définition suivante.

**DÉFINITION 2.2.** — *Le rang d’une sous-variété linéaire  $M$  est égal à  $\frac{1}{2} \dim p(TM)$ .*

Le résultat suivant montre que pour une sous-variété totalement géodésique, toute la variation de la structure complexe des surfaces est encodée par la cohomologie absolue.

**THÉORÈME 2.3** (WRIGHT, 2020). — *Si  $N$  est une sous-variété totalement géodésique de  $\mathcal{M}_{g,n}$ , alors le rang de  $\Omega N$  est égal à la dimension de  $N$ .*

Par définition, le rang  $r$  de  $\Omega N$  est inférieur ou égal à la moitié de sa dimension, c’est-à-dire la dimension de  $N$  d’après la proposition 1.3. Pour montrer l’autre inégalité, Wright montre que  $\Omega N$  contient une famille de différentielles de codimension  $r$ . La construction repose sur l’existence de différentielles dont le feuilletage horizontal est totalement périodique : pour de telles surfaces, on peut décrire explicitement les déformations qui permettent d’annihiler un sous-espace de l’homologie de dimension  $r$ , tout en restant dans la sous-variété linéaire (théorème 2.7). Cette construction est détaillée dans le paragraphe suivant.

## 2.2. Différentielles de Jenkins–Strebel et déformation de cylindres

Dans ce paragraphe nous décrivons un peu plus précisément la métrique plate naturellement présente sur une surface  $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g$ , qui est liée à la structure de translation sur celle-ci.

Soit  $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g$ . L'intégration de  $\omega$  le long de chemins permet de choisir sur  $X$  un atlas dont les changements de cartes (en dehors du lieu des zéros  $\Sigma$  de  $\omega$ ) sont des translations (ce qui explique la dénomination « surface de translation » pour  $(X, \omega)$ ). La carte au voisinage d'un zéro d'ordre  $d$  de  $\omega$  est alors donnée par un changement de carte de la forme  $z \mapsto z^{d+1}$  avec les cartes voisines. En dehors des points de  $\Sigma$ , la métrique  $|\omega|$  induite par  $\omega$  correspond tout simplement à la métrique euclidienne sur  $\mathbb{C}$  (identifié à  $\mathbb{R}^2$ ) dans les cartes de translation. Un zéro de  $\omega$  de degré  $d$  correspond à une singularité conique de cette métrique, d'angle  $2\pi(d+1)$ . La structure de translation permet de relever le feuilletage horizontal ou vertical de  $\mathbb{R}^2$  (ou plus généralement le feuilletage linéaire dans une direction fixée) en feuilletage sur  $X$  (avec des singularités en  $\Sigma$ ). En dehors des singularités, les géodésiques correspondent à des courbes de direction constante sur  $X$  : elles sont linéaires.

Un segment géodésique joignant deux singularités (deux points de  $\Sigma$ ), non nécessairement distinctes, sans singularités en son intérieur, sera appelé *connexion de selle*. Pour une courbe géodésique fermée simple ne passant pas par des singularités, grâce à la structure de translation, les géodésiques partant de points voisins dans la même direction restent parallèles et de même longueur, tant qu'on n'atteint pas une singularité de la métrique. On appellera *cylindre* une telle collection maximale de géodésiques fermées simples (par définition un cylindre n'a pas de singularités en son intérieur, mais en a forcément en chacun de ses bords ; il est bordé par les connexions de selles). On parlera de *courbe portant le cylindre* pour n'importe quelle géodésique engendrant le cylindre (ou n'importe quelle courbe dans la même classe d'homotopie libre sur  $X \setminus \Sigma$ ). La *circonférence* d'un cylindre est le module de la période de  $\omega$  sur une courbe portant le cylindre. Pour un cylindre horizontal (porté par une géodésique horizontale), la *hauteur* du cylindre sera la partie imaginaire de la période de  $\omega$  sur n'importe quelle connexion de selle joignant deux singularités des bords opposés du cylindre.

Enfin, on appellera *différentielle de Jenkins–Strebel* toute surface  $(X, \omega)$  dont le feuilletage horizontal est totalement périodique (feuilles fermées). Une telle surface est composée uniquement de cylindres horizontaux, recollés le long de connexions de selles horizontales. Sur la figure 1 est représenté le patron plat d'une différentielle de Jenkins–Strebel  $(X, \omega) \in \mathcal{H}(1, 1)$ , formée de deux cylindres horizontaux (jaune et rose).

De nombreux théorèmes d'existence et d'unicité de telles différentielles existent, on utilisera le résultat suivant dans la suite.

**THÉORÈME 2.4** (Jenkins, Strebel). — *Soit  $X$  une surface de Riemann et  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  des classes d'homotopies distinctes de courbes fermées simples sur  $X$ . Alors il existe une différentielle de Jenkins–Strebel sur  $X$  dont les cylindres sont portés par les  $\gamma_i$ . De plus,*

cette différentielle est uniquement déterminée par la donnée des hauteurs des cylindres, ou par la donnée des circonférences des cylindres.

Chaque strate de  $\mathcal{H}_g$  contient des différentielles de Jenkins–Strebel (constructions explicites de Zorich), mais également chaque sous-variété linéaire invariante, grâce au résultat suivant, découlant de l’étude de la dynamique du flot horocyclique (action de  $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ).

**THÉORÈME 2.5** (SMILLIE et WEISS, 2004). — *Toute orbite fermée du flot horocyclique contient une différentielle de Jenkins–Strebel.*

Chaque courbe portant un cylindre représente un élément de l’homologie absolue de la surface. On s’intéresse maintenant à la dimension du sous-espace vectoriel de l’homologie absolue engendré par ces cylindres (c’est-à-dire par les classes des courbes portant ces cylindres). D’après AVILA, ESKIN et MÖLLER (2017),  $p(TM)$  est symplectique pour la forme d’intersection. Les courbes portant les différents cylindres étant disjointes, le dual du sous-espace vectoriel engendré par les cylindres est isotrope, sa dimension est donc au plus  $r$  si  $M$  est de rang  $r$ .

Le théorème suivant montre que dans une sous-variété linéaire de rang  $r$  on peut toujours trouver une différentielle de Jenkins–Strebel avec le maximum de cylindres indépendants (c’est-à-dire telle que les cylindres engendrent un sous-espace de dimension  $r$  de l’homologie), et de plus qu’on peut trouver toute une famille de codimension  $r$  de telles différentielles dans la sous-variété.

*Remarque 2.6.* — L’ensemble des (classes des ) connexions de selle engendre l’homologie relative de la surface ; chaque cylindre présent dans la surface induit une relation de dépendance linéaire (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) entre les connexions de selles qui le bordent d’un côté et de l’autre, cette relation étant préservée par l’action de  $GL^+(2, \mathbb{R})$ . La construction présentée ci-dessous consiste à trouver une surface qui sature l’ensemble de ces conditions (plus aucun degré de liberté sur les connexions de selles bordant les cylindres), tout en restant dans la sous-variété qui elle-même est définie localement par des équations linéaires (à coefficients réels).

**THÉORÈME 2.7** (WRIGHT, 2015). — *Soit  $M$  une sous-variété linéaire invariante de  $\mathcal{H}_g$  de rang  $r$ . Alors il existe dans  $M$  une famille de différentielles de Jenkins–Strebel dont les coordonnées des périodes forment un ouvert d’un sous-espace vectoriel de codimension  $r$  de l’espace tangent à  $M$  au point considéré.*

*Éléments de preuve.* — On part d’une différentielle de Jenkins–Strebel dans  $M$ . On considère deux types de déformations dans  $M$  de la surface  $(X, \omega)$  correspondante : celles qui préservent les connexions de selles horizontales (comme dans la figure 1) et celles qui préservent les courbes portant les cylindres horizontaux (comme dans la figure 2). L’idée clé est que tant qu’il existe des déformations préservant les cylindres mais pas les connexions de selles horizontales, alors il est possible de trouver une déformation de la

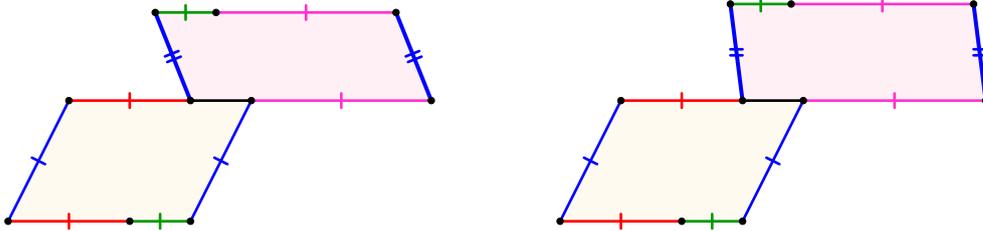


FIGURE 1. Déformation conservant les connexions de selles horizontales

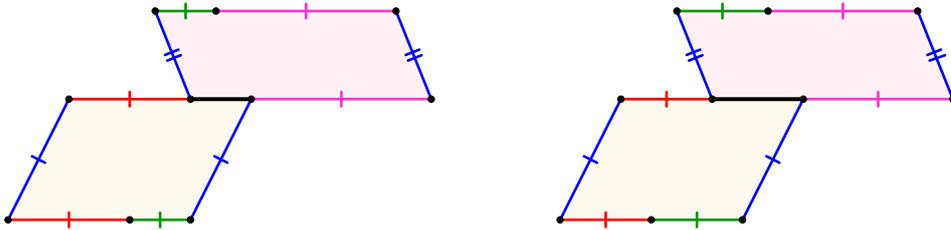


FIGURE 2. Déformation préservant les courbes portant les cylindres

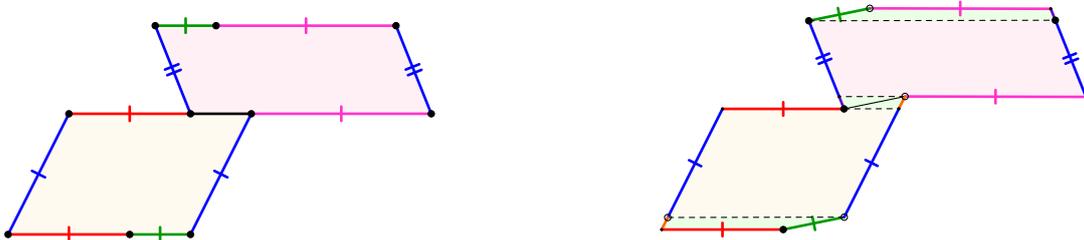


FIGURE 3. Déformation d'une connexion de selle horizontale qui crée plus de cylindres.

surface dans  $M$  qui crée plus de cylindres (voir figure 3). Plus précisément, on compare les (co-)dimensions des espaces suivants :

- L'annulateur  $CS$  des connexions de selle horizontales dans  $T_{(X,\omega)}M \subset H^1(X, \Sigma, \mathbb{R})$ . Cet espace, qui peut être explicitement décrit, est de codimension au moins  $r$  (cela découle du fait que son image par  $p$  est isotrope).
- L'annulateur  $Cyl$  des courbes portant les cylindres horizontaux dans  $T_{(X,\omega)}M \subset H^1(X, \Sigma, \mathbb{R})$ . Cet espace est par définition de codimension égale à celle du sous-espace de l'homologie engendré par les courbes portant les cylindres. Il contient naturellement  $CS$ .

Tant que ces deux espaces ne sont pas égaux, il est possible de construire, en jouant sur la complexification de  $T_{(X,\omega)}M \subset H^1(X, \Sigma, \mathbb{R})$ , une nouvelle surface  $(X', \omega')$  dans  $M$  qui contient plus de cylindres, quitte à appliquer à nouveau le théorème de Smillie–Weiss

si nécessaire. Le nombre de cylindres d’une surface de genre  $g$  étant borné par  $3g - 3$ , nécessairement la dimension de  $CS$  doit finir par augmenter.

Le processus s’arrête donc quand les cylindres horizontaux engendrent un sous-espace de dimension  $r$ . Pour cette surface maximale, les déformations préservant les cylindres (le long de  $Cyl$ ) préservent aussi les connexions de selles horizontales (car  $Cyl = CS$ ) ; elles préservent ainsi la propriété de périodicité et ne créent pas de nouveau cylindre.  $\square$

*Preuve du théorème 2.3.* — Soit  $d$  la dimension de  $N$ , et  $r$  le rang de  $\Omega N$ . On a vu que  $r \leq d$  par définition du rang (car  $\Omega N$  est de dimension  $2d$ ). La famille de différentielles de Jenkins–Strebel à circonférences de cylindres constantes données par le théorème 2.7, de dimension  $2d - r$  dans  $\Omega N$ , se projette en une famille de dimension  $2d - r$  dans  $N$  grâce au théorème 2.4. On obtient donc l’autre inégalité  $2d - r \leq d$  ce qui conclut.  $\square$

### 2.3. Résultats de finitude d’Eskin–Filip–Wright

Au vu du théorème 2.3, la fin de la preuve du théorème de finitude (théorème 1.4) repose sur le résultat suivant :

THÉORÈME 2.8 (ESKIN, FILIP et WRIGHT, 2018, Thm 1.5)

*Toute strate de différentielles abéliennes ne contient qu’un nombre fini de sous-variétés invariantes de rang supérieur ou égal à 2.*

*Éléments de preuve.* — Le détail de la preuve de ce résultat mériterait un exposé à part entière. On en redonne ici les étapes clés. Le point central est le calcul de l’enveloppe algébrique du cocycle de Kontsevich–Zorich. Ce cocycle encode le transport parallèle du fibré cohomologique  $H^1$  le long des orbites par l’action de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ . (Voir par exemple KRIKORIAN (2005) et GRIVAUX et HUBERT (2014) pour des exposés précédents sur le sujet). L’enveloppe algébrique d’un cocycle est donnée par le plus petit groupe algébrique dans lequel le cocycle peut être conjugué. Si  $M$  est une sous-variété linéaire invariante de  $\mathcal{H}$ , on note  $TM \subset H_{rel}^1$  son fibré tangent. Le sous-fibré tautologique est celui de fibre  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}(\omega), \mathfrak{S}(\omega))$  au point  $(X, \omega)$ . ESKIN, FILIP et WRIGHT (2018) montrent successivement les résultats suivants :

- L’enveloppe algébrique de  $TM$  est le groupe d’endomorphismes qui respectent la forme symplectique, le fibré tautologique et qui agit comme l’identité sur  $\text{Ker}(p)$  (la partie relative de l’homologie). Pour les conjugués de Galois de  $TM$ , il en est de même en oubliant la condition sur le plan tautologique ([Théorème 1.2]).
- Si deux sous-variétés linéaires invariantes  $M'$  et  $M$  vérifient  $M' \subsetneq M$  et  $TM$  et  $TM'$  (ainsi que leurs conjugués de Galois) ont la même enveloppe algébrique, alors  $M'$  est de rang 1 ([Lemme 6.1]).
- Si  $(M_i)$  est une suite de sous-variétés linéaires incluses dans une sous-variété linéaire  $M$  et qui s’équidistribuent dans  $M$ , alors, excepté pour un nombre fini d’entre elles, l’enveloppe algébrique de leur fibré tangent et de ses conjugués de Galois est égale à celle pour  $M$  ([Théorème 1.3]).  $\square$

### 3. CONSTRUCTION D'EXEMPLES DE DIMENSION 2

Partant d'une sous-variété totalement géodésique de  $\mathcal{M}_{g,n}$ , il est toujours possible d'en construire de nouvelles dans des espaces  $\mathcal{M}_{g',n'}$  de dimension plus grande, en considérant des revêtements de surfaces dans  $\mathcal{M}_{g,n}$ . On s'intéresse ici à des exemples de sous-variétés dites *primitives*, c'est-à-dire qui ne sont pas le fruit de telles constructions.

On adopte dans cette section la description unifiée d'ESKIN, MCMULLEN, MUKAMEL et WRIGHT (2020) des exemples connus de sous-variétés totalement géodésiques primitives de  $\mathcal{M}_{g,n}$  de dimension 2. Ces exemples proviennent de sous-variétés linéaires de  $\mathcal{H}_g$  de dimension 4. On peut les construire soit en considérant l'orbite des formes dites cycliques (provenant d'un revêtement ramifié de  $P^1(\mathbb{C})$  dont le groupe d'automorphismes est cyclique), soit en considérant l'ensemble des formes dites diédrales (provenant d'un revêtement ramifié de  $P^1(\mathbb{C})$  dont le groupe d'automorphismes est diédral), dont les symétries persistent sous l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Les variétés obtenues en considérant le premier point de vue sont naturellement linéaires et de dimension plus grande que 4 (pour au moins quatre points de ramification). Les variétés obtenues en considérant le second point de vue sont plus explicites, et de dimension plus petite que 4. Les exemples qui nous intéressent viennent du cas où les deux points de vue donnent des variétés de même adhérence, de dimension 4 donc. Dans cet exposé, le but étant de montrer simplement l'existence de tels exemples, nous nous contenterons de développer le premier point de vue.

**DÉFINITION 3.1.** — *Soient  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  quatre points distincts de  $P^1(\mathbb{C})$  et  $a_1, a_2, a_3, a_4$  des entiers naturels premiers entre eux, de somme paire égale à  $2m$ , telle que  $a_i \neq m$  pour tout  $i$ . Une forme cyclique de type  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  est un couple  $(X, \omega)$  où  $X$  est la surface de Riemann d'équation  $y^m = \prod_{i=1}^4 (x - x_i)^{m-a_i}$ , et  $\omega$  est la 1-forme holomorphe  $dx/y$ .*

La surface  $X$  est un revêtement ramifié de  $P^1(\mathbb{C})$  au dessus des  $x_i$  : il y a  $\mathrm{pgcd}(a_i, m)$  points de ramifications d'indice  $\frac{m}{\mathrm{pgcd}(a_i, m)}$  au dessus de  $x_i$ . La forme  $\omega$  est une forme propre pour le groupe d'automorphismes du revêtement  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  engendré par  $r(x, y) = (x, \zeta_m y)$  où  $\zeta_m = e^{2i\pi/m}$ . La métrique plate sur  $P^1(\mathbb{C})$  induite par  $\omega$  est donnée par  $\left| \frac{dx}{y} \right|$ , les singularités de la métrique étant situées aux points  $x_i$ , d'angles coniques  $2\pi a_i/m$ . La métrique plate sur  $X$  a donc  $\mathrm{pgcd}(a_i, m)$  singularités coniques au dessus de  $x_i$ , d'angles coniques  $\frac{2\pi a_i}{\mathrm{pgcd}(a_i, m)}$  (certains de ces points peuvent être réguliers). Ces singularités de la métrique correspondent à des zéros de  $\omega$  de degré  $\frac{a_i}{\mathrm{pgcd}(a_i, m)} - 1$ .

Le genre  $g$  de  $X$  est donné par la formule de Riemann–Hurwitz :

$$(2) \quad 2g - 2 = \sum_{i=1}^4 (a_i - \mathrm{pgcd}(a_i, m)).$$

L'ensemble de toutes les formes cycliques de type  $a$  est noté  $\Omega Z_a$ .

Notons que quand  $m$  est pair, le revêtement se factorise par  $(X, \omega^2)/r^{m/2}$  où un calcul similaire montre que la différentielle quadratique  $\omega^2/r^{m/2}$  a au-dessus de chaque  $x_i$

$\text{pgcd}(a_i, m/2)$  singularités de degré  $\frac{a_i}{\text{pgcd}(a_i, m/2)-2}$  (angles coniques égaux à  $\frac{\pi a_i}{\text{pgcd}(a_i, m/2)}$ ). Le genre de ce revêtement intermédiaire est donné par

$$4g' - 4 = \sum_{i=1}^4 (a_i - \text{pgcd}(a_i, m/2)).$$

La figure 3 représente un patron plat de  $(X, \omega)$  dans le cas où  $a = (1, 1, 1, 9)$  et les  $x_i$  sont réels. Dans ce cas  $P^1(\mathbb{C})$  a des singularités d'angles  $\pi/3$  aux trois sommets « aigus » et d'angle  $3\pi$  au sommet « obtus ». La surface  $(X, \omega)$  appartient à la strate  $\mathcal{H}(2^3, 0^3)$  et le revêtement intermédiaire à la strate  $\mathcal{Q}(1^3, (-1)^3)$ .

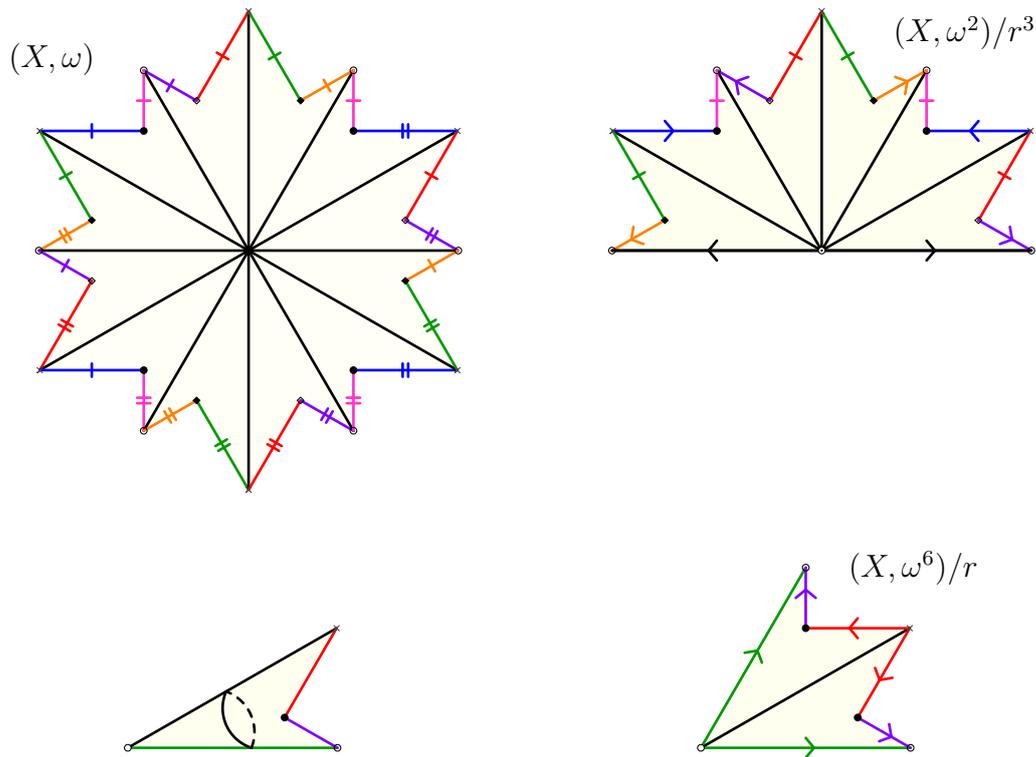


FIGURE 4. Exemple de forme cyclique de type  $(1, 1, 1, 9)$

Notons que les symétries de la forme cyclique  $(X, \omega)$  ne sont pas préservées par l'action de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . La construction d'ESKIN, MCMULLEN, MUKAMEL et WRIGHT (2020) montre que pour certaines valeurs de  $a$ , l'adhérence de l'orbite d'une forme cyclique de type  $a$  est une sous-variété linéaire de dimension 4.

Plus précisément, considérons  $\Omega G_a = \overline{\text{SL}(2, \mathbb{R}) \cdot \Omega Z_a}$ , l'adhérence de l'orbite des formes cycliques, en suivant les notations de ESKIN, MCMULLEN, MUKAMEL et WRIGHT (2020). On vérifie successivement les faits suivants :

1.  $\Omega Z_a$  est une variété unirationnelle irréductible de dimension 2, définie localement par des équations linéaires à coefficients complexes en coordonnées des périodes.

2.  $\Omega G_a$  est de dimension plus grande que 4.

*Preuve de 1.* — La donnée des quatre points  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $P^1(\mathbb{C})$  (espace de configurations de dimension 1), détermine  $(X, \omega) \in \Omega Z_a$  à multiplication par un complexe près, ce qui explique la dimension de  $\Omega Z_a$ . En prêtant attention à la numérotation des  $b_i$  et au choix de  $r \in \text{Aut}(X)$  (en nombre fini) on peut expliciter le morphisme dominant prouvant l'unirationalité de  $\Omega Z_a$ .

Pour  $(X, \omega)$  dans  $\Omega Z_a$  et  $r$  un générateur de  $\text{Aut}(X)$ , on note  $E_r(X, \omega) = \text{Ker}(r^* - \zeta_m^{-1} \text{Id}) \subset H^1(X, \Sigma)$  le sous-espace propre pour  $r$  contenant la classe de  $\omega$ . Un calcul classique sur les caractères du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  (groupe d'automorphismes du revêtement) montre que  $E_r(X, \omega)$  est de dimension 2. On montre alors qu'au voisinage de  $(X, \omega)$ ,  $\Omega Z_a$  est égal à une réunion finie de sous-espaces  $E_{r_i}(X_i, \omega_i) \subset H^1(X, \Sigma)$ . L'argument est le suivant : l'intersection de  $\Omega Z_a$  avec une petite boule  $U$  autour de  $(X, \omega)$  est une sous-variété analytique de dimension 2, dont les coordonnées des périodes sont contenues dans la réunion de tous les sous-espaces  $E_{r'}(X', \omega')$ . Comme ces espaces sont définis sur les corps de nombres, ils sont dénombrables et leur intersection avec  $\Omega Z_a \cap U$  est d'intérieur vide sauf pour un nombre fini d'entre eux, notés  $E_{r_i}(X_i, \omega_i)$ . L'intersection de chacun d'entre eux avec  $U$  est connexe et ainsi incluse dans  $\Omega Z_a$ , et leur réunion est dense dans  $\Omega Z_a \cap U$  par un théorème de Baire. Comme ces sous-espaces sont également fermés on obtient le résultat.  $\square$

*Preuve de 2.* — On note que  $\Omega Z_a$  est invariant par multiplication par un nombre complexe non nul, ainsi  $\Omega G_a$  est invariant par  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ .  $\Omega Z_a$  est recouvert par la réunion des adhérences des  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -orbites de chacun de ses points (rappelons qu'elles sont en nombre dénombrable car toutes dans la même strate), et par irréductibilité,  $\Omega Z_a$  est totalement inclus dans l'une de ces adhérences d'orbites, qui est donc égale à  $\Omega G_a$ . Ainsi  $\Omega G_a$  est une sous-variété linéaire, définie par des équations linéaires à coefficients réels. Comme elle contient  $\Omega Z_a$  qui est localement modelée sur des sous-espaces complexes de dimension 2, elle contient localement les sous-espaces de dimension 4 engendrés par ces sous-espaces et leurs conjugués.  $\square$

Le résultat précis final est le suivant, dont nous ne détaillerons pas la preuve. Celle-ci passe par l'étude d'un espace auxiliaire, l'espace des formes dites diédrales. Certaines valeurs de  $a$  sont exclues pour garantir la primitivité.

**THÉORÈME 3.2** (ESKIN, MCMULLEN, MUKAMEL et WRIGHT, 2020, Thm 1.1)

*Pour  $a$  valant  $(1, 1, 1, 7)$ ,  $(1, 1, 1, 9)$ ,  $(1, 1, 2, 8)$ ,  $(1, 1, 2, 12)$ ,  $(1, 2, 2, 11)$ , ou  $(1, 2, 2, 15)$ ,  $\Omega G_a$  est une sous-variété linéaire de dimension 4 de  $\mathcal{H}_g$ , primitive et irréductible (où  $g$  est donné par (2)).*

Parmi ces sous-variétés linéaires, trois vont se projeter en des sous-variétés de dimension 2 sur  $\mathcal{M}_{g', n'}$ , fournissant ainsi des exemples de sous-variétés totalement géodésiques de dimension 2. Pour  $m$  pair, la projection  $\pi: \text{SL}(2, \mathbb{R}) \cdot \Omega Z_a \subset \mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{M}_{g', n'}$  est la composée de l'application de passage au quotient par l'involution naturelle

$(X, \omega) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \cdot \Omega Z_a \mapsto (Y, q) = (X, \omega^2)/r^{m/2} \in \mathcal{Q}_{g', n'}$  ( $r$  ne commute pas avec l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ , mais  $r^{m/2}$  oui), par la projection naturelle  $(Y, q) \mapsto Y \in \mathcal{M}_{g', n'}$  qui marque les pôles de  $q$  sur  $Y$ . On note  $QG_a$  l'ensemble de toutes ces différentielles quadratiques. Alors  $\overline{QG_a}$  est également une sous-variété invariante de dimension 4.

Sur la figure 3,  $(X, \omega)$  est dans  $\mathcal{H}_4$  (plus précisément la strate  $\mathcal{H}(2, 2, 2)$ ) et  $(Y, q)$  est dans  $\mathcal{Q}_{1,3}$  (strate  $\mathcal{Q}(1, 1, 1, -1, -1, -1)$ ), les trois pôles correspondant aux trois sommets « aigus » de la structure plate correspondante sur  $P^1(\mathbb{C})$ .

**THÉORÈME 3.3** (ESKIN, MCMULLEN, MUKAMEL et WRIGHT, 2020, Thm 1.3)

Pour  $a$  valant  $(1, 1, 1, 9)$ ,  $(1, 1, 2, 12)$ , ou  $(1, 2, 2, 15)$ ,  $F_a := \overline{\pi(\Omega G_a)}$  est une sous-variété de dimension 2 de  $\mathcal{M}_{1,3}$ ,  $\mathcal{M}_{1,4}$  ou  $\mathcal{M}_{2,1}$  respectivement.

*Démonstration.* — On remarque pour commencer que toutes ces valeurs de  $a$  sont celles (dans la liste précédente) pour lesquelles  $a_4 = 3(a_1 + a_2 + a_3)$ , ou encore  $m$  est pair égal à  $2(a_1 + a_2 + a_3)$ . Pour ces valeurs de  $a$ , le revêtement cyclique  $(X, \omega)$  se factorise par  $(Y, q) = (X, \omega^2)/r^{m/2}$  et par construction les pôles de  $q$  ne se trouvent qu'au dessus des  $x_1, x_2, x_3$  (la fibre au dessus de  $x_4$  ne contient que des zéros de  $q$ ). Ainsi pour  $Y \in \mathcal{M}_{g', n'}$ , la fibre de la projection  $(Y, q) \in QG_a \mapsto Y$  (qui marque les pôles de  $q$ ) contient une famille de différentielles quadratiques de dimension 2 (donnée par la variation de  $x_4$  pour  $x_1, x_2, x_3$  fixés et l'action de  $\mathbb{C}^*$ ). Comme  $QG_a$  est de dimension 4, on obtient que  $F_a$  est de dimension au plus 2. D'autre part, comme  $F_a$  est l'image de l'adhérence de  $QG_a$  qui est une sous-variété de dimension 4 incluse dans l'ensemble des différentielles quadratiques sur  $F_a$ , alors  $F_a$  est de dimension au moins 2, ce qui conclut.  $\square$

Ces trois exemples sont donc des sous-variétés totalement géodésiques de dimension 2, primitives grâce au théorème 3.2 et la proposition 1.3.

*Remarque 3.4.* — MCMULLEN, MUKAMEL et WRIGHT (2017) ont d'abord construit la variété  $F_{(1,1,1,9)}$  comme l'ensemble des couples  $(Y, P) \in \mathcal{M}_{1,3}$  ( $P$  est l'ensemble des points marqués sur  $Y$ ), tels qu'il existe une application rationnelle de  $Y$  dans  $P^1(\mathbb{C})$  de fibres linéairement équivalentes à  $P$  et telle que  $P$  est contenu dans les fibres au-dessus des points critiques de l'application. Ce lieu peut être décrit géométriquement à l'aide de courbes cubiques planes. De même le lieu  $F_{(1,1,2,12)}$  peut être décrit géométriquement à l'aide de faisceaux de quartiques.

*Remarque 3.5.* — Les valeurs  $(1, 1, 1, 9)$  et  $(1, 1, 2, 8)$  pour  $a$  fournissent également de nouveaux exemples de familles de courbes de Teichmüller primitives, et de nouveaux exemples de quadrilatères dont le flot du billard satisfait la dichotomie de Veech (la trajectoire dans une direction donnée est soit périodique soit uniformément distribuée).

## RÉFÉRENCES

- Artur AVILA, Alex ESKIN et Martin MÖLLER (2017). « Symplectic and isometric  $SL(2, \mathbb{R})$ -invariant subbundles of the Hodge bundle », *J. Reine Angew. Math.* **732**, p. 1-20.
- Alex ESKIN, Simion FILIP et Alex WRIGHT (2018). « The algebraic hull of the Kontsevich-Zorich cocycle », *Ann. of Math. (2)* **188** (1), p. 281-313.
- Alex ESKIN, Curtis T. MCMULLEN, Ronen E. MUKAMEL et Alex WRIGHT (2020). « Billiards, quadrilaterals, and moduli spaces », *J. Amer. Math. Soc.* **33** (4), p. 1039-1086.
- Alex ESKIN, Maryam MIRZAKHANI et Amir MOHAMMADI (2015). « Isolation, equidistribution, and orbit closures for the  $SL(2, \mathbb{R})$  action on moduli space », *Ann. of Math. (2)* **182** (2), p. 673-721.
- Simion FILIP (2016). « Splitting mixed Hodge structures over affine invariant manifolds », *Ann. of Math. (2)* **183** (2), p. 681-713.
- Julien GRIVAUX et Pascal HUBERT (2014). « Les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller (d'après Eskin–Kontsevich–Zorich) », *Astérisque* (361), Exp. No. 1060, vii, 43-75.
- Raphaël KRIKORIAN (2005). « Déviations de moyennes ergodiques, flots de Teichmüller et cocycle de Kontsevich-Zorich (d'après Forni, Kontsevich, Zorich...) » In : 299. Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004, Exp. No. 927, vii, 59-93.
- Howard MASUR (1982). « Interval exchange transformations and measured foliations », *Ann. of Math. (2)* **115** (1), p. 169-200.
- Carlos MATHEUS (2021). « Three lectures on square-tiled surfaces », *Panor. Synth., à paraître*.
- Curtis T. MCMULLEN, Ronen E. MUKAMEL et Alex WRIGHT (2017). « Cubic curves and totally geodesic subvarieties of moduli space », *Ann. of Math. (2)* **185** (3), p. 957-990.
- Jean-François QUINT (2016). « Rigidité des  $SL_2(\mathbb{R})$ -orbites dans les espaces de modules de surfaces plates [d'après Eskin, Mirzakhani et Mohammadi] », *Astérisque* (380, Séminaire Bourbaki. Vol. 2014/2015), Exp. No. 1092, 83-138.
- Halsey L. ROYDEN (1971). « Automorphisms and isometries of Teichmüller space ». In : *Advances in the Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969)*. Ann. of Math. Studies No. 66. Princeton Univ. Press, Princeton N.J., p. 369-383.
- John SMILLIE et Barak WEISS (2004). « Minimal sets for flows on moduli space », *Israel J. Math.* **142**, p. 249-260.
- William A. VEECH (1982). « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Ann. of Math. (2)* **115** (1), p. 201-242.
- Alex WRIGHT (2015). « Cylinder deformations in orbit closures of translation surfaces », *Geom. Topol.* **19** (1), p. 413-438.
- (2020). « Totally geodesic submanifolds of Teichmüller space », *J. Differential Geom.* **115** (3), p. 565-575.

1178-17

Élise Goujard

IMB, Université de Bordeaux,

351 cours de la Libération

33405 Talence

*E-mail* : [elise.goujard@u-bordeaux.fr](mailto:elise.goujard@u-bordeaux.fr)