

**ESTIMATIONS DE RÉSOLVANTE ET LOCALISATION DU
SPECTRE POUR CERTAINES CLASSES D'OPÉRATEURS
PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SEMI-CLASSIQUES
NON-AUTOADJOINTS**

[d'après Nils Dencker, Johannes Sjöstrand et Maciej Zworski]

par **Karel Pravda-Starov**

L'objet de ce texte est de donner une présentation de l'article de DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI (2004) sur l'étude du pseudospectre des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques non-autoadjoints. L'étude des propriétés pseudospectrales d'un opérateur revient à étudier les lignes de niveau de la norme de sa résolvante. Pour des opérateurs non-autoadjoints, il s'agit d'un problème non trivial, et ce même lorsque le spectre de ces opérateurs est connu. En effet, il n'y a aucun contrôle a priori de la résolvante d'un opérateur non-autoadjoint par son spectre, et la résolvante d'un tel opérateur peut exploser en norme dans des régions non bornées de l'ensemble résolvant très éloignées du spectre. Les travaux de Dencker, Sjöstrand et Zworski que nous présentons ici montrent comment l'analyse microlocale et notamment des résultats de non-résolubilité ou de sous-ellipticité permettent d'expliquer ces phénomènes de contrôle ou d'explosion de la résolvante pour des classes générales d'opérateurs non-autoadjoints. Ces résultats généraux obtenus au milieu des années 2000 ont permis de jeter un jour nouveau et de comprendre un certain nombre de phénomènes qui intriguaient certains analystes numériques et spécialistes de théorie spectrale depuis la fin des années 90.

1. CONTEXTE ET ÉTAT DE L'ART AVANT LES TRAVAUX DE DENCKER, SJÖSTRAND ET ZWORSKI

1.1. Pseudospectre et instabilités spectrales

La notion de pseudospectre a été d'abord introduite et étudiée par des analystes numériques comme TREFETHEN (1997, 1999) qui ont noté de sensibles différences entre d'un côté les résultats théoriques et les prédictions suggérées par l'analyse spectrale, et d'un autre côté les résultats obtenus par simulation numérique pour certains problèmes d'ingénierie mathématique où interviennent naturellement des opérateurs non autoadjoints. Ce constat originel laisse penser que dans certains cas, la connaissance seule du spectre d'un opérateur ne permet pas de comprendre suffisamment son action. C'est ainsi que, pour suppléer à cet apparent manque d'information contenu dans le spectre, de nouveaux sous-ensembles du plan complexe appelés pseudospectres ont été

introduits. L'idée sous-jacente à la définition de ces nouveaux objets est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les points où la résolvante d'un opérateur n'est pas définie, i.e. son spectre, mais également les régions de l'ensemble résolvant où elle est en norme de taille significative.

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe et $P : \mathcal{D}(P) \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur fermé à domaine dense. L'ensemble résolvant

$$\rho(P) = \{z \in \mathbb{C}; P - z : \mathcal{D}(P) \rightarrow \mathcal{H} \text{ admet un inverse borné}\},$$

est un ensemble ouvert. Le spectre de P est le complémentaire de l'ensemble résolvant : $\sigma(P) = \mathbb{C} \setminus \rho(P)$. Si $z \in \rho(P)$, la norme de la résolvante $\delta = \|(P - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} > 0$ donne une première localisation du spectre de l'opérateur puisque le disque ouvert $D(z, 1/\delta)$ est alors nécessairement inclus dans l'ensemble résolvant. Si $\varepsilon > 0$, le ε -pseudospectre défini par TREFETHEN (1997, 1999) est donné par

$$(1) \quad \sigma_\varepsilon(P) = \sigma(P) \cup \left\{ z \in \rho(P) : \|(P - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} > \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Contrairement au spectre, les ensembles ε -pseudospectraux ne sont pas invariants par changement de norme sur \mathcal{H} . Ces sous-ensembles contiennent tous le spectre de l'opérateur et leur étude, qui se réduit à l'étude des lignes de niveau de la norme de la résolvante

$$z \in \rho(P) \mapsto \|(P - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

permet d'apprécier la stabilité du spectre de l'opérateur P par rapport à de petites perturbations. En effet, ROCH et SILBERMANN (1996) ont montré qu'un nombre complexe appartient au ε -pseudospectre d'un opérateur P si et seulement si ce point appartient au spectre d'une perturbation $P + Q$ de taille $\|Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \varepsilon$,

$$\sigma_\varepsilon(P) = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \\ \|Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \varepsilon}} \sigma(P + Q).$$

On comprend avec ce second point de vue l'intérêt d'étudier de tels sous-ensembles lorsque l'on cherche par exemple à déterminer numériquement les valeurs propres d'un opérateur. En effet, la discrétisation de l'opérateur et les inévitables erreurs d'arrondis qui se produisent lors des calculs numériques vont générer des perturbations de l'opérateur initial, ce qui induit en fin de compte que les algorithmes pour le calcul des valeurs propres vont déterminer des valeurs propres d'une perturbation de l'opérateur initial, i.e. une valeur d'un ε -pseudospectre, mais pas nécessairement une valeur spectrale. Il est donc important, lorsque l'on cherche à déterminer numériquement le spectre d'un opérateur, de comprendre dans quelle mesure ces ensembles ε -pseudospectraux contiennent plus ou moins largement le spectre de l'opérateur pour de petites valeurs du paramètre $\varepsilon > 0$.

L'étude du pseudospectre est triviale pour les opérateurs autoadjoints ou plus généralement pour les opérateurs normaux. En effet, le théorème spectral assure que les

ensembles ε -pseudospectraux de ces opérateurs sont simplement les ε -voisinages de leurs spectres

$$(2) \quad \sigma_\varepsilon(P) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(P)) < \varepsilon\}.$$

Les ensembles ε -pseudospectraux épousent donc très finement le spectre de l'opérateur lorsque ε est très petit. Cette description assure alors la stabilité spectrale des opérateurs autoadjoints sous de petites perturbations. Dans le cas non-autoadjoint et plus précisément dans le cas non-normal, seule l'inclusion suivante est satisfaite

$$(3) \quad \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(P)) < \varepsilon\} \subset \sigma_\varepsilon(P).$$

La norme de la résolvante peut alors prendre de très grandes valeurs dans des régions de l'ensemble résolvant lointaines du spectre de l'opérateur. Ceci explique la possible très forte sensibilité du spectre des opérateurs non-normaux sous l'effet de petites perturbations et constitue une difficulté importante pour l'étude des problèmes d'évolution associés à ces opérateurs non-normaux.

1.2. L'oscillateur harmonique non-autoadjoint

Un exemple particulièrement marquant pour illustrer ces phénomènes de possibles instabilités spectrales sous l'effet de petites perturbations est donné par l'oscillateur harmonique non-autoadjoint, aussi appelé opérateur de Davies,

$$(4) \quad H_\theta = D_x^2 + e^{i\theta} x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad D_x = i^{-1} \partial_x, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

muni du domaine

$$\mathcal{D}(H_\theta) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \forall k, \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq k + \ell \leq 2, x^k \partial_x^\ell u \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Mis en avant par DAVIES (1999a), cet opérateur d'expression très simple a particulièrement intrigué certains spécialistes de théorie spectrale au tournant du nouveau millénaire. Pour $\theta = 0$, l'opérateur est autoadjoint et se réduit simplement à l'oscillateur harmonique, tandis que pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, il est non-autoadjoint. Dans les deux cas, le spectre est composé uniquement de valeurs propres simples régulièrement distribuées le long de la demi-droite $e^{i\frac{\theta}{2}} \mathbb{R}_+$,

$$(5) \quad \sigma(H_\theta) = \{e^{i\frac{\theta}{2}}(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Le cas autoadjoint $\theta = 0$ correspond à un cas de stabilité spectrale puisque les ensembles ε -pseudospectraux sont simplement donnés par un ε -voisinage des valeurs propres (5). A contrario, DAVIES (1999a, Théorème 5) a montré que le cas $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ laissait apparaître de très fortes instabilités spectrales sous l'effet de petites perturbations puisque la résolvante de l'opérateur H_θ explose en norme

$$(6) \quad \forall 0 < \alpha < \theta, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \|(H_\theta - r e^{i\alpha})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = +\infty,$$

le long de toute demi-droite de sommet zéro incluse dans le secteur angulaire

$$\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg z < \theta\} \cup \{0\},$$

dans des régions possiblement très éloignées de la demi-droite $e^{i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}_+$ qui contient le spectre ; alors que la résolvante reste bornée et tend même vers zéro en norme en dehors du secteur angulaire fermé $\overline{\Sigma}_\theta$,

$$(7) \quad \forall \theta < \alpha < 2\pi, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \|(H_\theta - re^{i\alpha})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 0.$$

On peut s'essayer comme dans PRAVDA-STAROV (2008c) à retrouver numériquement cette très forte sensibilité spectrale de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint en effectuant une simulation numérique sur la discrétisation matricielle $(\langle H_{\frac{\pi}{4}}\Psi_i, \Psi_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq i, j \leq N}$, avec $N = 100$, où $(\Psi_j)_{j \geq 1}$ désigne la base hilbertienne formée par les fonctions de Hermite. Le résultat de cette simulation numérique est donné par la figure suivante où les valeurs propres calculées numériquement sont représentées par des points noirs alors que les courbes correspondent à des lignes de niveau de la norme de la résolvante en échelle logarithmique. On constate sur cette figure que les

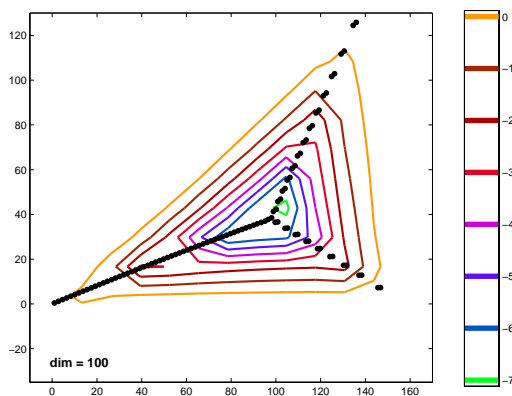


FIGURE 1. Calcul numérique de quelques lignes de niveau de la norme de la résolvante $\|(H_{\frac{\pi}{4}} - z)^{-1}\| = \varepsilon^{-1}$ de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint $H_{\frac{\pi}{4}}$. La colonne de droite indique les valeurs correspondantes de $\log_{10} \varepsilon$.

valeurs numériques obtenues pour les basses énergies, i.e. les petites valeurs propres, sont très proches des valeurs théoriques. Comme attendu, elles se répartissent régulièrement le long de la demi-droite $e^{i\frac{\pi}{8}}\mathbb{R}_+$. Cependant, cette bonne adéquation entre les valeurs propres théoriques et les valeurs propres calculées numériquement n'est plus du tout vérifiée pour les hautes énergies. Au delà d'un certain seuil, les valeurs propres numériques s'éloignent très fortement de la demi-droite $e^{i\frac{\pi}{8}}\mathbb{R}_+$. Il se produit alors des phénomènes de très fortes instabilités spectrales qui conduisent au calcul de valeurs propres aberrantes pour les hautes énergies de cet opérateur.

Ces résultats d'explosion (6) ou de contrôle (7) de la résolvante laissent augurer l'existence d'une géométrie sous-jacente distinguant différentes régions de l'ensemble résolvant dans lesquelles de très fortes instabilités spectrales peuvent, ou non, se développer sous l'effet de petites perturbations. La géométrie des ensembles pseudospectraux de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint a été ensuite étudiée plus avant par BOUTON (2002, Théorème 3.3) qui montre que la résolvante de l'oscillateur harmonique

non-autoadjoint explose en norme

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(H_\theta - (bt + e^{i\theta}t^p))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = +\infty,$$

le long de toutes les courbes du type $t \mapsto bt + e^{i\theta}t^p$, où $b > 0$ et $1/3 < p < 3$; alors qu'elle reste bornée sur deux demi-bandes parallèles aux demi-droites \mathbb{R}_+ et $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$,

$$(9) \quad \exists d > 0, \quad \sup_{\substack{t > 0, \\ 0 \leq b \leq d}} \|(H_\theta - (t + ib))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} + \sup_{\substack{t > 0, \\ 0 \leq b \leq d}} \|(H_\theta - e^{i\theta}(t - ib))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} < +\infty.$$

Ces bornes permettent de donner la localisation suivante des ensembles ε -pseudospectraux

$$(10) \quad \forall 0 < \delta < 1, \forall m \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$$\sigma_\varepsilon(H_\theta) \subset \bigcup_{n=0}^m D(e^{i\frac{\theta}{2}}(2n+1), \delta) \cup [e^{i\frac{\theta}{2}}(2m+3-\delta) + \bar{\Sigma}_\theta],$$

où $D(z, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Les sous-ensembles $(\sigma_\varepsilon(H_\theta))_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ sont donc contenus dans l'ensemble grisé apparaissant sur la figure suivante, où les valeurs propres sont indiquées par les symboles \diamond .

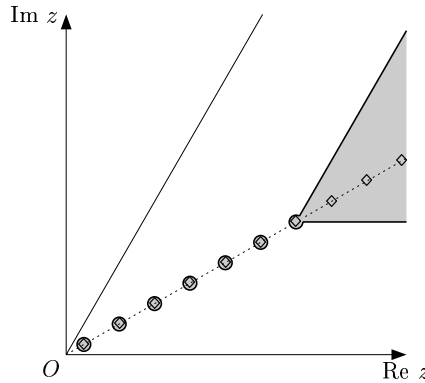


FIGURE 2. Localisation des ensembles ε -pseudospectraux de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint H_θ .

Le résultat d'explosion (8) a amené Boulton à conjecturer que les indices $p = 1/3$ et $p = 3$ apparaissant dans la définition des courbes $t \mapsto bt + e^{i\theta}t^p$ sont effectivement les indices critiques régissant la forme des ensembles ε -pseudospectraux. Si $0 < p < 1/3$, $0 < \delta < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $b_{m,p} > 0$ et $E > 0$ sont des constantes vérifiant

$$b_{m,p}E + e^{i\theta}E^p = e^{i\frac{\theta}{2}}(2m+1) \quad \text{et} \quad \forall t > E, \quad \arg z_t < \frac{\theta}{2},$$

où $z_t = b_{m,p}t + e^{i\theta}t^p$, Boulton a conjecturé la localisation suivante des ensembles ε -pseudospectraux : $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$(11) \quad \sigma_\varepsilon(H_\theta) \subset \bigcup_{n=0}^m D(e^{i\frac{\theta}{2}}(2n+1), \delta) \cup \left\{ |z_t|e^{i\alpha} : t \geq E, \arg z_t \leq \alpha \leq \arg(\bar{z}_t e^{i\theta}) \right\}.$$

Cette conjecture qui implique en particulier que la résolvante n'explose pas en norme le long des courbes du type $t \mapsto bt + e^{i\theta}t^p$, où $b > 0$, pour des valeurs du paramètre

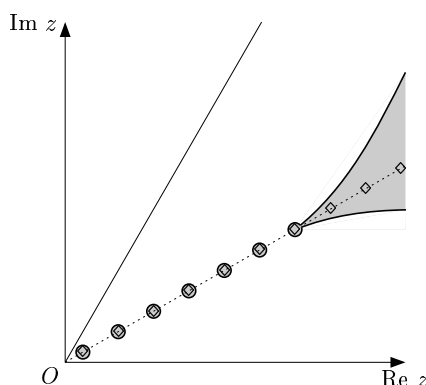


FIGURE 3. Forme des ensembles ε -pseudospectraux de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint.

$0 \leq p < 1/3$ ou $p > 1/3$, s'est avérée véridique. Elle a été démontrée dans PRAVDA-STAROV (2006a) comme conséquence de l'estimation de type sous-elliptique

$$(12) \quad \forall \Lambda > 0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \|D_x u + i\Lambda x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{5} \Lambda^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

pour le modèle sous-elliptique $D_t + it^2|D_x|$ qui est un exemple particulier d'opérateur de Mizohata–Nirenberg–Trèves (MIZOHATA, 1961/62; NIRENBERG et TREVES, 1963). Les indices critiques $p = 1/3$ et $p = 3$ sont directement expliqués par la puissance $1/3$ apparaissant dans l'estimation a priori (12). Comme nous l'expliquerons par la suite, cette conjecture peut également se déduire des travaux de DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI (2004, Théorème 1.4) qui ont permis de mettre au jour un cadre microlocal précis permettant d'expliquer pour des classes générales d'opérateurs pseudo-différentiels les phénomènes pseudospectraux que nous venons de présenter dans le cas très spécifique de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint.

1.3. Lien entre existence de quasimodes et non-résolubilité

Avant de présenter les résultats généraux établis par Dencker, Sjöstrand et Zworski, il est intéressant de mentionner que les résultats d'explosion (6) et (8) établis par Davies et Boulton sont conséquences de la construction de quasimodes par une méthode BKW. Cette construction explicite est spécifique à l'oscillateur harmonique non-autoadjoint. Une étape importante fut ensuite franchie lorsque Davies établit un résultat plus général d'existence de quasimodes pour des opérateurs de Schrödinger semi-classiques sur $L^2(\mathbb{R})$,

$$(13) \quad H_h f(x) = -h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + V_h(x) f(x),$$

où V_h désigne un potentiel régulier dépendant, ainsi que toutes ces dérivées, continûment du paramètre semi-classique h . On suppose que l'opérateur H_h est une extension fermée de l'opérateur défini sur l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$. DAVIES (1999b, Théorème 1) montre que

l'on peut construire un quasimode semi-classique, i.e. un quasi vecteur propre dans l'asymptotique semi-classique du type

$$(14) \quad \exists \delta > 0, \forall n \geq 1, \exists c_n > 0, \exists f_{h,n} \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \|f_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \forall 0 < h < \delta, \\ \|H_h f_{h,n} - z_h f_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c_n h^n,$$

en tout point $z_h = \eta^2 + V_h(a)$, où $\eta \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ sont des paramètres donnés vérifiant la condition

$$(15) \quad \text{Im } V'_0(a) \neq 0.$$

Ce résultat général d'existence de quasimodes semi-classiques s'applique en particulier à l'oscillateur harmonique non-autoadjoint semi-classique

$$P_h = (hD_x)^2 + e^{i\theta} x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad D_x = i^{-1} \partial_x, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

en tout point $z \in \Sigma_\theta \setminus \{0\}$, puisqu'il existe $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = \xi_0^2 + e^{i\theta} x_0^2$ et $\text{Im } V'(x_0) = 2x_0 \sin \theta \neq 0$, où $V(x) = e^{i\theta} x^2$, i.e.

$$(16) \quad \forall z \in \Sigma_\theta \setminus \{0\}, \exists (u_h)_{0 < h \leq 1} \in C_0^\infty(\mathbb{R})^{(0,1]}, \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \\ \|P_h u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En utilisant le changement de variable $y = h^{1/2}x$ où $h > 0$, les estimations (16) permettent de déduire

$$(17) \quad \forall z \in \Sigma_\theta \setminus \{0\}, \exists (v_h)_{0 < h \leq 1} \in C_0^\infty(\mathbb{R})^{(0,1]}, \|v_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \\ \|(D_x^2 + e^{i\theta} x^2 - zh^{-1})v_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, et de retrouver le résultat d'explosion de Davies (6). La condition (15) est essentielle à la construction BKW des quasimodes semi-classiques. Peu après cette avancée de Davies, ZWORSKI (2001) a proposé une interprétation décisive de la condition (15) en faisant le lien avec la question de la résolubilité des opérateurs différentiels étudiée par Hörmander au début des années 60 :

THÉORÈME 1.1 (HÖRMANDER, 1960). — Soient $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients C^∞ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ son symbole principal. Si l'équation

$$P(x, D_x)u = f,$$

admet une solution distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout second membre régulier $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors le crochet de Poisson

$$\{\bar{p}_m, p_m\}(x, \xi) = \left(\frac{\partial \bar{p}_m}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial x} - \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial \xi} \right)(x, \xi) = 0,$$

doit s'annuler pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ où le symbole principal s'annule $p_m(x, \xi) = 0$.

Lorsque cette condition d'annulation du crochet de Poisson n'est pas satisfaite, Hörmander a établi le résultat de non-résolubilité suivant :

THÉORÈME 1.2 (HÖRMANDER, 1960). — Soient $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients C^∞ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ son symbole principal. Si pour tout ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, il existe $x \in \omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$p_m(x, \xi) = 0, \quad \{\bar{p}_m, p_m\}(x, \xi) \neq 0,$$

alors il existe des fonctions régulières $f \in C^\infty(\Omega)$ telles que l'équation $P(x, D_x)u = f$ n'admet aucune solution distribution $u \in \mathcal{D}'(\omega)$ pour tout ouvert non vide $\omega \subset \Omega$.

Ces résultats de Hörmander faisaient suite à la découverte maintenant célèbre faite par LEWY (1957) d'une équation aux dérivées partielles linéaires à coefficients réguliers d'expression très simple n'admettant aucune solution distribution, même localement

$$L_0 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + i(x_1 + ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u = f,$$

pour certaines fonctions sources $f \in C^\infty$. Cet opérateur de Hans Lewy L_0 apparaît comme un opérateur de Cauchy–Riemann sur la frontière de l'ensemble pseudo-convexe

$$\{|z_1|^2 + 2\operatorname{Im} z_2 < 0\},$$

et on vérifie aisément que le symbole

$$p_1(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 - x_2 \xi_3 + i(\xi_2 + x_1 \xi_3),$$

de l'opérateur différentiel $-iL_0$ viole la condition de nullité du crochet de Poisson ci-dessus puisque

$$p_1 = 0, \quad \{\bar{p}_1, p_1\} = 2i\{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Im} p_1\} = 4i \neq 0,$$

en tout point $(x_1, x_2, x_3; x_2, -x_1, 1)$ avec $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Sous les hypothèses du théorème 1.2, notons que l'homogénéité du symbole principal p_m implique

$$p_m(x, -\xi) = (-1)^m p_m(x, \xi), \quad \{\bar{p}_m, p_m\}(x, -\xi) = -\{\bar{p}_m, p_m\}(x, \xi).$$

S'il existe $x_0 \in \Omega$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $p_m(x_0, \xi_0) = 0$ et $\{\bar{p}_m, p_m\}(x_0, \xi_0) \neq 0$, on peut donc trouver $\tilde{x}_0 \in \Omega$ et $\tilde{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$p_m(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}_0) = 0, \quad \frac{1}{2i} \{\bar{p}_m, p_m\}(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}_0) = \{\operatorname{Re} p_m, \operatorname{Im} p_m\}(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}_0) > 0.$$

La propriété de résolubilité locale en un point $x_0 \in \Omega$ d'un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté⁽¹⁾ P , i.e. l'existence d'un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ de x_0 tel que

$$\forall f \in C^\infty(\Omega), \exists u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad Pu = f \text{ dans } V,$$

implique que l'opérateur adjoint P^* satisfait des estimations a priori du type de LERNER (2010, Lemma 1.2.28) : $\exists V \subset \Omega$ un voisinage ouvert de x_0 , $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$,

$$\forall u \in C_0^\infty(V), \quad \|P^*u\|_{H^N} \geq C\|u\|_{H^{-N}}.$$

Un résultat de non-résolubilité peut alors se démontrer par la construction de quasimodes pour l'opérateur adjoint P^* . Le résultat de non-résolubilité établi par Hörmander (théorème 1.2) est conséquence de la construction pour l'opérateur adjoint de quasimodes microlocalisés en des points $x_0 \in \omega$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$p_m(x_0, \xi_0) = 0, \quad \frac{1}{2i} \{\bar{p}_m, p_m\}(x_0, \xi_0) = \{\operatorname{Re} p_m, \operatorname{Im} p_m\}(x_0, \xi_0) > 0.$$

En adaptant cette construction dans un cadre semi-classique, ZWORSKI (2001) a démontré un résultat d'existence de quasimodes semi-classiques pour des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques définis par la quantification standard

$$a(x, hD_x; h)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi; h)u(y) dy d\xi,$$

de symboles des classes

$$S^{m,k}(\mathbb{R}^{2n}) = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times (0, 1]) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \forall \ell \in \mathbb{N}, \exists C_{\ell, \alpha, \beta} > 0, \right. \\ \left. \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall 0 < h \leq 1, \quad |(hD_h)^\ell \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi; h)| \leq C_{\ell, \alpha, \beta} h^{-m} (1 + |\xi|)^{k-|\beta|} \right\},$$

où $m, k \in \mathbb{R}$. Pour l'énoncé suivant, on rappelle que le front d'onde semi-classique C^∞ d'une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ vérifiant $\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$, se caractérise par

$$(x_0, \xi_0) \notin WF_h(u_h) \Leftrightarrow \exists p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad p(x_0, \xi_0) \neq 0, \quad \|p(x, hD_x)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. La famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ est donc « négligeable » dans un voisinage de tout point du complémentaire du front d'onde semi-classique. $WF_h(u_h)$ est un sous-ensemble de l'espace des phases où se « concentre » la famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$. On dit qu'elle est microlocalisée dans ce sous-ensemble de l'espace des phases.

THÉORÈME 1.3 (ZWORSKI, 2001). — *Si $P(x, hD_x; h)$ est un opérateur pseudo-différentiel semi-classique défini par la quantification standard d'un symbole de la classe $S^{m,k}(\mathbb{R}^{2n})$, où $m, k \in \mathbb{R}$, dont le symbole principal p satisfait*

$$\exists (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad p(x_0, \xi_0) = 0, \quad \{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\}(x_0, \xi_0) < 0,$$

1. Un opérateur pseudo-différentiel est en général non-local et son action sur les fonctions ne préserve pas nécessairement la compacité du support. Un opérateur pseudo-différentiel est dit proprement supporté si pour tout compact K , il existe un autre compact K' tel que $\operatorname{supp} u \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} Pu \subset K'$ et $u = 0$ dans $K' \Rightarrow Pu = 0$ dans K .

il existe un quasimode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^{(0,1]}$, normalisé dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, dont le front d'onde semi-classique C^∞ est microlocalisé au point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$WF_h(u_h) = \{(x_0, \xi_0)\},$$

et tel que le front d'onde semi-classique C^∞ de la famille semi-classique $(P(x, hD_x; h)u_h)_{0 < h \leq 1}$ soit vide

$$WF_h(P(x, hD_x; h)u_h) = \emptyset.$$

Ce résultat généralise le résultat de DAVIES (1999b, Théorème 1). En effet, on remarque que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Im } V'(x_0) \neq 0$, où $V \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors le symbole de l'opérateur de Schrödinger

$$p(x, \xi) = \xi^2 + V(x) - z,$$

où $z = \xi_0^2 + V(x_0)$ avec $\xi_0 \in \mathbb{R}^*$, vérifie

$$p(x_0, \xi_0) = 0, \quad \{\text{Re } p, \text{Im } p\}(x_0, \xi_0) = 2\xi_0 \text{Im } V'(x_0) < 0,$$

quitte à changer ξ_0 en $-\xi_0$ selon le signe de $\text{Im } V'(x_0)$. Le théorème 1.3 appliqué à l'opérateur $((hD_x)^2 + V(x) - z)\chi(x)$, où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction égale à 1 au voisinage de x_0 , donne l'existence d'un quasimode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1} \in C_0^\infty(\mathbb{R})^{(0,1]}$ vérifiant

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \quad \|((hD_x)^2 + V(x) - z)u_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

2. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LE PSEUDOSPECTRE DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SEMI-CLASSIQUES

Après la mise en contexte précédente, nous pouvons maintenant présenter les résultats généraux sur le pseudospectre des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques démontrés par DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI (2004). Soit

$$C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}) = \{p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})\}.$$

On considère des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques

$$(18) \quad P_h = P^w(x, hD_x; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j p_j^w(x, hD_x),$$

où $p_j^w(x, hD_x)$ désigne la quantification de Weyl d'un symbole $p_j \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ indépendant du paramètre semi-classique

$$(19) \quad p_j^w(x, hD_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} p_j\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Le développement semi-classique (18) dans la classe de symboles $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ signifie que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $0 < h_{N,\alpha,\beta} \leq 1$ et $C_{N,\alpha,\beta} > 0$ telles que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $0 < h \leq h_{N,\alpha,\beta}$,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(P(x, \xi; h) - \sum_{j=0}^{N-1} h^j p_j(x, \xi) \right) \right| \leq C_{N,\alpha,\beta} h^N.$$

Le théorème de Calderón–Vaillancourt assure que les opérateurs $p_j^w(x, hD_x)$ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le symbole $p_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est le symbole principal de l'opérateur P_h . On note $\Sigma(p_0)$ son image numérique

$$\Sigma(p_0) = \overline{p_0(\mathbb{R}^{2n})} \subset \mathbb{C}.$$

Comme le symbole principal p_0 est elliptique en tout point du complémentaire de son image numérique $z \notin \Sigma(p_0)$, les régions du plan complexe où les estimations de la résolvante $(P_h - z)^{-1}$ sont a priori non triviales à établir sont à chercher dans l'image numérique du symbole principal $\Sigma(p_0)$.

Dencker, Sjöstrand et Zworski définissent le pseudospectre semi-classique de l'opérateur P_h comme le sous-ensemble suivant de l'image numérique du symbole principal

$$\Lambda(p_0) = \overline{p_0(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : \{p_0, \bar{p}_0\}(x, \xi) \neq 0\})} \subset \Sigma(p_0).$$

Notons que la non-annulation du crochet de Poisson $\{p_0, \bar{p}_0\}(x_0, \xi_0) \neq 0$ est intimement lié à une propriété de non-normalité de l'opérateur P_h puisque le symbole principal du commutateur $h^{-1}[P_h, P_h^*]$ est donné par $i^{-1}\{p_0, \bar{p}_0\}$. On considère également les sous-ensembles suivants du pseudospectre semi-classique

$$\Lambda_\pm(p_0) = \{p_0(x, \xi) : \pm \{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\}(x, \xi) > 0\} \subset p_0(\mathbb{R}^{2n}),$$

de sorte que

$$\Lambda(p_0) = \overline{\Lambda_+(p_0) \cup \Lambda_-(p_0)},$$

et enfin l'ensemble des points limites de p_0 à l'infini

$$\Sigma_\infty(p_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists (x_j, \xi_j) \rightarrow +\infty, z = \lim_{j \rightarrow +\infty} p_0(x_j, \xi_j) \right\}.$$

2.1. Résultats généraux d'existence de quasimodes semi-classiques

Le résultat suivant montre que l'on peut construire un quasimode semi-classique en un point arbitrairement proche de tout point non-limite du pseudospectre semi-classique :

THÉORÈME 2.1 (DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI, 2004, Théorème 1.2)

Soit $p_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, où $n \geq 2$. On suppose que l'ensemble $p_0^{-1}(z)$ est compact pour un ensemble dense de nombres complexes $z \in \mathbb{C}$. Si P_h est un opérateur pseudo-différentiel semi-classique (18) de symbole principal p_0 , alors l'inclusion suivante

$$(20) \quad \Lambda(p_0) \setminus \Sigma_\infty(p_0) \subset \overline{\Lambda_-(p_0)},$$

est satisfaite, et pour tout $z \in \Lambda_-(p_0)$, il existe un quasimode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1} \in L^2(\mathbb{R}^n)^{(0,1]}$ vérifiant

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \|(P_h - z)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. De plus, le quasimode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ est microlocalisé en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $p_0(x_0, \xi_0) = z$, i.e. $WF_h(u_h) = \{(x_0, \xi_0)\}$; et pour tout compact $K \Subset \Lambda(p_0)$, le résultat précédent est vérifié uniformément sur K . Dans le cas $n = 1$, les conclusions précédentes restent vraies si toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\infty(p_0)$ est d'intersection non vide avec $\mathbb{C} \setminus \Lambda(p_0)$.

Dans le cas où les symboles sont analytiques, on peut remplacer l'estimation en $\mathcal{O}(h^\infty)$ par une estimation en $\mathcal{O}(e^{-\frac{1}{Ch}})$, où $C > 0$, lorsque $h \rightarrow 0^+$. Notons que le résultat du théorème précédent n'affirme pas que l'on puisse construire un quasimode semi-classique en tout point du pseudospectre semi-classique mais seulement qu'il existe arbitrairement proche de tout point non-limite du pseudospectre semi-classique un point de l'ensemble $\Lambda_-(p_0)$ où la construction de quasimodes semi-classiques est possible. Le résultat d'existence de quasimodes repose sur une construction BKW identique à celle donnée par le théorème 1.3. Nous reviendrons plus avant sur cette construction dans un cadre plus général par la suite. Concernant les propriétés microlocales de l'opérateur P_h au voisinage de points de l'espace des phases $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$, où le crochet de Poisson

$$\{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\}(x_0, \xi_0) \neq 0,$$

est non nul, soulignons dès à présent qu'elles sont très différentes selon le signe de ce crochet de Poisson.

Concernant la démonstration de l'inclusion (20) dans le cas de dimension $n \geq 2$, elle repose sur des résultats de MELIN et SJÖSTRAND (2002) qui ont montré que si les différentielles $d\operatorname{Re} p_0$ et $d\operatorname{Im} p_0$ sont linéairement indépendantes sur $p_0^{-1}(z)$, alors la mesure de Liouville $\lambda_{p_0,z}$ sur $p_0^{-1}(z)$, i.e. la $2n - 2$ forme sur $p_0^{-1}(z)$ vérifiant

$$\lambda_{p_0,z} \wedge d\operatorname{Re} p_0 \wedge d\operatorname{Im} p_0 = \frac{\sigma^n}{n!},$$

multipliée par le crochet de Poisson $\{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\}$ est égale à un facteur près à la restriction à $p_0^{-1}(z)$ de σ^{n-1} ,

$$(21) \quad \{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\} \lambda_{p_0,z} = \frac{\sigma^{n-1}}{(n-1)!} \Big|_{p_0^{-1}(z)},$$

où σ désigne la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^{2n} . Comme la forme (21) fermée, il s'ensuit que si Γ est une composante connexe compacte de $p_0^{-1}(z)$, alors la moyenne de $\{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\}$ sur Γ par rapport à la mesure de Liouville $\lambda_{p_0,z}$ est nécessairement nulle

$$\int_{\Gamma} \{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\} \lambda_{p_0,z} = 0.$$

On en déduit que s'il existe un point de Γ où le crochet de Poisson est non nul alors il existe nécessairement un point $(x_0, \xi_0) \in \Gamma$ où le crochet de Poisson

$$\{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\}(x_0, \xi_0) < 0,$$

est strictement négatif. Dans le cas unidimensionnel et sous les hypothèses supplémentaires indiquées dans l'énoncé du théorème 2.1, des considérations topologiques permettent d'obtenir le même résultat. Le théorème de Sard assure ensuite que les différentielles $d\operatorname{Re} p_0$ et $d\operatorname{Im} p_0$ sont linéairement indépendantes sur $p_0^{-1}(z)$ pour tout z dans un ensemble ouvert dense $\Omega \subset \Lambda(p_0) \setminus \Sigma_\infty(p_0)$.

Dans les théorèmes 1.3 et 2.1, la condition fondamentale permettant la construction de quasimodes semi-classiques est l'existence d'un crochet de Poisson strictement négatif

$$\exists(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad p_0(x_0, \xi_0) = 0, \quad \{\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Im} p_0\}(x_0, \xi_0) < 0.$$

Cette condition suffisante n'est en fait pas nécessaire. Ce constat peut se faire en reprenant l'exemple des opérateurs de Schrödinger semi-classiques (13) pour lesquels PRAVDA-STAROV (2004) a montré que la construction des quasimodes semi-classiques (14) pouvait se faire plus généralement en tout point $z_h = \eta^2 + V_h(a)$, où $\eta \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ vérifient la condition

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall j \leq 2p, j \neq 0, \quad \operatorname{Im} V_0^{(j)}(a) = 0, \quad \operatorname{Im} V_0^{(2p+1)}(a) \neq 0.$$

Dans le cas où le potentiel V ne dépend pas du paramètre semi-classique et si sa partie imaginaire $\operatorname{Im} V$ est une fonction réelle analytique, le résultat précédent implique l'existence de quasimodes semi-classiques en tout point $z = \eta^2 + V(a)$, où $\eta \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, si la fonction

$$x \mapsto \operatorname{Im} V(x) - \operatorname{Im} V(a),$$

change de signe au point a . Cette condition de changement de signe et le lien entre l'existence de quasimodes semi-classiques pour un opérateur P_h et des propriétés de non-résolubilité de l'opérateur adjoint P_h^* mis en avant par Zworski ont naturellement amené à étudier le lien entre existence de quasimodes semi-classiques et la condition de Nirenberg-Trèves, également dénommée condition (Ψ) que nous énonçons maintenant :

Un symbole $p \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times (\mathbb{R}_\xi^n \setminus \{0\}), \mathbb{C})$ homogène de degré m par rapport à la variable de fréquence satisfait la condition (Ψ) dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n si la partie imaginaire $\operatorname{Im}(ap)$ ne change pas de signe en passant d'une valeur strictement négative à une valeur strictement positive le long des bicaractéristiques orientées de la partie réelle $\operatorname{Re}(ap)$ dans $\dot{T}^*\Omega = \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, pour toute fonction $a \in C^\infty(\dot{T}^*\Omega, \mathbb{C})$ ne s'annulant pas. Les bicaractéristiques orientées sont les courbes données par le flot positif du champ de vecteurs hamiltonien

$$H_{\operatorname{Re}(ap)} = \frac{\partial \operatorname{Re}(ap)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Re}(ap)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi},$$

contenues dans l'ensemble $(\operatorname{Re}(ap))^{-1}(0)$. La condition (Ψ) est invariante par multiplication du symbole p par une fonction régulière ne s'annulant pas. Le lemme 26.4.10

de HÖRMANDER (1985b) montre qu'il suffit qu'elle soit satisfaite pour une fonction $a \in C^\infty(\dot{T}^*\Omega, \mathbb{C})$ telle que $a \neq 0$ et $H_{\text{Re}(ap)} \neq 0$ ne s'annulent pas sur $\dot{T}^*\Omega$.

NIRENBERG et TRÈVES (1970a,b) ont conjecturé que cette condition géométrique pour le symbole principal était une condition nécessaire et suffisante pour la résolubilité locale de tout opérateur pseudo-différentiel de type principal. La nécessité de la condition (Ψ) pour la résolubilité locale a été démontrée par MOYER (1978) en dimension 2 et par HÖRMANDER (1981) dans le cas général, voir aussi HÖRMANDER (1985b). Dans la catégorie analytique, le caractère suffisant de la condition (Ψ) pour la résolubilité des opérateurs micro-différentiels agissant sur des micro-fonctions a été démontré par TRÉPREAU (1984), voir aussi HÖRMANDER (1994, Chapter VII). Dans le cadre C^∞ , le caractère suffisant de la condition (Ψ) pour la résolubilité des opérateurs pseudo-différentiels en dimension 2 a été démontré par LERNER (1988). DENCKER (2004, 2006) a ensuite démontré la conjecture de Nirenberg–Trèves en démontrant une estimation a priori pour l'opérateur adjoint avec perte de deux dérivées par rapport au cas elliptique, puis avec une perte de $3/2 + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un paramètre strictement positif arbitraire. Ce résultat fut ensuite raffiné par LERNER (2006, 2007) qui obtint le même résultat en démontrant une estimation a priori pour l'opérateur adjoint avec perte de seulement $3/2$ dérivées.

Les démonstrations de Moyer et Hörmander de la nécessité de la condition (Ψ) pour la résolubilité locale se basent sur la construction de quasimodes pour l'opérateur adjoint. Concernant la construction de quasimodes semi-classiques pour un opérateur pseudo-différentiel semi-classique de type principal P_h , on s'intéresse donc à des violations de la condition $(\bar{\Psi})$, la condition adjointe de la condition (Ψ) qui s'énonce comme suit pour des symboles réguliers non nécessairement homogènes dans la variable de fréquence :

Une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ vérifie la condition $(\bar{\Psi})$ dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n s'il n'existe pas de fonction $q \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que la partie imaginaire $\text{Im}(qp)$ de la fonction qp change de signe d'une valeur strictement positive vers une valeur strictement négative le long d'une bicaractéristique orientée du symbole $\text{Re}(qp)$ incluse dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$ sur laquelle la fonction q ne s'annule pas.

Dans le cas où il existe un point de l'espace des phases $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $p_0(x_0, \xi_0) = 0$ et $\{\text{Re } p_0, \text{Im } p_0\}(x_0, \xi_0) < 0$, la partie imaginaire du symbole $\text{Im } p_0$ change de signe du $+$ vers le $-$ à l'ordre 1 en 0,

$$\left. \frac{d}{dt} \left((\text{Im } p_0)(\gamma(t)) \right) \right|_{t=0} = (H_{\text{Re } p_0} \text{Im } p_0)(x_0, \xi_0) = \{\text{Re } p_0, \text{Im } p_0\}(x_0, \xi_0) < 0,$$

le long de la bicaractéristique orientée

$$(22) \quad \gamma'(t) = H_{\text{Re } p_0}(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = (x_0, \xi_0),$$

associée à la partie réelle $\text{Re } p_0$ passant par $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Le symbole p_0 viole alors la condition $(\bar{\Psi})$ dans un voisinage ouvert de x_0 dans \mathbb{R}^n . A contrario, l'existence d'un point de l'espace des phases $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $p_0(x_0, \xi_0) = 0$ et $\{\text{Re } p_0, \text{Im } p_0\}(x_0, \xi_0) > 0$ impliquant un changement de signe du $-$ vers le $+$ à l'ordre 1 en 0 de $\text{Im } p_0$ le long de la bicaractéristique orientée (22), n'induit pas une violation de la condition $(\bar{\Psi})$. Ceci

explique que la construction de quasimodes semi-classiques n'est pas nécessairement possible en un point $z \in \Lambda_+(p_0)$ du pseudospectre semi-classique.

La construction de quasimodes de Moyer et Hörmander a pu être adaptée dans un cadre semi-classique (PRAVDA-STAROV, 2006b), où le résultat suivant d'existence de quasimodes semi-classiques est établi. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $P(x, \xi; h)$, où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $n \geq 2$, un symbole semi-classique admettant un développement semi-classique

$$(23) \quad P(x, \xi; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j p_j(x, \xi),$$

dans la classe

$$S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2) = \left\{ p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta} > 0, \right. \\ \left. \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle(x, \xi)\rangle^m \right\},$$

où $m \in \mathbb{R}_+$ et $\langle(x, \xi)\rangle = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, i.e. $p_j \in S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe des constantes $0 < h_{N, \alpha, \beta} \leq 1$ et $C_{N, \alpha, \beta} > 0$ telles que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $0 < h \leq h_{N, \alpha, \beta}$,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(P(x, \xi; h) - \sum_{j=0}^{N-1} h^j p_j(x, \xi) \right) \right| \leq C_{N, \alpha, \beta} h^N \langle(x, \xi)\rangle^m.$$

On suppose que la partie principale $p_0 - z$ du symbole $P - z$ viole la condition $(\overline{\Psi})$, i.e. il existe une fonction $q_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ et une courbe bicaractéristique $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0, 0)\}$ de la partie réelle $\text{Re}(q_0(p_0 - z))$ du symbole $q_0(p_0 - z)$,

$$\forall t \in [a, b], \quad \gamma'(t) = H_{\text{Re}(q_0(p_0 - z))}(\gamma(t)) \quad \text{et} \quad \text{Re}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] = 0,$$

où $a < b$, telles que $q_0(\gamma(t)) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et

$$(24) \quad \text{Im}[q_0(\gamma(a))(p_0(\gamma(a)) - z)] > 0 > \text{Im}[q_0(\gamma(b))(p_0(\gamma(b)) - z)].$$

On considère la quantité

$$(25) \quad L_0 = \inf \left\{ t - s : s, t \in [a, b], a \leq s < t \leq b, \right. \\ \left. \text{Im}[q_0(\gamma(s))(p_0(\gamma(s)) - z)] > 0 > \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] \right\},$$

vérifiant $0 \leq L_0 \leq b - a$. On peut alors trouver $(a_0, b_0) \in]a, b[^2$ tel que $a_0 \leq b_0$ et $L_0 = b_0 - a_0$. Dans le cas où $L_0 > 0$, on peut choisir ce couple tel que $a_0 < b_0$ et pour tout voisinage ouvert V_{a_0} de a_0 et V_{b_0} de b_0 ,

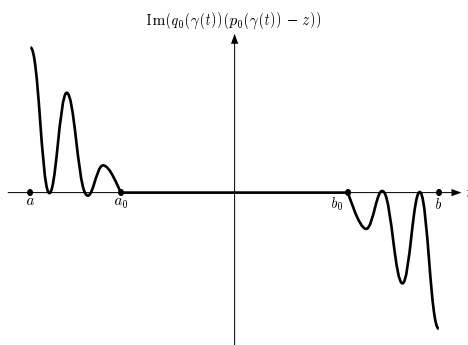
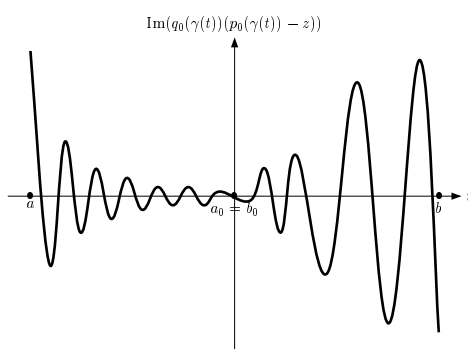
$$\forall t \in [a_0, b_0], \quad \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] = 0,$$

$$V_{a_0} \cap]-\infty, a_0[\cap \left\{ t \in [a, b] : \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] > 0 \right\} \neq \emptyset,$$

$$V_{b_0} \cap]b_0, +\infty[\cap \left\{ t \in [a, b] : \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] < 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Dans le cas où $L_0 = 0$, on peut choisir le point $a_0 = b_0 \in]a, b[$ tel que

$$\text{Im}[q_0(\gamma(a_0))(p_0(\gamma(a_0)) - z)] = 0$$

FIGURE 4. Un exemple de changement de signe pour lequel $a_0 < b_0$.FIGURE 5. Un exemple de changement de signe pour lequel $a_0 = b_0$.

et tel que pour tout voisinage ouvert V_{a_0} du point a_0 dans \mathbb{R} , il existe $a_1, b_1 \in V_{a_0}$ tels que $a_1 < a_0 < b_1$ et

$$\operatorname{Im}\left[q_0(\gamma(a_1))(p_0(\gamma(a_1)) - z)\right] > 0 > \operatorname{Im}\left[q_0(\gamma(b_1))(p_0(\gamma(b_1)) - z)\right].$$

Notons que l'hypothèse de changement de signe implique en particulier que le symbole $q_0(p_0 - z)$ est de type principal sur $\gamma([a_0, b_0])$,

$$q_0(p_0 - z) = 0 \implies H_{\operatorname{Re}(q_0(p_0 - z))} \neq 0.$$

On a le résultat d'existence de quasimodes semi-classiques suivant :

THÉORÈME 2.2 (PRAVDA-STAROV, 2006b). — *Sous les hypothèses (23) et (24), pour tout voisinage ouvert V de l'arc de courbe compact $\gamma([a_0, b_0])$ dans \mathbb{R}^{2n} et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $0 < h_0 \leq 1$ et $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ une famille semi-classique de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tels que*

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad WF_h(u_h) \subset \overline{V}, \quad \|P^w(x, hD_x; h)u_h - zu_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(h^N),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

La démonstration de ce résultat est une adaptation de la démonstration donnée par HÖRMANDER (1985b, Chapter 26). Cette démonstration distingue deux cas selon que le

changement de signe de valeurs strictement positives vers des valeurs strictement négatives se fait à un ordre fini ou infini. Dans le cas d'une annulation à un ordre fini et après des réductions symplectiques qui reviennent à conjuguer l'opérateur par des opérateurs de Fourier intégraux elliptiques, la partie principale de l'opérateur $P^w(x, hD_x; h)$ se réduit microlocalement à l'opérateur modèle

$$(hD_{x_1}) - ix_1^{2k+1}(hD_{x_n}),$$

où $k \in \mathbb{N}$, pour lequel on peut construire explicitement une fonction propre

$$\forall 0 < h \leq 1, \quad u_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \left[(hD_{x_1}) - ix_1^{2k+1}(hD_{x_n}) \right] u_h = 0,$$

donnée par

$$u_h(x) = ch^{-\frac{1}{2k+2} - \frac{n}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\theta}{h} \left(\frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n \right)} \Psi(\theta) d\theta,$$

où $x = (x_1, x'', x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}$, avec $c > 0$ une constante de normalisation et $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\Psi = 1$ dans un voisinage de 1 et $\text{supp } \Psi \subset [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, où $0 < \varepsilon < 1/2$. Le cas le plus difficile correspond au cas où le changement de signe du $+$ vers le $-$ se fait à un ordre infini. Contrairement au cas d'une annulation à un ordre fini, la quantité L_0 définie en (25) peut alors être strictement positive, ce qui exige en particulier une construction semi-globale du quasimode semi-classique. Dans le cas d'une annulation à un ordre infini et après réductions symplectiques (voir proposition 3.1 en appendice), la partie principale de l'opérateur $P^w(x, hD_x; h)$ se réduit microlocalement à un symbole modèle du type

$$\xi_1 + if(x, \xi'),$$

avec $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, sur un voisinage ouvert de l'ensemble

$$\Gamma = \{(x_1, 0'; 0, \xi'_0) : a_0 \leq x_1 \leq b_0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad 0' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\},$$

où f est une fonction C^∞ à valeurs réelles, indépendante de la variable ξ_1 qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) f s'annule sur Γ et dans le cas où $a_0 < b_0$, l'annulation de f sur le segment Γ se fait à un ordre infini
- (ii) Pour tout voisinage ouvert convexe dans la direction x_1 de Γ , on peut trouver un intervalle dans la direction x_1 tel que f change de signe du $+$ vers le $-$ lorsque la coordonnée x_1 croît.

On utilise alors une construction de type BKW pour le quasimode semi-classique

$$(26) \quad u_h(x) = e^{\frac{i}{h}\omega(x)} \sum_{j=0}^M \phi_j(x) h^j.$$

Le point clé de cette démonstration est la très belle construction due à Moyer en dimension 2 et à Hörmander en dimension supérieure d'une fonction de phase complexe ω

satisfaisant de manière approchée l'équation eikonale

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + if\left(x_1, x', \frac{\partial \omega}{\partial x'}\right) = 0.$$

Par commodité, les variables sont renommées en notant t la variable unidimensionnelle x_1 et x la variable $(n-1)$ -dimensionnelle x' . Avec ces nouvelles notations, on cherche à construire une fonction de phase complexe de la forme

$$(27) \quad \omega(t, x) = \omega_0(t) + (x - y(t)) \cdot \eta(t) + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq M} \omega_\alpha(t) \frac{(x - y(t))^\alpha}{|\alpha|!},$$

où $M \geq 3$, vérifiant l'équation eikonale au sens approché suivant :

$$(28) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, x) + i \sum_{|\beta| \leq M} \frac{\partial^\beta f}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(t, x) - \eta(t)\right)^\beta}{\beta!} = \mathcal{O}(|x - y(t)|^{M+1}),$$

telle que la partie imaginaire $\text{Im } \omega$ soit positive et telle que pour tout t fixé, la fonction $x \mapsto \text{Im } \omega(t, x)$ soit strictement convexe avec un minimum nul en un point $y(t)$ décrivant une courbe régulière. HÖRMANDER (1983, lemme 26.4.14) montre que l'on peut construire

(i) Une courbe régulière $t \in [a', b'] \mapsto (t, y(t); 0, \eta(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, où $a' < b'$, arbitrairement proche du segment Γ

(ii) Une fonction $\omega_0 \in C^\infty([a', b'], \mathbb{C})$ vérifiant $\text{Im } \omega_0 \geq 0$ sur $[a', b']$,

$$\text{Im } \omega_0(a') > 0, \quad \text{Im } \omega_0(b') > 0, \quad \exists c' \in]a', b'[, \quad \text{Im } \omega_0(c') = 0$$

(iii) Des fonctions $\omega_\alpha \in C^\infty([a', b'], \mathbb{C})$, où $2 \leq |\alpha| \leq M$, telles que la matrice $(\text{Im } \omega_{j,k}(t) - \frac{\delta_{j,k}}{2})_{1 \leq j, k \leq n-1}$ soit définie positive pour tout $a' \leq t \leq b'$

telles que la fonction de phase complexe (27) satisfait l'équation eikonale au sens approché (28) et

$$\exists c > 0, \forall t \in [a', b'], \forall x \in V_0, \quad \text{Im } \omega(t, x) \geq c|x - y(t)|^2,$$

où V_0 est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{n-1} . Il est à noter que bien qu'arbitrairement proche de la bicaractéristique associée à la partie réelle sur laquelle se fait le changement de signe de la partie imaginaire du symbole $\xi_1 + if(x, \xi')$, la courbe $t \in [a', b'] \mapsto (t, y(t); 0, \eta(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ n'est pas a priori une courbe bicaractéristique associée à la partie réelle du symbole $\xi_1 + if(x, \xi')$. L'hypothèse cruciale de changement de signe du $+$ vers $-$ permet d'assurer que la fonction $t \mapsto f(t, y(t), \eta(t))$ change également de signe du $+$ vers le $-$ sur $[a', b']$. Comme le terme principal ω_0 apparaissant dans la construction de la fonction de phase (27) est solution de l'équation différentielle

$$\omega'_0(t) = y'(t) \cdot \eta(t) - if(t, y(t), \eta(t)),$$

l'équation différentielle satisfaite par la partie imaginaire

$$\frac{d\text{Im } \omega_0(t)}{dt} = -f(t, y(t), \eta(t)),$$

et l'hypothèse de changement de signe ci-dessus imposent que la fonction $\text{Im } \omega_0$ commence par décroître et finit par croître sur l'intervalle $[a', b']$. Il s'ensuit que le minimum de cette fonction est atteint en un point intérieur de l'intervalle $[a', b']$. On peut ainsi normaliser ce minimum à zéro

$$\text{Im } \omega_0(c') = 0,$$

pour un point $c' \in]a', b'[$, et assurer que la partie imaginaire $\text{Im } \omega_0$ est strictement positive aux extrémités de l'intervalle $[a', b']$,

$$\text{Im } \omega_0(a') > 0, \quad \text{Im } \omega_0(b') > 0.$$

Une fois la fonction de phase complexe construite, on peut alors procéder à la construction BKW en déterminant successivement les fonctions amplitudes $(\phi_j)_{0 \leq j \leq M}$ dans (26). Il faut alors comprendre l'action des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques sur les fonctions du type $\phi e^{\frac{i}{h}\omega}$. Pour ce faire, on utilise une adaptation de HÖRMANDER (1985b, Lemme 26.4.16) qui montre que si $q(x, \xi; h) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n-2})$ uniformément par rapport au paramètre semi-classique $0 < h \leq 1$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\tilde{\omega}$ est une fonction C^∞ sur un voisinage de $\text{supp } \phi$ dans \mathbb{R}^{n-1} ; les fonctions ϕ et $\tilde{\omega}$ étant supposées indépendantes du paramètre semi-classique et vérifiant

$$(29) \quad \begin{cases} \forall x \in \text{supp } \phi, \quad x \neq y, \quad \text{Im } \tilde{\omega}(x) > 0, \quad \text{Im } \tilde{\omega}(y) = 0, \\ \forall x \in \text{supp } \phi, \quad \tilde{\omega}'(x) \neq 0, \quad \tilde{\omega}'(y) = \eta \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \\ \text{la forme quadratique } \text{Im } \tilde{\omega}''(y) \text{ est définie positive,} \end{cases}$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'estimation semi-classique

$$q(x, hD_x; h)(\phi e^{\frac{i}{h}\tilde{\omega}}) = \sum_{|\beta| < k} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta; h) \frac{(hD_x - \eta)^\beta}{\beta!} (\phi e^{\frac{i}{h}\tilde{\omega}}) + \mathcal{O}_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}(h^{\frac{k}{2}}),$$

est satisfaite lorsque $h \rightarrow 0^+$. On peut alors choisir les fonctions amplitudes pour obtenir un quasimode semi-classique satisfaisant

$$\|P^w(x, hD_x; h)u_h - zu_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(h^N),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

En utilisant ce résultat d'existence de quasimodes sous l'hypothèse d'une violation de la condition $(\bar{\Psi})$, on peut alors démontrer que les phénomènes de très fortes instabilités spectrales, mis en évidence par Davies, sous l'effet de petites perturbations pour l'oscillateur harmonique non-autoadjoint ne lui sont pas spécifiques. En effet, si on considère plus généralement la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques

$$q^w(x, D_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi,$$

définis en quantification de Weyl par des symboles quadratiques à valeurs complexes $q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant à la condition d'ellipticité

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad q(x, \xi) = 0 \Rightarrow (x, \xi) = 0.$$

Sous l'hypothèse supplémentaire ⁽²⁾ $\Sigma(q) = \overline{q(\mathbb{R}^{2n})} \neq \mathbb{C}$ dans le cas $n = 1$, le spectre de ces opérateurs est composé uniquement de valeurs propres de multiplicités algébriques finies dont la description explicite a été donnée par SJÖSTRAND (1974, Théorème 3.5),

$$(30) \quad \sigma(q^w(x, D_x)) = \left\{ \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(F), \\ -i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}}} (r_\lambda + 2k_\lambda)(-i\lambda) : k_\lambda \in \mathbb{N} \right\},$$

où r_λ désigne la dimension du sous-espace caractéristique associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma(F)$ et $F \in M_{2n}(\mathbb{C})$ est l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q uniquement déterminée par l'identité

$$(31) \quad q(X; Y) = \sigma(X, FY), \quad X = (x, \xi), Y = (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n},$$

avec $q(\cdot; \cdot)$ la forme polaire associée à q et σ la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^{2n} . La symétrie de la forme polaire et l'anti-symétrie de la forme symplectique induisent l'anti-symétrie de toute application hamiltonienne par rapport à la forme symplectique

$$(32) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \sigma(X, FY) = -\sigma(FX, Y).$$

Lorsque l'opérateur quadratique $q^w(x, D_x)$ muni du domaine

$$B = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : x^\alpha \partial_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n), \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| + |\beta| \leq 2\},$$

est normal, les ensembles ε -pseudospectraux sont simplement donnés par un ε -voisinage des valeurs propres (30). A contrario, dès qu'un opérateur différentiel quadratique elliptique est non-normal, on montre (PRAVDA-STAROV, 2008b) que le symbole quadratique q viole la condition $(\bar{\Psi})$ en tout point de $\dot{\Sigma}(q)$. Le théorème 2.2 assure alors l'existence de quasimodes semi-classiques en tout point de l'intérieur de l'image numérique

$$(33) \quad \forall z \in \dot{\Sigma}(q), \exists (u_h)_{0 < h \leq h_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{(0, h_0]}, \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \\ \|q^w(x, hD_x)u_h - zu_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En utilisant le changement de variable $y = h^{1/2}x$ où $h > 0$, les estimations (33) permettent de déduire les estimations

$$(34) \quad \forall z \in \dot{\Sigma}(q), \exists (v_h)_{0 < h \leq h_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{(0, h_0]}, \|v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \\ \|(q^w(x, D_x) - zh^{-1})v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, généralisant le résultat d'explosion de Davies (6). Les hautes énergies de tout opérateur quadratique elliptique non-normal sont donc très instables sous l'effet de petites perturbations.

2. Cette hypothèse est toujours satisfaite si $n \geq 2$.

2.2. Estimations de résolvante à la frontière de l'image numérique

Après avoir donné des conditions pour l'existence de quasimodes semi-classiques dans l'image numérique du symbole principal $\Sigma(p_0)$, Dencker, Sjöstrand et Zworski se sont intéressés au comportement de la résolvante à la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(p_0)$ en des points de type fini pour le symbole principal p_0 .

Afin de rappeler la définition de cette propriété de finitude, on utilise les notations introduites par HÖRMANDER (1985b, Chapter 27) en notant pour tout symbole régulier à valeurs complexes $p = p_1 + ip_2$, où p_1 et p_2 désignent respectivement sa partie réelle et sa partie imaginaire, le crochet de Poisson itéré

$$(35) \quad p_I = H_{p_{i_1}} H_{p_{i_2}} \cdots H_{p_{i_{k-1}}} p_{i_k} = \{p_{i_1}, \{p_{i_2}, \dots \{p_{i_{k-1}}, p_{i_k}\}\}\},$$

avec $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, où $|I| = k$ désigne l'ordre du crochet de Poisson itéré. On dit que $z_0 \in \Sigma(p) \setminus \Sigma_\infty(p)$ est de *type fini* pour le symbole p si

$$\forall (x_0, \xi_0) \in p^{-1}(z_0), \exists k \geq 2, \exists I \subset \{1, 2\}^k, \quad p_I(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

L'*ordre* du symbole p au point de l'espace des phases $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ est défini par

$$k(x_0, \xi_0) = \max\{j \geq 2 : \forall 2 \leq |I| \leq j, \quad p_I(x_0, \xi_0) = 0\}.$$

L'*ordre* de z_0 est alors défini comme le maximum de l'ordre de p en tout point $(x_0, \xi_0) \in p^{-1}(z_0)$. Si la condition $\{p_1, p_2\} \geq 0$ est vérifiée lorsque $p_1 = p_2 = 0$, les caractérisations équivalentes suivantes sont données dans HÖRMANDER (1985b, Corollaire 27.2.4) pour $k \in \mathbb{N}$:

- (i) $k < k(x_0, \xi_0)$,
- (ii) $\forall f \in C^\infty, \forall 0 \leq j \leq k, \quad (H_{\text{Re}(fp)}^j \text{Im}(fp))(x_0, \xi_0) = 0$,
- (iii) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall 0 \leq j \leq k, \quad (H_{\text{Re}(zp)}^j \text{Im}(zp))(x_0, \xi_0) = 0$.

Le résultat suivant montre qu'en tout point de la frontière de l'image numérique du symbole principal $z_0 \in \partial\Sigma(p_0)$, l'hypothèse de finitude interdit l'existence de quasimodes semi-classiques et permet un contrôle de la résolvante de l'opérateur dans un voisinage de z_0 dont la taille dépend directement de l'ordre de z_0 pour le symbole principal p_0 :

THÉORÈME 2.3 (DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI, 2004, Théorème 1.4)

Si P_h est un opérateur pseudo-différentiel semi-classique (18) de symbole principal $p_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $z_0 \in \partial\Sigma(p_0)$ est de type fini d'ordre k pour le symbole principal p_0 , alors cet ordre est pair et l'estimation de résolvante suivante

$$(36) \quad \exists 0 < h_0 \leq 1, \exists C > 0, \forall 0 < h \leq h_0, \quad \|(P_h - z_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq Ch^{-\frac{k}{k+1}},$$

est satisfaite. En particulier, il existe une constante $c_0 > 0$ telle que le disque $D(z_0, c_0 h^{\frac{k}{k+1}})$ soit entièrement inclus dans l'ensemble résolvant

$$\forall 0 < h \leq h_0, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < c_0 h^{\frac{k}{k+1}}\} \cap \sigma(P_h) = \emptyset.$$

L'estimation de résolvante (36) est déduite d'estimations a priori semi-classiques de type sous-elliptique pour la partie principale de l'opérateur

$$(37) \quad \exists 0 < h_0 \leq 1, \exists C > 0, \forall 0 < h \leq h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$Ch^{\frac{k}{k+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|(p_0^w(x, hD_x) - z_0)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

La démonstration du théorème 2.3 est une adaptation dans un cadre semi-classique d'un résultat de sous-ellipticité pour des opérateurs pseudo-différentiels de type principal, i.e. les opérateurs dont le champ de vecteurs hamiltonien du symbole principal H_{p_0} et le champ de vecteurs radial $\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ sont linéairement indépendants lorsque $p_0 = 0$, et donc vérifiant $dp_0 \neq 0$ si $p_0 = 0$. Un opérateur pseudo-différentiel P d'ordre m proprement supporté sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est dit sous-elliptique s'il existe $0 \leq \delta < 1$ tel que

$$Pu \in H_{\text{loc}}^s(\Omega) \implies u \in H_{\text{loc}}^{s+m-\delta}(\Omega),$$

où $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ désigne l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que, pour toute fonction ϕ dans $C_0^\infty(\Omega)$, $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Le cas $\delta = 0$ correspond au cas elliptique et les cas $0 < \delta < 1$ sont appelés sous-elliptiques avec perte de δ dérivées par rapport au cas elliptique. Les opérateurs sous-elliptiques sont hypoelliptiques et doivent par conséquent satisfaire la condition $(\bar{\Psi})$. On a la caractérisation suivante de la propriété de sous-ellipticité :

THÉORÈME 2.4. — *Soit P un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté de type principal sur Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , de symbole principal p et $0 < \delta < 1$. L'opérateur P est sous-elliptique avec perte de δ dérivées si et seulement si*

$$(38) \quad \begin{cases} P \text{ vérifie la condition } (\bar{\Psi}) \\ \forall (x, \xi) \in \dot{T}^*\Omega, \exists z \in \mathbb{C}, \exists j \in \mathbb{N}, j \leq \frac{\delta}{1-\delta}, \quad (H_{\text{Re}(zp)}^j \text{Im}(zp))(x, \xi) \neq 0. \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème est l'oeuvre de plusieurs auteurs ayant travaillé indépendamment. EGOROV (1969, 1975) et NIRENBERG et TRÈVES (1970a) ont montré la nécessité de la condition (38) alors que la démonstration du caractère suffisant a été établi par HÖRMANDER (1979) et HÖRMANDER (1985b, Chapitre 27). Si un opérateur P est sous-elliptique, on remarque que la meilleure perte de dérivées δ peut être choisie égale à $\frac{k}{k+1}$, où $k \in \mathbb{N}$ est un entier, et que ce type de perte est directement lié à la puissance du paramètre semi-classique apparaissant dans les estimations a priori semi-classiques (37).

Des exemples d'opérateurs sous-elliptiques sont donnés par les opérateurs de Mizohata–Nirenberg–Trèves

$$(39) \quad D_t \pm it^{2p}|D_x|,$$

qui satisfont une condition plus forte que la condition $(\bar{\Psi})$, dite condition (P) : un symbole $p \in C^\infty(\dot{T}^*\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ homogène de degré m par rapport à la variable de fréquence satisfait la condition (P) dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n si la partie imaginaire $\text{Im}(ap)$ ne change pas de signe le long de toutes les bicaractéristiques orientées de la partie

réelle $\operatorname{Re}(ap)$ dans $\dot{T}^*\Omega$, pour toute fonction $a \in C^\infty(\dot{T}^*\Omega, \mathbb{C})$ ne s'annulant pas. Des exemples d'opérateurs sous-elliptiques violant la condition (P) sont donnés par les modèles

$$(40) \quad D_t + it^{2p}(D_{x_1} + t^{2q+1}x_1^{2r}|D_x|),$$

où $p, q, r \in \mathbb{N}$. On peut vérifier par exemple que l'opérateur

$$D_t + it^2(D_{x_1} + tx_1^2|D_x|),$$

est sous-elliptique avec perte de $\delta = 9/10$ dérivées (LERNER, 2010, 2019). La démonstration du caractère suffisant de la condition (38) proposée par Hörmander est longue et difficile. Malgré l'apparente simplicité de l'expression des opérateurs (40), il n'y a pas d'autre démonstration connue de la sous-ellipticité de ces opérateurs que la démonstration générale donnée par Hörmander. Concernant les modèles (39), leurs études se ramènent à celles d'équations différentielles ordinaires et la démonstration des propriétés de sous-ellipticité s'en trouve grandement faciliter. Ce cas favorable se présente également dans la démonstration du théorème 2.3. En effet, Dencker, Sjöstrand et Zworski montre que l'hypothèse « $z_0 \in \partial\Sigma(p_0)$ est de type fini d'ordre k pour le symbole principal p_0 » permet grâce au théorème de préparation de Malgrange et des réductions symplectiques (voir proposition 3.1 en appendice) de réduire microlocalement l'étude à celle de l'opérateur modèle

$$hD_t + if^w(t, x, hD_x),$$

où $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ est une fonction positive $f \geq 0$ vérifiant

$$\exists c > 0, \forall |t| \leq 1, \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad |\partial_t^k f(t, x, \xi)| \geq c > 0,$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, pour lequel il suffit d'établir l'estimation a priori semi-classique

$$(41) \quad \exists 0 < h_0 \leq 1, \exists C > 0, \forall 0 < h \leq h_0, \forall u \in C_0^\infty(]-1, 1[\times \mathbb{R}^{n-1}),$$

$$Ch^{\frac{k}{k+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|hD_t u + if^w(t, x, hD_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Par des arguments de localisation comme dans DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI (2004) ou par des techniques d'états cohérents comme développées dans PRAVDA-STAROV (2008c), le cœur de la démonstration de l'estimation a priori semi-classique (41) se réduit à démontrer l'estimation a priori semi-classique suivante

$$(42) \quad \exists 0 < h_0 \leq 1, \exists C > 0, \forall 0 < h \leq h_0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

$$Ch^{\frac{k}{k+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|hD_t u + if(t)u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction positive vérifiant $f^{(k)} \geq 1$ sur \mathbb{R} , avec $k \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. Cette estimation a priori est conséquence de la proposition plus générale suivante pour laquelle seule la condition $(\bar{\Psi})$ est requise alors que le symbole $\tau + if(t)$ du modèle (42) ci-dessus satisfait la condition (P) :

PROPOSITION 2.5 (LERNER, 2010, Lemme 3.1.3). — Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta > 0$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction vérifiant

$$(43) \quad f(t) > 0, \quad s > t \implies f(s) \geq 0$$

et

$$(44) \quad \inf_{t \in \mathbb{R}} |\partial_t^k f| \geq \delta,$$

alors l'estimation a priori semi-classique

$$(45) \quad \forall h > 0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad h^{\frac{k}{k+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (1 + 8k^2 \delta^{-\frac{1}{k}}) \|hD_t u + if(t)u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

est satisfaite.

Démonstration. — En considérant $\phi = h^{-1}f$ et $\lambda = h^{\frac{1}{k+1}}$, on déduit des lemmes 3.2 et 3.3 en appendice que pour tout $h > 0$ et $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq 2 \|D_t u + ih^{-1}f(t)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\frac{h^{\frac{1}{k+1}}}{2} + \left| \left\{ t \in \mathbb{R} : h^{-1}|f(t)| < h^{-\frac{1}{k+1}} \right\} \right| \right) \\ &\leq 2 \|D_t u + ih^{-1}f(t)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\frac{h^{\frac{1}{k+1}}}{2} + \frac{4k^2 h^{\frac{1}{k+1}}}{\delta^{\frac{1}{k}}} \right) \\ &= h^{\frac{1}{k+1}} \|D_t u + ih^{-1}f(t)u\|_{L^2(\mathbb{R})} (1 + 8k^2 \delta^{-\frac{1}{k}}), \end{aligned}$$

i.e.

$$h^{\frac{k}{k+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (1 + 8k^2 \delta^{-\frac{1}{k}}) \|hD_t u + if(t)u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.5. □

La proposition 2.5 s'applique en particulier pour les opérateurs $hD_t + it^{2k+1}$, où $k \in \mathbb{N}$, qui satisfont la condition $(\bar{\Psi})$,

$$\forall h > 0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

$$h^{\frac{2k+1}{2k+2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (1 + 8(2k+1)^2 ((2k+1)!)^{-\frac{1}{2k+1}}) \|hD_t u + it^{2k+1}u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

et les opérateurs $hD_t \pm it^{2k}$, où $k \in \mathbb{N}^*$, qui satisfont la condition (P) ,

$$\forall h > 0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad h^{\frac{2k}{2k+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (1 + 8(2k)^2 ((2k)!)^{-\frac{1}{2k}}) \|hD_t u \pm it^{2k}u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

A contrario, les opérateurs $hD_t - it^{2k+1}$, où $k \in \mathbb{N}$, violent la condition $(\bar{\Psi})$ et ne peuvent satisfaire des estimations a priori semi-classiques du type (45) puisque 0 est valeur propre

$$(hD_t - it^{2k+1})u_h = 0, \quad u_h(t) = e^{-\frac{t^{2k+2}}{(2k+2)h}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

2.3. Retour sur l'exemple de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint (4) pour expliquer comment la conjecture de Boulton (11) peut se déduire du théorème 2.3.

On considère plus généralement $q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique à valeurs complexes elliptique

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad q(x, \xi) = 0 \Rightarrow (x, \xi) = 0,$$

satisfaisant la condition supplémentaire $\Sigma(q) = \overline{q(\mathbb{R}^{2n})} \neq \mathbb{C}$ dans le cas où $n = 1$. On rappelle que le spectre de l'opérateur quadratique $q^w(x, D_x)$ est inclus dans l'image numérique $\Sigma(q)$, et qu'il est composé uniquement des valeurs propres de multiplicités algébriques finies (30).

SJÖSTRAND (1974, Lemme 3.1) montre qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la forme quadratique $\operatorname{Re}(z_0 q)$ soit définie positive. Cette propriété assure que l'image numérique $\Sigma(q)$ est un secteur angulaire fermé de sommet zéro et d'angle strictement inférieur à π vérifiant

$$(46) \quad \Sigma(q) = \overline{q(\mathbb{R}^{2n})} = q(\mathbb{R}^{2n}).$$

On en déduit également que $\Sigma_\infty(q) = \emptyset$. Quitte à multiplier par un nombre complexe non nul, on peut donc supposer que la partie réelle du symbole quadratique $\operatorname{Re} q \geq 0$ est positive et

$$(47) \quad \Sigma(q) \cap i\mathbb{R} = -i[0, +\infty).$$

On considère ensuite l'ensemble singulier associé à la forme quadratique q défini comme l'intersection finie suivante de noyaux

$$(48) \quad S = \left(\bigcap_{j=0}^{2n-1} \operatorname{Ker} [\operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2n},$$

où $\operatorname{Re} F$ et $\operatorname{Im} F$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'application hamiltonienne (31) associée à q ,

$$\operatorname{Re} F = \frac{1}{2}(F + \overline{F}), \quad \operatorname{Im} F = \frac{1}{2i}(F - \overline{F}).$$

La notion d'espace singulier a été introduite par HITRIK et PRAVDA-STAROV (2009). On remarque que le théorème de Cayley–Hamilton montre que l'espace singulier est également donné par l'intersection infinie de noyaux

$$(49) \quad S = \left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} \operatorname{Ker} [\operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2n}.$$

Le lemme suivant montre que l'espace singulier permet de caractériser la propriété de finitude de tout point de la demi-droite ouverte $-i(0, +\infty)$ pour le symbole quadratique q et de calculer explicitement son ordre :

LEMME 2.6. — *Sous les hypothèses précédentes, le point $z \in -i(0, +\infty) \subset \Sigma(q) \setminus \Sigma_\infty(q)$ est de type fini pour la forme quadratique q si et seulement si l'espace singulier S de q est réduit à zéro. De plus, si la condition $S = \{0\}$ est satisfaite alors le point $z \in -i(0, +\infty)$ est d'ordre $2k_0$ pour le symbole q , où $1 \leq k_0 \leq 2n - 1$ est le plus petit entier vérifiant*

$$\left(\bigcap_{j=0}^{k_0} \text{Ker} [\text{Re } F(\text{Im } F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2n} = \{0\}.$$

Démonstration. — On commence par remarquer que la positivité de la forme quadratique $\text{Re } q \geq 0$ assure que pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$(50) \quad (\text{Re } q)(X) = 0 \iff (\text{Re } F)X = 0.$$

En effet, si $(\text{Re } F)X = 0$ alors $(\text{Re } q)(X) = \sigma(X, (\text{Re } F)X) = 0$, par définition de l'application hamiltonienne. Réciproquement, si $(\text{Re } q)(X) = 0$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz montre pour tout $Y \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$|\text{Re } q(Y; X)|^2 = |\sigma(Y, (\text{Re } F)X)|^2 \leq (\text{Re } q)(Y)(\text{Re } q)(X) = 0,$$

et l'on conclut en utilisant la non-dégénérescence de la forme symplectique. Un calcul direct (PRAVDA-STAROV, 2008a, Lemme 2) montre ensuite que si q_1 et q_2 sont deux formes quadratiques alors le crochet de Poisson

$$\{q_1, q_2\} = \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi},$$

est également une forme quadratique dont l'application hamiltonienne est le commutateur $-2[F_1, F_2]$, où F_j désigne l'application hamiltonienne de q_j .

Soit $z \in -i(0, +\infty) \subset \Sigma(q) \setminus \Sigma_\infty(q)$. Supposons tout d'abord que l'espace singulier S de q ne soit pas réduit à zéro. Soit $X_0 \in S \setminus \{0\}$. Comme $X_0 \in \text{Ker}(\text{Re } F)$, on a $(\text{Re } q)(X_0) = 0$. La condition d'ellipticité impose que $(\text{Im } q)(X_0) \neq 0$ et la forme de l'image numérique assure alors que $q(X_0) \in -i(0, +\infty)$. Par homogénéité de q , on peut donc trouver $X_0 \in S \setminus \{0\}$ tel que $z = q(X_0)$. En utilisant les notations introduites en (35) avec $p_1 = \text{Re } q$ et $p_2 = \text{Im}(q - z)$, vérifions que $p_I(X_0) = 0$ pour tout $I \in \{1, 2\}^k$, où $k \geq 2$. Ce crochet de Poisson itéré est évidemment nul si $I = (1, 1, \dots, 1, 1)$ ou $I = (2, 2, \dots, 2, 2)$. Dans le cas contraire, il apparaît au moins un facteur $p_1 = \text{Re } q$. L'application hamiltonienne de la forme quadratique p_I est donnée par un commutateur itéré des matrices $\text{Re } F$ et $\text{Im } F$. En développant ce commutateur itéré, on obtient une somme finie de k facteurs $\text{Re } F$ ou $\text{Im } F$ avec au moins un facteur $\text{Re } F$. Comme X_0 appartient à S , le terme $\text{Re } F(\text{Im } F)^j X_0 = 0$ est nul pour tout $j \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de l'application hamiltonienne (31), on en déduit donc que $p_I(X_0) = 0$ pour tout $I \in \{1, 2\}^k$, où $k \geq 2$. Le point z n'est donc pas de type fini pour q .

Supposons maintenant que $S = \{0\}$. On peut considérer le plus petit entier $0 \leq k_0 \leq 2n - 1$ vérifiant

$$\left(\bigcap_{j=0}^{k_0} \text{Ker} [\text{Re } F(\text{Im } F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2n} = \{0\}.$$

D'après (46) et (47), il existe $X_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $z = q(X_0)$. Comme $z \in -i(0, +\infty)$, on a nécessairement que $X_0 \neq 0$ et $(\operatorname{Re} F)(X_0) = 0$. Ceci impose en particulier que $k_0 \geq 1$. On considère $1 \leq j_0 \leq k_0$ tel que

$$(51) \quad \forall 0 \leq j \leq j_0 - 1, \quad (\operatorname{Re} F)(\operatorname{Im} F)^j X_0 = 0, \quad (\operatorname{Re} F)(\operatorname{Im} F)^{j_0} X_0 \neq 0.$$

Montrons que le crochet de Poisson itéré $(H_{\operatorname{Im} q}^{2j_0} \operatorname{Re} q)(X_0) \neq 0$ est non nul. Pour ce faire, on remarque que l'application hamiltonienne de la forme quadratique $H_{\operatorname{Im} q}^{2j_0} \operatorname{Re} q$ est donnée par le commutateur itéré

$$(52) \quad 4^{j_0} [\operatorname{Im} F, [\operatorname{Im} F, [\dots, [\operatorname{Im} F, \operatorname{Re} F] \dots]]],$$

avec exactement $2j_0$ termes $\operatorname{Im} F$ et un unique terme $\operatorname{Re} F$. Par récurrence finie, on vérifie que l'on peut écrire

$$(53) \quad 4^{j_0} [\operatorname{Im} F, [\operatorname{Im} F, [\dots, [\operatorname{Im} F, \operatorname{Re} F] \dots]]] = \sum_{j=0}^{2j_0} c_j (\operatorname{Im} F)^j \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^{2j_0-j},$$

avec $c_j \in \mathbb{R}^*$ pour tout $j = 0, \dots, 2j_0$. On déduit de (31), (52) et (53) que

$$(54) \quad \begin{aligned} (H_{\operatorname{Im} q}^{2j_0} \operatorname{Re} q)(X_0) &= c_{j_0} \sigma(X_0, (\operatorname{Im} F)^{j_0} \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^{j_0} X_0) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{j_0-1} c_j \sigma(X_0, (\operatorname{Im} F)^j \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^{2j_0-j} X_0) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{j_0-1} c_{2j_0-j} \sigma(X_0, (\operatorname{Im} F)^{2j_0-j} \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^j X_0). \end{aligned}$$

L'anti-symétrie (32) d'une application hamiltonienne par rapport à la forme symplectique montre

$$\begin{aligned} \sigma(X_0, (\operatorname{Im} F)^{j_0} \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^{j_0} X_0) &= (-1)^{j_0} \sigma((\operatorname{Im} F)^{j_0} X_0, \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^{j_0} X_0) \\ &= (-1)^{j_0} \operatorname{Re} q((\operatorname{Im} F)^{j_0} X_0). \end{aligned}$$

Comme d'autre part, on déduit de (32) et (51) que pour tout $0 \leq j \leq j_0 - 1$,

$$|\sigma(X_0, (\operatorname{Im} F)^j \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^{2j_0-j} X_0)| = |\sigma(\operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^j X_0, (\operatorname{Im} F)^{2j_0-j} X_0)| = 0,$$

$$|\sigma(X_0, (\operatorname{Im} F)^{2j_0-j} \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^j X_0)| = |\sigma((\operatorname{Im} F)^{2j_0-j} X_0, \operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^j X_0)| = 0.$$

D'après (50) et (51), on obtient

$$(H_{\operatorname{Im} q}^{2j_0} \operatorname{Re} q)(X_0) = (-1)^{j_0} c_{j_0} (\operatorname{Re} q)((\operatorname{Im} F)^{j_0} X_0) \neq 0,$$

car $c_{j_0} \in \mathbb{R}^*$. En adaptant les arguments précédents, il est aisé de vérifier que tout crochet de Poisson p_I avec $p_1 = \operatorname{Re} q$ et $p_2 = \operatorname{Im}(q - z)$ est nul au point X_0 si $|I| \leq 2j_0$. On en déduit que le symbole $q - z$ est d'ordre $2j_0$ au point X_0 et que cet ordre est inférieur ou égal à $2k_0$. Il reste à montrer que z est d'ordre $2k_0$ pour le symbole q . Par définition de l'entier $1 \leq k_0 \leq 2n - 1$, on peut trouver

$$X_0 \in \left(\bigcap_{j=0}^{k_0-1} \operatorname{Ker} [\operatorname{Re} F (\operatorname{Im} F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}.$$

L'entier j_0 défini en (51) est alors nécessairement égal à k_0 . Il s'ensuit que le symbole $q - z$ est d'ordre $2k_0$ au point X_0 , et que z est d'ordre $2k_0$ pour le symbole q . \square

On considère dans la suite le cas où l'espace singulier S est réduit à zéro avec l'entier $1 \leq k_0 \leq 2n - 1$ défini dans le lemme 2.6. On souhaite établir l'estimation a priori semi-classique

$$(55) \quad \forall z \in -i(0, +\infty), \exists 0 < h_0 \leq 1, \exists C > 0, \forall 0 < h \leq h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \\ \|q^w(x, hD_x)u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch^{\frac{2k_0}{2k_0+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour ce faire, on considère le symbole $r \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ donné par

$$(56) \quad r(x, \xi) = \frac{q(x, \xi) - z}{1 + x^2 + \xi^2}.$$

Comme $z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, on remarque que $0 \in \partial\Sigma(r)$ et $\Sigma_\infty(r) = \emptyset$ par ellipticité de q . Le résultat de HÖRMANDER (1985b, Corollaire 27.2.4) rappelé plus haut et le lemme 2.6 montrent que le symbole r est d'ordre $2k_0$ en 0. Le théorème 2.3 donne alors l'existence de constantes $0 < h_0 \leq 1$ et $C_1 > 0$ telles que

$$(57) \quad \forall 0 < h \leq h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \|r^w(x, hD_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_1 h^{\frac{2k_0}{2k_0+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

D'autre part, comme le calcul symbolique permet d'écrire

$$r^w(x, hD_x)(1 + x^2 + h^2 D_x^2) = q^w(x, hD_x) - z + hr_1^w(x, hD_x) + h^2 r_2^w(x, hD_x),$$

avec les symboles $r_1, r_2 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ donnés par

$$r_1(x, \xi) = -ix \frac{\partial r}{\partial \xi}(x, \xi) + i\xi \frac{\partial r}{\partial x}(x, \xi), \quad r_2(x, \xi) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(x, \xi) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2}(x, \xi),$$

le théorème de Calderón–Vaillancourt donne l'existence d'une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq 1$,

$$\|r_1^w(x, hD_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|r_2^w(x, hD_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Il s'ensuit que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq h_0$,

$$C_1 h^{\frac{2k_0}{2k_0+1}} \|(1 + x^2 + h^2 D_x^2)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|r^w(x, hD_x)(1 + x^2 + h^2 D_x^2)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \leq \|q^w(x, hD_x)u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_2 h(1 + h) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq 1$,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|xu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ = \|(1 + x^2 + h^2 D_x^2)u, u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1 + x^2 + h^2 D_x^2)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

on obtient alors que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq h_0$,

$$(58) \quad C_1 h^{\frac{2k_0}{2k_0+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|q^w(x, hD_x)u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_2 h(1 + h) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Il s'ensuit qu'il existe des constantes $0 < h'_0 \leq 1$ et $C_3 > 0$ telles que

$$\forall 0 < h \leq h'_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \|q^w(x, hD_x)u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_3 h^{\frac{2k_0}{2k_0+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

En utilisant à nouveau le changement de variable $y = h^{1/2}x$, où $h > 0$, l'homogénéité du symbole quadratique et le fait que le spectre soit constitué uniquement des valeurs propres (30), on peut alors déduire de l'estimation a priori semi-classique (55) qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que la résolvante de l'opérateur quadratique non semi-classique $q^w(x, D_x)$ reste bornée en norme sur le sous-ensemble suivant de l'ensemble résolvant

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq C_1, |\operatorname{Re} z| \leq C_2 |\operatorname{Im} z|^{\frac{1}{2k_0+1}}, \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

Si $q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme quadratique elliptique, vérifiant de plus la condition $\Sigma(q) = \overline{q(\mathbb{R}^{2n})} \neq \mathbb{C}$ dans le cas où $n = 1$, avec une partie réelle $\operatorname{Re} q \geq 0$ positive telle que

$$\Sigma(q) \cap i\mathbb{R} = i[0, +\infty),$$

la même analyse montre que le point $z \in i(0, +\infty) \subset \Sigma(q) \setminus \Sigma_\infty(q)$ est de type fini pour q si et seulement si l'espace singulier de q est réduit à zéro $S = \{0\}$. De plus, si la condition $S = \{0\}$ est satisfaite, alors le point $z \in i(0, +\infty)$ est d'ordre $2k_0$ pour le symbole q , où $1 \leq k_0 \leq 2n - 1$ est le plus petit entier vérifiant

$$\left(\bigcap_{j=0}^{k_0} \operatorname{Ker} [\operatorname{Re} F(\operatorname{Im} F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2n} = \{0\}.$$

Sous les hypothèses précédentes, l'estimation a priori semi-classique

$$(59) \quad \forall z \in i(0, +\infty), \exists 0 < h_0 \leq 1, \exists C > 0, \forall 0 < h \leq h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\|q^w(x, hD_x)u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch^{\frac{2k_0}{2k_0+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

est satisfaite, et il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que la résolvante de l'opérateur quadratique $q^w(x, D_x)$ reste bornée en norme sur le sous-ensemble suivant de l'ensemble résolvant

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq C_1, |\operatorname{Re} z| \leq C_2 |\operatorname{Im} z|^{\frac{1}{2k_0+1}}, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Nous avons démontré le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.7. — *Soit $q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique vérifiant la condition supplémentaire $\Sigma(q) = \overline{q(\mathbb{R}^{2n})} \neq \mathbb{C}$ dans le cas où $n = 1$. On note F l'application hamiltonienne de q . Il existe alors $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ telle que $0 \leq \theta_2 - \theta_1 < \pi$ et $\partial\Sigma(q) = e^{i\theta_1}\mathbb{R}_+ \cup e^{i\theta_2}\mathbb{R}_+$. En notant $\operatorname{proj}_{e^{i\theta_j}\mathbb{R}_+} z$ la projection orthogonale de z sur la demi-droite $e^{i\theta_j}\mathbb{R}_+$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Si l'espace singulier de la forme quadratique $-ie^{-i\theta_1}q$ est réduit à zéro, alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que la résolvante de l'opérateur $q^w(x, D_x)$ reste bornée en norme sur le sous-ensemble suivant de l'ensemble résolvant

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq C_1, d(e^{i\theta_1}\mathbb{R}_+, z) \leq C_2 |\text{proj}_{e^{i\theta_1}\mathbb{R}_+} z|^{\frac{1}{2k_0+1}}\},$$

où $1 \leq k_0 \leq 2n - 1$ est le plus petit entier vérifiant

$$\left(\bigcap_{j=0}^{k_0} \text{Ker} \left[\text{Re}(-ie^{-i\theta_1}F) (\text{Im}(-ie^{-i\theta_1}F))^j \right] \right) \cap \mathbb{R}^{2n} = \{0\}.$$

(ii) Si l'espace singulier de la forme quadratique $ie^{-i\theta_2}q$ est réduit à zéro, alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que la résolvante de l'opérateur $q^w(x, D_x)$ reste bornée en norme sur le sous-ensemble suivant de l'ensemble résolvant

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq C_1, d(e^{i\theta_2}\mathbb{R}_+, z) \leq C_2 |\text{proj}_{e^{i\theta_2}\mathbb{R}_+} z|^{\frac{1}{2k_0+1}}\},$$

où $1 \leq k_0 \leq 2n - 1$ est le plus petit entier vérifiant

$$\left(\bigcap_{j=0}^{k_0} \text{Ker} \left[\text{Re}(ie^{-i\theta_2}F) (\text{Im}(ie^{-i\theta_2}F))^j \right] \right) \cap \mathbb{R}^{2n} = \{0\}.$$

Le corollaire 2.7 permet de retrouver les indices critiques $p = 1/3$ et $p = 3$ apparaissant dans la conjecture de Boulton (11). En effet, considérons le symbole quadratique elliptique

$$q(x, \xi) = \xi^2 + e^{i\theta}x^2,$$

où $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, dont l'application hamiltonienne est donnée par

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$. Des calculs directs donnent

$$\begin{aligned} \text{Re}(-iF) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}, & \text{Re}(-iF)\text{Im}(-iF) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \text{Re}(ie^{-i\theta}F) &= \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{Re}(ie^{-i\theta}F)\text{Im}(ie^{-i\theta}F) &= \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les formes quadratiques $-iq$ et $ie^{-i\theta}q$ ont un espace singulier nul si et seulement si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, et que dans chacun des deux cas l'entier k_0 est égal à 1. Les puissances $1/(2k_0 + 1)$ apparaissant dans l'énoncé du corollaire 2.7 sont égales à $1/3$ dans le cas de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint. Les estimations de résolvante données par le corollaire 2.7 permettent ainsi de retrouver directement les indices critiques $p = 1/3$ et $p = 3$, et donne une nouvelle démonstration de la conjecture de Boulton (11).

En conclusion, les phénomènes pseudospectraux mis en évidence par Davies et Boulton pour l'oscillateur harmonique non-autoadjoint ne sont pas spécifiques à cet opérateur puisque des phénomènes similaires se produisent pour tout opérateur différentiel

quadratique elliptique dont l'image numérique est distincte du plan complexe, dès que l'opérateur est non-normal. Dans ce cas, la résolvante explose le long de toute demi-droite de sommet zéro incluse dans l'intérieur de l'image numérique (34). Lorsque le symbole quadratique est de type fini à la frontière de l'image numérique, le corollaire 2.7 montre que des estimations de type sous-elliptique permettent de limiter les régions de l'ensemble résolvant où peuvent se développer des instabilités spectrales sous l'effet de petites perturbations selon une géométrie dépendant directement de l'ordre du symbole à la frontière de l'image numérique.

3. APPENDICE

3.1. Forme normale pour un symbole de type principal

Le résultat suivant permet de réduire un symbole de type principal à une forme normale :

PROPOSITION 3.1 (HÖRMANDER, 1985a, Théorème 21.3.6)

Si p est une fonction C^∞ à valeurs complexes définie dans un voisinage ouvert de $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$, où $n \geq 2$, vérifiant

$$p(\gamma) = 0, \quad H_{\operatorname{Re} p}(\gamma) = \frac{\partial \operatorname{Re} p}{\partial \xi}(\gamma) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Re} p}{\partial x}(\gamma) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \neq 0,$$

il existe une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert de $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert de γ dans \mathbb{R}^{2n} , et une fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telles que

$$\chi(0, \varepsilon_n) = \gamma, \quad a(\gamma) \neq 0, \quad \chi^*(ap) = \xi_1 + if(x, \xi'),$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$, où $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, et où f est une fonction C^∞ à valeurs réelles sur un voisinage ouvert de $(0, \varepsilon'_n)$ avec $\varepsilon'_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Démonstration. — Comme $p(\gamma) = 0$ et $d\operatorname{Re} p(\gamma) \neq 0$, le théorème de Darboux (HÖRMANDER, 1985a, Théorème 21.1.6) permet de trouver de nouvelles coordonnées symplectiques locales encore notées (x, ξ) telles que dans ces coordonnées $\gamma = (0, \varepsilon_n)$ et $\operatorname{Re} p = \xi_1$. Après cette transformation symplectique réelle, le symbole est donné par

$$\gamma = (0, \varepsilon_n), \quad p(0, \varepsilon_n) = 0, \quad p(x, \xi) = \xi_1 + i\operatorname{Im} p(x, \xi),$$

sur un voisinage ouvert de $(0, \varepsilon_n)$. Comme $p(\gamma) = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\gamma) \neq 0$, le théorème de préparation de Malgrange (HÖRMANDER, 1983, Théorème 7.5.6) permet de trouver des fonctions $a, r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telles que

$$\xi_1 = a(x, \xi)p(x, \xi) + r(x, \xi'),$$

dans un voisinage ouvert de γ , où la fonction r est indépendante de la variable ξ_1 . La fonction a ne s'annule pas en γ car après dérivation de l'identité précédente

$$1 = \frac{\partial a}{\partial \xi_1}(\gamma)p(\gamma) + a(\gamma)\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\gamma) = a(\gamma)\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\gamma).$$

Comme $r(0, \varepsilon'_n) = 0$, une nouvelle application du théorème de Darboux avec le système x_1 et $\xi_1 - \operatorname{Re} r(x, \xi')$ permet de trouver de nouvelles coordonnées symplectiques locales sur un voisinage ouvert de $\gamma = (0, \varepsilon_n)$ fixant le point $(0, \varepsilon_n)$ et vérifiant $y_1 = x_1$ et $\eta_1 = \xi_1 - \operatorname{Re} r(x, \xi')$. Ceci est bien licite puisque $x_1 = 0$ et $\xi_1 - \operatorname{Re} r(x, \xi') = 0$ en $(0, \varepsilon_n)$, $\{\xi_1 - \operatorname{Re} r(x, \xi'), x_1\} = 1$ dans un voisinage ouvert de $(0, \varepsilon_n)$ et que les différentielles

$$dx_1, \quad d\xi_1 - \frac{\partial \operatorname{Re} r}{\partial x} dx - \frac{\partial \operatorname{Re} r}{\partial \xi'} d\xi',$$

sont linéairement indépendantes dans voisinage de $(0, \varepsilon_n)$. Si on note χ la transformation symplectique réelle associée à ce changement local de variables symplectiques $\chi(y, \eta) = (x, \xi)$, on obtient

$$\chi^*(ap) = \eta_1 - i\chi^*(\operatorname{Im} r),$$

dans un voisinage ouvert de $(0, \varepsilon_n)$. Par conservation du crochet de Poisson par les transformations symplectiques et indépendance de la fonction $\operatorname{Im} r$ par rapport à la variable ξ_1 , la fonction à valeurs réelles $f(y, \eta) = -\chi^*(\operatorname{Im} r)(y, \eta)$ définie dans un voisinage ouvert de $(0, \varepsilon_n)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_1}(y, \eta) = \{f(y, \eta), y_1\} = \{y_1, \chi^*(\operatorname{Im} r)(y, \eta)\} = \{x_1, \operatorname{Im} r(x, \xi')\} = -\frac{\partial \operatorname{Im} r}{\partial \xi_1} = 0,$$

est indépendante de la variable η_1 . L'identité

$$\chi^*(ap) = \eta_1 + if(y, \eta'),$$

est alors vérifiée dans un voisinage ouvert de $(0, \varepsilon_n)$. \square

3.2. Estimations a priori quantitatives

Cette section est dédiée à la démonstration de deux lemmes techniques utilisés dans la démonstration de la proposition 2.5. Le premier lemme établit une estimation a priori quantitative pour l'opérateur différentiel $L = D_t + i\phi(t)$ sous l'hypothèse qu'il satisfait à la condition $(\bar{\Psi})$ interdisant tout changement de signe du $+$ vers le $-$ pour la fonction $t \mapsto \phi(t)$:

LEMME 3.2 (LERNER, 2010, Lemme 3.1.1). — *Si $\phi \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction vérifiant*

$$(60) \quad \phi(t) > 0, \quad s > t \implies \phi(s) \geq 0,$$

alors l'estimation a priori suivante est vérifiée pour toute fonction $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$(61) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |v(t)|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)| |v(t)|^2 dt \leq 4 \int_{\mathbb{R}} |(D_t v + i\phi v)(t)| |v(t)| dt,$$

où $D_t = i^{-1}\partial_t$. Soit $m(\lambda) = |\{t \in \mathbb{R} : |\phi(t)| < \lambda^{-1}\}|$, où $\lambda > 0$. Si

$$\kappa(\phi) = \inf_{\lambda > 0} \left(m(\lambda) + \frac{\lambda}{2} \right) < +\infty,$$

l'estimation a priori

$$(62) \quad \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 2\kappa(\phi) \int_{\mathbb{R}} |(D_t v + i\phi v)(t)| |v(t)| dt \leq 2\kappa(\phi) \|D_t v + i\phi v\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

est vérifiée pour toute fonction $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration. — On définit $T = \inf\{t \in \mathbb{R} : \phi(t) > 0\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. La condition (60) interdisant tout changement de signe du $+$ vers le $-$ induit les implications suivantes

$$(63) \quad t > T \implies \exists T \leq t' < t, \phi(t') > 0 \implies \phi(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad t < T \implies \phi(t) \leq 0.$$

Soient $L = D_t + i\phi$, où $D_t = i^{-1}\partial_t$, et $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\forall t'' \geq T, \quad 2\operatorname{Re}(Lv, iH(t-t'')v)_{L^2(\mathbb{R})} = |v(t'')|^2 + 2 \int_{t''}^{+\infty} |\phi(t)| |v(t)|^2 dt,$$

$$\forall t' \leq T, \quad 2\operatorname{Re}(Lv, -iH(t'-t)v)_{L^2(\mathbb{R})} = |v(t')|^2 + 2 \int_{-\infty}^{t'} |\phi(t)| |v(t)|^2 dt,$$

où $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ désigne la fonction de Heaviside. Il s'ensuit

$$(64) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |v(t)|^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |(Lv)(t)| |v(t)| dt, \quad \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)| |v(t)|^2 dt \leq \int_{\mathbb{R}} |(Lv)(t)| |v(t)| dt.$$

Ceci démontre l'estimation a priori (61). D'autre part, on remarque que pour tout $\lambda > 0$,

$$(65) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt &\leq \int_{\{t \in \mathbb{R} : \lambda|\phi(t)| < 1\}} |v(t)|^2 dt + \int_{\{t \in \mathbb{R} : \lambda|\phi(t)| \geq 1\}} |v(t)|^2 dt \\ &\leq |\{t \in \operatorname{supp} v : |\phi(t)| < \lambda^{-1}\}| \sup_{t \in \mathbb{R}} |v(t)|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)| |v(t)|^2 dt \\ &\leq 2 \left(|\{t \in \mathbb{R} : |\phi(t)| < \lambda^{-1}\}| + \frac{\lambda}{2} \right) \int_{\mathbb{R}} |(Lv)(t)| |v(t)| dt. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$(66) \quad \int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt \leq 2\kappa(\phi) \int_{\mathbb{R}} |(Lv)(t)| |v(t)| dt \leq 2\kappa(\phi) \|Lv\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

pour toute fonction $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Ceci démontre l'estimation a priori (62). \square

Le lemme suivant permet de donner une estimation explicite de la quantité $m(\lambda)$ défini dans l'énoncé précédent :

LEMME 3.3 (LERNER, 2010, Lemme 3.1.2). — Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta > 0$ et $C > 0$. Si I est un intervalle de \mathbb{R} et $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^k vérifiant

$$(67) \quad \inf_{t \in I} |q^{(k)}| \geq \delta,$$

alors

$$(68) \quad \forall h > 0, \quad \left\{ t \in I : |q(t)| \leq Ch^k \right\} \subset \bigcup_{1 \leq \ell \leq k} J_\ell(h),$$

où $J_\ell(h)$ est un intervalle de longueur $h(2^{2k}k!C\delta^{-1})^{\frac{1}{k}}$. En particulier, on a

$$\forall h > 0, \quad \left| \left\{ t \in I : |q(t)| \leq Ch^k \right\} \right| \leq hC^{\frac{1}{k}}\delta^{-\frac{1}{k}}4k(k!)^{\frac{1}{k}} \leq hC^{\frac{1}{k}}\delta^{-\frac{1}{k}}4k^2.$$

Démonstration. — Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $h > 0$, $C > 0$ et

$$E_k(h, C, q) = \left\{ t \in I : |q(t)| \leq Ch^k \right\}.$$

On commence par considérer le cas où $k = 1$. Si $t, t_0 \in E_1(h, C, q)$, le théorème des accroissements finis et (67) induisent que

$$\delta|t - t_0| \leq |q(t) - q(t_0)| \leq 2Ch \quad \text{et} \quad E_1(h, C, q) \cap \left\{ t \in I : |t - t_0| > 2hC\delta^{-1} \right\} = \emptyset.$$

Il s'ensuit que $|t - t_0| \leq 2hC\delta^{-1}$ pour tout $t_0, t \in E_1(h, C, q)$. L'ensemble $E_1(h, C, q)$ peut être vide. S'il ne l'est pas, il est alors inclus dans un intervalle de longueur inférieure ou égal à $4hC\delta^{-1}$. Supposons maintenant que $k \geq 2$. Si $E_k(h, C, q) = \emptyset$, l'inclusion (68) est trivialement vérifiée. Dans le cas contraire, il existe $t_0 \in E_k(h, C, q)$ et

$$\forall t \in I, \quad q(t) = q(t_0) + (t - t_0) \underbrace{\int_0^1 q'(t_0 + \theta(t - t_0)) d\theta}_{Q(t)}.$$

Il s'ensuit que $|Q(t)(t - t_0)| \leq 2Ch^k$ pour tout $t \in E_k(h, C, q)$. Soient $\omega > 0$ et $t \in E_k(h, C, q)$. En distinguant les cas $|t - t_0| \leq \frac{\omega h}{2}$ et $|t - t_0| > \frac{\omega h}{2}$, on obtient l'inclusion

$$(69) \quad E_k(h, C, q) \subset \left[t_0 - \frac{\omega h}{2}, t_0 + \frac{\omega h}{2} \right] \cup E_{k-1}(h, 4\omega^{-1}C, Q).$$

La fonction Q vérifie les hypothèses du lemme avec les paramètres $k - 1$ et $\frac{\delta}{k}$. En effet, si $\pm q^{(k)} \geq \delta$ sur I , alors

$$\forall t \in I, \quad \pm Q^{(k-1)}(t) = \int_0^1 \pm q^{(k)}(t_0 + \theta(t - t_0)) \theta^{k-1} d\theta \geq \frac{\delta}{k}.$$

Par récurrence sur k , on déduit de (69) l'inclusion suivante

$$E_k(h, C, q) \subset \left[t_0 - \frac{\omega h}{2}, t_0 + \frac{\omega h}{2} \right] \cup \left(\bigcup_{1 \leq \ell \leq k-1} J_\ell(h) \right),$$

où $(J_\ell(h))_{1 \leq \ell \leq k-1}$ sont des intervalles de longueur vérifiant

$$\forall 1 \leq \ell \leq k - 1, \quad |J_\ell(h)| \leq h(4C\omega^{-1}k\delta^{-1}2^{2(k-1)}(k-1)!)^{\frac{1}{k-1}}.$$

On obtient l'inclusion (68) avec le choix du paramètre $\omega = (C\delta^{-1}2^{2k}k!)^{\frac{1}{k}}$. □

RÉFÉRENCES

- BOULTON, Lyonell S. (2002). « Non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semigroups and pseudospectra ». In : *J. Operator Theory* 47.2, p. 413-429.
- DAVIES, Edward Brian (1999a). « Pseudo-spectra, the harmonic oscillator and complex resonances ». In : *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 455.1982, p. 585-599.
- (1999b). « Semi-classical states for non-self-adjoint Schrödinger operators ». In : *Comm. Math. Phys.* 200.1, p. 35-41.
- DENCKER, Nils (2004). « The solvability of pseudo-differential operators ». In : *Phase space analysis of partial differential equations. Vol. I.* Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi. Scuola Norm. Sup., Pisa, p. 175-200.
- (2006). « The resolution of the Nirenberg–Treves conjecture ». In : *Ann. of Math.* (2) 163.2, p. 405-444.
- DENCKER, Nils, Johannes SJÖSTRAND et Maciej ZWORSKI (2004). « Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 57.3, p. 384-415.
- EGOROV, Ju. V. (1969). « Subelliptic pseudodifferential operators ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 188, p. 20-22.
- (1975). « Subelliptic operators ». In : *Uspehi Mat. Nauk* 30.3(183), p. 57-104.
- HITRIK, Michael et Karel PRAVDA-STAROV (2009). « Spectra and semigroup smoothing for non-elliptic quadratic operators ». In : *Math. Ann.* 344.4, p. 801-846.
- HÖRMANDER, Lars (1960). « Differential equations without solutions ». In : *Math. Ann.* 140, p. 169-173.
- (1979). « Subelliptic operators ». In : *Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations (Inst. Adv. Study, Princeton, N.J., 1977/78)*. T. 91. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., p. 127-208.
- (1981). « Pseudodifferential operators of principal type ». In : *Singularities in boundary value problems (Proc. NATO Adv. Study Inst., Maratea, 1980)*. T. 65. NATO Adv. Study Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci. Reidel, Dordrecht-Boston, Mass., p. 69-96.
- (1983). *The analysis of linear partial differential operators. I.* T. 256. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Distribution theory and Fourier analysis. Springer-Verlag, Berlin, p. ix+391.
- (1985a). *The analysis of linear partial differential operators. III.* T. 274. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Pseudodifferential operators. Springer-Verlag, Berlin, p. viii+525.
- (1985b). *The analysis of linear partial differential operators. IV.* T. 275. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Fourier integral operators. Springer-Verlag, Berlin, p. vii+352.

- HÖRMANDER, Lars (1994). *Notions of convexity*. T. 127. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, p. viii+414.
- LERNER, Nicolas (1988). « Sufficiency of condition (Ψ) for local solvability in two dimensions ». In : *Ann. of Math. (2)* 128.2, p. 243-258.
- (2006). « Cutting the loss of derivatives for solvability under condition (Ψ) ». In : *Bull. Soc. Math. France* 134.4, p. 559-631.
- (2007). « The verification of the Nirenberg–Treves conjecture ». In : 311. Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006, Exp. No. 960, viii, 211-235.
- (2010). *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*. T. 3. Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, p. xii+397.
- (2019). « Sur deux contributions de Y. V. Egorov (1938–2018) ». In : *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 28.1, p. 1-9.
- LEWY, Hans (1957). « An example of a smooth linear partial differential equation without solution ». In : *Ann. of Math. (2)* 66, p. 155-158.
- MELIN, Anders et Johannes SJÖSTRAND (2002). « Determinants of pseudodifferential operators and complex deformations of phase space ». In : *Methods Appl. Anal.* 9.2, p. 177-237.
- MIZOHATA, Sigeru (1961/62). « Solutions nulles et solutions non analytiques ». In : *J. Math. Kyoto Univ.* 1, p. 271-302.
- MOYER, Robert D. (1978). « Local solvability in two dimensions : necessary conditions for the principal type case ». In : *mimeographed manuscript, University of Kansas*.
- NIRENBERG, Louis et François TREVES (1963). « Solvability of a first order linear partial differential equation ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 16, p. 331-351.
- NIRENBERG, Louis et François TRÈVES (1970a). « On local solvability of linear partial differential equations. I. Necessary conditions ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 23, p. 1-38.
- (1970b). « On local solvability of linear partial differential equations. II. Sufficient conditions ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 23, p. 459-509.
- PRAVDA-STAROV, Karel (2004). « A general result about the pseudo-spectrum of Schrödinger operators ». In : *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 460.2042, p. 471-477.
- (2006a). « A complete study of the pseudo-spectrum for the rotated harmonic oscillator ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 73.3, p. 745-761.
- (2006b). « Etude du pseudo-spectre d'opérateurs non auto-adjoints ». Thèse de doct. Université de Rennes 1.
- (2008a). « Contraction semigroups of elliptic quadratic differential operators ». In : *Math. Z.* 259.2, p. 363-391.
- (2008b). « On the pseudospectrum of elliptic quadratic differential operators ». In : *Duke Math. J.* 145.2, p. 249-279.

- (2008c). « Pseudo-spectrum for a class of semi-classical operators ». In : *Bull. Soc. Math. France* 136.3, p. 329-372.
- ROCH, Steffen et Bernd SILBERMANN (1996). « C^* -algebra techniques in numerical analysis ». In : *J. Operator Theory* 35.2, p. 241-280.
- SJÖSTRAND, Johannes (1974). « Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics ». In : *Ark. Mat.* 12, p. 85-130.
- TREFETHEN, Lloyd N. (1997). « Pseudospectra of linear operators ». In : *SIAM Rev.* 39.3, p. 383-406.
- (1999). « Spectra and pseudospectra. The behaviour of non-normal matrices and operators ». In : *The graduate student's guide to numerical analysis '98 (Leicester)*. T. 26. Springer Ser. Comput. Math. Springer, Berlin, p. 217-250.
- TRÉPREAU, Jean-Marie (1984). « Sur la résolubilité analytique microlocale des opérateurs pseudodifférentiels de type principal ». Thèse de doct. Université de Reims.
- ZWORSKI, Maciej (2001). « A remark on a paper of E. B. Davies ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 129.10, p. 2955-2957.

Karel Pravda-Starov

Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625

F-35000 Rennes, France

E-mail : `karel.pravda-starov@univ-rennes1.fr`