

UN LEMME DE FERMETURE C^∞
[d'après Asaoka et Irie]

par Vincent Humilière

1. CONTEXTE ET ÉNONCÉS PRINCIPAUX

1.1. Qu'est-ce qu'un lemme de fermeture ?

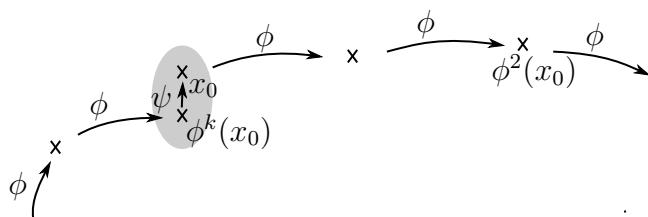
On appelle « lemme de fermeture » (ou « closing lemma ») tout énoncé du type suivant : *Étant donné un système dynamique, pour tout point x_0 vérifiant une certaine forme de récurrence, il est possible de perturber la dynamique de telle sorte que le système perturbé admette une orbite périodique passant par x_0 .*

Précisons les termes employés. Qu'entend-on d'abord par système dynamique ? Il peut s'agir d'un difféomorphisme ϕ d'une variété différentiable. L'orbite par ϕ d'un point x_0 est alors la suite de points $(\phi^k(x_0))_{k \in \mathbb{Z}}$ (où $\phi^k = \phi \circ \dots \circ \phi$ est obtenue en composant k fois ϕ). Le paramètre k est ici le « temps » du système. Il peut également s'agir d'un champ de vecteurs X sur une variété différentiable, l'orbite d'un point x_0 est alors l'unique solution maximale du problème de Cauchy $\dot{x}(t) = X(x(t))$, $x(0) = x_0$. C'est donc une courbe passant par x_0 et partout tangente au champ X . Le « temps » est bien sûr ici t .

Un point x_0 est dit *récurrent* s'il est point d'accumulation de son orbite future (c'est-à-dire son orbite restreinte aux temps strictement positifs). Par exemple, un point *périodique*, c'est-à-dire dont l'orbite est périodique, est un point récurrent. Intuitivement, l'orbite d'un point récurrent x_0 revient dans le futur aussi proche que l'on veut de x_0 . L'orbite d'un tel point est donc presque fermée, ce qui justifie que l'on puisse espérer, comme Poincaré, la fermer véritablement par une petite perturbation. Il existe des formes de récurrence plus faible, comme le fait d'être non-errant ou récurrent par chaînes, donnant lieu à d'autres variantes potentielles de closing lemma.

Enfin, précisons le terme « perturber ». Nous travaillerons dans l'espace des difféomorphismes ou dans l'espace des champs de vecteurs d'une classe C^r donnée avec $r = 1, 2, \dots$, ou ∞ , chacun de ces espaces sera muni de la topologie C^r de Whitney, et c'est en ce sens que l'on entendra le mot « perturber ». On pourra aussi restreindre la classe de difféomorphismes/champs de vecteurs considérée.

En régularité C^0 , le lemme de fermeture ne pose pas de difficulté particulière. Étant donné un point récurrent x_0 (mais non périodique) d'un homéomorphisme ϕ et un réel $\varepsilon > 0$, on fixe un entier $k > 0$ tel que $\phi^k(x_0)$ soit à distance plus petite que $\varepsilon/2$ de x_0 . On choisit un homéomorphisme ψ à support dans un $\varepsilon/2$ -voisinage de x_0 , envoyant $\phi^k(x_0)$ sur x_0 , et dont le support évite le début de l'orbite $\phi(x_0), \phi^2(x_0), \dots, \phi^{k-1}(x_0)$ (à partir de la dimension 2, c'est possible). Alors $\psi \circ \phi$ est une perturbation ε -petite en topologie C^0 de ϕ (comme ψ est supporté dans le $\varepsilon/2$ -voisinage d'un point, il est à distance uniforme ε de l'identité), et x_0 est un point k -périodique de $\psi \circ \phi$. Un argument similaire donne un lemme de fermeture C^0 pour les champs de vecteurs.



Dans l'argument ci-dessus, il n'y a aucune raison pour que ψ soit petit en topologie C^1 . Au contraire même, par accroissements finis, un difféomorphisme supporté dans une boule de rayon δ et ayant une distance C^1 à l'identité majorée par A , ne peut déplacer les points que d'au plus δA . La taille du support tend à s'agrandir si l'on cherche à réduire la taille de la perturbation. Ce support risque donc de rencontrer le début de l'orbite $\phi(x_0), \phi^2(x_0), \dots, \phi^{k-1}(x_0)$ et l'on perd le contrôle de la dynamique de $\psi \circ \phi$. En régularité C^r supérieure la situation empire : si la distance C^r à l'identité d'un difféomorphisme supporté dans une boule de rayon δ est majorée par A alors les points ne peuvent être déplacés que d'au plus $A\delta^r$. La conclusion de ce paragraphe est que la démonstration naïve du lemme de fermeture ne fonctionne pas en régularité supérieure.

Ces difficultés ont été surmontées par Pugh en 1967 dans le cas de la topologie C^1 (PUGH, 1967a,b). Énonçons le résultat pour les difféomorphismes.

THÉORÈME 1.1 (« closing lemma » C^1 , PUGH, 1967b). — *Pour tout C^1 -difféomorphisme ϕ d'une variété compacte M , tout point récurrent $p \in M$ de ϕ et tout C^1 -voisinage \mathcal{U} de ϕ , il existe un difféomorphisme $\psi \in \mathcal{U}$ dont p est un point périodique.*

Suite à ce travail fondateur de Pugh, le lemme de fermeture et sa démonstration ont connu de nombreuses améliorations, extensions et simplifications. Mentionnons brièvement quelques exemples remarquables. PUGH et ROBINSON (1983) ont montré que le lemme de fermeture C^1 reste vrai (avec une preuve analogue) lorsque l'on se restreint aux difféomorphismes conservatifs (c'est-à-dire préservant le volume) d'une variété munie d'une forme volume, aux difféomorphismes symplectiques ou encore aux difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique. MAÑÉ (1982) a démontré un « closing lemma ergodique » : *tout difféomorphisme d'une variété compacte ayant une mesure de probabilité ergodique μ peut être C^1 -approché par des difféomorphismes f_n*

ayant une orbite périodique Ω_n telle que la mesure équirépartie sur Ω_n converge faiblement vers μ . HAYASHI (1997) a démontré un « connecting lemma » ; on ne cherche plus ici à fermer une orbite mais à connecter deux points distincts par une orbite. En améliorant le résultat de Hayashi, BONATTI et CROVISIER (2004) ont montré que le lemme de fermeture reste vrai en remplaçant l’hypothèse de « récurrence » sur le point x_0 par une hypothèse beaucoup plus faible de « récurrence par chaîne ». Une version de ce résultat pour les difféomorphismes symplectiques est due à ARNAUD, BONATTI et CROVISIER (2005). Après 50 ans de recul et de multiples simplifications, la démonstration du lemme de fermeture C^1 de Pugh est maintenant bien comprise par les experts mais reste considérée comme difficile et technique. Pour plus de détails sur l’historique du « closing lemma », le lecteur peut consulter par exemple ANOSOV et ZHUZHOMA (2012), ARNAUD (1998), CROVISIER (2013) et PUGH (2011).

Le paragraphe qui précède ne concerne que les perturbations de classe C^1 . La situation est radicalement différente en régularité supérieure, où le problème est très largement ouvert, à quelques résultats isolés près qui ne s’appliquent qu’à des classes très spécifiques de transformations en petite dimension (voir par exemple CROVISIER et PUJALS (2018) et YOUNG (1979)). On ne sait toujours pas s’il existe un lemme de fermeture C^2 pour les champs de vecteurs des surfaces. Des résultats négatifs ont même été obtenus par GUTIERREZ (1987), puis par HERMAN (1991) dans le cas hamiltonien. Nous reviendrons sur ce dernier résultat. C’est dans ce contexte que Irie puis Asaoka–Irie ont démontré des lemmes de fermeture C^∞ s’appliquant à de larges classes de systèmes dynamiques en dimension 2 et 3.

1.2. Lemmes de fermeture C^∞ pour les difféomorphismes hamiltoniens en dimension 2 et les champs de Reeb en dimension 3

Les difféomorphismes hamiltoniens sont des transformations initialement issues de la mécanique classique, mais le formalisme de la géométrie différentielle permet de les définir sur toute variété symplectique. Nous nous intéressons à un cas particulier de variété symplectique, une surface (Σ, ω) munie d’une forme d’aire. Un difféomorphisme hamiltonien sur (Σ, ω) est alors un difféomorphisme de Σ qui préserve la forme ω , est isotope à l’identité et admet un vecteur de rotation nul. Nous détaillerons tout ceci dans la partie 2.1. Il s’agit d’une famille très importante de difféomorphismes, dont la dynamique et en particulier les orbites périodiques ont été très étudiées. La conjecture d’Arnold (ARNOLD, 1976), démontrée dans le cas des surfaces par ELIASHBERG (1979), affirme qu’un difféomorphisme hamiltonien d’une surface compacte admet au moins deux points fixes s’il s’agit de la sphère et trois points fixes s’il s’agit d’une surface de genre plus grand. FRANKS (1996) a prouvé qu’un difféomorphisme hamiltonien de la sphère ayant au moins trois points fixes admet une infinité d’orbites périodiques. En genre non nul, c’est la conjecture de Conley (cf. SALAMON et ZEHNDER, 1992) qui s’applique : un difféomorphisme hamiltonien admet une infinité de points périodiques (cf. FRANKS et HANDEL, 2003 ; LE CALVEZ, 2006).

Le théorème d’Asaoka et Irie qui nous intéresse ici est un lemme de fermeture pour les difféomorphismes hamiltoniens des surfaces compactes. On notera $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$ l’ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de (Σ, ω) . Muni de la topologie C^∞ , cet ensemble admet la structure d’un groupe de Lie de dimension infinie (Fréchet), dont l’algèbre de Lie est l’ensemble des fonctions C^∞ de moyenne nulle.

THÉORÈME 1.2 (ASAOKA et IRIE, 2016). — *Soient (Σ, ω) une surface compacte munie d’une forme d’aire, ϕ un difféomorphisme hamiltonien de (Σ, ω) et U un ouvert de Σ . Alors il existe une suite de difféomorphismes hamiltoniens $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ϕ en topologie C^∞ et telle que ϕ_i admet un point périodique dans U pour tout entier i .*

Ce résultat implique facilement le lemme de fermeture tel que formulé dans la partie précédente.

COROLLAIRE 1.3. — *Soient (Σ, ω) une surface compacte munie d’une forme d’aire, ϕ un difféomorphisme hamiltonien de (Σ, ω) et p un point de Σ . Alors, pour tout C^∞ -voisinage \mathcal{U} de ϕ dans $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$, il existe un difféomorphisme hamiltonien $\psi \in \mathcal{U}$ qui admet p pour point périodique.*

Notons que l’hypothèse que p est récurrent n’apparaît pas dans cet énoncé. Ceci s’explique par le théorème de récurrence de Poincaré, qui affirme que presque tout point est récurrent pour un difféomorphisme préservant l’aire. Asaoka et Irie en déduisent un autre résultat, inspiré par le « théorème de densité générique » de PUGH (1967a). Nous dirons qu’une propriété est *générique* sur un certain espace métrique complet si l’ensemble des éléments de cet espace qui la satisfont contient une intersection dénombrable d’ouverts denses⁽¹⁾.

COROLLAIRE 1.4 (ASAOKA et IRIE, 2016). — *Pour toute surface (Σ, ω) compacte munie d’une forme d’aire, la propriété d’avoir un ensemble dense de points périodiques est générique pour la topologie C^∞ dans l’ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de (Σ, ω) .*

La version C^1 du corollaire 1.4 était connue et due à PUGH et ROBINSON (1983).

Pour déduire le corollaire du théorème 1.2, on procède comme suit. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de la topologie de Σ . L’ensemble $\mathcal{H}(U_i)$ des difféomorphismes hamiltoniens qui admettent un point périodique *non dégénéré*⁽²⁾ dans U_i est un ouvert. Un point périodique peut toujours être rendu non dégénéré par une perturbation C^∞ -petite. Le théorème 1.2 implique donc que $\mathcal{H}(U_i)$ est dense pour chaque i . Les éléments de $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(U_i)$ ont des points périodiques dans chaque U_i , leur ensemble de points périodiques est donc dense, ce qui termine la démonstration du corollaire.

1. Le théorème de Baire affirme bien sûr qu’un tel ensemble est dense.

2. Un point T -périodique p d’un difféomorphisme hamiltonien ϕ est dit *non dégénéré* si la différentielle de ϕ^T au point p n’admet pas 1 pour valeur propre. Sur une surface, il est alors soit *hyperbolique* (valeurs propres réelles distinctes inverses l’une de l’autre), soit *elliptique* (valeurs propres conjuguées et de module 1).

La démonstration d’Asaoka et Irie ne se fonde ni sur la théorie de Floer, ni sur la théorie de Franks–Handel, ni sur la théorie de Le Calvez, donc sur aucune des théories ayant obtenu les résultats les plus significatifs pour l’étude des orbites périodiques des difféomorphismes hamiltoniens de surface. Leur démonstration consiste à se ramener à un autre lemme de fermeture, qui fut auparavant prouvé par Irie, et s’applique aux champs de vecteurs de Reeb des variétés de contact en dimension 3. Avant de l’énoncer, donnons rapidement les définitions nécessaires.

Les structures de contact peuvent être définies en toute dimension impaire, mais nous nous restreignons ici au cas de la dimension 3. Une *structure de contact* (co-orientable) sur une variété tridimensionnelle V est un champ de plans ξ , qui est le noyau d’une 1-forme de contact, c’est-à-dire d’une 1-forme α telle que $\alpha \wedge d\alpha$ ne s’annule pas. Par exemple, le bord d’un domaine étoilé de \mathbb{R}^4 porte une structure de contact naturelle. Autre exemple important, le fibré en sphères cotangentes d’une variété riemannienne porte également une structure de contact naturelle. Nous introduirons en détail les structures de contact dans la partie 2.2.

Une structure de contact donnée $\xi = \ker \alpha$ est le noyau d’une multitude de formes de contact. En fait, une 1-forme admet ξ pour noyau si et seulement si elle est de la forme $f\alpha$ avec $f \in C^\infty(V)$ ne s’annulant pas. Chaque forme de contact α induit un *champ de vecteurs « de Reeb »* R_α par

$$d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(R_\alpha) = 1.$$

Il y a donc aussi une multitude de champs de Reeb (autant qu’il y a de fonctions lisses ne s’annulant pas). Un exemple fondamental de flot engendré par un champ de Reeb est le flot géodésique sur un fibré en sphères cotangentes (voir la partie 2.2 pour plus de détails). On peut donc penser aux flots de Reeb comme à une large généralisation des flots géodésiques.

Comme les orbites périodiques des difféomorphismes hamiltoniens, les orbites périodiques des champs de Reeb ont été énormément étudiées. La conjecture de WEINSTEIN (1979) prédit que le flot d’un champ de Reeb d’une variété de contact compacte admet toujours au moins une orbite périodique. Après de nombreux travaux précurseurs, notamment de Hofer et Viterbo, la conjecture a été établie par TAUBES (2007) pour toutes les variétés de contact de dimension 3 (voir aussi AUROUX, 2010). En dimension plus grande, la conjecture demeure ouverte en général, bien que de multiples cas aient été établis. Mentionnons aussi quelques résultats de multiplicité en dimension 3 : CRISTOFARO-GARDINER et HUTCHINGS (2016) et CRISTOFARO-GARDINER, HUTCHINGS et POMERLEANO (2017). Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de fermeture d’Irie.

THÉORÈME 1.5 (IRIE, 2015). — *Soient (V, ξ) une variété de contact compacte tridimensionnelle, R un champ de Reeb et U un ouvert de V . Alors, R est limite en topologie C^∞ de champs de Reeb qui coïncident avec R dans le complémentaire de U et admettent une orbite périodique rencontrant U .*

Dans l'espace des champs de vecteurs de Reeb de (V, ξ) muni de la topologie C^∞ , la propriété d'admettre un ensemble dense d'orbites périodiques est générique.

La démonstration d'Irie s'applique également au cas particulier des flots géodésiques.

THÉORÈME 1.6 (IRIE, 2015). — *Soit Σ une surface, g une métrique riemannienne et U un ouvert de Σ . Alors g est limite en topologie C^∞ de métriques riemanniennes qui admettent une géodésique rencontrant U .*

Dans l'espace des métriques riemanniennes sur Σ muni de la topologie C^∞ la propriété que les géodésiques fermées soient denses dans Σ est générique.

En topologie C^1 pour la métrique riemannienne (ou de manière équivalente, en topologie C^0 pour les flots géodésiques), ce résultat est connu en toute dimension et est dû à RIFFORD (2012). En topologie C^2 , c'est un problème ouvert en général mais le cas des surfaces est conséquence du théorème 1.6. Le résultat de Rifford est cependant plus précis que le théorème 1.6, car il affirme que pour tout point p et tout vecteur tangent v en p , on peut trouver une géodésique fermée par perturbation au voisinage de p et avec vitesse initiale proche v . Le théorème 1.6, quant à lui, donne une géodésique fermée passant près de p mais ne donne aucune information sur la vitesse initiale.

1.3. Discussion

Faiblesses des théorèmes 1.2, 1.5 et 1.6. — Les lemmes de fermeture de Irie et Asaoka–Irie sont de véritables percées car ils sont valables en topologie C^∞ alors que les résultats antérieurs ne le sont qu'en topologie C^1 . En revanche, ils présentent une faiblesse que n'ont pas les lemmes de fermeture classiques : leur démonstration ne fournit aucune information sur la localisation spatiale des orbites obtenues après perturbation. Au contraire, dans le cas C^1 , les démonstrations dérivées de celle de Pugh sont plus constructives et l'orbite périodique construite est proche de l'orbite récurrente de départ. D'une manière générale, dans les résultats d'Irie et Asaoka–Irie, le mécanisme dynamique donnant naissance aux orbites périodiques reste très mystérieux.

Généralisations ? — Il est naturel de se demander si le lemme de fermeture C^∞ est vérifié par les difféomorphismes hamiltoniens des variétés symplectiques de dimension supérieure. La réponse est négative en général. Un contre-exemple a été proposé par HERMAN (1991) sur un tore de dimension ≥ 4 muni d'une forme symplectique constante mais non standard. Il n'est pas exclu qu'un lemme de fermeture puisse être valide sur certaines variétés, mais ce problème reste ouvert. Pour les champs de Reeb en dimension plus grande, la question est aussi ouverte.

Revenant aux surfaces, on peut également se demander si l'on peut élargir la classe de transformations à laquelle le lemme de fermeture s'applique. La question demeure largement ouverte, même pour les difféomorphismes conservatifs d'une surface. En revanche, un argument que m'a communiqué Alejandro Kocsard, utilisant un théorème de conjugaison de Herman, montre que la fermeture d'orbite ne peut pas résulter d'une perturbation locale comme c'est le cas chez Asaoka et Irie.

Analogie avec les hypersurfaces minimales, équidistribution des orbites. — Il y a une analogie intéressante entre orbites périodiques et hypersurfaces minimales dans les variétés riemanniennes qui a récemment donné lieu à de fructueux (et fulgurants) échanges d'idées. Peu après la publication du théorème 1.5, IRIE, MARQUES et NEVES (2018) ont remarqué que l'argument du lemme de fermeture d'Irie s'appliquait presque à l'identique pour démontrer la densité C^∞ -générique (pour la métrique) des hypersurfaces minimales dans les variétés de dimension entre 3 et 7, la version générique d'un conjecture célèbre de Yau. Quelques mois plus tard, MARQUES, NEVES et SONG (2019) ont raffiné la démonstration pour démontrer que C^∞ -génériquement les hypersurfaces minimales sont en fait équidistribuées dans la variété. L'échange d'idée s'est alors fait en sens inverse : reprenant leur argument, Irie a démontré un résultat d'équidistribution pour les orbites de Reeb. On appelle *courant de Reeb* un courant qui est somme finie de courants d'intégration sur des orbites de Reeb fermées simples (non nécessairement distinctes).

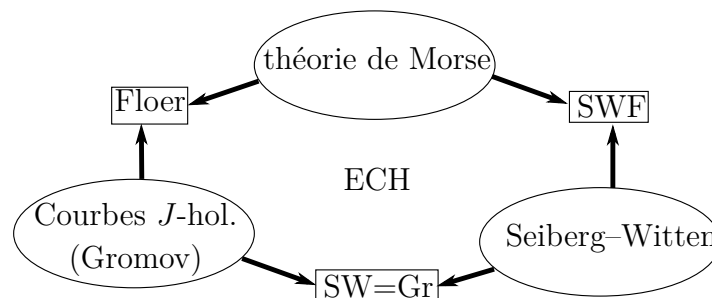
THÉORÈME 1.7 (IRIE, 2018). — *Soit (V, ξ) une variété de contact compacte connexe de dimension 3. Alors, pour un choix C^∞ -générique de forme de contact α , il existe une suite de courants de Reeb qui converge faiblement vers $d\alpha$.*

Ce résultat renforce le lemme de fermeture 1.5. Nous reviendrons sur l'analogie avec les surfaces minimales dans la partie 4.3.

1.4. Survol historique

Les résultats de Irie et Asaoka–Irie sont l'aboutissement de diverses théories sophistiquées développées dans les trois dernières décennies en topologie de petite dimension et en topologie symplectique. Nous allons donner les étapes principales de ce développement. Le lecteur peut passer cette partie s'il le souhaite.

La démonstration du théorème 1.5 est basée sur l'homologie de contact plongée (ECH⁽³⁾) construite par Hutchings (voir HUTCHINGS (2014) pour une présentation et une bibliographie détaillée). Mais cette théorie est elle-même le fruit de l'interaction entre la théorie des courbes J -holomorphes de Gromov, la théorie de Morse et la théorie de Seiberg–Witten.



3. Nous utiliserons des acronymes anglophones comme ECH (pour Embedded Contact Homology) car ceux-ci sont d'usage plus courant.

Pendant longtemps, la principale approche des orbites périodiques des systèmes hamiltoniens (ou des champs de Reeb) était variationnelle, car ces orbites sont les points critiques d'une certaine « fonctionnelle d'action ». Par ailleurs, l'homologie de Morse consiste à étudier les points critiques d'une fonction de Morse f en considérant un complexe de chaînes engendré par les points critiques de f et muni d'une différentielle construite en comptant certaines trajectoires du gradient f (cf. partie 3.1). Suite à l'introduction des courbes J -holomorphes en topologie symplectique par GROMOV (1985) et inspiré par l'homologie de Morse, Floer a construit à la fin des années 1980 une homologie sur la base d'un complexe engendré par les orbites périodiques d'un flot hamiltonien (cf. AUDIN et DAMIAN, 2010 et les références s'y trouvant). La différentielle compte certaines lignes de gradient de la fonctionnelle d'action qui s'interprètent ici comme des courbes J -holomorphes.

De multiples variantes de la théorie de Floer sont apparues, dans des contextes variés. En particulier, KRONHEIMER et MROWKA (2007) ont construit l'homologie de Seiberg–Witten–Floer (aussi appelée « monopole Floer homology ») qui est une théorie de Morse pour la fonctionnelle de Chern–Simons–Dirac, dont les points critiques sont les solutions des équations de Seiberg–Witten (SW) en dimension 3 et dont les lignes de gradient sont les solutions d'équations SW en dimension 4. La théorie de Kronheimer et Mrowka est souvent présentée comme une « catégorification des invariants » SW introduits par SEIBERG et WITTEN, 1994a,b.

Parallèlement, le lien entre courbes J -holomorphes et équations SW a été découvert par Taubes. Son fameux théorème « SW=Gr » (TAUBES, 2000) affirme que sous certaines hypothèses, les invariants SW (qui comptent des solutions des équations SW) coïncident avec les invariants de Gromov–Witten en dimension 4 (qui comptent des courbes J -holomorphes). La motivation initiale de ECH était de construire une interprétation symplectique de la théorie de Seiberg–Witten–Floer, dans l'esprit de SW=Gr. Par ailleurs, la démonstration par TAUBES (2007) de la conjecture de Weinstein a mis en évidence un phénomène de détection des orbites de Reeb : en introduisant un certain paramètre de déformation dans les équations de SW en dimension 3, la courbure des solutions tend à se concentrer sur des orbites de Reeb. Le complexe ECH sera donc engendré par des ensembles d'orbites de Reeb et la différentielle comptera certaines courbes J -holomorphes. L'isomorphisme entre l'homologie de Seiberg–Witten–Floer et ECH, dû à TAUBES (2010a,b,c,d,e) également, reprend les idées de la démonstration de la conjecture de Weinstein (voir aussi AUROUX (2010)).

On sait depuis les travaux de Ekeland–Hofer, Hofer–Zehnder, Viterbo, Oh, Schwarz, etc, qu'il est possible d'extraire des invariants numériques des différentes variantes de l'homologie de Floer et en tirer des applications dynamiques ; c'est la théorie des capacités symplectiques et des invariants spectraux. Motivé par des problèmes de plongements symplectiques, Hutchings a introduit des analogues de ces invariants basés sur ECH, les capacités ECH et les invariants spectraux ECH. Ces nouveaux invariants ne sont définis qu'en dimension 3, mais ils donnent souvent des résultats plus précis que les

invariants classiques. Un résultat crucial pour le lemme de fermeture d’Irie, et spécifique à ces invariants, est la propriété de volume de Cristofaro-Gardiner, Hutchings et Ramos (cf. théorème 4.10), qui affirme que le volume d’une forme de contact apparaît dans l’asymptotique des invariants spectraux ECH.

Organisation du texte

La partie 2 introduit les systèmes hamiltoniens et les champs de Reeb. Nous y expliquons aussi comment déduire le lemme de fermeture sur les surfaces de celui pour les champs de Reeb en dimension 3, à l’aide de la notion de surface de section. La partie 3 donne un aperçu de la construction de l’homologie de contact plongée (ECH). Enfin, la partie 4 montre comment définir et utiliser les invariants spectraux ECH. En particulier, la propriété de volume est discutée dans la partie 4.3. Nous donnerons une idée de sa démonstration dans le cas de la sphère \mathbb{S}^3 dans la partie 4.4 et expliquerons comment elle implique le lemme de fermeture dans la partie 4.5. Notons que nous avons choisi de limiter au maximum les mentions à la théorie de Seiberg–Witten, afin que ce texte garde un niveau de technicité et une longueur raisonnable.

Remerciements

Je remercie Dan Cristofaro-Gardiner pour m’avoir initié à ECH, Sylvain Crovisier et Sobhan Seyfaddini pour leurs commentaires sur une version préliminaire de ce texte, Sylvain Crovisier à nouveau pour m’avoir éclairé sur l’historique et les subtilités du lemme de fermeture, Michael Hutchings pour m’avoir transmis une version préliminaire de HUTCHINGS (2019), Alejandro Kocsard pour l’argument mentionné page 6. Enfin, je remercie aussi Marie-Claude Arnaud, Kei Irie, Patrice Le Calvez, Frédéric Le Roux pour leurs réponses à mes questions.

2. DIFFÉOMORPHISMES HAMILTONIENS, FLOTS DE REEB ET LEURS LIENS

2.1. Difféomorphismes hamiltoniens

Tous les objets considérés dans ce texte seront supposés lisses, c’est-à-dire de classe C^∞ , sauf mention explicite du contraire.

On considère ici une surface Σ , munie d’une forme d’aire ω , c’est-à-dire d’une 2-forme différentielle ne s’annulant en aucun point. Un difféomorphisme $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est dit *conservatif* ou *symplectique* s’il préserve ω . Ces difféomorphismes forment naturellement un groupe, que l’on notera $\text{Diff}(\Sigma, \omega)$ et que l’on munira de la topologie C^∞ . La composante connexe de l’identité sera notée $\text{Diff}_0(\Sigma, \omega)$.

Une isotopie (c’est-à-dire une famille à un paramètre de difféomorphismes) $(\phi^t)_{t \in [0,1]}$ partant de l’identité n’est constituée que de difféomorphismes conservatifs si et seulement si le champ de vecteurs (dépendant du temps) qui l’engendre $X_t = \left(\frac{d}{dt}\phi^t\right) \circ (\phi^t)^{-1}$ vérifie $\mathcal{L}_{X_t}\omega = 0$. Comme ω est fermée, la formule de Cartan permet de réécrire la dérivée de

Lie : $\mathcal{L}_{X_t}\omega = d(\omega(X_t, \cdot))$. La condition pour que cette isotopie soit conservative à tout temps est donc que la 1-forme $\omega(\cdot, X_t)$ soit fermée pour tout t .

DÉFINITION 2.1. — Une isotopie conservative (ϕ^t) est dite hamiltonienne si pour le champ de vecteurs X_t qui l'engendre, la 1-forme $\omega(\cdot, X_t)$ est exacte pour tout t . Toute fonction H_t (dépendant du temps) vérifiant $dH_t = \omega(\cdot, X_t)$ est appelée « hamiltonien engendrant (ϕ^t) ».

Réciproquement, toute fonction dépendant du temps H_t définit grâce à la relation $dH_t = \omega(\cdot, X_{H_t})$ un unique champ de vecteurs X_{H_t} , qui engendre une isotopie hamiltonienne que l'on notera ϕ_H^t .

Les difféomorphismes hamiltoniens sont les difféomorphismes ϕ pour lesquels il existe une isotopie hamiltonienne (ϕ^t) vérifiant $\phi^0 = \text{Id}$ et $\phi^1 = \phi$.

Remarque 2.2. — En réalité, la définition qui précède peut être donnée dans le cadre plus général des variétés symplectiques. Une variété symplectique (M, ω) est une variété différentiable M munie d'une 2-forme fermée et non dégénérée en tout point ω (que l'on appelle forme symplectique). En particulier, une surface munie d'une forme d'aire est une variété symplectique.

Exemple 2.3. — Dans le cas où notre surface est le plan \mathbb{R}^2 muni des coordonnées canoniques (x, y) et de la forme d'aire standard $dx \wedge dy$, la relation $dH_t = \omega(\cdot, X_{H_t})$ s'écrit

$$X_t = (-\partial_y H_t, \partial_x H_t).$$

Le champ X_{H_t} n'est donc rien d'autre que le gradient de H_t (pour la métrique standard) que l'on a tourné de $-\pi/2$. En particulier, X_t est tangent aux courbes de niveau de H_t .

Localement, une surface munie d'une forme d'aire est toujours isomorphe à un ouvert de $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$. Cet exemple décrit donc la situation générale locale à conjugaison près. Le champ de vecteurs engendrant une isotopie hamiltonienne est toujours tangent aux courbes de niveau du hamiltonien H_t , ce pour tout t . Dans le cas d'un hamiltonien indépendant du temps H , la dynamique est par conséquent très simple : les courbes intégrales de X_H suivent les courbes de niveau de H . En dimension plus grande, il est encore vrai que le champ est tangent aux hypersurfaces de niveau de H . Mais comme ces hypersurfaces sont de dimension plus grande, la dynamique sur l'une d'entre elles peut être extrêmement compliquée.

Remarque 2.4. — Historiquement, les systèmes dynamiques hamiltoniens sont issus de la mécanique classique. Par exemple, la loi de Newton bien connue $m\ddot{q} = -\nabla V(q)$ est équivalente, en introduisant une variable « moment » supplémentaire p , à l'équation $(\dot{p}, \dot{q}) = X_H(p, q)$, où H est le hamiltonien « énergie cinétique + énergie potentielle »

$$H(p, q) = \frac{m}{2}|p|^2 + V(q).$$

Revenons à la définition 2.1. La condition que $\omega(\cdot, X_{H_t})$ soit exacte signifie que les isotopies hamiltoniennes sont les isotopies (ϕ^t) telles que pour toute courbe γ sur Σ , l'aire balayée par la famille de courbes $(\phi^t(\gamma))_{t \in [0,1]}$ soit nulle. L'aire considérée ici est bien sûr l'aire (algébrique) induite par la forme ω . Par exemple, une translation non triviale sur le tore standard est une transformation conservative qui n'est pas hamiltonienne : pour un bon choix de γ , l'aire balayée est non nulle.

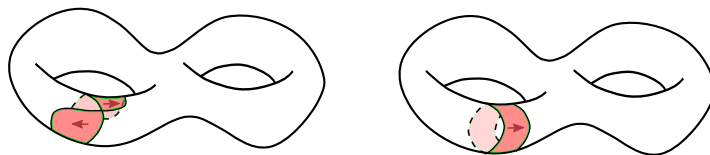


FIGURE 1. Aire balayée nulle sur la figure de gauche, non nulle à droite.

L'aire balayée par $(\phi^t(\gamma))_{t \in [0,1]}$ est appelée *flux* de (ϕ^t) à travers γ . Le flux ne dépend que de la classe d'homologie de γ et définit donc une classe $\text{Flux}(\phi^t) \in H^1(\Sigma, \mathbb{R})$. De manière duale, le flux à travers γ est la moyenne des nombres d'intersection (algébrique) avec γ de toutes les trajectoires $(\phi^t(x))_{t \in [0,1]}$. La classe d'homologie Poincaré duale au flux s'appelle le *vecteur de rotation* de l'isotopie. Intuitivement, le vecteur de rotation est la moyenne des classes d'homologie représentées par les orbites des itérées de l'isotopies. Sa définition est initialement due à SCHWARTZMAN (1957). Une isotopie hamiltonienne est donc une isotopie conservative dont le vecteur de rotation est nul.

L'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens, noté $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$ est un sous-groupe distingué du groupe $\text{Diff}_0(\Sigma, \omega)$. Dans le cas du disque ou de la sphère, ces groupes sont confondus. Pour le tore standard, le quotient $\text{Diff}_0(\Sigma, \omega)/\text{Ham}(\Sigma, \omega)$ s'identifie au groupe des translations sur \mathbb{T}^2 . En genre $g \geq 2$, le quotient $\text{Diff}_0(\Sigma, \omega)/\text{Ham}(\Sigma, \omega)$ s'identifie à $H^1(\Sigma, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g-2}$. Pour plus de détails sur les difféomorphismes hamiltoniens, le lecteur peut consulter par exemple l'ouvrage de MCDUFF et SALAMON (2017).

2.2. Structures de contacts et champs de Reeb

Dans cette partie, nous définissons les structures de contact, les formes de contact et leurs champs de Reeb et nous donnons quelques propriétés et exemples. Les résultats présentés dans ce texte sont spécifiques à la dimension 3. Par souci de simplification, nous introduisons donc les objets seulement dans ce cadre. Cependant, les définitions se généralisent toutes à la dimension (impaire) supérieure. Plus de détails sur le matériel de cette partie peuvent être trouvés par exemple dans le livre de GEIGES (2008).

DÉFINITION 2.5. — *Soit V une variété de dimension 3. Une forme de contact sur V est une 1-forme différentielle α telle que le produit extérieur $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule pas. La structure de contact sur V définie par une forme de contact α est le champ de plans $\xi = \ker \alpha$. Si ξ est une structure de contact, on dit que (V, ξ) est une variété de contact.*

La géométrie de contact étudie les propriétés des structures de contact, les formes de contact ne jouant que le rôle d'objet auxiliaire. Une structure de contact donnée

peut être définie par plusieurs formes de contact. Plus précisément, si ξ est définie par une forme de contact α , l'ensemble des formes de contact définissant ξ est l'ensemble $\{f\alpha \mid f \in C^\infty(V), f \text{ ne s'annule pas}\}$. Donnons quelques exemples.

Exemple 2.6. — L'espace \mathbb{R}^3 de coordonnées cylindriques (r, θ, z) admet une structure de contact « standard » : $\xi_0 = \ker(dz + r^2 d\theta)$. Cet exemple est fondamental car toute structure de contact lui est localement isomorphe (c'est le théorème de Darboux).

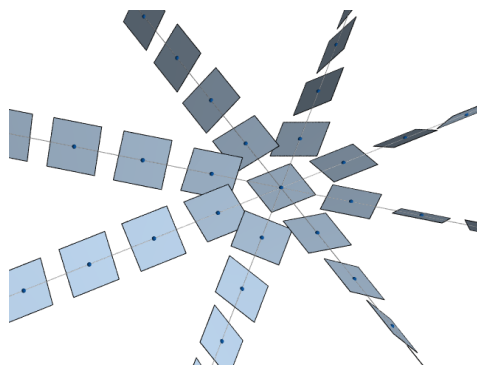


FIGURE 2. La structure de contact standard sur \mathbb{R}^3 (image de P. Massot).

Exemple 2.7. — Dans toute la suite de ce texte, on appellera *domaine étoilé* tout compact de \mathbb{R}^4 qui est l'adhérence d'un ouvert étoilé par rapport à l'origine, et dont le bord est lisse et transverse au champ de vecteur radial. Pour tout domaine étoilé U , la restriction à ∂U de la 1-forme $\lambda = \frac{1}{2}(y_1 dx_1 - x_1 dy_1 + y_2 dx_2 - x_2 dy_2)$ sur $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2)\}$ est une forme de contact et $\ker \lambda|_{\partial U}$ est donc une structure de contact. Par projection radiale, ∂U s'identifie à \mathbb{S}^3 . La structure de contact ainsi induite sur \mathbb{S}^3 ne dépend pas du domaine étoilé choisi (bien que la forme de contact en dépende) et cette structure est appelée structure de contact standard sur la sphère \mathbb{S}^3 .

Exemple 2.8. — Soit (Σ, g) une surface munie d'une métrique riemannienne. La métrique g induit un isomorphisme entre le fibré tangent $T\Sigma$ et son dual le fibré cotangent $T^*\Sigma$. Ce dernier hérite donc lui-même d'une métrique et l'on peut définir le fibré en sphères cotangentes $S_g^*\Sigma$, c'est-à-dire l'ensemble des covecteurs de norme 1. Il porte une forme (et donc une structure) de contact naturelle qui est la restriction à $S_g^*\Sigma$ de la 1-forme de Liouville, c'est-à-dire la 1-forme λ sur $T^*\Sigma$ définie pour tout $q \in \Sigma$, $p \in T_q^*\Sigma$ par $\lambda(q, p) = p \circ d\pi_{(q,p)}$, où $\pi : T^*\Sigma \rightarrow \Sigma$ désigne la projection canonique. En coordonnées locales $q = (q_1, q_2)$, $p = (p_1, p_2)$, la 1-forme de Liouville s'écrit $\lambda = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$, que l'on abrège souvent $\lambda = p dq$.

Un isomorphisme de structures de contact (ou *contactomorphisme*) entre (V, ξ) et (V', ξ') est un difféomorphisme $\phi : V \rightarrow V'$ vérifiant $d\phi_x(\xi_x) = \xi'_{\phi(x)}$ pour tout $x \in V$. Un contactomorphisme ne préserve pas nécessairement de forme de contact.

En dimension 3, les structures de contact sont les champs de plans vérifiant :

$$X, Y \in \xi \text{ champs de vecteurs linéairement indépendants} \implies [X, Y] \notin \xi.$$

C'est une conséquence de la formule $d\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y])$. Les structures de contact sont donc l'extrême opposé des champs de plans intégrables (c'est-à-dire tangents à un feuilletage) qui sont eux caractérisés par : $X, Y \in \xi \implies [X, Y] \in \xi$.

Étant donnée une structure de contact $\xi = \ker \alpha$, la restriction $d\alpha|_{\xi}$ est non dégénérée. Le noyau de $d\alpha$ est donc un fibré en droites qui est transverse à ξ . Cette remarque permet de définir le champ de Reeb d'une forme de contact.

DÉFINITION 2.9. — *Soit α une forme de contact. Le champ de vecteurs de Reeb associé à α est l'unique champ de vecteurs R_{α} sur V vérifiant :*

$$R_{\alpha} \in \ker d\alpha \quad \text{et} \quad \alpha(R_{\alpha}) = 1.$$

Le flot de Reeb de α est le flot engendré par R_{α} . On le notera ϕ_{α}^t .

Les flots de Reeb peuvent aussi être caractérisés comme les champs qui sont transverses à ξ et dont le flot préserve ξ . Reprenons les exemples précédents.

Exemple 2.10. — Le champ de Reeb de la forme de contact $dz + r^2 d\theta$ sur \mathbb{R}^3 est tout simplement le champ de vecteurs constant vertical ∂_z .

Exemple 2.11. — Le champ de Reeb de la forme de contact standard sur la sphère s'écrit $2(y_1 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{y_1} + y_2 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{y_2})$. Les orbites du champ de Reeb sont toutes périodiques de période π . Ce sont les fibres de la fibration de Hopf $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$; c'est-à-dire les intersections de \mathbb{S}^3 avec les droites complexes de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. Pour des bords de domaines étoilés généraux, les orbites du champ de Reeb peuvent être extrêmement compliquées.

Exemple 2.12. — Le flot de Reeb associé à la restriction de la forme de Liouville à un fibré en sphères cotangentes $S_g^* \Sigma$ est le flot géodésique de la métrique g . Les orbites du champ de Reeb sont donc les relevées à $S_g^* \Sigma$ des géodésiques sur Σ . En particulier, il y a ici bijection entre géodésiques fermées et orbites fermées du champ de Reeb.

2.3. Des champs de Reeb aux difféomorphismes hamiltoniens : surfaces de section

Asaoka et Irie déduisent leur lemme de fermeture de celui de Irie, à l'aide de la notion de *surface de section*, introduite par Poincaré dans *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1882).

DÉFINITION 2.13. — *Soient X un champ de vecteurs sur une variété V de dimension 3 et (ϕ_X^t) son flot. Une surface de section de X est une surface à bord Σ , plongée dans V vérifiant les conditions :*

1. *chaque composante connexe du bord ∂X est une orbite périodique de X ,*
2. *X est transverse à Σ en tout point de son intérieur $\text{int } \Sigma = \Sigma \setminus \partial \Sigma$.*

3. l'orbite de tout point $x \in V$ rencontre Σ au moins une fois dans le passé et au moins une fois dans le futur : pour tout $x \in V$ il existe $t_- < 0 < t_+$, tels que $\phi_X^{t_-} \in \Sigma$ et $\phi_X^{t_+} \in \Sigma$.

Exemple 2.14. — Dans le cas de la sphère standard \mathbb{S}^3 , nous avons vu que les orbites de Reeb sont les fibres de la fibration de Hopf. Lorsqu'on identifie le complémentaire d'un point de \mathbb{S}^3 à \mathbb{R}^3 par projection stéréographique, la fibration peut être représentée comme sur la figure 3.

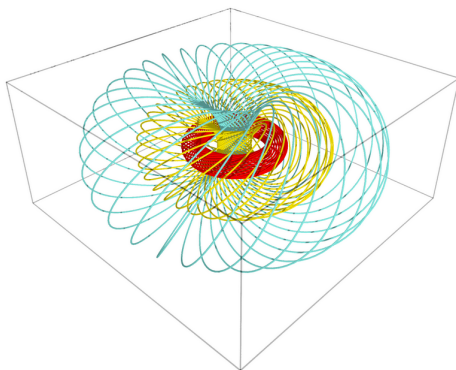


FIGURE 3. La fibration de Hopf, image tirée du site « SageManifold project ».

Le disque unité du plan horizontal est l'âme des tores selon lesquels les orbites s'organisent. Il rencontre toutes les orbites de Reeb exactement une fois. Son bord est lui-même une orbite périodique. Ce disque est donc une surface de section.

Une surface de section Σ d'un champ de vecteurs X porte une *application de premier retour* $\rho : \text{int } \Sigma \rightarrow \text{int } \Sigma$, définie comme suit. Soit $x \in \text{int } \Sigma$. Par la propriété 2 de la définition ci-dessus, pour $t_0 > 0$ suffisamment petit, et tout $t \in]0, t_0]$, on a $\phi_X^t(x) \notin \Sigma$. Par la propriété 3, on peut définir le *temps de premier retour* de x comme le réel strictement positif

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 \mid \phi_X^t(x) \in \Sigma\}.$$

L'application de premier retour est alors définie par $\rho(x) = \phi_X^{\tau(x)}(x)$. Elle associe donc à un point de $\text{int } \Sigma$, le premier point de son orbite future situé sur $\text{int } \Sigma$.

L'application ρ est un difféomorphisme lisse de $\text{int } \Sigma$. Le flot de X peut être en grande partie reconstruit à partir de l'application de premier retour ρ par le procédé de *suspension* (« mapping torus » en anglais). Plus précisément, la suspension d'une application $\rho : \text{int } \Sigma \rightarrow \text{int } \Sigma$ est le quotient

$$\hat{S}_\rho = \text{int } \Sigma \times [0, 1] / (\psi(x), 0) \sim (x, 1).$$

Elle porte un flot naturel $\hat{\rho}^t$ induit par le flot de translation $(x, z) \mapsto (x, z + t)$. Si ρ est une application de premier retour pour une surface de section comme ci-dessus, l'application $\Psi : \hat{S}_\rho \rightarrow V$ induite par $(x, z) \mapsto \phi_X^{z\tau(x)}(x)$ est un plongement dont l'image est $V \setminus \partial\Sigma$. De plus, le flot $\hat{\rho}^t(x)$ et le flot $\phi_X^{t\tau(x)}(x)$ (qui n'est qu'une reparamétrisation

temporelle du flot de X) sont conjugués par Ψ . En particulier, les orbites périodiques de X autres que celle de $\partial\Sigma$ sont en bijection avec les orbites périodiques de ρ .

Dans le cas où V admet une structure de contact ξ et où $X = R_\alpha$ est le champ de Reeb d'une forme de contact α , la forme $d\alpha$ induit une forme d'aire sur toute surface de section Σ . L'application de premier retour préserve cette forme d'aire. Ceci permet d'utiliser les propriétés des difféomorphismes conservatifs des surfaces pour étudier les flots de Reeb. bien sûr, la difficulté réside dans la construction de surfaces de section. Une méthode puissante fondée sur les courbes pseudo-holomorphes, a pour cela été développée par HOFER, WYSOCKI et ZEHNDER (2002, 2003).

De manière originale, la démonstration d'Asaoka–Irie va dans la direction opposée. Elle déduit une propriété des difféomorphismes de surfaces d'une propriété des flots de Reeb en dimension 3. L'idée est de réaliser n'importe quel difféomorphisme hamiltonien d'une surface comme application de premier retour d'une surface de section d'un certain champ de Reeb (quitte à le perturber et éclater la surface en un point). Le lemme suivant est une étape essentielle de cette opération.

LEMME 2.15 (ASAOKA et IRIE, 2016, Lemma 3.3, HUTCHINGS, 2016, Proposition 2.1)

Soit S une surface ayant une composante de bord $\partial S \simeq \mathbb{S}^1$ et munie d'une forme d'aire ω . Soit ψ un difféomorphisme hamiltonien de S , engendré par un hamiltonien à support compact dans $\text{int } S$. Alors, il existe une variété de contact (V, ξ) de dimension 3, un champ de Reeb R sur V et une surface de section Σ de R qui est difféomorphe à S et dont l'application de premier retour $\rho : \text{int } \Sigma \rightarrow \text{int } \Sigma$ est C^∞ conjuguée à ψ .

Idée de la démonstration. — L'idée de la démonstration de ce lemme consiste à construire V en recollant la suspension de ψ avec un modèle local. Soit ϕ un difféomorphisme hamiltonien de $\text{int } S$ qui est l'identité près de ∂S , le voisinage du bord de la suspension \hat{S}_ϕ s'identifie à un ouvert de la forme $(D \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, où D est un disque de \mathbb{R}^2 centré en l'origine. Par cette identification, l'extrémité $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ correspond au bord de la suspension. Sur un tel ouvert, le champ de translation est ∂_z , où z est la coordonnée dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , qui est aussi le champ de Reeb de la forme $dz + r^2 d\theta$ sur \mathbb{R}^3 (et sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). On peut donc compléter la suspension \hat{S}_ϕ en une variété V sans bord, en lui adjoignant $\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le champ de translation se prolonge en un champ sur V et $\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en est une orbite périodique. D'après l'exemple 2.10, le champ R est un champ de Reeb de $D \times \mathbb{S}^1$ pour la structure de contact standard. On peut montrer qu'elle s'étend en une structure de contact ξ sur V de telle sorte que R soit un champ de Reeb pour ξ . Un hélicoïde dans $D \times \mathbb{R}$ fournit alors un germe de surface de section pour R ayant pour bord $\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui se prolonge à V en une surface de section. \square

2.4. Du théorème 1.5 au théorème 1.2

Supposons que le théorème 1.5 (c'est-à-dire le lemme de fermeture pour les champs de Reeb en dimension 3) est vérifié. On démontre alors le théorème 1.2 de la manière suivante. On fixe un difféomorphisme hamiltonien ϕ d'une surface sans bord (M, ω) et

un ouvert U de M et l'on suppose, sans perte de généralité, que U ne contient pas de point périodique de ϕ . Nous allons modifier ϕ de manière à pouvoir utiliser le lemme 2.15 et le réaliser comme application de premier retour d'un flot de Reeb.

La conjecture d'Arnold que nous avons déjà évoquée dans la partie 1.2 a été démontrée par ELIASHBERG (1979) dans le cas des surfaces (il y a plusieurs autres démonstrations, comme celle de LE CALVEZ (2005)). Elle implique que ϕ admet au moins un point fixe p . On peut alors éclater p pour obtenir un difféomorphisme $\tilde{\phi}$ d'une surface ayant une composante de bord \tilde{M} de telle sorte que $\text{int } \tilde{M} \simeq M \setminus \{p\}$ et $\tilde{\phi}|_{\text{int } \tilde{M}}$ s'identifie à $\phi|_{M \setminus \{p\}}$. On voudrait ensuite prolonger $\tilde{\phi}$ en un difféomorphisme hamiltonien ψ d'une surface à bord légèrement plus grande S (avec $\tilde{M} \subset \text{int } S$ et $S \setminus \text{int } \tilde{M}$ difféomorphe à un anneau), qui soit l'identité au voisinage ∂S . On pourrait ensuite appliquer le lemme 2.15 à ψ .

C'est essentiellement ce que font Asaoka et Irie, bien que la mise en œuvre rigoureuse de cette idée ne soit pas immédiate. Le résultat de leur construction est :

- une surface munie d'une forme d'aire (S, ω) ayant une composante de bord,
- une sous-surface à bord $S' \subset S$ telle que $S \setminus \text{int } S'$ est difféomorphe à un anneau,
- un difféomorphisme hamiltonien ψ de S qui coïncide avec l'identité au voisinage du bord, qui laisse invariante la sous-surface S' et dont la restriction à $\text{int } S'$ s'identifie à la restriction de ϕ à un ouvert $M' \subset M$ vérifiant $\phi(M') = M'$ et $U \subset M'$.

On applique le théorème 2.15, ce qui permet de voir ψ comme l'application de premier retour ρ d'un champ de Reeb R , pour une certaine surface de section Σ . L'image de U dans Σ sera encore notée U . Soit U' un ouvert de V n'intersectant pas l'orbite $\partial \Sigma$ et tel que $U = U' \cap \Sigma$.

Le théorème 1.5 affirme alors qu'il existe une suite de champs de Reeb R_n qui convergent en topologie C^∞ vers R , qui coïncident avec R dans le complémentaire de U' dans V , et qui admettent une orbite périodique passant par U' . La surface Σ est encore une surface de section pour les champs R_n (pour n assez grand). Les applications de premier retour ρ_n correspondantes convergent en topologie C^∞ vers ρ et admettent une orbite périodique passant par U . Cela prouve le lemme de fermeture d'Asaoka–Irie.

Remarque 2.16. — Dans l'argument ci-dessus, si M est la sphère \mathbb{S}^2 , la surface S est un disque. La variété de contact construite par la démonstration du lemme 2.15 est alors la sphère \mathbb{S}^3 standard. Par conséquent, le théorème d'Asaoka–Irie sur \mathbb{S}^2 est conséquence du théorème d'Irie sur \mathbb{S}^3 .

Remarque 2.17. — La perturbation de la démonstration ci-dessus n'est pas entièrement supportée dans U ; on perturbe également au voisinage du point fixe p .

3. CONSTRUCTION DE L'HOMOLOGIE DE CONTACT PLONGÉE

3.1. Inspiration : homologie de Morse

Nous expliquons brièvement dans cette partie la construction du complexe de Morse associé à une fonction de Morse et à une métrique riemannienne. Cette construction a inspiré la théorie de Floer et ses variantes, dont l'homologie de contact plongée qui nous intéresse ici. En effet, les différentes théories de Floer sont des adaptations de l'homologie de Morse (définie en dimension finie) à des contextes de dimension infinie.

Soient M une variété lisse compacte sans bord et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur M , c'est-à-dire une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés. Pour toute métrique riemannienne g , les orbites du gradient de f convergent vers des points critiques à l'infini dans le futur et dans le passé. On appelle *variété instable* (resp. *stable*) d'un point critique x l'ensemble des points dont l'orbite converge vers x en $-\infty$ (resp. en $+\infty$). Tout point de la variété appartient donc en particulier à la variété instable d'un point critique. THOM (1949) a observé que les variétés instables d'une fonction de Morse forment une décomposition cellulaire de la variété et peuvent donc être utilisées pour en calculer l'homologie. La dimension de la cellule correspondant à la variété instable d'un point critique x est donnée par l'indice de Morse $i(x)$, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres négatives de la hessienne de f en x .

SMALE (1961) a montré que pour un choix générique de métrique g les variétés stables et instables s'intersectent transversalement⁽⁴⁾. Sous cette condition, l'intersection de la variété instable d'un point x et de la variété stable d'un point y , c'est-à-dire l'espace

$$\mathcal{M}(x, y) = \{z \in M \mid \exists \gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, \dot{\gamma} = -\nabla f(\gamma), \gamma(0) = z, \lim_{-\infty} \gamma = x, \lim_{+\infty} \gamma = y\},$$

est une variété de dimension $i(x) - i(y)$. Cette variété porte une action naturelle de \mathbb{R} par translation le long des orbites. Le quotient $\mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$ est une variété de dimension $i(x) - i(y) - 1$. C'est l'espace des trajectoires de gradients reliant x à y . Cette variété peut être compactifiée de manière naturelle en lui ajoutant les trajectoires brisées reliant x à y , c'est-à-dire les suites finies de trajectoires de gradient $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ telles qu'il existe une suite de points critiques $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = y$ vérifiant $\lim_{-\infty} \gamma_i = x_{i-1}$ et $\lim_{+\infty} \gamma_i = x_i$ pour tout i .

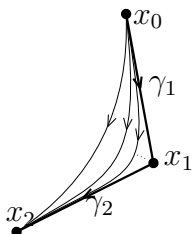


FIGURE 4. Suite de trajectoires de gradient convergeant vers une trajectoire brisée.

4. cette propriété du couple (f, g) porte maintenant le nom de *condition de Smale*.

Dans le cas $i(x) - i(y) = 1$, $\mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$ est une variété compacte de dimension 0, donc un ensemble fini, et l'on note $n(x, y) \in \mathbb{Z}/2$ son cardinal modulo 2. Dans le cas $i(x) - i(y) = 2$, l'espace $\mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$ est, après compactification, une variété à bord de dimension 1, ce qui jouera un rôle dans la suite.

Reprenant l'idée de Thom, WITTEN (1982) a introduit le complexe de chaînes suivant, qui porte aujourd'hui le nom de *complexe de Morse–Thom–Smale–Witten*, ou simplement *complexe de Morse*. Étant donné une fonction de Morse f , une métrique riemannienne g vérifiant la condition de Smale et un entier k , on considère l'espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2$ engendré par les points critiques de $f : CM_k(f, g) := \bigoplus_{x \in \text{Crit}(f), i(x)=k} \mathbb{Z}/2 \cdot x$. Ceci définit un espace vectoriel gradué $CM_*(f, g)$. Il admet une différentielle ∂ définie pour tout point critique x par :

$$\partial x = \sum_{y \in \text{Crit} f, i(y)-i(x)=1} n(x, y) y.$$

Le calcul de $\partial \circ \partial$ se fait comme suit :

$$\partial \circ \partial x = \sum_{y \in \text{Crit}(f), i(y)-i(x)=2} \left(\sum_{z \in \text{Crit}(f), i(z)-i(x)=1} n(x, z)n(z, y) \right) y.$$

Le coefficient $\sum_{z \in \text{Crit}(f), i(z)-i(x)=1} n(x, z)n(z, y)$ est exactement le nombre de trajectoires brisées reliant x à y , autrement dit, c'est le cardinal du bord de $\mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$. Comme le nombre de points du bord d'une variété à bord de dimension 1 est toujours pair, et que nos coefficients⁽⁵⁾ sont pris dans $\mathbb{Z}/2$, on en déduit l'identité $\partial \circ \partial = 0$.

Le complexe ainsi construit n'est autre que le complexe cellulaire de la décomposition cellulaire donnée par les variétés instables et l'homologie obtenue est donc l'homologie usuelle de M . En particulier, cette homologie ne dépend pas des choix de (f, g) .

Exemple 3.1. — Considérons la fonction hauteur sur la sphère comme représentée sur la figure 5. Dans cet exemple, la fonction f admet quatre points critiques a, b, c, d d'indices respectifs 2, 2, 1, 0. Il y a une unique trajectoire de gradient de a à c et de b à c , exactement deux trajectoires de c à d , et bien sûr aucune ne part de d . Les autres trajectoires relient a à d ou b à d . D'où les formules $\partial a = c$, $\partial b = c$, $\partial c = 0$, $\partial d = 0$. On obtient bien les groupes d'homologie de la sphère $\mathbb{S}^2 : H_2 \simeq \mathbb{Z}/2$, $H_1 \simeq 0$, $H_0 \simeq \mathbb{Z}/2$.

Il est possible de construire un isomorphisme (presque) explicite entre l'homologie d'une fonction de Morse f_0 et celle d'une fonction f_1 , par un argument de cobordisme, dont voici grossièrement l'idée. On choisit une fonction de Morse F sur $M \times [-1, 2]$ telle que pour tout $x \in M$, on a $F(x, t) = f_0(x)$ si $t \leq \frac{1}{3}$ et $F(x, t) = f_1(x)$ si $t \geq \frac{2}{3}$. On suppose également que $\text{Crit}(F) = \text{Crit}(f_0) \times \{0\} \cup \text{Crit}(f_1) \times \{1\}$ et que le gradient de F est positivement transverse à $M \times \{s\}$ pour $s = -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2$. En choisissant F et son gradient avec précaution, on peut alors définir une application linéaire $\Phi^F : CM_k(f_0) \rightarrow CM_k(f_1)$

5. L'homologie de Morse peut être définie à coefficients dans \mathbb{Z} , il faut pour cela ajouter comme donnée auxiliaire un choix d'orientation pour chacune des variétés instables. On peut alors définir les nombres $n(x, y)$ comme un compte « algébrique » de trajectoires de x à y .

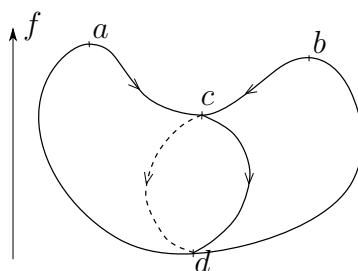


FIGURE 5. Fonction hauteur sur la sphère.

en comptant les trajectoires de gradient de F joignant les points critiques de $\text{Crit} f_0 \times \{0\}$ à ceux de $\text{Crit} f_1 \times \{1\}$, c'est-à-dire par la formule :

$$(1) \quad \Phi^F(x) = \sum_{y \in \text{Crit}(f_1), i(y)=i(x)} \nu(x, y) y,$$

où $\nu(x, y)$ est le nombre modulo 2 de trajectoires de F joignant $(x, 0)$ à $(y, 1)$. Un argument similaire à la démonstration de l'identité $\partial \circ \partial = 0$ permet de montrer que Φ^F est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme en homologie (de plus, l'application induite en homologie ne dépend pas du choix de F).

L'homologie de Morse est détaillée dans le livre de AUDIN et DAMIAN (2010).

3.2. Homologie de contact plongée

L'introduction que nous donnons ici de l'homologie de contact plongée est essentiellement basée sur les notes de HUTCHINGS (2014).

Soient (V, ξ) une variété de contact tridimensionnelle, α une forme de contact définissant ξ et $R = R_\alpha$ le champ de Reeb associé à α .

Fixons une orbite fermée $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow V$ de R et notons $x = \gamma(0)$. Le flot linéarisé de R le long de γ , au temps T , c'est-à-dire l'application $d\phi_R^T(x) : T_x V \rightarrow T_x V$ fixe le vecteur $R(x)$ et préserve le plan ξ_x . Sa restriction à ξ_x préserve la 2-forme $d\alpha_x$. Ses valeurs propres sont donc soit complexes conjuguées et de module 1, soit réelles et inverses l'une de l'autre. Si 1 n'en est pas valeur propre, on dit que l'orbite γ est *non dégénérée*. Si les valeurs propres sont de module 1 (et complexes conjuguées), on dit que l'orbite est *elliptique*, sinon elles sont réelles distinctes (positives ou négatives) et inverse l'une de l'autre et l'orbite est dite *hyperbolique* (positivement ou négativement). Pour un choix C^∞ -générique de α , toutes les orbites de Reeb fermées sont non dégénérées. On dit alors que la forme α est *non dégénérée*.

Les orbites de R sont solutions d'un problème variationnel. En effet, un lacet libre γ est point critique de la *fonctionnelle d'action* associée à α

$$\mathcal{A}_\alpha : C^\infty(\mathbb{S}^1, V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \int_\gamma \alpha,$$

si et seulement s'il est (la reparamétrisation d'une) orbite fermée de R . De plus, son action $\mathcal{A}_\alpha(\gamma)$ n'est autre que sa période. Par analogie avec la partie 3.1 (en remplaçant la fonction f par l'action \mathcal{A}_α), on pourrait tenter de définir un complexe de chaînes

engendré par les orbites de Reeb fermées; c'est d'ailleurs ce qu'a fait Floer avec succès pour étudier les orbites 1-périodiques des systèmes hamiltoniens. La construction du complexe ECH est différente : ses générateurs seront des ensembles d'orbites simples munies de multiplicités.

Plus précisément, étant donnée une classe d'homologie $\Gamma \in H_1(Y)$, on définit un complexe de chaînes $ECC(Y, \alpha, \Gamma)$ sur $\mathbb{Z}/2$ engendré par les ensembles finis $\gamma = \{(\gamma_1, m_1), \dots, (\gamma_k, m_k)\}$ où les γ_i sont des orbites de R_α fermées simples et deux-à-deux distinctes et les m_i sont des entiers strictement positifs, tels que

- si γ_i est hyperbolique, alors $m_i = 1$,
- l'identité $\sum_i m_i [\gamma_i] = \Gamma$ est vérifiée dans $H_1(Y)$.

Nous appellerons *générateurs ECH* de tels ensembles. On munit $ECC(Y, \lambda, \Gamma)$ d'une différentielle que nous allons rapidement décrire. L'homologie du complexe obtenu constituera l'*homologie de contact plongée* ECH.

La définition de la différentielle requiert le choix d'une donnée auxiliaire, une structure presque complexe sur $\mathbb{R} \times V$ (c'est-à-dire un champ d'endomorphisme $J \in \text{End}(\mathbb{R} \times TV)$ tel que $J^2 = -\text{Id}$) qui est \mathbb{R} -invariante, vérifie $J(\partial_s) = R$ (où s désigne la coordonnée dans \mathbb{R}), préserve ξ et induit sur ξ une structure complexe compatible avec l'orientation donnée par $d\alpha$.

Mentionnons que la variété $\mathbb{R} \times V$ s'appelle la *symplectisation* de V car elle porte une structure symplectique donnée par la forme $\omega = d(e^s \alpha)$. Ce choix de donnée auxiliaire remplace le choix de métrique riemannienne dans la construction de la différentielle du complexe de Morse. Depuis l'article fondateur de GROMOV (1985), on sait étudier et utiliser de manière fructueuse les espaces de courbes J -holomorphes, c'est-à-dire d'applications $u : (\Sigma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J)$ avec (Σ, j) une surface de Riemann et vérifiant $du \circ j = J \circ du$. On définit la différentielle sur $ECC(Y, \lambda, \Gamma)$ non pas en comptant certaines courbes J -holomorphes. Les courbes holomorphes que nous considérerons seront définies sur des surfaces de Riemann épointées (à extrémités négatives et positives). Sur le plan de l'intuition, ces courbes remplacent les trajectoires de gradient de la partie 3.1.

Soient $\gamma = \{(\gamma_i, m_i)\}$ et $\beta = \{(\beta_j, n_j)\}$ deux générateurs ECH. On considère l'ensemble des courbes J -holomorphes u qui convergent vers $\{+\infty\} \times \sum m_i \gamma_i$ en les extrémités positives et vers $\{-\infty\} \times \sum n_j \beta_j$ en les extrémités négatives (cf. Figure 6), et qui ont un « indice ECH » égal à 1 (nous reviendrons sur cet indice plus bas). Cette condition d'indice force ces courbes à être des unions de revêtements multiples de cylindres triviaux (c'est-à-dire de la forme $\mathbb{R} \times \gamma$ avec γ orbite de Reeb fermée), et de courbes J -holomorphes plongées (d'où la terminologie « homologie de contact plongée »). On dit que deux telles courbes sont équivalentes si elles définissent le même courant et l'on définit l'espace « de module » $\mathcal{M}(\gamma, \beta)$ comme l'ensemble de ces courbes modulo équivalence. Puisque J est \mathbb{R} -invariante, $\mathcal{M}(\gamma, \beta)$ est invariant par \mathbb{R} -translation. De manière analogue à la construction du complexe de Morse, l'espace quotient $\mathcal{M}(\gamma, \beta)/\mathbb{R}$ est un ensemble fini pour un choix générique de J , et l'on note $n(\gamma, \beta)$ son cardinal modulo 2. On définit alors le coefficient β de $\partial\gamma$ par $\langle \partial\gamma, \beta \rangle = n(\gamma, \beta)$.

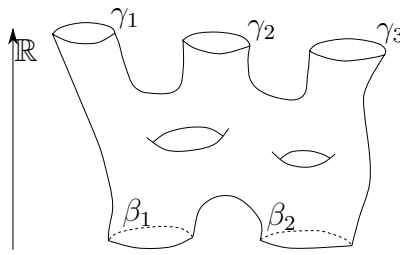


FIGURE 6. Exemple de courbe ECH.

La démonstration de l'identité $\partial \circ \partial = 0$ passe, comme dans le cas de l'homologie de Morse, par l'étude de courbes « brisées », l'analyse étant cependant ici bien plus compliquée.

3.3. Quelques informations sur l'« indice ECH »

Étant donnés deux générateurs ECH γ, β comme ci-dessus, et une classe d'homologie relative $Z \in H_2(V, \gamma, \beta)$, l'indice ECH est défini dans HUTCHINGS (2002) par

$$(2) \quad I(\gamma, \beta, Z) = c_\tau(Z) + Q_\tau(Z) + \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} CZ_\tau(\gamma_i^k) - \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} CZ_\tau(\beta_j^k).$$

Précisons un peu. Dans cette formule, τ est un choix auxiliaire d'une trivialisation de ξ le long de chacune des orbites de Reeb fermées. L'indice s'avère ne pas dépendre de ce choix. Le terme $c_\tau(Z)$ est une classe de Chern relative, c'est le nombre de zéros d'une section générique de ξ au-dessus d'une surface représentant Z qui soit τ -triviale au bord (c'est-à-dire ne « tourne » pas par rapport à τ le long de γ et β). Le terme $Q_\tau(Z)$ est une auto-intersection relative, c'est le nombre d'intersection algébrique de deux surfaces transverses qui représentent toutes deux Z dans $\mathbb{R} \times V$ et sont τ -triviales (c'est-à-dire approchent γ, β « sans s'enlacer » dans un voisinage tubulaire déterminé par τ). Voir HUTCHINGS (2002) pour les détails de cette définition.

L'indice ECH d'une courbe J -holomorphe C reliant des générateurs ECH γ et β est ensuite défini par $I(C) = I(\gamma, \beta, [C])$.

Si $Z, Z' \in H_2(V, \gamma, \beta)$, l'indice vérifie la formule

$$I(\gamma, \beta, Z) - I(\gamma, \beta, Z') = \langle c_1(\xi) + 2PD(\Gamma), Z - Z' \rangle.$$

Ceci implique que lorsque la classe $c_1(\xi) + 2PD(\Gamma)$ est divisible par d dans $H^2(V, \mathbb{Z})$ modulo torsion⁽⁶⁾, ECH admet une \mathbb{Z}/d -graduation relative induite par I . Si cette classe est de torsion, on obtient une \mathbb{Z} -graduation relative.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'indice ECH $I(C)$ d'une courbe J -holomorphe C n'est pas l'indice de Fredholm $\text{Ind}(C)$ de l'opérateur de Cauchy–Riemann, c'est-à-dire de l'opérateur dont les courbes J -holomorphes sont les solutions. En revanche,

6. Comme pour tout fibré symplectique, la première classe de Chern $c_1(\xi)$ d'une structure de contact est bien définie, car le groupe $\text{Sp}(2n)$ des matrices symplectiques a le type d'homotopie de $U(n)$.

ces deux indices sont reliés par l'inégalité suivante, souvent présentée comme la clé de la définition de l'homologie de contact plongée.

THÉORÈME 3.2 (HUTCHINGS, 2002). — *Si C est une courbe J -holomorphe « injective quelque part⁽⁷⁾ » reliant γ à β , alors $\text{Ind}(C) \leq I(C)$. De plus, s'il y a égalité, alors C est plongée.*

Cette inégalité implique notamment le fait qu'une courbe d'indice ECH égal à 1 (c'est-à-dire entrant en jeu dans la définition de la différentielle) est la réunion de revêtement multiples de cylindres triviaux et d'une courbe J -holomorphe plongée.

3.4. Lien avec la théorie de Seiberg–Witten–Floer

Notons provisoirement $ECH_*(V, \alpha, \Gamma, J)$ l'homologie du complexe $ECC_*(V, \alpha, \Gamma)$ construite à l'aide d'une structure presque complexe J . Par analogie avec la théorie de Morse mais également d'autres homologies de même type (comme l'homologie de Floer hamiltonienne), on peut s'attendre à ce que les groupes d'homologie $ECH_*(V, \alpha, \Gamma, J)$ ne dépendent pas (à isomorphisme canonique près) des choix de J et de α . On s'attend aussi à ce qu'un isomorphisme entre de tels groupes $ECH_*(V, \alpha', \Gamma, J')$ et $ECH_*(V, \alpha, \Gamma, J)$ puisse être construit en comptant certaines courbes d'indice ECH nul. Cette idée se heurte à des obstacles techniques qui n'ont à ce jour pas été surmontés. Heureusement, ils peuvent être contournés grâce au théorème suivant.

THÉORÈME 3.3 (TAUBES, 2010a,b,c,d,e). — *Si V est connexe, alors il y a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels relativement gradués*

$$ECH_*(V, \alpha, \Gamma, J) \simeq \widehat{HM}^{-*}(V, \mathfrak{s}_\xi + PD(\Gamma)).$$

où \mathfrak{s}_k est la structure spin^c canoniquement associée à la structure de contact ξ et \widehat{HM}^* désigne la version « from » de la cohomologie de Seiberg–Witten–Floer définie par KRONHEIMER et MROWKA (2007).

Ce théorème affirme que ECH ne dépend que de V , de ξ et de Γ . L'invariance est plus forte encore : comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de structures spin^c est un espace affine sur $H^2(V)$, on peut compenser un changement de ξ en modifiant Γ .

Remarque 3.4. — COLIN, GHIGGINI et HONDA (2011) ont montré que l'homologie de contact plongée est aussi isomorphe à l'homologie de Heegard–Floer $HF^+(-V, \mathfrak{s}_\xi + PD(\Gamma))$. Par ailleurs, l'isomorphisme direct entre la cohomologie de Seiberg–Witten–Floer et l'homologie de Heegard–Floer a été établi par Kutluhan, Lee et Taubes.

7. Pour une courbe J -holomorphe, l'« injectivité quelque part » est une condition technique assurant que l'opérateur de Cauchy–Riemann est transverse et donc que l'espace de modules de courbes J -holomorphes est une variété au voisinage de C .

Le théorème 3.3 est un raffinement de la démonstration de TAUBES (2007) de la conjecture de Weinstein. En fait, comme expliqué dans la partie 1.4, ECH a été construit pour que cet isomorphisme soit vérifié (voir aussi le séminaire Bourbaki de AUROUX (2010)).

Remarque 3.5. — Lorsque $c_1(\xi) + 2PD(\Gamma)$ est de torsion (par un bon choix de Γ , cette condition peut être toujours être réalisée⁽⁸⁾), alors $\widehat{HM}^{-*}(V, \mathfrak{s}_\xi + PD(\Gamma))$ est infiniment engendré comme $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel. Ceci implique en particulier la conjecture de Weinstein : si pour un certain choix de α , le champ R_α n’admettait pas d’orbite fermée, alors $ECH_*(V, \xi, \Gamma)$ serait trivial si $\Gamma \neq 0$ et serait de rang 1 (engendré par le générateur ECH vide) si $\Gamma = 0$, ce qui contredirait le théorème 3.3. Par ailleurs, pour un entier k suffisamment grand, $\widehat{HM}^{-k}(V, \mathfrak{s}_\xi + PD(\Gamma))$ est de dimension finie (KRONHEIMER et MROWKA, 2007).

3.5. Homologie de contact plongée des ellipsoïdes

L’homologie de contact plongée des bords d’ellipsoïdes (irrationnels) peut être explicitement calculée. En effet, pour des raisons d’indices, la différentielle du complexe ECH s’y annule. Dans certains cas plus généraux que des ellipsoïdes mais où la variété a de nombreuses symétries, ECH aussi peut être calculée explicitement en mettant en place un complexe de nature combinatoire (voir par exemple CHOI, CRISTOFARO-GARDINER, FRENKEL, HUTCHINGS et RAMOS (2014) et HUTCHINGS et SULLIVAN (2006)).

Soient $a, b > 0$ des réels et, identifiant \mathbb{R}^4 à \mathbb{C}^2 , considérons l’ellipsoïde

$$E(a, b) = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\pi|z_1|^2}{a} + \frac{\pi|z_2|^2}{b} \leq 1 \right\}.$$

En tant que domaine étoilé de \mathbb{R}^4 , son bord $\partial E(a, b)$ admet la structure de contact définie par la restriction de la forme $\lambda = \frac{1}{2}(y_1 dx_1 - x_1 dy_1 + y_2 dx_2 - x_2 dy_2)$. Le champ de Reeb correspondant s’écrit en coordonnées polaires :

$$R = \frac{2\pi}{a} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{2\pi}{b} \frac{\partial}{\partial \theta_2}.$$

L’ellipsoïde $E(a, b)$ est dit *irrationnel* si le rapport a/b est irrationnel. Dans ce cas, le champ de Reeb R n’admet que deux orbites périodiques simples, γ_1 et γ_2 , qui sont respectivement les intersections de $\partial E(a, b)$ avec $\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$. Les linéarisations du flot le long de ces orbites peuvent être calculées explicitement, ce qui permet de vérifier que ces deux orbites sont elliptiques.

Les générateurs du complexe $ECC(\partial E(a, b), \lambda, 0)$ sont donc les ensembles d’orbites $\{(\gamma_1, m_1), (\gamma_2, m_2)\}$ avec $m_1 \geq 0$ ou $m_2 \geq 0$ (avec la convention que $m_i = 0$ signifie que γ_i n’est pas présente dans l’ensemble d’orbite).

8. Dans le cas d’une variété de contact (V, ξ) de dimension 3, on a $c_1(\xi) = 0 \pmod{2}$. En effet, en utilisant les classes de Stiefel–Whitney, $c_1(\xi) \pmod{2} = w_2(\xi) = w_2(TV) = 0$, où la deuxième égalité vient de la co-orientabilité de ξ et la dernière du fait que toute variété de dimension 3 est parallélisable.

La graduation du complexe peut être également calculée explicitement. Avec la convention $I(\emptyset) = 0$, on obtient :

$$I(\{(\gamma_1, m_1), (\gamma_2, m_2)\}) = m_1 + m_2 + 2m_1m_2 + \sum_{i=1}^{m_1} (2\lfloor i\frac{a}{b} \rfloor + 1) + \sum_{i=1}^{m_2} (2\lfloor i\frac{b}{a} \rfloor + 1).$$

Cet indice est toujours pair, et la différentielle ∂ est donc nulle, puisque celle-ci est de degré -1 . Les groupes $ECH_k(V, \lambda, 0)$ ont donc pour dimension le nombre d'entiers naturels m_1, m_2 vérifiant $I(\{(\gamma_1, m_1), (\gamma_2, m_2)\}) = k$.

Pour $k < 0$ ou k impair, cette dimension est donc nulle. Pour k pair, c'est moins évident, mais on peut se convaincre que la dimension est 1 en remarquant que si l'on note T le triangle du plan délimité par l'axe des abscisses et la droite de pente $-b/a$ passant par le point (m_1, m_2) , alors l'entier $1 + \frac{1}{2}I(\{(\gamma_1, m_1), (\gamma_2, m_2)\})$ est le nombre de points de \mathbb{Z}^2 appartenant à T . De telles (très jolies) astuces combinatoires apparaissent également dans les autres cadres où les groupes ECH sont calculés comme CHOI, CRISTOFARO-GARDINER, FRENKEL, HUTCHINGS et RAMOS (2014) et HUTCHINGS et SULLIVAN (2006).

Nous avons donc identifiés les groupes ECH pour des ellipsoïdes. Comme les groupes ECH ne dépendent pas de la forme de contact, on en déduit que les groupes ECH de la sphère (S^3, ξ) standard sont :

$$(3) \quad ECH_k(\mathbb{S}^3, \xi, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est impair ou strictement négatif,} \\ \mathbb{Z}/2, & \text{si } k \text{ est pair et positif,} \end{cases}$$

$ECH_0(\mathbb{S}^3, \xi)$ étant engendré par la classe $[\emptyset]$.

Nous utiliserons cette structure très simple de ECH pour la sphère dans la partie 4.4.

3.6. Structures supplémentaires sur l'homologie de contact plongée

3.6.1. *L'application U .* — Dans le cas où V est connexe, l'homologie de contact plongée porte une application U de degré -2 :

$$U : ECH_*(V, \xi, \Gamma) \rightarrow ECH_{*-2}(V, \xi, \Gamma)$$

Cette application peut être construite directement en comptant des courbes J -holomorphes d'indice ECH égal à 2 et passant par un point donné. Elle correspond aussi via l'isomorphisme de Taubes (théorème 3.3) à une application analogue définie pour la cohomologie de Seiberg–Witten–Floer, qui est réminiscente du fait que cette théorie est une forme de cohomologie S^1 -équivariante. Lorsque $c_1(\xi) + 2PD(\Gamma)$ est de torsion, U est un isomorphisme en degré suffisamment grand.

3.6.2. *ECH d'une union disjointe.* — Supposons que (V, ξ) est une union disjointe de variétés de contact $(V_1, \xi_1), \dots, (V_n, \xi_n)$ et que $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \in H_1(Y)$. On a alors un isomorphisme canonique, induit par la réunion des générateurs ECH :

$$(4) \quad ECH_*(V, \xi, \Gamma) \simeq \bigotimes_{i=1}^n ECH_*(V_i, \xi_i, \Gamma_i).$$

L'application U s'étend alors aux variétés non connexes par la formule :

$$(5) \quad U(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n) := \sum_{i=1}^n \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_{i-1} \otimes U(\gamma_i) \otimes \gamma_{i+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_n.$$

3.6.3. Application induite par un cobordisme. — Parmi les nombreuses variantes de cobordismes symplectiques entre variétés de contact, voici celle qui s'avère pertinente ici. On appelle *cobordisme symplectique faiblement exact* entre deux variétés V_- et V_+ munies de formes de contact α_- et α_+ , une variété à bord X , de bord $\partial X = V_+ - V_-$, munie d'une forme symplectique exacte $\omega = d\lambda$, telle que $\omega|_{V_-} = d\alpha_-$ et $\omega|_{V_+} = d\alpha_+$.

Par exemple, si X_1, \dots, X_d sont des domaines étoilés deux à deux disjoints et inclus dans un domaine étoilé X de \mathbb{R}^4 (cf. exemple 2.7), alors $X \setminus \bigcup_{i=1}^d X_i$ est un cobordisme symplectique faiblement exact entre $\bigcup_{i=1}^d \partial X_i$ et ∂X .

De manière analogue aux morphismes définis en homologie de Morse (cf. formule (1)), tout tel cobordisme symplectique X induit un morphisme

$$\Psi : ECH_*(V_+, \xi_+, \Gamma_+) \rightarrow ECH_*(V_-, \xi_-, \Gamma_-),$$

pour tous $\Gamma_+, \Gamma_- \in H_1(V)$, construit grâce à la théorie de Seiberg–Witten et en particulier le théorème 3.3. Les classes d'homologie $\Gamma_+, \Gamma_- \in H_1(V)$ sont a priori quelconques, mais le morphisme Ψ ne peut être non trivial que si Γ_+ et Γ_- induisent la même classe dans X . Cette construction est fonctorielle, au sens où le morphisme induit par la composition de deux cobordismes est la composition des morphismes induits par chacun des cobordismes. De plus, les morphismes de cobordisme commutent avec U .

3.6.4. Sphère standard et cobordismes. — Soient $U \subset V \subset \mathbb{R}^4$ deux domaines étoilés. Le morphisme induit par cobordisme $\Psi : ECH_*(\partial V, \lambda, 0) \rightarrow ECH_*(\partial U, \lambda, 0)$ est un isomorphisme et envoie donc l'unique classe non nulle de $ECH_{2k}(\partial V, \lambda, 0)$ sur la classe correspondante de $ECH_{2k}(\partial U, \lambda, 0)$, pour tout entier $k \geq 0$ (cf. (3))

Ceci se généralise au cas où U est la réunion disjointe de domaines étoilés à bord lisse U_1, \dots, U_d . Sous l'hypothèse $U \subset V$, le cobordisme naturel $V \setminus U$ induit une application $\Psi : ECH_*(\partial V, \lambda, 0) \rightarrow ECH_*(\partial U, \lambda, 0) = \bigotimes_{i=1}^d ECH_*(\partial U_i, \lambda, 0)$. Pour chaque entier naturel k , elle se restreint en une application

$$ECH_{2k}(\partial V, \lambda, 0) \longrightarrow \bigoplus_{k_1 + \cdots + k_d = k} \bigotimes_{i=1}^d ECH_{2k_i}(\partial U_i, \lambda, 0) \simeq \bigoplus_{k_1 + \cdots + k_d = k} \mathbb{Z}/2 \cdot \sigma_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{k_d}^d,$$

où $\sigma_{k_i}^i$ désigne le générateur de $ECH_{2k_i}(\partial U_i, \lambda, 0)$. De plus, Ψ envoie la classe non nulle de $ECH_{2k}(\partial V, \lambda, 0)$ sur $\sum_{k_1 + \cdots + k_d = k} \sigma_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{k_d}^d$.

4. INVARIANTS SPECTRAUX ECH ET PROPRIÉTÉ DE VOLUME

Rappelons que les orbites de Reeb sont les valeurs critiques de la fonctionnelle d'action associée à α :

$$\mathcal{A}_\alpha(\gamma) = \int_\gamma \alpha.$$

Étudier les valeurs critiques de cette fonctionnelle doit donc nous donner des informations sur ces orbites. Une méthode classique pour trouver les valeurs critiques d'une fonctionnelle consiste à utiliser la méthode du min-max.

4.1. Inspiration : invariants par min-max pour des fonctions

Illustrons cette idée pour les points critiques d'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur une variété compacte. Pour $\sigma \in H_*(M, \mathbb{Z}/2)$ une classe d'homologie non nulle, on pose

$$c_\sigma(f) = \min_{[s]=\sigma} \max_{|s|} f,$$

où $|s|$ désigne le support du cycle s qui représente σ .

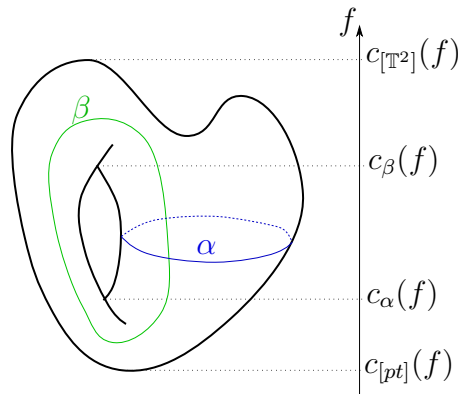


FIGURE 7. Exemple d'invariants min-max pour une fonction hauteur sur le tore.

Notons que $c_\sigma(f)$ peut alternativement être définie par la formule :

$$(6) \quad c_\sigma(f) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \sigma \in \text{Im}(\iota_*^\lambda)\},$$

où $\iota_*^\lambda : H_*(f^\lambda) \rightarrow H_*(M)$ désigne l'application induite en homologie par l'inclusion du sous-niveau $f^\lambda = \{x \in M \mid f(x) \leq \lambda\}$ dans M .

L'homologie des sous-niveaux de f change en la valeur $c_\sigma(f)$ qui doit donc être une valeur critique de f . On a de plus une intéressante propriété de continuité :

PROPOSITION 4.1. — *L'application $f \mapsto c_\sigma(f)$ est continue (et même lipschitzienne) en la norme C^0 .*

Démonstration. — Étant données deux fonctions f, g et un réel λ , l'inclusion $g^{\lambda + \max(f-g)} \subset f^\lambda$ induit un morphisme $H_*(g^{\lambda + \max(f-g)}) \rightarrow H_*(f^\lambda)$, compatible avec les morphismes ι_*^λ de f et g respectivement. On en déduit $c_\sigma(f) \leq c_\sigma(g) + \max(f - g)$ et la continuité en découle. \square

4.2. Filtration par l'action et invariants spectraux

L'action des orbites de Reeb peut être naturellement définie pour un ensemble d'orbites $\gamma = \{(\gamma_1, m_1), \dots, (\gamma_k, m_k)\}$ par la formule

$$\mathcal{A}_\alpha(\gamma) = \sum_{i=1}^k m_i \mathcal{A}_\alpha(\gamma_i) = \sum_{i=1}^k m_i \int_{\gamma_i} \alpha.$$

Considérons le sous-espace vectoriel $ECC_*^\lambda(V, \alpha, \Gamma)$ de $ECC_*(V, \alpha, \Gamma)$ engendré par les ensembles d'orbites fermées d'action *plus petite que* λ :

$$ECC_*^\lambda(V, \alpha, \Gamma) = \bigoplus_{\mathcal{A}_\alpha(\gamma) \leq \lambda} \mathbb{Z}/2 \cdot \gamma.$$

Une application de la formule de Stokes permet de montrer :

LEMME 4.2. — *Pour tout choix de structure presque complexe vérifiant les conditions de la partie 3.2, la différentielle ∂ définie sur $ECC_*(V, \alpha, \Gamma)$ vérifie*

$$\langle \partial\gamma, \beta \rangle \neq 0 \implies \mathcal{A}_\alpha(\gamma) \geq \mathcal{A}_\alpha(\beta).$$

On en déduit que $ECC_*^\lambda(V, \alpha, \Gamma)$ forme un sous-complexe de $ECC_*(V, \alpha, \Gamma)$. Comme pour le complexe complet, l'homologie de ce sous-complexe ne dépend pas de J . En revanche, celle-ci dépend du choix de α et on la notera $ECH^\lambda(V, \alpha, \Gamma)$. La famille de ces groupes indexée par λ s'appelle *homologie de contact plongée filtrée*. L'inclusion des complexes induit une application naturelle $\iota_\alpha^\lambda : ECH^\lambda(V, \alpha, \Gamma) \rightarrow ECH(V, \xi, \Gamma)$. Les applications induites par cobordismes sont compatibles avec la filtration par l'action. Plus précisément, si X est un cobordisme symplectique faiblement exact entre V_- et V_+ , on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ un morphisme canonique $\Psi^\lambda : ECH^\lambda(V_+, \alpha_+, \Gamma_+) \rightarrow ECH^\lambda(V_-, \alpha_-, \Gamma_-)$ vérifiant

$$(7) \quad \iota_{\alpha_-}^\lambda \circ \Psi^\lambda = \Psi \circ \iota_{\alpha_+}^\lambda.$$

Dans la définition des invariants spectraux ECH, cette homologie filtrée va jouer le rôle que tenait l'homologie des sous-niveaux dans la définition des invariants de min-max de la partie précédente (comparer la définition ci-dessous à la formule (6)).

DÉFINITION 4.3 (Invariants spectraux ECH). — *Soit $\sigma \in ECH(V, \xi, \Gamma)$ une classe non nulle et α une forme de contact non dégénérée. L'invariant spectral de α associé à la classe σ est le réel*

$$c_\sigma(\alpha) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \sigma \in \text{Im}(\iota_\alpha^\lambda)\}.$$

Cette définition, due à HUTCHINGS (2011), est inspirée par une définition analogue dans le cas de l'homologie de Floer, initialement due à VITERBO (1992), ayant connu un grand succès. On appelle *spectre* d'une forme de contact α et on note $\text{spec}(\alpha)$ l'ensemble des valeurs que prend l'action \mathcal{A}_α sur l'ensemble des ensembles finis d'orbites fermées du champ R_α (incluant l'ensemble vide). La terminologie « invariant spectral » vient de la première des propriétés suivantes.

PROPOSITION 4.4 (Propriétés des invariants spectraux). — Soient σ une classe ECH non nulle et α une forme de contact non dégénérée. Alors,

1. (Spectralité) $c_\sigma(\alpha) \in \text{spec}(\alpha)$, autrement dit $c_\sigma(\alpha)$ est l'action d'un certain ensemble d'orbites fermées de R_α ;
2. (Monotonie) $c_\sigma(\alpha) \leq c_\sigma(f\alpha)$ pour toute fonction lisse $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f > 1$;
3. (Changement d'échelle) $c_\sigma(s\alpha) = s c_\sigma(\alpha)$ pour tout réel $s > 0$.

La propriété de spectralité suit directement de la définition. La propriété de changement d'échelle est une conséquence du fait que $s\alpha$ a les mêmes orbites de Reeb fermées que α et que pour une orbite donnée, l'action pour $s\alpha$ vaut s fois l'action pour α . La propriété de monotonie, quant à elle, se démontre en appliquant à un cobordisme approprié l'inégalité suivante, conséquence immédiate de (7) : pour tout cobordisme symplectique faiblement exact d'application induite $\Psi : ECH(V_+, \alpha_+, \Gamma_+) \rightarrow ECH(V_-, \alpha_-, \Gamma_-)$, alors

$$(8) \quad c_{\Psi(\sigma)}(\alpha_-) \leq c_\sigma(\alpha_+).$$

Notons que si $\|f - 1\|_{C^0} \leq \varepsilon$, la propriété de monotonie et la propriété de changement d'échelle impliquent l'inégalité

$$(9) \quad |c_\sigma(\alpha) - c_\sigma(f\alpha)| \leq c_\sigma(\alpha) \|1 - f\|_{C^0}.$$

On en déduit un résultat analogue à la proposition 4.1 :

PROPOSITION 4.5. — Pour toute classe ECH non nulle σ , l'application c_σ , qui est a priori définie seulement sur l'ensemble des formes de contact non dégénérées, s'étend en une application continue (encore notée c_σ) définie sur l'espace de toutes les formes de contact définissant ξ , muni de la topologie C^0 . L'application étendue vérifie les propriétés énoncées dans la proposition 4.4.

Remarque 4.6. — Une application astucieuse du lemme de Sard, permet de montrer que pour toute forme de contact α , le spectre de α est de mesure (de Lebesgue) nulle.

Cette propriété, couplée avec la propriété de continuité, s'avère extrêmement utile pour étudier les invariants spectraux. Par exemple, si au cours d'une déformation de la forme α le spectre demeure constant, on en déduit que tous les invariants spectraux restent invariants par déformation. Ceci jouera un rôle dans la démonstration du lemme de fermeture d'Irie.

Exemple 4.7 (Invariants spectraux des ellipsoïdes). — Reprenons les notations de la partie 3.5. Les actions des orbites fermées sont aisément calculées : $\mathcal{A}_\alpha(\gamma_1) = a$ et $\mathcal{A}_\alpha(\gamma_2) = b$ et donc pour un générateur ECH quelconque :

$$\mathcal{A}_\alpha(\{(\gamma_1, m_1), (\gamma_2, m_2)\}) = am_1 + bm_2.$$

Notons σ_k la classe non nulle de $ECH_{2k}(\partial E(a, b), \lambda)$. Nous avons vu qu'elle admet un unique représentant qui s'écrit $\{(\gamma_1, m_1), (\gamma_2, m_2)\}$ où m_1, m_2 sont tels que le triangle T ,

délimité par les axes de coordonnées et la droite de pente $-b/a$ passant par le point (m_1, m_2) , contienne k points à coordonnées entières. Alors,

$$c_{\sigma_k}(\lambda) = \mathcal{A}_\alpha(\{(\gamma_1, m_1), (\gamma_2, m_2)\}) = am_1 + bm_2.$$

Faisons maintenant la remarque suivante. Notant $c = am_1 + bm_2$, l'hypothénuse de T est la droite d'équation $ax + by = c$. Lorsque k tend vers l'infini, $k \sim \text{aire}(T) = \frac{1}{2} \frac{c^2}{ab}$.

On voit donc apparaître asymptotiquement la mesure de Lebesgue de l'ellipsoïde :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c_{\sigma_k}(\lambda)^2}{2k} = ab = 2\text{Leb}(E(a, b)).$$

Les invariants spectraux des ellipsoïdes permettent donc de retrouver leur volume. Une propriété similaire est en fait vérifiée pour toute variété de contact de dimension 3.

4.3. La propriété de volume

Le *volume* d'une forme de contact α sur une variété de contact compacte (V, ξ) de dimension 3 est, par définition, le réel :

$$\text{Vol}(V, \alpha) = \int_V \alpha \wedge d\alpha.$$

Exemple 4.8. — Lorsque $V = \partial U$ est le bord d'un domaine étoilé de \mathbb{R}^4 , comme dans l'exemple 2.7, le volume de la restriction de λ à V est à constante près la mesure de Lebesgue de U . En effet, d'après la formule de Stokes,

$$\text{Vol}(\partial U, \lambda|_{\partial U}) = \int_U (dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)^2 = 2 \int_U dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = 2\text{Leb}(U).$$

Exemple 4.9. — Lorsque $V = S_g^*N$ est le fibré en sphères cotangentes pour une métrique riemannienne sur une variété compacte N , le volume de la restriction de la forme de Liouville λ à S_g^*N est à constante près le volume riemannien de N .

Le résultat suivant, appelé *propriété de volume* et conjecturé par HUTCHINGS (2011), affirme que le volume d'une forme de contact apparaît toujours dans l'asymptotique de ses invariants spectraux.

THÉORÈME 4.10 (CRISTOFARO-GARDINER, HUTCHINGS et RAMOS, 2015)

Soient (V, ξ) une variété de contact compacte tridimensionnelle, α une forme de contact définissant ξ et $\Gamma \in H_1(V)$. On suppose que $c_1(\xi) + 2PD(\Gamma)$ est de torsion dans $H_2(V; \mathbb{Z})$ et que I est un choix de \mathbb{Z} -graduation absolue sur $ECH(V, \xi, \Gamma)$. Soit $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de classes homogènes non nulles dans $ECH(V, \xi, \Gamma)$ telles que la suite $(I(\sigma_k))_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Alors,

$$(10) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c_{\sigma_k}(\alpha)^2}{I(\sigma_k)} = \text{vol}(V, \alpha).$$

Comme on le verra dans la partie 4.5, ce théorème est le résultat fondamental sur lequel repose le lemme de fermeture d'Irie. Le théorème 4.10 est un énoncé très puissant et a déjà une multitude d'applications dynamiques (cf. par exemple CRISTOFARO-GARDINER et HUTCHINGS, 2016; HUTCHINGS, 2016).

Remarque 4.11. — Ce théorème a un contenu non vide quelle que soit la variété de contact. En effet, d’après la remarque 3.5, pour un bon choix de la classe $\Gamma \in H_1(V)$, la classe $c_1(\xi) + 2PD(\Gamma)$ est de torsion, le $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel $ECH_*(V, \xi, \Gamma)$ est non trivial et pour j assez grand, l’application $U : ECH_j(V, \xi, \Gamma) \rightarrow ECH_{j-2}(V, \xi, \Gamma)$ est un isomorphisme. On peut donc toujours trouver une classe σ_k telle que $I(\sigma_k)$ tend vers $+\infty$, sous la forme d’une suite définie par la relation de récurrence $\sigma_{k+1} = U^{-1}(\sigma_k)$. On peut même dire plus : comme $ECH_j(V, \xi, \Gamma)$ est de dimension finie pour j assez grand, il suffit d’établir la propriété de volume pour de telles suites récurrentes.

Remarque 4.12. — Dans la partie 1.3, nous avons évoqué l’existence d’une analogie entre le lemme de fermeture d’Irie et la densité générique des hypersurfaces minimales dans les variétés riemanniennes de dimension entre 3 et 7. Ces deux démonstrations sont très similaires, ce qui est rendu possible par un théorème de LIOKUMOVICH, MARQUES et NEVES (2018) qui affirme que les invariants de min-max, définis pour étudier les hypersurfaces minimales, vérifient une formule asymptotique analogue à (10).

Remarque 4.13. — Hutchings a très récemment découvert une interprétation dynamique de la propriété de volume pour le cas de \mathbb{S}^3 . La quantité $\text{Vol}(V, \alpha)$ s’interprète comme l’hélicité (aussi appelée invariant de Hopf ou d’Arnold) du champ de Reeb R_α . ARNOLD (1986) et VOGEL (2003) ont montré que cet invariant s’interprète comme un enlacement asymptotique moyen des orbites (non nécessairement fermées) du champ de vecteur. HUTCHINGS (2019) montre que sur \mathbb{S}^3 , lorsque il tend vers l’infini, l’indice ECH $I(\gamma, \beta)$ s’écrit comme une somme, dont le terme dominant fait intervenir l’enlacement et l’action des orbites de γ et β . Cette interprétation de l’indice, ajoutée à une version renforcée du résultat d’équidistribution de IRIE (2018) et au résultat de Arnold et Vogel donne une justification heuristique de la formule (10). Cette heuristique mène également Hutchings à proposer une conjecture concernant le deuxième terme du développement asymptotique de $\frac{c_{\sigma_k}(\alpha)^2}{I(\sigma_k)}$.

Dans la partie suivante, nous donnons la démonstration du théorème 4.10 pour la sphère \mathbb{S}^3 de contact standard, autrement dit pour les domaines étoilés de \mathbb{R}^4 . L’argument est antérieur au théorème 4.10 et est dû à HUTCHINGS (2011). La démonstration du cas général (que nous n’aborderons pas ici) repose sur une analyse approfondie de la démonstration par TAUBES (2007) de la conjecture de Weinstein. D’après la remarque 2.16, la propriété de volume sur \mathbb{S}^3 suffit pour le résultat d’Asaoka et Irie sur \mathbb{S}^2 .

4.4. La propriété de volume pour \mathbb{S}^3

Pour tout domaine étoilé U de \mathbb{R}^4 , d’après (3), les groupes $ECH_j(\partial U, \lambda, 0)$ non nuls sont de rang 1 et apparaissent seulement pour j pair. Notons σ_k la classe non nulle dans $ECH_{2k}(\partial U, \lambda, 0)$. Pour alléger les notations, nous noterons $ECH_*(U)$ pour $ECH_*(\partial U, \lambda, 0)$ et $c_\sigma(U)$ pour $c_\sigma(\partial U, \lambda)$. Nous voulons donc établir la propriété $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{\sigma_k}(U)^2/2k = 2\text{Leb}(U)$.

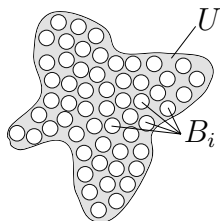
Première étape : la propriété de volume pour les boules euclidiennes de \mathbb{R}^4 . — Nous avons établi la propriété de volume pour les ellipsoïdes irrationnels $E(a, b)$ à la fin de la partie 4.2. Par un argument de continuité utilisant l'inégalité (9), la propriété est également satisfaite pour les boules euclidiennes $B(r) = E(r, r)$.

Deuxième étape : une inégalité pour les domaines contenant une union disjointe de domaines. — Soient U_1, U_2, \dots, U_d des domaines étoilés deux à deux disjoints dans \mathbb{R}^4 et soit V un domaine étoilé contenant la réunion des U_i . Soit $\sigma = \sum_{k_1+\dots+k_d=k} \sigma_{k_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{k_d}$. D'après l'isomorphisme (4), σ est l'unique générateur de $ECH_{2k}(\bigcup_{i=1}^d U_i)$. Comme l'action vérifie l'identité $\mathcal{A}(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_d) = \mathcal{A}(\gamma_1) + \dots + \mathcal{A}(\gamma_d)$, on en déduit l'identité $c_\sigma \left(\bigcup_{i=1}^d U_i \right) = \max_{k_1+\dots+k_d=k} \sum_{i=1}^d c_{\sigma_{k_i}}(U_i)$.

Par ailleurs, d'après la partie 3.6.4, l'application induite par cobordisme $\Psi : ECH_*(V) \rightarrow ECH_*(\bigcup_{i=1}^d U_i)$ vérifie $\sigma = \Psi(\sigma_k(V))$. L'inégalité (8) donne donc

$$(11) \quad \max_{k_1+\dots+k_d=k} \sum_{i=1}^d c_{\sigma_{k_i}}(U_i) \leq c_{\sigma_k}(V).$$

Troisième étape : remplir le domaine par des boules disjointes. — Soit U un domaine étoilé. Pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit des boules euclidiennes B_1, \dots, B_d incluses dans U , deux à deux disjointes et de même rayon telles que $\sum_{i=1}^d \text{Leb}(B_i) \geq \text{Leb}(U) - \varepsilon$.



L'inégalité (11) s'applique. En particulier, pour une partition $k_1 + \dots + k_d = k$ telle que $k_1 = \dots = k_{d-1} = \lfloor \frac{k}{d} \rfloor$, on obtient :

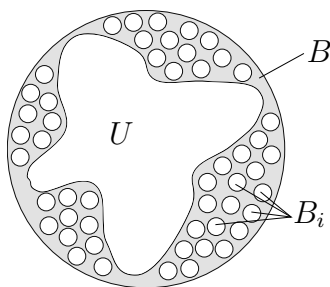
$$\frac{1}{2k} c_{\sigma_k}(U)^2 \geq \frac{1}{2k} \left(c_{\sigma_{k_d}}(B_d) + \sum_{i=1}^d c_{\sigma_{\lfloor \frac{k}{d} \rfloor}}(B_i) \right)^2.$$

Comme les boules ont même rayon et vérifient la propriété de volume, on en déduit :

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} c_{\sigma_k}(U)^2 \geq \sum_{i=1}^d 2\text{Leb}(B_i) \geq 2\text{Leb}(U) - 2\varepsilon.$$

Nous avons donc prouvé la moitié de la propriété de volume, c'est-à-dire l'inégalité $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} c_{\sigma_k}(U)^2 \geq 2\text{Leb}(U)$.

Quatrième étape : plonger le domaine dans une boule et remplir l'espace restant par des boules disjointes. — Soient U un domaine étoilé et $\varepsilon > 0$. On choisit une boule euclidienne B de \mathbb{R}^4 contenant U et on choisit des boules euclidiennes B_1, \dots, B_d incluses dans $B \setminus U$ deux à deux disjointes et vérifiant $\text{Leb}(U) \geq \text{Leb}(B) - \sum_{i=1}^d \text{Leb}(B_i) - \varepsilon$.



L'inégalité (11) donne

$$\frac{1}{\sqrt{4k}} c_{\sigma_k}(B) \geq \frac{1}{\sqrt{4k}} \max_{p+k_1+\dots+k_d=k} \left(c_{\sigma_p}(U) + \sum_{i=1}^d c_{\sigma_{k_i}}(B_i) \right).$$

Lorsque k devient très grand, en choisissant des k_i et p tels que $\frac{k_i}{k} \simeq \frac{\text{Leb}(B_i)}{\text{Leb}(B)}$ et $\frac{p}{k} \simeq \frac{\text{Leb}(U)}{\text{Leb}(B)}$, le membre de droite est plus grand qu'une quantité qui est approximativement

$$\frac{1}{\sqrt{4p}} c_{\sigma_p}(U) \sqrt{\frac{\text{Leb}(U)}{\text{Leb}(B)}} + \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{4k_i}} c_{\sigma_{k_i}}(B_i) \sqrt{\frac{\text{Leb}(B_i)}{\text{Leb}(B)}}.$$

En utilisant que les boules B_1, \dots, B_d et B vérifient la propriété de volume, on obtient donc asymptotiquement à une faible erreur près :

$$\sqrt{\text{Leb}(B)} \geq \frac{1}{\sqrt{4p}} c_{\sigma_p}(U) \sqrt{\frac{\text{Leb}(U)}{\text{Leb}(B)}} + \sum_{i=1}^d \frac{\text{Leb}(B_i)}{\sqrt{\text{Leb}(B)}}.$$

Ce qui donne $\limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4p}} c_{\sigma_p}(U) \leq \sqrt{\text{Leb}(U)}$, et termine donc la démonstration.

4.5. De la propriété de volume au lemme de fermeture

Dans cette partie, nous donnons la démonstration de IRIE (2015) du lemme de fermeture pour les champs de Reeb (théorème 1.5), à partir des propriétés des invariants spectraux, en particulier leur propriété de volume.

Démonstration du théorème 1.5. — Soient α une forme de contact sur V et U un ouvert de V . On suppose (sans perte de généralité) que le champ de Reeb R_α n'admet pas d'orbite fermée intersectant U .

Soit $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive lisse à support dans U , et l'on pose $\alpha_t = (1+th)\alpha$, pour $t > 0$. Un rapide calcul montre en particulier que

$$(12) \quad \text{Vol}(V, \alpha_t) > \text{Vol}(V, \alpha).$$

Lorsque t tend vers 0, le champ de Reeb R_{α_t} converge en topologie C^∞ vers le champ R_α et coïncide avec R_α hors de U . Raisonnons par l'absurde et supposons donc que R_{α_t} n'admette pas d'orbite passant par U , pour tout t dans un intervalle de la forme $[0, t_0]$, avec $t_0 > 0$.

Comme h est à support dans U , les orbites de R_{α_t} ne passant pas par U sont les mêmes que les orbites de R_α . En particulier, pour $t \in [0, t_0]$, les orbites fermées de R_{α_t}

et celles de R_α sont les mêmes. Comme α et α_t coïncident dans le complémentaire de U , les actions correspondantes sont aussi égales. On en déduit

$$\forall t \in (0, t_0], \quad \text{spec}(\alpha_t) = \text{spec}(\alpha).$$

Par la propriété de spectralité, pour toute classe ECH $\sigma \neq 0$, l'application $t \mapsto c_\sigma(\alpha_t)$ prend donc ses valeurs dans $\text{spec}(\alpha)$. Comme indiqué dans la remarque 4.6, $\text{spec}(\alpha)$ est de mesure nulle et ses composantes connexes sont donc des points. L'application $t \mapsto c_\sigma(\alpha_t)$ étant continue, elle doit donc être constante.

En particulier, $c_\sigma(\alpha_{t_0}) = c_\sigma(\alpha)$ pour toute classe σ . La propriété de volume s'applique alors : on choisit une suite de classes σ_k telle que les hypothèses du théorème 4.10 soient vérifiées (cf. remarque 4.11) et on obtient asymptotiquement $\text{Vol}(V, \alpha_t) = \text{Vol}(V, \alpha)$, en contradiction avec (12).

La démonstration de la densité générique des orbites de Reeb est en tout point analogue à la démonstration du corollaire 1.4, page 4. \square

La démonstration du théorème 1.6 est identique à la précédente. Comme on l'a vu dans l'exemple 2.12, trouver une géodésique fermée revient à trouver une orbite de Reeb fermée dans $S_g^*\Sigma$. En perturbant la métrique dans un ouvert U de manière à accroître le volume riemannien, le volume de la forme de contact induite sur le fibré en sphère augmente également, et l'on peut ensuite appliquer l'argument précédent. Cette perturbation modifie le champ de vecteurs de Reeb dans S_g^*U , et comme évoqué dans la partie 1.3, elle ne peut donc pas être localisée au voisinage d'un (co)vecteur donné.

RÉFÉRENCES

- Dmitrii V. ANOSOV et Evgeny V. ZHUZHOMA (2012). « Closing lemmas ». In : *Differ. Equ.* 48.13, p. 1653-1699.
- Marie-Claude ARNAUD (1998). « Le “closing lemma” en topologie C^1 ». In : *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* 74, p. vi+120.
- Marie-Claude ARNAUD, Christian BONATTI et Sylvain CROVISIER (2005). « Dynamiques symplectiques génériques ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 25.5, p. 1401-1436.
- Vladimir I. ARNOLD (1976). *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Traduit du russe par Djilali Embarek. Éditions Mir, Moscow, p. 470.
- _____ (1986). « The asymptotic Hopf invariant and its applications ». In : t. 5. 4. Selected translations, p. 327-345.
- Masayuki ASAOKA et Kei IRIE (2016). « A C^∞ closing lemma for Hamiltonian diffeomorphisms of closed surfaces ». In : *Geom. Funct. Anal.* 26.5, p. 1245-1254.
- Michèle AUDIN et Mihai DAMIAN (2010). *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, p. xii+548. ISBN : 978-2-7598-0518-1 ; 978-2-271-07087-6.

- Denis AUROUX (2010). « La conjecture de Weinstein en dimension 3 (d'après C. H. Taubes) ». In : 332. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011, Exp. No. 1002, viii, 135-159. ISBN : 978-2-85629-291-4.
- Christian BONATTI et Sylvain CROVISIER (2004). « Récurrence et genericité ». In : *Invent. Math.* 158.1, p. 33-104.
- Keon CHOI, Daniel CRISTOFARO-GARDINER, David FRENKEL, Michael HUTCHINGS et Vinicius Gripp Barros RAMOS (2014). « Symplectic embeddings into four-dimensional concave toric domains ». In : *J. Topol.* 7.4, p. 1054-1076.
- Vincent COLIN, Paolo GHIGGINI et Ko HONDA (2011). « Equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 108.20, p. 8100-8105.
- Daniel CRISTOFARO-GARDINER et Michael HUTCHINGS (2016). « From one Reeb orbit to two ». In : *J. Differential Geom.* 102.1, p. 25-36.
- Daniel CRISTOFARO-GARDINER, Michael HUTCHINGS et Dan POMERLEANO (2017). *Torsion contact forms in three dimensions have two or infinitely many Reeb orbits*. eprint : [Arxiv:1701.02262](https://arxiv.org/abs/1701.02262).
- Daniel CRISTOFARO-GARDINER, Michael HUTCHINGS et Vinicius Gripp Barros RAMOS (2015). « The asymptotics of ECH capacities ». In : *Invent. Math.* 199.1, p. 187-214.
- Sylvain CROVISIER (2013). « Perturbation de la dynamique de difféomorphismes en topologie C^1 ». In : *Astérisque* 354, p. x+164.
- Sylvain CROVISIER et Enrique PUJALS (2018). « Strongly dissipative surface diffeomorphisms ». In : *Comment. Math. Helv.* 93.2, p. 377-400.
- Yakov ELIASHBERG (1979). « Estimates on the number of fixed points of area preserving transformations ». In : *Syktyvkar University preprint*.
- John FRANKS (1996). « Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero ». In : *New York J. Math.* 2, 1-19, electronic.
- John FRANKS et Michael HANDEL (2003). « Area preserving group actions on surfaces ». In : *Geom. Topol.* 7, p. 757-771.
- Hansjörg GEIGES (2008). *An introduction to contact topology*. T. 109. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, p. xvi+440. ISBN : 978-0-521-86585-2.
- Mikhael GROMOV (1985). « Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds ». In : *Invent. Math.* 82.2, p. 307-347.
- Carlos GUTIERREZ (1987). « A counter-example to a C^2 closing lemma ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 7.4, p. 509-530.
- Shuhei HAYASHI (1997). « Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω -stability conjectures for flows ». In : *Ann. of Math. (2)* 145.1, p. 81-137.
- Michael HERMAN (1991). « Différentiabilité optimale et contre-exemples à la fermeture en topologie C^∞ des orbites récurrentes de flots hamiltoniens ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 313.1, p. 49-51.

- Helmut HOFER, Krzysztof WYSOCKI et Eduard ZEHNDER (2002). « Pseudoholomorphic curves and dynamics in three dimensions ». In : *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*. North-Holland, Amsterdam, p. 1129-1188.
- (2003). « Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics ». In : *Ann. of Math. (2)* 157.1, p. 125-255.
- Michael HUTCHINGS (2002). « An index inequality for embedded pseudoholomorphic curves in symplectizations ». In : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 4.4, p. 313-361.
- (2011). « Quantitative embedded contact homology ». In : *J. Differential Geom.* 88.2, p. 231-266.
- (2014). « Lecture notes on embedded contact homology ». In : *Contact and symplectic topology*. T. 26. Bolyai Soc. Math. Stud. János Bolyai Math. Soc., Budapest, p. 389-484.
- (2016). « Mean action and the Calabi invariant ». In : *J. Mod. Dyn.* 10, p. 511-539.
- (2019). « ECH capacities and the Ruelle invariant ». In : *arXiv :1910.08260*.
- Michael HUTCHINGS et Michael SULLIVAN (2006). « Rounding corners of polygons and the embedded contact homology of T^3 ». In : *Geom. Topol.* 10, p. 169-266.
- Kei IRIE (2015). « Dense existence of periodic Reeb orbits and ECH spectral invariants ». In : *J. Mod. Dyn.* 9, p. 357-363.
- (2018). « Equidistributed periodic orbits of C^∞ -generic three-dimensional Reeb flows ». In : *arXiv :1812.01869*.
- Kei IRIE, Fernando C. MARQUES et André NEVES (2018). « Density of minimal hypersurfaces for generic metrics ». In : *Ann. of Math. (2)* 187.3, p. 963-972.
- Peter KRONHEIMER et Tomasz MROWKA (2007). *Monopoles and three-manifolds*. T. 10. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, p. xii+796. ISBN : 978-0-521-88022-0.
- Patrice LE CALVEZ (2005). « Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer ». In : *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 102, p. 1-98.
- (2006). « Periodic orbits of Hamiltonian homeomorphisms of surfaces ». In : *Duke Math. J.* 133.1, p. 125-184.
- Yevgeny LIOKUMOVICH, Fernando C. MARQUES et André NEVES (2018). « Weyl law for the volume spectrum ». In : *Ann. of Math. (2)* 187.3, p. 933-961.
- Ricardo MAÑÉ (1982). « An ergodic closing lemma ». In : *Ann. of Math. (2)* 116.3, p. 503-540.
- Fernando C. MARQUES, André NEVES et Antoine SONG (2019). « Equidistribution of minimal hypersurfaces for generic metrics ». In : *Invent. Math.* 216.2, p. 421-443.
- Dusa MCDUFF et Dietmar SALAMON (2017). *Introduction to symplectic topology*. Third. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, p. xi+623. ISBN : 978-0-19-879490-5 ; 978-0-19-879489-9.
- Charles PUGH (1967a). « An improved closing lemma and a general density theorem ». In : *Amer. J. Math.* 89, p. 1010-1021.
- (1967b). « The closing lemma ». In : *Amer. J. Math.* 89, p. 956-1009.

- Charles PUGH (2011). « The closing lemma in retrospect ». In : *Dynamics, games and science. I. T. 1*. Springer Proc. Math. Springer, Heidelberg, p. 721-741.
- Charles PUGH et Clark ROBINSON (1983). « The C^1 closing lemma, including Hamiltonians ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 3.2, p. 261-313.
- Ludovic RIFFORD (2012). « Closing geodesics in C^1 topology ». In : *J. Differential Geom.* 91.3, p. 361-381.
- Dietmar SALAMON et Eduard ZEHNDER (1992). « Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 45.10, p. 1303-1360.
- Sol SCHWARTZMAN (1957). « Asymptotic cycles ». In : *Ann. of Math. (2)* 66, p. 270-284.
- Nathan SEIBERG et Edward WITTEN (1994a). « Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory ». In : *Nuclear Phys. B* 426.1, p. 19-52.
- (1994b). « Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD ». In : *Nuclear Phys. B* 431.3, p. 484-550.
- Stephen SMALE (1961). « On gradient dynamical systems ». In : *Ann. of Math. (2)* 74, p. 199-206.
- Clifford Henry TAUBES (2000). *Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds*. T. 2. First International Press Lecture Series. Edited by Richard Wentworth. International Press, Somerville, MA, p. vi+401. ISBN : 1-57146-061-6.
- (2007). « The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture ». In : *Geom. Topol.* 11, p. 2117-2202.
- (2010a). « Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology I ». In : *Geom. Topol.* 14.5, p. 2497-2581.
- (2010b). « Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology II ». In : *Geom. Topol.* 14.5, p. 2583-2720.
- (2010c). « Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology III ». In : *Geom. Topol.* 14.5, p. 2721-2817.
- (2010d). « Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology IV ». In : *Geom. Topol.* 14.5, p. 2819-2960.
- (2010e). « Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology V ». In : *Geom. Topol.* 14.5, p. 2961-3000.
- René THOM (1949). « Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 228, p. 973-975.
- Claude VITERBO (1992). « Symplectic topology as the geometry of generating functions ». In : *Math. Ann.* 292.4, p. 685-710.
- Thomas VOGEL (2003). « On the asymptotic linking number ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 131.7, p. 2289-2297.
- Alan WEINSTEIN (1979). « On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems ». In : *J. Differential Equations* 33.3, p. 353-358.

Edward WITTEN (1982). « Supersymmetry and Morse theory ». In : *J. Differential Geom.* 17.4, 661-692 (1983).

Lai Sang YOUNG (1979). « A closing lemma on the interval ». In : *Invent. Math.* 54.2, p. 179-187.

Vincent Humilière

Sorbonne Université,
Université Paris Diderot,
CNRS, Institut de Mathématiques de
Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG,
F-75005, Paris, France
E-mail : `vincent.humiliere@imj-prg.fr`