Séminaire BOURBAKI Juin 2019
71e année, 2018–2019, nO 1165

TRANSITION DE PHASE ABRUPTE EN PERCOLATION VIA DES ALGORITHMES RANDOMISÉS [d'après Duminil-Copin, Raoufi et Tassion]

par **Marie Théret**

INTRODUCTION

Le modèle de percolation a été introduit par Broadbent et Hammersley [BH57] dans les années 50 pour modéliser un milieu poreux. Par son étude, on s'attache à comprendre comment la porosité du milieu à une échelle macroscopique, *i.e.*, à l'échelle d'un morceau de roche tout entier, est créée par la circulation de l'eau à un échelle microscopique. Comme on va le voir par la suite, la porosité du milieu est codée dans le modèle par le choix d'un paramètre $p \in [0,1]$. C'est un modèle très intéressant du point de vue mathématique, car c'est un des modèles les plus simples qu'on puisse imaginer qui présente un phénomène de transition de phase, c'est à dire un changement drastique des propriétés du systèmes lorsque le paramètre p passe par une valeur critique p_c. Ce modèle a été intensivement étudié depuis son introduction dans les années 50 et continue à l'être, car il est loin d'être encore complètement compris. En particulier, comprendre le comportement du modèle de percolation lorsque $p = p_c$ est un défi que bon nombre de mathématiciens tentent de relever.

Dans cet exposé, nous allons nous intéresser à certaines propriétés de la transition de phase dans le modèle de percolation, qui en font une transition qu'on dit abrupte — on reviendra sur ce terme par la suite. Le caractère abrupt de la transition de phase dans le modèle de percolation classique n'est pas nouveau : ce résultat fondamental est connu depuis les années 80 grâce aux travaux de Menshikov [Men86] d'une part, et d'Aizenman et Barsky [AB87] d'autre part. Cependant, les deux preuves proposées dans ces travaux utilisent de façon cruciale des propriétés spécifiques du modèle, ce qui les rend inadaptables à d'autres modèles d'intérêt qui sont des variantes ou des généralisation du modèle de percolation classique. C'est pourquoi le besoin d'inventer une nouvelle technique de preuve s'est fait sentir. Face à ce besoin, deux nouvelles techniques de preuves ont été successivement proposées. La première, imaginée par Duminil-Copin et Tassion [DCT16a, DCT16b], repose sur le choix d'une définition plus efficacement manipulable du paramètre critique p_c. Cette preuve est très élégante et plus robuste que les preuves de Menshikov et d'Aizenman-Barsky, mais bien qu'elle puisse se généraliser à certains modèles proches du modèle de percolation classique, son application à nombre de modèles d'intérêt restait impossible. La deuxième, proposée tout récemment par Duminil-Copin, Raoufi et Tassion [DCRT18, DCRT19a, DCRT19b], repose sur l'utilisation d'algorithmes randomisés. C'est à cette dernière technique de preuve que nous nous intéressons ici.

L'objectif de Duminil-Copin, Raoufi et Tassion étant d'étendre la preuve du phénomène de transition de phase abrupte à d'autres modèles que le modèle de percolation classique, c'est dans le cadre de ces autres modèles qu'ils ont rédigé leurs travaux. L'adaptation de leur méthode à tel ou tel modèle présente des difficultés (éventuellement importantes) propres au modèle considéré. Plutôt que de s'intéresser aux différences qui séparent donc les preuves proposées dans les articles [DCRT18, DCRT19a, DCRT19b], notre objectif est au contraire de faire apparaître leur similitude. Pour ce faire, nous allons appliquer leur méthode dans le cas le plus simple, c'est à dire que nous allons exposer la preuve du caractère abrupte de la transition de phase via des algorithmes randomisés dans le cadre de la percolation classique. Nous utiliserons dans cette preuve certains outils mathématiques sans les démontrer (inégalité OSSS, formule de Russo).

1. LE MODÈLE DE PERCOLATION

Le modèle de percolation se construit sur un graphe. Ici nous nous intéresserons exclusivement au graphe $G = (V, E)$ de sites $V = \mathbb{Z}^d$ et d'arêtes E qui désigne l'ensemble des arêtes reliant des sites à distance euclidienne égale à 1. Le paramètre $d \in \mathbb{N}^*$ représente la dimension de l'espace ambiant, et sera dans toute la suite une constante fixée satisfaisant $d \geq 2$. Nous nous donnons également un paramètre $p \in [0, 1]$. Aux arêtes de E, nous associons une famille de variables aléatoires $(\omega_e)_{e\in E}$ indépendante et de même loi la loi de Bernoulli de paramètre p. Une arête e est dite ouverte si $\omega_e = 1$, et fermée si $\omega_e = 0$.

Plus formellement, on se donne un espace d'états $\Omega = \{0, 1\}^E$, dont tout élément $\omega = (\omega_e)_{e\in E}$ est appelé une configuration de percolation. On considère $\mathcal{F}$ la σ-algèbre des sous-ensembles de Ω générée par les cylindres fini-dimensionnels. Finalement, on se donne sur $(\Omega, \mathcal{F})$ la mesure produit $\mathbb{P}_p = \prod_{e\in E} \mu_e$ où μ_e est la mesure de Bernoulli sur $\{0, 1\}$ définie par $\mu_e(\omega_e = 1) = p = 1 - \mu_e(\omega_e = 0)$. On notera $\mathbb{E}_p$ l'espérance associée à cette probabilité.

Une telle configuration $\omega \in \Omega$ peut être vue comme un sous-graphe G_ω du graphe G, de sites $V = \mathbb{Z}^d$ et d'arêtes $\{e \in E \,|\, \omega_e = 1\}$ l'ensemble des arêtes ouvertes pour la configuration ω. Le modèle que nous venons de décrire, abusivement appelé dans l'introduction de cet exposé modèle de percolation classique, correspond plus précisément au modèle dit de percolation de Bernoulli i.i.d. par arêtes sur $\mathbb{Z}^d$.

L'étude du modèle de percolation correspond à l'étude du graphe aléatoire G_ω ainsi construit, en particulier à ses propriétés de connectivité. En effet, gardons en tête que la percolation modélise un milieu poreux. Vu sous cet angle, les arêtes ouvertes du graphe correspondent à des petits tuyaux microscopiques qui laissent circuler l'eau dans la roche. Le paramètre p correspond à la densité de ces petits tuyaux, donc quantifie la porosité de la roche. Pour que l'eau puisse s'infiltrer dans la roche et la traverser à grande échelle, il faut donc que des points arbitrairement éloignés dans le graphe soient connectés dans G_ω, qui correspond au réseau de tuyaux microscopiques.

Introduisons quelques notations. Pour $x, y \in V$, on notera $\{x \leftrightarrow y\}$ l'évènement « x et y sont connectés dans G_ω ». On notera $\{x \leftrightarrow Y\}$ l'évènement « x est connecté à un site $y \in Y \cap V$ » (pour $Y \subset \mathbb{R}^d$), $\{X \leftrightarrow Y\}$ l'évènement « un site $x \in X \cap V$ est connecté à un site $y \in Y \cap V$ dans G_ω » (pour $X, Y \subset \mathbb{R}^d$), et $\{x \leftrightarrow \infty\}$ l'évènement « la composante connexe de x dans G_ω est infinie ». On notera également $\Lambda_n = [-n, n]^d$ la boîte centrée en l'origine 0 du graphe et de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Le résultat fondateur dans l'étude du modèle de percolation est l'existence d'une transition de phase, prouvée par Broadbent et Hammersley [BH57] et Hammersley [Ham57, Ham59]. Ce résultat peut s'énoncer comme suit.

Théorème 1.1 (Transition de phase). — *Pour tout $d \geq 2$, il existe un paramètre critique $p_c = p_c(d) \in]0, 1[$ tel que :*

- *si $p < p_c$, alors $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$;*
- *si $p > p_c$, alors $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0$.*

On notera dans la suite $\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$. Le fait que $p \mapsto \theta(p)$ soit croissant est une conséquence simple du fait qu'on peut facilement coupler les processus de percolation pour tous les paramètres $p \in [0, 1]$ à la fois. On a trivialement $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$. La partie intéressante du théorème est le fait que $0 < p_c < 1$, ce qui implique l'existence d'une phase sous-critique correspondant à $p < p_c$ et d'une phase sur-critique correspondant à $p > p_c$, séparées par la phase critique correspondant à $p = p_c$.

Ce théorème peut en fait être renforcé comme ceci (voir par exemple la preuve de Burton et Keane [BK89]).

Théorème 1.2 (Existence et unicité de la composante connexe infinie)

Pour tout $d \geq 2$, il existe un paramètre critique $p_c = p_c(d) \in]0, 1[$ tel que :

- *si $p < p_c$, alors $\mathbb{P}_p$-p.s. il n'existe pas de composante connexe infinie dans G_ω ;*
- *si $p > p_c$, alors $\mathbb{P}_p$-p.s. il existe une unique composante connexe infinie dans G_ω.*

L'existence d'une composante connexe infinie ne dépend pas de la configuration de percolation sur un ensemble fini d'arêtes, donc la probabilité de cet évènement vaut 0 ou 1 par la loi du $0 - 1$. La difficulté de ce résultat est de montrer l'unicité p.s. de la composante connexe infinie dans la phase sur-critique.

Deux questions qui viennent naturellement en tête à la lecture de ce théorème sont d'une part quelle est la valeur de p_c, et d'autre part quelles sont les propriétés du graphe G_ω pour $p = p_c$. Ce sont en fait des questions auxquelles il est très difficile de répondre. Pour $d = 2$, nous savons grâce aux travaux de Harris [Har60], Russo [Rus78], Seymour et Welsh [SW78] et Kesten [Kes80] que $p_c(2) = 1/2$ et que pour $p = 1/2$ p.s. il n'existe pas de composante connexe infinie dans G_ω. Ces deux questions sont ouvertes pour $d = 3$, et prouver l'absence de composante connexe infinie dans la phase critique de percolation en dimension 3 est un des problèmes ouverts majeurs du domaine.

Nous ne pouvons pas présenter ici l'étendue des résultats connus sur le modèle de percolation classique, et nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Grimmett [Gri99] qui fait référence sur le sujet.

2. UNE TRANSITION DE PHASE ABRUPTE

Nous avons défini le paramètre critique de percolation p_c en nous intéressant au comportement de $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$. On peut réécrire cette probabilité de deux façons différentes. D'une part, l'évènement $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ est l'intersection des évènements emboîtés $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$, où $\partial\Lambda_n$ désigne le bord de la boîte $\Lambda_n = [-n, n]^d$ de taille n centrée en l'origine, donc

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$$

ce qui implique que

$$p_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) = 0\}.$$

Nous manipulerons beaucoup les probabilités qui apparaissent ici, et nous utiliserons les notations suivantes : pour tout $p \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ et $\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(p)$. D'autre part, si on note C la composante connexe de 0 dans G_ω, et $|C|$ le nombre de sites dans C, l'évènement $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ peut aussi se réécrire sous la forme $\{|C| = \infty\}$, d'où

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty)$$

et

$$p_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, |C| < \infty \text{ p.s.}\}.$$

À la lumière de ces réécritures, on se rend compte que d'autres définitions de paramètres critiques, un peu différentes, peuvent s'avérer tout aussi pertinentes, en particulier

$$\hat{p}_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, \mathbb{E}_p[|C|] < \infty\}$$

et

$$\tilde{p}_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}) = 0\}.$$

Une question d'importance est dès lors de savoir si ces différentes définitions sont équivalentes, c'est à dire s'il y a égalité des points critiques $p_c = \hat{p}_c = \tilde{p}_c$. Outre l'intérêt de la question en soi, il faut préciser que certaines propriétés du modèle ne sont prouvées que sous l'hypothèse $\mathbb{E}_p[|C|] < \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}) = 0$, et donc l'égalité des points critiques permet d'étendre les propriétés en question à toute la phase sous-critique $p < p_c$.

La réponse à cette question est positive, il y a bien égalité des points critiques :

Théorème 2.1 (Égalité des points critiques). — *Pour tout $d \geq 2$, on a l'égalité suivante :*

$$p_c = \hat{p}_c = \tilde{p}_c \,.$$

Dans le modèle de percolation de Bernoulli i.i.d. par arêtes sur $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$), l'égalité des points critiques a été démontrée pour la première fois dans les années 80 indépendamment par Menshikov [Men86] et Aizenman et Barsky [AB87]. Une présentation complète des deux preuves se trouve dans le livre de Grimmett [Gri99]. La preuve de l'égalité des points critiques repose en fait sur l'étude de la décroissance des probabilités de connexion en régime sous-critique. En effet, pour $p < p_c$, on sait que $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ tend vers $\theta(p) = 0$ quand n tend vers l'infini, mais à quelle vitesse ? Ces mathématiciens ont montré que cette décroissance est exponentiellement rapide en n : c'est ce qu'on appelle un phénomène de transition de phase abrupte (*sharp* en anglais).

Théorème 2.2 (Décroissance exponentielle des probabilités de connexion)
Soit $p < p_c$. Il existe une constante $c(p) > 0$ telle que

$$\theta_n(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c(p)n} \,.$$

Ce résultat de décroissance exponentielle des probabilités de connexion est fondamental. Là encore, de nombreuses propriétés du modèle de percolation sont prouvées uniquement sous cette hypothèse de décroissance exponentielle, donc le theorème 2.2 implique qu'elles sont valables pour toute la zone sous-critique de percolation. Par ailleurs, en dimension 2, une partie de la preuve de $p_c(2) = 1/2$ de Kesten [Kes80] repose sur une construction géométrique délicate ; de nombreuses preuves alternatives ont été proposées depuis, en s'appuyant sur le résultat de décroissance exponentielle des probabilités de connexion (voir [Gri99]). De plus, comme annoncé, le théorème 2.2 implique immédiatement l'égalité des points critiques. Cette implication est simple, et pour en convaincre le lecteur, nous allons présenter la preuve du théorème 2.1 en admettant dans un premier temps le théorème 2.2.

Une preuve de $p_c = \hat{p}_c = \tilde{p}_c$. — En remarquant que $\mathbb{E}_p[|C|] < \infty$ implique $|C| < \infty$ p.s., on obtient immédiatement que $\hat{p}_c \leq p_c$, il suffit donc de montrer que $p_c \leq \hat{p}_c$ pour prouver que $\hat{p}_c = p_c$. Soit $p < p_c$, en utilisant le théorème 2.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p[|C|] &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{x\in\partial\Lambda_n} \mathbb{P}_p(x \in C) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{x\in\partial\Lambda_n} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \kappa(d) n^{d-1} e^{-c(p)n} < \infty \,,
\end{aligned}$$

où $\kappa(d)$ est une constante dépendant uniquement de la dimension. Ceci implique $p \leq \hat{p}_c$, ce qui achève la preuve de $\hat{p}_c = p_c$.

De même, en remarquant que $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}) \leq \mathbb{P}_p(\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n})$, on obtient immédiatement que $\tilde{p}_c \leq p_c$. Pour montrer que $\tilde{p}_c = p_c$, il suffit donc de montrer que $\tilde{p}_c \geq p_c$.

Soit $p < p_c$. On peut décomposer l'évènement $\{\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}\}$ en l'union sur $x \in \partial\Lambda_n \cap \mathbb{Z}^d$ des évènements $\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}\}$. Pour tout $x \in \partial\Lambda_n$, la boîte $\Lambda_n(x) = [x-n, x+n]^d$ centrée en x et de taille n est incluse dans Λ_{2n}. On en déduit que tout chemin ouvert qui relie x à $\partial\Lambda_{2n}$ doit sortir de $\Lambda_n(x)$. On obtient, en utilisant l'invariance du graphe par translation et le théorème 2.2,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}) &\leq \sum_{x\in\partial\Lambda_n\cap\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}) \\
&\leq \sum_{x\in\partial\Lambda_n\cap\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_n(x)) \\
&\leq \kappa(d) n^{d-1}\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \\
&\leq \kappa(d) n^{d-1} e^{-c(p)n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que $p \leq \tilde{p}_c$, et donc $p_c \leq \tilde{p}_c$, ce qui achève la preuve de l'égalité des points critiques. □

L'objet de cet exposé est de présenter la preuve du théorème 2.2 en suivant la méthode proposée par Duminil-Copin, Raoufi et Tassion [DCRT18, DCRT19a, DCRT19b]. Pour ce faire, nous devons introduire la notion d'arbres de décision, et l'inégalité OSSS, qui jouent un rôle crucial dans leur preuve.

3. L'INÉGALITÉ OSSS

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{E}$ un ensemble à N éléments. Soit f une fonction booléenne définie sur $\{0,1\}^{\mathcal{E}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$. Un arbre de décision associé à f est un algorithme qui prend une configuration $\omega \in \{0,1\}^{\mathcal{E}}$ comme donnée, et qui choisit un par un des éléments $e \in \mathcal{E}$ pour explorer la valeur de ω_e. Le choix du prochain élément e pour lequel l'algorithme va révéler la valeur de ω_e dépend de la fonction booléenne f, des éléments de $\mathcal{E}$ déjà choisis et des valeurs correspondantes de la configuration déjà révélées. L'algorithme se poursuit jusqu'à ce que l'ensemble des valeurs de la configuration déjà révélées permettent de connaître la valeur de $f(\omega)$. Cet arbre de décision peut être choisi aléatoire, on parle alors d'algorithme *randomisé*. Les arbres de décisions, éventuellement aléatoires, sont largement utilisés et étudiés en informatique (voir par exemple l'article de synthèse [BDW02]), mais aussi en mathématiques. On peut citer par exemple l'usage d'arbres de décisions aléatoires par Schramm et Steif [SS10] pour l'étude de la sensibilité au bruit de fonctions booléennes, et son application à l'étude de la percolation (voir aussi le livre de Garban et Steif [GS15] pour les liens entre théorie de la percolation et étude des fonctions booléennes).

Nous introduisons à présent quelques notations en collant au plus près de celles qui apparaissent dans [DCRT19b]. Pour un N-uplet $e = (e_1, \ldots, e_N)$ de $\mathcal{E}^N$ et $t \leq N$, on note $e_{[t]} = (e_1, \ldots, e_t)$ et $\omega_{e_{[t]}} = \omega_{(e_1,\ldots,e_t)} = (\omega_{e_1}, \ldots, \omega_{e_t})$. Un arbre de décision va toujours commencer par choisir le même premier élément fixé e_1 de $\mathcal{E}$, et va observer ω_{e_1}.

En fonction de la valeur de ω_{e_1}, l'algorithme choisit ensuite un deuxième élément $e_2 \in \mathcal{E}$ différent de e_1, et observe à son tour ω_{e_2}. À chaque étape de l'algorithme, le prochain élément de $\mathcal{E}$ qui va être choisi peut dépendre de tous les éléments déjà choisis et de la valeur de la configuration observée en chacun de ces éléments. Si les éléments choisis par l'algorithme aux étapes 1 à $t-1 \leq N-1$ sont notés $(e_1, \ldots, e_{t-1})$, l'élément e_t choisi par l'algorithme à l'étape t est une fonction déterministe de tout ce que l'algorithme a déjà exploré auparavant :

$$e_t = \phi_t\left((e_1, \ldots, e_{t-1}), \omega_{(e_1,\ldots,e_{t-1})}\right) \in \mathcal{E} \smallsetminus \{e_1, \ldots, e_{t-1}\}\,.$$

Un arbre de décision T est donc la donnée d'un couple $T = (e_1, (\phi_t)_{2\leq t\leq N})$ où e_1 est le premier élément de $\mathcal{E}$ que l'algorithme choisit, et $(\phi_t)_{2\leq t\leq N})$ est la suite des règles de décision appliquées par l'algorithme pour choisir les éléments de $\mathcal{E}$ qu'il va successivement explorer.

Étant donné un arbre de décision $T = (e_1, (\phi_t)_{2\leq t\leq N})$ et une configuration $\omega \in \{0,1\}^{\mathcal{E}}$, on peut numéroter les éléments de $\mathcal{E}$ dans l'ordre dans lequel ils sont explorés par T pour obtenir un N-uplet $(e_1, \ldots, e_N)$. Étant donnée également une fonction booléenne $f : \{0,1\}^{\mathcal{E}} \mapsto \{0,1\}$, on définit

$$\tau_{f,T}(\omega) = \inf\{t \geq 1 \,:\, \forall \omega' \in \{0,1\}^{\mathcal{E}}\,,\, \omega'_{e_{[t]}} = \omega_{e_{[t]}} \Rightarrow f(\omega) = f(\omega')\}\,.$$

C'est le nombre minimum t d'étapes de l'algorithme à effectuer pour connaître la valeur de $f(\omega)$ en observant uniquement les valeurs de $\omega_{(e_1,\ldots,e_t)}$ déjà révélées par l'algorithme. Autrement dit, si on fait tourner l'algorithme T pour connaître la valeur prise par f, on arrêtera l'algorithme après $\tau_{f,T}(\omega)$ étapes.

Munissons à présent l'espace $\{0,1\}^{\mathcal{E}}$ de la σ-algèbre complète $\mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathcal{E}})$ et d'une mesure de probabilité produit $\hat{\mu} = \prod_{e\in\mathcal{E}} \hat{\mu}_e$. L'importance (pour la mesure $\hat{\mu}$) de la valeur de la configuration ω en un élément $e \in \mathcal{E}$ au regard de la fonction booléenne f peut être quantifiée par deux grandeurs. D'une part, étant donné un arbre de décision T qu'on arrête après $\tau_{f,T}$ étapes, on peut regarder la probabilité que la valeur ω_e de la configuration en e ait été révélée par l'algorithme : c'est la révélation (*revealment* en anglais) $\delta_e(f,T)$ de e, définie formellement par

$$\delta_e(f,T) = \hat{\mu}[\exists t \leq \tau_{f,T}(\omega) \,:\, e_t = e]\,.$$

D'autre part, l'influence de e sur f est définie par

$$\mathrm{Inf}_e(f) = \hat{\mu}[f(\omega) \neq f(\omega^e)]$$

où ω^e est la configuration égale à ω en tout élément sauf en e, *i.e.*, $\omega^e_g = \omega_g$ pour tout $g \in \mathcal{E} \smallsetminus \{e\}$ et $\omega^e_e = 1 - \omega_e$. L'influence $\mathrm{Inf}_e(f)$ est donc la probabilité que changer la valeur de la configuration uniquement en e change la valeur prise par la fonction f.

L'inégalité OSSS, introduite par O'Donnell, Saks, Schramm et Servedio dans [OSSS05], relie la variance de f pour la mesure produit $\hat{\mu}$ à l'influence et la révélation des éléments de $\mathcal{E}$.

Théorème 3.1 (Inégalité OSSS). — *Pour tout fonction booléenne* $f : \{0,1\}^{\mathcal{E}} \mapsto \{0,1\}$, *pour toute probabilité produit* $\hat{\mu}$, *pour tout arbre de décision* T, *on a*

$$\mathrm{Var}_{\hat{\mu}}(f) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \delta_e(f,T)\,\mathrm{Inf}_e(f)\,.$$

Nous ne démontrerons pas ici cette inégalité, dont la preuve repose sur un argument de type Efron-Stein. Le lecteur intéressé pourra consulter la preuve proposée dans [OSSS05], ou la preuve d'une généralisation de l'inégalité OSSS à des mesures qui ne sont pas de forme produit dans [DCRT19b].

Revenons à l'étude du modèle de percolation de Bernoulli i.i.d. par arêtes sur $\mathbb{Z}^d$. Pour prouver le caractère abrupt de la transition de phase, c'est à dire le théorème 2.2, nous devons étudier le comportement pour n grand de la probabilité $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$. L'évènement $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$ qui apparaît ici ne dépend des valeurs prises par la configuration de percolation que sur les arêtes à l'intérieur de la boîte Λ_n. Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous voulons donc appliquer l'inégalité OSSS dans le cadre suivant :

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ est l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités sont incluses dans la boîtes $\Lambda_n = [-n,n]^d$;
- la mesure produit $\hat{\mu}$ est (la restriction à $\mathcal{E}_n$ de) la mesure $\mathbb{P}_p$;
- la fonction booléenne $f_n : \{0,1\}^{\mathcal{E}} \mapsto \{0,1\}$ est la fonction $f_n = \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}}$.

Si on se donne un arbre de décision T, une application directe de l'inégalité OSSS (théorème 3.1) implique

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{P}_p}(f_n) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_n} \delta_e(f_n,T)\,\mathrm{Inf}_e(f_n)$$

c'est à dire

$$\theta_n(p)(1-\theta_n(p)) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_n} \delta_e(f_n,T)\,\mathrm{Inf}_e(f_n)\,. \tag{1}$$

Si l'utilisation d'arbres de décision et de la notion de révélation en percolation est novatrice, la notion d'influence d'une arête a par contre été déjà largement utilisée, notamment à travers la formule de Russo que nous allons énoncer à présent. Il est à noter que la formule de Russo était déjà un élément clé des preuves de la décroissance exponentielle des probabilités de connexion proposées par Menshikov [Men86] et Aizenman et Barsky [AB87]. Soit A un évènement ne dépendant des valeurs prises par la configuration ω que sur un ensemble fini d'arêtes $\mathcal{E}$. On dit que l'évènement A est croissant si pour tout couple de configurations (ω,ω') tel que pour toute arête e on a $\omega_e \geq \omega'_e$, alors $\mathbf{1}_A(\omega) \geq \mathbf{1}_A(\omega')$. Autrement dit, la réalisation de l'évènement A est facilitée par la présence d'arêtes ouvertes : si A est réalisé pour une certaine configuration ω', et qu'on ouvre des arêtes supplémentaires pour obtenir une configuration ω (en gardant ouvertes toutes les arêtes qui l'étaient déjà), alors l'évènement A sera également réalisé pour la configuration ω. On dit qu'une arête e est pivot pour l'évènement A si $\mathbf{1}_A(\omega) \neq \mathbf{1}_A(\omega^e)$; l'influence $\mathrm{Inf}_e(\mathbf{1}_A)$ de e sur l'évènement A est donc égale à la probabilité que e soit une arête pivot pour A. La formule de Russo permet de relier la dérivée en p de $\mathbb{P}_p(A)$ à l'espérance du nombre aléatoire $N(A)$ d'arêtes pivots dans $\mathcal{E}$ pour A, c'est à dire à la somme des influences des arêtes.

Théorème 3.2 (Formule de Russo). — *Soit A un évènement croissant ne dépendant de la configuration de percolation que sur un ensemble fini d'arêtes $\mathcal{E}$. Alors*

$$\frac{d}{dp}\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{E}_p[N(A)] = \sum_{e\in\mathcal{E}} \mathrm{Inf}_e(\mathbf{1}_A)$$

On trouvera une preuve simple de la formule de Russo dans le livre de Grimmett [Gri99], nous l'admettons ici.

L'évènement A_n ne dépend que des arêtes de $\mathcal{E}_n$ et il est croissant, on peut donc lui appliquer la formule de Russo. Puisque $\theta_n(p)$ désigne $\mathbb{P}_p(A_n)$, on obtient

$$\theta_n'(p) = \sum_{e\in\mathcal{E}_n} \mathrm{Inf}_e(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{e\in\mathcal{E}_n} \mathrm{Inf}_e(f_n)\,. \tag{2}$$

En combinant l'inégalité OSSS (1) et la formule de Russo (2), pour tout arbre de décision T on obtient

$$\theta_n(p)(1-\theta_n(p)) \leq \left(\max_{e\in\mathcal{E}} \delta_e(f_n,T)\right)\theta_n'(p)\,. \tag{3}$$

L'enjeu est alors de choisir un arbre de décision T pour lequel la révélation $\delta_e(f_n,T)$ est petite, uniformément pour $e \in \mathcal{E}$. Imaginons un instant que pour un arbre de décision T bien choisi nous ayons la majoration uniforme $\max_{e\in\mathcal{E}_n}\delta_e(f_n,T) \leq 1/n$ pour tout $p < p_c$. Alors on obtiendrait pour $p < p_c$, en combinant (3) et la majoration $\theta_n(p) \leq \theta_1(p_c)$, l'inégalité

$$\theta_n(p)(1-\theta_1(p_c)) \leq \theta_n(p)(1-\theta_n(p)) \leq \max_{e\in\mathcal{E}_n}\delta_e(f_n,T)\cdot\theta_n'(p) \leq \frac{1}{n}\theta_n'(p)$$

d'où

$$\frac{\theta_n'(p)}{\theta_n(p)} \geq (1-\theta_1(p_c))n\,.$$

En intégrant cette inégalité sur $[p,p_c]$ (pour $p<p_c$) on obtiendrait

$$\theta_n(p) \leq \theta_n(p_c)e^{-(1-\theta_1(p_c))n} \leq e^{-(1-\theta_1(p_c))n}$$

et donc la décroissance exponentielle désirée. Nous ne pouvons pas obtenir la majoration uniforme annoncée pour un choix d'algorithme T, mais une version un peu plus élaborée de ce raisonnement peut être rendue rigoureuse en moyennant les révélations des arêtes calculées sur une famille d'arbres de décision T_k, $k \in \{0,\ldots,n\}$.

4. LA PREUVE

La preuve du théorème 2.2 se déroule en deux étapes :

- La première étape consiste à appliquer l'inégalité OSSS pour des choix judicieux d'arbres de décision (voir lemme 4.1), de façon à obtenir via la formule de Russo une famille d'inégalités différentielles satisfaites par les fonctions $\theta_n(p)$. C'est cette étape qui concentre la partie probabiliste de la preuve.
- La deuxième étape consiste à exploiter ces inégalités différentielles pour en déduire des propriétés de $\theta_n(p)$ (voir lemme 4.2). Ce lemme est purement analytique.

Commençons par la partie probabiliste de la preuve. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a adopté les notations suivantes : $\Lambda_n = [-n, n]^d$, $\mathcal{E}_n$ désigne l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités sont dans Λ_n, $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$, $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$ et $\theta_n(p) = \mathbb{P}_p(A_n)$.

Lemme 4.1. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\theta_n(p)(1 - \theta_n(p)) \leq \frac{4\sum_{k=0}^{n-1} \theta_k(p)}{n} \theta'_n(p) \,.$$

Nous voulons appliquer l'inégalité OSSS à un arbre de décision T choisi pour obtenir un contrôle de $\delta_e(f_n, T)$ uniforme en $e \in \mathcal{E}_n$. L'algorithme va découvrir si les arêtes de $\mathcal{E}_n$ sont ouvertes ou fermées les unes après les autres jusqu'à ce qu'il puisse déterminer de façon certaine si l'évènement $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$ a lieu ou non. Le premier algorithme auquel on peut penser est d'explorer la composante connexe de l'origine 0 dans le graphe aléatoire G_ω en partant de l'origine et en s'éloignant vers le bord de Λ_n : l'algorithme choisit d'abord l'une après l'autre les $2d$ arêtes qui touchent 0 et explore la valeur de la configuration ω sur ces arêtes. Si elles sont toutes fermées, alors l'évènement A_n n'a pas lieu. Sinon, l'algorithme a trouvé l'ensemble des points qui sont à distance de graphe 1 de l'origine dans G_ω. Il choisit ensuite un de ces points dans un ordre fixé à l'avance, et choisit d'explorer chacune des arêtes adjacentes à ce point encore non révélées, puis de proche en proche soit l'algorithme finit par révéler un chemin d'arêtes ouvertes entre 0 et $\partial\Lambda_n$ (auquel cas A_n a lieu), soit l'algorithme finit par déterminer complètement la composante connexe de 0 dans G_ω sans avoir atteint un site de $\partial\Lambda_n$ (auquel cas A_n n'a pas lieu). Dans cet algorithme, la probabilité de révéler l'état de la configuration d'une arête loin de l'origine est assez faible. Par contre, les $2d$ arêtes qui touchent 0 sont choisies à coup sûr, leur révélation vaut donc 1. On peut alors imaginer un algorithme qui part des sites de $\partial\Lambda_n$ et qui explore leurs composantes connexes dans G_ω en choisissant progressivement des arêtes de plus en plus proches de 0. Dans ce cas, la situation est inversée, les arêtes proches de 0 ont peu de chances d'être révélées, mais les arêtes qui touchent $\partial\Lambda_n$ ont une révélation qui vaut 1. L'idée proposée par Duminil-Copin, Raoufi et Tassion pour contourner ce problème est simple : ils choisissent d'abord un nombre K uniformément entre 1 et n, puis ils construisent un arbre de décision qui explore les composantes connexes des sites de $\partial\Lambda_K$ dans Λ_n. L'évènement A_n a lieu si et seulement si au moins une de ces composantes connexe touche à la fois 0 et un site de $\partial\Lambda_n$. De façon équivalente, ils définissent pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$ un arbre de décision T_k qui explore les composantes connexes des sites de $\partial\Lambda_k$, ils appliquent l'inégalité OSSS à chacun des arbres de décision T_k, et ils moyennent les résultats obtenus. La révélation moyenne d'une arête e est alors bien contrôlée, uniformément en e.

Preuve du lemme 4.1. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, nous allons définir un arbre de décision T_k qui explore les composantes connexes des points de $\partial\Lambda_k$ dans Λ_n. Pour ce faire, nous allons définir par récurrence une suite croissante $(V_i)_{i\geq 0}$ d'ensembles de sites dans $\Lambda_n \cap \mathbb{Z}^d$ et une suite croissante $(F_i)_{i\geq 0}$ d'ensembles d'arêtes dans $\mathcal{E}_n$. On pose $V_0 = \partial\Lambda_k \cap \mathbb{Z}^d$ et $F_0 = \emptyset$. Après t étapes de l'algorithme, F_t représente l'ensemble des arêtes dont l'état a été révélé et V_t l'ensemble des sites dont on sait, grâce à ces arêtes déjà explorées, qu'ils sont reliés par un chemin ouvert à un site de $\partial\Lambda_k$. On note e_t l'arête choisie par l'algorithme à la t-ième étape, c'est à dire que l'algorithme révèle la valeur de ω_{e_t}. On se donne un ordre déterministe fixé sur les arêtes de $\mathcal{E}_n$. On note $\langle x, y\rangle$ l'arête d'extrémités x et y. Si $V_0 = \partial\Lambda_k \cap \mathbb{Z}^d \subset V_1 \subset \cdots \subset V_t$ et $F_0 = \emptyset \subset F_1 \subset \cdots \subset F_t$ sont connus, l'algorithme choisit à l'étape $t+1$ l'arête e_{t+1} comme suit :

(i) S'il existe une arête $e = \langle x, y\rangle \in \mathcal{E}_n \setminus F_t$ telle que $x \in V_t$ et $y \notin V_t$, alors on choisit $e_{t+1} = e$ (si plus d'une telle arête existe, on choisit la plus petite pour l'ordre qu'on s'est donné), $F_{t+1} = F_t \cup \{e_{t+1}\}$ et

$$V_{t+1} = \begin{cases} V_t \cup \{y\} & \text{si } \omega_e = 1 \\ V_t & \text{si } \omega_0 = 0 \end{cases}$$

(ii) Si une telle arête e n'existe pas, on définit e_{t+1} comme étant la plus petite arête de $\mathcal{E}_n \setminus F_t$ et on pose $F_{t+1} = F_t \cup \{e_{t+1}\}$ et $V_{t+1} = V_t$.

Tant que l'algorithme est dans le cas (i), il continue de découvrir quels sont les sites qui sont connectés à $\partial\Lambda_k$. Il bascule dans le cas (ii) lorsque les composantes connexes des sites de $\partial\Lambda_k$ ont toutes été entièrement explorée. En notant

$$\tau'_{T_k}(\omega) = \inf\{t \,:\, \nexists e = \langle x, y\rangle \in \mathcal{E}_n \setminus F_t \text{ avec } x \in V_t \text{ et } y \notin V_t\}$$

le numéro de la dernière étape dans laquelle l'algorithme est encore dans le cas (i), on a pour tout $t \geq \tau'_{T_k}(\omega)$

$$V_t = V_{\tau'(T_k)} = \{x \in \Lambda_n \cap \mathbb{Z}^d \,:\, x \leftrightarrow \partial\Lambda_k\}\,.$$

On se souvient que $\tau_{f_n,T_k}(\omega)$ est le premier instant auquel l'algorithme T_k a collecté suffisamment d'informations sur la configuration ω pour déterminer si l'évènement $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$ a lieu. Si A_n n'a pas lieu, l'algorithme T_k permet de le savoir dès que les composantes connexes des sites de $\partial\Lambda_k$ ont toutes été entièrement explorées, c'est à dire précisément juste avant que l'algorithme ne tombe dans le cas (ii). Si l'évènement A_n a lieu, l'algorithme T_k permet de le savoir dès qu'un chemin ouvert d'arêtes reliant 0 à $\partial\Lambda_n$ a été révélé, c'est à dire au plus tard juste avant que l'algorithme ne tombe dans le cas (ii) (éventuellement bien avant cela). Dans tous les cas, on peut en déduire que

$$\tau_{f_n,T_k}(\omega) \leq \tau'_{T_k}(\omega).$$

Une arête $e = \langle x, y\rangle$ de $\mathcal{E}_n$ ne peut être choisie par l'algorithme à une étape $u \leq \tau_{f_n,T_k}(\omega)$ que si au moins une de ses extrémités x ou y appartient à l'ensemble $V_{u-1} \subset V_{\tau'(T_k)} = \{x \in \Lambda_n \cap \mathbb{Z}^d \,:\, x \leftrightarrow \partial\Lambda_k\}$. Ainsi pour toute arête $e = \langle x, y\rangle$ on obtient

$$\delta_e(f_n, T_k) \leq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_k\} \cup \{y \leftrightarrow \partial\Lambda_k\}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k)\,. \tag{4}$$

Pour tout site $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Lambda_n \cap \mathbb{Z}^d$, on remarque que l'évènement $\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_k\}$ implique l'évènement $\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_{||x_1|-k|}(x)\}$ où $\Lambda_r(x) = [x - r, x + r]^d$ est la boîte de taille r centrée en x, car $\partial\Lambda_k$ n'intersecte pas l'intérieur de la boîte $\Lambda_{||x_1|-k|}(x)$. De plus, pour tout $x \in \Lambda_n \cap \mathbb{Z}^d$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, $||x_1| - k|$ est à valeurs dans $\{0, \dots, n-1\}$, et lorsque k décrit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, chaque valeur $i \in \{0, \dots, n-1\}$ est atteinte au plus deux fois par $||x_1| - k|$. On en déduit que pour tout $x \in \Lambda_n \cap \mathbb{Z}^d$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_{||x_1|-k|}(x)) \\ &\leq 2\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_i(x)) = 2\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_i)\end{aligned} \tag{5}$$

où on a utilisé l'invariance du modèle par translation dans la dernière égalité. En combinant (4) et (5), on en déduit que pour toute arête $e \in \mathcal{E}_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_e(f_n, T_k) \leq 4\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_i) = 4\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(p)\,. \tag{6}$$

En appliquant l'inégalité OSSS (théorème 3.1) à chaque arbre de décision T_k et en sommant les inéquations obtenues pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on déduit de (6) que

$$n\theta_n(p)(1 - \theta_n(p)) \leq 4\left(\sum_{k=0}^{n-1} \theta_k(p)\right)\left(\sum_{e \in \mathcal{E}_n} \mathrm{Inf}_e(f_n)\right)$$

ce qui, avec l'application directe (2) de la formule de Russo, conclut la preuve du lemme 4.1. □

Le lemme 4.1 établit que la famille de fonctions $(\theta_k(p))$ satisfait une famille d'inégalités différentielles, que le lemme suivant va nous permettre d'exploiter.

LEMME 4.2. — *Soit* (g_n) *une suite convergente de fonctions* $g_n : [0, p_0] \mapsto [0, M]$ *croissantes et dérivables telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a*

$$g_n' \geq \frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} g_k} g_n\,. \tag{7}$$

Alors il existe $p_1 \in [0, p_0]$ *tel que*

- (i) *pour tout* $p < p_1$*, il existe* $c(p) > 0$ *tel que pour tout* n *assez grand, on a* $g_n(p) \leq e^{-c(p)n}$ *;*
- (ii) *pour tout* $p > p_1$*,* $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ *satisfait* $g(p) \geq p - p_1$*.*

La preuve est complètement indépendante du reste de l'exposé. Il est à noter que la preuve de Menshikov [Men86] de la décroissance exponentielle des probabilités de connexion en régime sous-critique faisait apparaître une famille d'inégalités différentielles similaires.

Preuve du lemme 4.2. — Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} g_k$. On définit

$$p_1 = \inf\left\{ p \in [0, p_0] \,:\, \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(S_n(p))}{\log(n)} \geq 1 \right\}.$$

Cas $p < p_1$ **:** Soit $\delta > 0$ tel que $p + 2\delta < p_1$, on note $p' = p + \delta$ et $p'' = p + 2\delta$. Par définition de p_1, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(S_n(p''))}{\log(n)} < 1$$

donc il existe $\alpha > 0$ et N tels que pour tout $n \geq N$ on a $S_n(p'') \leq n^{1-\alpha}$. Par croissance de chaque fonction g_k, on en déduit que pour tout $n \geq N$ et pour tout $q \in [0, p'']$, on a également $S_n(q) \leq n^{1-\alpha}$. D'après l'hypothèse (7), $g'_n \geq n g_n / S_n$ donc pour tout $n \geq N$ et pour tout $q \in [0, p'']$ on obtient $g'_n(q) \geq n^\alpha g_n(q)$. En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[p', p'']$, il ressort que pour tout $n \geq N$

$$\delta n^\alpha = (p'' - p') n^\alpha \leq \Big[\log(g_n(q)) \Big]_{p'}^{p''}$$

donc $g_n(p') \leq g_n(p'') e^{-\delta n^\alpha}$ pour tout $n \geq N$. Puisque les fonctions g_k sont bornées par M, cela implique que $g_n(p') \leq M e^{-\delta n^\alpha}$ pour tout n grand, donc $S(p') := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(p') < \infty$. Par croissance et positivité des fonctions g_k, on obtient que pour tout $q \leq p'$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(q) \leq S_n(p') \leq S(p')$, et donc par l'hypothèse (7) on obtient $g'_n(q) \geq n g_n(q)/S(p')$. En intégrant cette inégalité sur $[p, p']$ on obtient

$$\frac{n\delta}{S(p')} \leq \Big[\log(g_n(q)) \Big]_{p}^{p'}$$

et donc $g_n(p) \leq g_n(p') e^{-n\delta/S(p')} \leq M e^{-n\delta/S(p')}$.

Cas $p > p_1$ **:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$T_n = \frac{1}{\log(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{n}.$$

D'après l'hypothèse (7), on a

$$T'_n = \frac{1}{\log(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{g'_i}{n} \geq \frac{1}{\log(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{S_i}. \tag{8}$$

Or pour tout $q \in [0, p_0]$ on a

$$\frac{g_i(q)}{S_i(q)} = \frac{S_{i+1}(q) - S_i(q)}{S_i(q)} \geq \int_{S_i(q)}^{S_{i+1}(q)} \frac{dt}{t} = \log(S_{i+1}(q)) - \log(S_i(q)). \tag{9}$$

En combinant les inégalités (8) et (9) on obtient

$$T'_n \geq \frac{1}{\log(n)} \sum_{i=1}^{n} \Big(\log(S_{i+1}) - \log(S_i) \Big) = \frac{1}{\log(n)} \Big(\log(S_{n+1}) - \log(g_0) \Big).$$

Soit $p' \in]p_1, p[$. Par croissance et positivité des fonctions g_k, et en bornant g_0 par M, on obtient pour tout $q \in [p', p]$

$$T'_n(q) \geq \frac{1}{\log(n)} \Big(\log(S_{n+1}(p')) - \log(M) \Big) \geq \frac{1}{\log(n)} \Big(\log(S_n(p')) - \log(M) \Big).$$

En intégrant cette inégalité sur $[p', p]$ on en déduit que

$$T_n(p) - T_n(p') \geq \frac{p - p'}{\log(n)}\Big(\log(S_n(p')) - \log(M)\Big)\,. \tag{10}$$

Puisque la suite g_n converge vers une fonction limite qu'on note g, on montre facilement (en comparant T_n à $(\sum_{i=1}^n g_i/i)/\log(n)$) que T_n converge également vers g. En prenant la lim sup en n de l'inégalité (10), et en utilisant le fait que $p' > p_1$, on en déduit que

$$g(p) - g(p') \geq (p - p') \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(S_n(p'))}{\log(n)} \geq p - p'$$

En faisant tendre p' vers p_1, on obtient $g(p) \geq p - p_1$, ce qui achève la démonstration du lemme 4.2. □

Grâce à ces deux lemmes, nous pouvons en fait obtenir le théorème suivant, qui inclut le résultat de décroissance exponentielle annoncé dans le théorème 2.2, mais également un contrôle de $\theta(p) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(p)$ pour $p > p_c$.

THÉORÈME 4.3. — *Soit $d \geq 2$. Dans le modèle de percolation de Bernoulli i.i.d. par arêtes sur $\mathbb{Z}^d$, on a les résultats suivants :*

(i) Pour tout $p < p_c(d)$, il existe $c(p) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\theta_n(p) \leq e^{-c(p)n}$;

(ii) Il existe $c > 0$ tel que pour tout $p > p_c(d)$, on a $\theta(p) := \lim_{n\to\infty} \theta_n(p) \geq c(p - p_c(d))$.

Preuve du théorème 4.3. — En combinant le résultat du lemme 4.1 et la majoration $\theta_n(p) \leq \theta_1(p_0)$ pour $p \leq p_0 < 1$, on obtient pour $p \leq p_0$

$$\frac{4}{1 - \theta_1(p_0)}\,\theta_n'(p) \geq \frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} \theta_k(p)} \theta_n(p)\,.$$

On peut donc appliquer le lemme 4.2 à la suite de fonctions (g_n) où $g_n : [0, p_0] \mapsto [0, 1]$ est définie par $g_n(p) = \kappa(p_0)\theta_n(p)$ avec $\kappa(p_0) = 4/(1 - \theta_1(p_0))$. On en déduit immédiatement l'existence d'un paramètre $p_1 \in [0, p_0]$ tel que

- pour tout $p \in [0, p_1[$, il existe $c(p) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\theta_n(p) \leq \kappa(p_0)^{-1} e^{-c(p)n} \leq e^{-c(p)n}$;
- pour tout $p \in]p_1, p_0]$, on a $\theta(p) := \lim_{n\to\infty} \theta_n(p) \geq \kappa(p_0)^{-1}(p - p_1)$.

Ainsi $p < p_1$ implique $\theta(p) = 0$ tandis que $p \in]p_1, p_0]$ implique $\theta(p) > 0$, donc $p_1 = p_c$ par définition de p_c dès qu'on choisit $p_0 > p_c$ (dans le cas contraire, $p_1 = p_0$ et la deuxième propriété est sans objet). Pour $p_0 > p_c$ fixé, on obtient pour tout $p \in]p_c, p_0]$ la minoration $\theta(p) \geq \kappa(p_0)^{-1}(p - p_c)$, mais par monotonie pour tout $p \geq p_0$ on a aussi $\theta(p) \geq \theta(p_0)$, d'où l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout $p > p_c$ on a $\theta(p) \geq c(p - p_c)$. Ceci conclut la preuve du théorème 4.3. □

5. APPLICATIONS DE CETTE MÉTHODE

Les preuves antérieures de la décroissance exponentielle de $\theta_n(p)$ avec n pour $p < p_c$ (théorème 2.2) et de l'égalité des points critiques (théorème 2.1), proposées par Menshikov [Men86], par Aizenman et Barsky [AB87] et par Duminil-Copin et Tassion [DCT16a, DCT16b], reposaient de façon cruciale sur l'inégalité BK (prouvée par van den Berg et Kesten [vdBK85]). Pour vérifier l'inégalité BK, un modèle doit présenter de fortes propriétés d'indépendance. Ainsi, l'égalité des points critiques et la décroissance exponentielle des probabilités de connexion étaient conjecturées dans de nombreux modèles de mécanique statistique, sans que les techniques de preuves précédemment connues ne puissent les démontrer. Il est à noter qu'en dimension 2, des résultats (égalité des points critiques, décroissance rapide des probabilités de connexion, mais aussi calcul de points critiques) ont été prouvés pour tout une variété de modèles planaires (voir [BR06, BDC12, ATT18]) en utilisant notamment d'autres inégalités sur les fonctions booléennes comme l'inégalité BKKKL ([KKL88, BKK$^+$92]) et ses généralisations (voir [Tal94, GG06]). Nous ne présenterons pas ici ces résultats, très spécifiques à la dimension 2.

Duminil-Copin, Raoufi et Tassion ont déjà appliqué la technique de preuve présentée ici pour obtenir les résultats équivalents dans les modèles suivants, que nous allons présenter de manière très informelle.

La FK-percolation : il s'agit d'une généralisation du modèle de percolation par arêtes i.i.d. sur $\mathbb{Z}$ pour $d \geq 2$, dans laquelle dans une boîte finie Λ la probabilité de voir une configuration ω est proportionnelle à $p^{k(\omega)} \prod_{e\in\Lambda} p^{\omega_e}(1-p)^{1-\omega_e}$, où $k(\omega)$ désigne le nombre de composantes connexes du graphe aléatoire défini par ω (je passe ici sous silence les questions de choix des conditions aux bords de la boîte Λ). Ce modèle doit son nom à Fortuin et Kasteleyn qui l'ont introduit à la fin des années 60 pour unifier les modèles de percolation, d'Ising et de Potts (d'autres modèles de mécanique statistique particulièrement étudiés que nous ne présenterons pas ici), et il est généralement appelé *random-cluster model* en anglais. Il présente également une transition de phase à q fixé quand p varie à un paramètre critique $p_c(q, d)$. Dans [DCRT19b], Duminil-Copin, Raoufi et Tassion prouvent la décroissance exponentielle des probabilités de connexion en régime sous-critique et l'égalité des points critiques pour tout paramètre $q \geq 1$. Pour $q = 1$ on retrouve le modèle de percolation i.i.d. par arêtes sur $\mathbb{Z}^d$, où ces résultats étaient connus par [Men86, AB87, DCT16a, DCT16b]. Pour tout q entier, le modèle de FK-percolation est en correspondance avec le modèle de Potts à q couleurs. Les résultats obtenus dans [DCRT19b] s'appliquent donc aussi au modèle de Potts, pour lequel ils n'étaient connus (en dehors de la dimension 2) que dans le cas $q = 2$ ([AB87, DCT16a]) qui correspond au modèle d'Ising, et q grand ([LMMS$^+$91]). La preuve s'applique également au modèle de FK-percolation sur des graphes plus généraux (graphes quasi-transitifs, avec des poids sur les arêtes), et inclue donc aussi le modèle de FK-percolation sur $\mathbb{Z}^d$ avec des interactions à portée finie, ce qui revient à ajouter des arêtes entre tout couple de points à une distance inférieure ou égale à un paramètre fini fixé. La difficulté supplémentaire principale de la preuve, par rapport au cas simple présenté dans cet exposé, est que la mesure étudiée n'est pas sous forme produit, donc Duminil-Copin, Raoufi et Tassion doivent commencer par généraliser l'inégalité OSSS à une classe plus large de mesures. La formule de Russo, qui ne s'étend pas au modèle de FK-percolation, est remplacée dans cette preuve par une formule plus robuste.

La percolation de Voronoï : il s'agit d'un modèle de percolation continue dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), dans lequel on jette des points dans $\mathbb{R}^d$ suivant un processus ponctuel de Poisson homogène η d'intensité 1. À chaque point $x \in \eta$, on associe sa cellule $C(x)$ comme étant l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ qui sont plus proches de x que de tout autre point de η. On colorie alors chaque cellule $C(x)$ pour $x \in \eta$ en noir avec probabilité p ou en blanc avec probabilité $1 - p$ —cela revient à colorier chaque point de η, et à étendre la couleur choisie à toute la cellule de ce point— et on regarde les propriétés de percolation (existence d'une composante connexe non bornée, etc.) du sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ formé des points coloriés en noir. Ce modèle présente une transition de phase à un paramètre critique $p_c(d)$. Dans [DCRT19a], Duminil-Copin, Raoufi et Tassion montrent la décroissance exponentielle de la probabilité de connexion en régime sous-critique, ce qui n'était pas connu en dehors de la dimension 2. Pour ce faire, ils doivent discrétiser l'espace pour pouvoir appliquer l'inégalité OSSS à un espace produit. L'aspect délicat de la preuve est dans la construction de l'arbre de décision et le contrôle de la probabilité que l'algorithme révèle les couleurs des points de η, dans la mesure où la couleur d'un point fixé de $\mathbb{R}^d$ peut dépendre de la couleur d'un point du processus η très éloigné de lui.

Le modèle booléen : il s'agit d'un autre modèle de percolation continue dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), dans lequel on jette des points dans $\mathbb{R}^d$ suivant un processus ponctuel de Poisson homogène η d'intensité $\lambda > 0$, puis on centre en chaque point $x \in \eta$ une boule de rayon aléatoire R_x, de sorte que les rayons des boules sont i.i.d. Le modèle booléen Σ est l'union de toutes les boules ainsi créées. À loi des rayons ν fixée, on peut regarder les propriétés de connexion de Σ (existence d'une composante connexe non bornée, etc.) en fonction du paramètre λ. Ce modèle présente une transition de phase à un paramètre critique $\lambda_c(\nu, d)$. Dans [DCRT18], Duminil-Copin, Raoufi et Tassion prouvent l'égalité des points critiques dans ce modèle, sous l'hypothèse que la loi ν des rayons des boules admet un moment d'ordre $5d-3$. Cette hypothèse de moment est sûrement non optimale, mais une hypothèse de moment est par ailleurs nécessaire puisque si ν n'admet pas un moment d'ordre d alors le modèle est dégénéré au sens où $\Sigma = \mathbb{R}^d$ p.s. Dans ce modèle, la difficulté principale pour appliquer la technique de preuve est que la notion d'influence et de points pivots ne sont plus si facilement liés. Les auteurs doivent donc prouver de façon assez délicate un lien entre les influences qui apparaissent dans l'application de l'inégalité OSSS avec la dérivée de la fonction θ. Par ailleurs, la décroissance exponentielle des probabilités de connexion est fausse si la queue de distribution de la loi ν des rayons n'a pas elle-même une décroissance exponentielle. Duminil-Copin, Raoufi et Tassion arrivent en fait à appliquer leur méthode en supposant que les points critiques ne sont pas égaux, et n'obtiennent par cette approche une preuve de la décroissance exponentielle que dans la fenêtre entre les paramètres critiques, concluant ainsi à une absurdité et donc à l'égalité des points critiques. Ils doivent alors à nouveau travailler pour étudier la vitesse de décroissance des probabilités de connexion en fonction de la queue de distribution de ν. Ces résultats (décroissance exponentielle des probabilités de connexion, égalité des points critiques) n'étaient connus en dehors de la dimension 2 que dans le cas de rayons bornés ([ZS85, MRS94, Zie18]).

Comme nous l'avons déjà dit, la décroissance exponentielle des probabilités de connexion est un outil crucial dans le calcul de points critiques pour des modèles planaires, plus précisément pour montrer que la valeur du point critique prédite par dualité est la bonne. Ainsi, les travaux de Duminil-Copin, Raoufi et Tassion permettent de démontrer ou re-démontrer les valeurs des paramètres critiques des modèles étudiés dans le cas particulier $d = 2$: pour le modèle de FK-percolation sur $\mathbb{Z}^d$, $p_c(q, 2) = \sqrt{q}/(1+\sqrt{q})$ (les auteurs obtiennent en fait une caractérisation du point critique sur des graphes planaires plus généraux) ; pour la percolation de Voronoï, $p_c(2) = 1/2$.

Les trois modèles que nous venons d'introduire présentent tous des corrélations à longue portée. La stratégie de preuve présentée ici a le potentiel de s'appliquer à d'autres modèles, même si comme on a pu le constater son adaptation présente des difficultés différentes pour chaque modèle considéré.

RÉFÉRENCES

[AB87] M. Aizenman & D. J. Barsky – « Sharpness of the phase transition in percolation models », *Comm. Math. Phys.* **108** (1987), no. 3, p. 489–526.

[ATT18] D. Ahlberg, V. Tassion & A. Teixeira – « Sharpness of the phase transition for continuum percolation in $\mathbb{R}^2$ », *Probab. Theory Related Fields* **172** (2018), no. 1-2, p. 525–581.

[BDC12] V. Beffara & H. Duminil-Copin – « The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$ », *Probab. Theory Related Fields* **153** (2012), no. 3-4, p. 511–542.

[BDW02] H. Buhrman & R. De Wolf – « Complexity measures and decision tree complexity : a survey », *Theoretical Computer Science* **288** (2002), no. 1, p. 21–43.

[BH57] S. R. Broadbent & J. M. Hammersley – « Percolation processes. I. Crystals and mazes », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), p. 629–641.

[BK89] R. M. Burton & M. Keane – « Density and uniqueness in percolation », *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), no. 3, p. 501–505.

[BKK+92] J. Bourgain, J. Kahn, G. Kalai, Y. Katznelson & N. Linial – « The influence of variables in product spaces », *Israel J. Math.* **77** (1992), no. 1-2, p. 55–64.

[BR06] B. Bollobás & O. Riordan – « The critical probability for random Voronoi percolation in the plane is 1/2 », *Probab. Theory Related Fields* **136** (2006), no. 3, p. 417–468.

[DCRT18] H. Duminil-Copin, A. Raoufi & V. Tassion – « Subcritical phase of d-dimensional Poisson-Boolean percolation and its vacant set. », arXiv :1805.00695, 2018.

[DCRT19a] ______, « Exponential decay of connection probabilities for subcritical Voronoi percolation in $\mathbb{R}^d$ », *Probab. Theory Related Fields* **173** (2019), no. 1-2, p. 479–490.

[DCRT19b] ______, « Sharp phase transition for the random-cluster and Potts models via decision trees », *Ann. of Math. (2)* **189** (2019), no. 1, p. 75–99.

[DCT16a] H. Duminil-Copin & V. Tassion – « A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model », *Communications in Mathematical Physics* **343** (2016), no. 2, p. 725–745.

[DCT16b] ______, « A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation on $\mathbb{Z}^d$ », *Enseign. Math.* **62** (2016), no. 1-2, p. 199–206.

[GG06] B. T. Graham & G. R. Grimmett – « Influence and sharp-threshold theorems for monotonic measures », *Ann. Probab.* **34** (2006), no. 5, p. 1726–1745.

[Gri99] G. Grimmett – *Percolation*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 321, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[GS15] C. Garban & J. E. Steif – *Noise sensitivity of Boolean functions and percolation*, Institute of Mathematical Statistics Textbooks, vol. 5, Cambridge University Press, New York, 2015.

[Ham57] J. M. Hammersley – « Percolation processes : Lower bounds for the critical probability », *Ann. Math. Statist.* **28** (1957), p. 790–795.

[Ham59] ______, « Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration », in *Le calcul des probabilités et ses applications. Paris, 15-20 juillet 1958*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXXVII, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959, p. 17–37.

[Har60] T. E. Harris – « A lower bound for the critical probability in a certain percolation process », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **56** (1960), p. 13–20.

[Kes80] H. Kesten – « The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$ », *Comm. Math. Phys.* **74** (1980), no. 1, p. 41–59.

[KKL88] J. Kahn, G. Kalai & N. Linial – « The influence of variables on boolean functions », in *Proceeding if the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, 1988.

[LMMS+91] L. Laanait, A. Messager, S. Miracle-Solé, J. Ruiz & S. Shlosman – « Interfaces in the Potts model. I. Pirogov-Sinai theory of the Fortuin-Kasteleyn representation », *Comm. Math. Phys.* **140** (1991), no. 1, p. 81–91.

[Men86] M. V. Menshikov – « Coincidence of critical points in percolation problems », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **288** (1986), no. 6, p. 1308–1311.

[MRS94] R. Meester, R. Roy & A. Sarkar – « Nonuniversality and continuity of the critical covered volume fraction in continuum percolation », *J. Statist. Phys.* **75** (1994), no. 1-2, p. 123–134.

[OSSS05] R. O'Donnell, M. Saks, O. Schramm & R. Servedio – « Every decision tree has an influential variable », *FOCS* (2005).

[Rus78] L. Russo – « A note on percolation », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **43** (1978), no. 1, p. 39–48.

[SS10] O. Schramm & J. E. Steif – « Quantitative noise sensitivity and exceptional times for percolation », *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 2, p. 619–672.

[SW78] P. D. Seymour & D. J. A. Welsh – « Percolation probabilities on the square lattice », *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), p. 227–245, Advances in graph theory (Cambridge Combinatorial Conf., Trinity College, Cambridge, 1977).

[Tal94] M. Talagrand – « On Russo's approximate zero-one law », *Ann. Probab.* **22** (1994), no. 3, p. 1576–1587.

[vdBK85] J. van den Berg & H. Kesten – « Inequalities with applications to percolation and reliability », *J. Appl. Probab.* **22** (1985), no. 3, p. 556–569.

[Zie18] S. Ziesche – « Sharpness of the phase transition and lower bounds for the critical intensity in continuum percolation on $\mathbb{R}^d$ », *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **54** (2018), no. 2, p. 866–878.

[ZS85] S. A. Zuev & A. F. Sidorenko – « Continuous models of percolation theory. I », *Teoret. Mat. Fiz.* **62** (1985), no. 1, p. 76–86.

Marie Théret

Modal'X, UPL
Université Paris Nanterre
F92000 Nanterre France.
E-mail : `marie.theret@parisnanterre.fr`