

**L'EXISTENCE D'UNE INFINITÉ D'HYPERSURFACES MINIMALES  
DISTINCTES DANS UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE FERMÉE  
ARBITRAIRE DE BASSE DIMENSION.**

[d'après F. C. Marques, A. A. Neves et A. Song]

par **Tristan Rivière**

## INTRODUCTION

La recherche de géodésiques fermées, c'est-à-dire des cercles points critiques de la fonctionnelle de longueur, sur une surface ou une variété de dimension quelconque est au moins aussi ancienne que le calcul de Euler et Lagrange entre 1744 et 1760. Cette recherche trouve une généralisation naturelle en dimension plus grande dans la notion de surfaces minimales qui sont les points critiques du volume parmi les sous-variétés de dimension et de topologie donnée. Les problématiques consistant à mettre en évidence des « sous-variétés optimales » dans un espace donné se sont avérées être des moteurs féconds dans le développement de pans entiers des mathématiques comme le calcul des variations, les équations aux dérivées partielles, la géométrie et la topologie différentielle, les systèmes dynamiques, etc.

Un résultat classique de Marston Morse (voir par exemple [39]) affirme que sur certains ellipsoïdes de  $\mathbb{R}^3$  il existe exactement 3 géodésiques fermées et simples (plongées). Le but de cet exposé est d'établir qu'un tel résultat de rigidité ne s'étend pas aux dimensions supérieures et que dans toute variété riemannienne lisse, compacte et sans bord de dimension inférieure ou égale à 7, il existe une infinité d'hypersurfaces minimales plongées distinctes<sup>(1)</sup>. Ce théorème dont nous allons décrire les origines et la démonstration récente par Antoine Song est l'aboutissement d'efforts qui nous renvoient aux origines du calcul des variations et des problèmes de *minmax* avec les travaux de Georges Birkoff, Lazar Lyusternik, Lev Shnirelmann, Abram Fet, Marsden Morse, Richard Palais, Stephen Smale etc., tout comme à la fusion de la théorie de la mesure géométrique<sup>(2)</sup> avec cette théorie de minmax sous l'impulsion de Fred Almgren et Jon Pitts.

---

1. La perte de cette rigidité en dimension supérieure doit être relativisée : si l'on se restreint aux surfaces minimales de topologie donnée alors on a par exemple le résultat suivant : il existe des métriques voisines de la métrique standard sur  $S^3$  qui admettent exactement 4 sphères minimales plongées ([61]). Un résultat de Jürgen Jost dit par ailleurs que toute sphère tridimensionnelle admet au moins 4 sphères minimales plongées [37]

2. La théorie de la mesure géométrique a été motivée à l'origine par la résolution du problème de Plateau dans sa plus grande généralité.

## I. LA CONSTRUCTION DE GÉODÉSQUES PAR MINMAX

Les approches pour construire des géodésiques fermées sont nombreuses et très riches. Une présentation exhaustive de celles-ci et des théories mathématiques qui en découlent va bien au-delà de cet exposé. Nous nous contentons de mentionner l'origine des idées qui ont directement influencé la preuve qui nous intéresse aujourd'hui.

Suite aux travaux de Jacques Hadamard et d'Henri Poincaré sur le sujet, Georges Birkhoff a développé à la fois des approches de systèmes dynamiques (flot géodésique) mais aussi variationnelles afin de construire des géodésiques fermées dans des variétés simplement connexes ([10]). Ces dernières peuvent être revisitées dans l'esprit de la théorie de Morse sur le sujet ainsi qu'au moyen de la théorie des déformations en dimension infinie de Richard Palais et Stephen Smale, dont elles sont à l'origine.

Précisément, étant donnée une sous-variété riemannienne fermée (compacte sans bord) et connexe  $(M^m, g)$  de  $\mathbb{R}^Q$ , dans le cas où  $\pi_1(M^m) \neq 0$  l'existence d'une géodésique fermée s'obtient par simple minimisation de l'énergie de Dirichlet

$$E(u) := \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 d\theta$$

dans le sous-ensemble de la variété de Hilbert

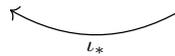
$$\mathcal{M} := W^{1,2}(S^1, M^m) := \{u \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^Q) ; u(\theta) \in M^m, \forall \theta \in S^1\}$$

des éléments  $u$  réalisant une classe de conjugaison donnée du  $\pi_1$  de  $M^m$ . L'injection compacte  $W^{1,2}(S^1, M^m) \hookrightarrow C^0(S^1, M^m)$  garantit l'existence d'un minimum dans chacune de ses classes qui s'avère être une géodésique fermée paramétrisée à vitesse constante.

Lorsque la variété  $M^m$  est simplement connexe l'obtention d'une géodésique fermée s'obtient par un argument variationnel plus élaboré qu'une simple minimization : un argument dit de **minmax**.

Un résultat classique de la théorie de l'homotopie des variétés compactes donne l'existence de  $k \in \{2, \dots, m\}$  tel que  $\pi_k(M^m) \neq 0$  mais  $\pi_l(M^m) = 0$  pour  $l \in \{1, \dots, k-1\}$ . On démontre sans trop d'efforts que la variété de Hilbert  $\mathcal{M}$  est homotopiquement équivalente à l'espace des chemins fermés  $C^0(S^1, M^m)$ . On note  $\Omega_p(M^m)$  l'espace des lacets de  $M^m$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments  $u$  dans  $C^0(S^1, M^m)$  tels que  $u(0) = p$  où  $p$  est un point fixé de  $M^m$ . On observe que l'application « évaluation »  $ev$  de  $C^0(S^1, M^m)$  dans  $M^m$  qui à  $u$  associe  $u(0) = u(2\pi)$  est une fibration de Serre de fibre l'espace des lacets  $\Omega(M^m)$ . Cette projection possède un inverse  $i$  qui à un élément quelconque de  $M$  associe le chemin constant égal à cet élément. La suite exacte de fibration

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(\Omega_p(M^m)) \longrightarrow \pi_n(C^0(S^1, M^m)) \xrightarrow{ev_*} \pi_n(M^m) \longrightarrow \pi_{n-1}(\Omega_p(M^m)) \longrightarrow \cdots$$



est scindée (i.e.  $\text{Im } ev_* = \pi_n(M^m)$ , en effet tout élément de  $\pi_n(M^m)$  est envoyé par  $i_*$  en un élément de  $\pi_n(C^0(S^1, M^m))$  et l'on a clairement  $ev_* \circ i_* = \text{id}$ ) et donne l'identité

$$\pi_n(C^0(S^1, M^m)) = \pi_n(\Omega_p(M^m)) \oplus \pi_n(M^m).$$

On a tautologiquement  $\pi_n(\Omega_p(M^m)) = \pi_{n+1}(M^m)$  ce qui donne finalement

$$\pi_n(\mathcal{M}) = \pi_{n+1}(M) \oplus \pi_n(M^m).$$

On a donc en particulier pour l'entier  $k$  défini plus haut :  $\pi_{k-1}(\mathcal{M}) \neq 0$ .<sup>(3)</sup>

On introduit alors le **problème de minmax** suivant : existe-t-il un point critique non trivial (non égal à une constante) de  $E$  qui réalise le nombre donné par

$$(I.1) \quad W := \inf_{\{u(s,\theta) \in C^0(S^{k-1}, \mathcal{M}) ; [u] \neq 0\}} \max_{s \in S^{k-1}} E(u(s, \cdot))$$

où  $[u]$  désigne la classe d'homotopie de  $u$ ? Le nombre  $W$  est appelé la **largeur** du problème de minmax. La réponse à cette question est positive et sa démonstration donne l'existence d'une géodésique fermée non triviale dans toute variété riemannienne fermée régulière<sup>(4)</sup>.

Il faut d'abord s'assurer que  $W > 0$ . Si tel n'était pas le cas il existerait alors pour tout  $\varepsilon > 0$  un élément  $u_\varepsilon \in C^0(S^{k-1}, \mathcal{M})$  tel que  $[u_\varepsilon] \neq 0$  et

$$\max_{s \in S^{k-1}} E(u_\varepsilon(s, \cdot)) < \varepsilon$$

En choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit (inférieur au rayon de convexité de  $M^m$ ) on aurait ainsi le fait que pour tout  $t \in S^{k-1}$  le chemin  $u_\varepsilon(t, \cdot)$  est inclus strictement dans une boule géodésique de  $M^m$ . En utilisant l'unicité de la géodésique reliant deux points d'une telle boule et la continuité dans l'espace des chemins de ces géodésiques par rapport à ces deux points on construit une homotopie déformant  $u_\varepsilon(s, \cdot)$  en une suite de chemins constants. Donc  $[u_\varepsilon(s, \cdot)] \in \text{Im } ev_*$  mais comme  $\pi_{k-1}(M^m) = 0$  on obtient que  $[u_\varepsilon(t, \cdot)] = 0$  ce qui contredit notre hypothèse sur  $u_\varepsilon$ .

Afin de montrer que  $W$  est effectivement la longueur d'une géodésique fermée, on développe des outils qui permettent de déformer les ensembles de niveau de  $E$  de façon continue à un « rythme donné » en l'absence de point critique. C'est la théorie des déformations en dimension infinie dite de **Palais–Smale**. Dans le cas présent son application est garantie par les faits suivants :

- L'**espace de configuration**  $\mathcal{M} := W^{1,2}(S^1, M^m)$  définit une variété de Hilbert régulière, séparable et modelée sur un espace de Hilbert  $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^m)$  lui-même séparable.

---

3. Par exemple, si  $M^m = S^2$  on a

$$\pi_1(W^{1,2}(S^1, S^2)) = \mathbb{Z}$$

et un générateur de ce premier groupe d'homotopie est donné par ce que l'on appelle un **balayage de Birkhoff** : la famille continue de chemins sur  $S^2$  obtenue en prenant l'intersection de cette sphère avec tous les plans horizontaux de  $\mathbb{R}^3$  « balayant » de haut en bas  $S^2$  exactement une fois, ensuite la boucle est refermée au moyen d'une famille continue de chemins constants reliant le pôle sud au pôle nord.

4. Toute variété fermée et lisse se plonge isométriquement dans un espace euclidien grâce à un théorème classique dû à John Nash.

—  $\mathcal{M}$  est équipé d'une métrique

$$g(u, v) := \int_0^{2\pi} u \cdot v + \partial_\theta u \cdot \partial_\theta v \, d\theta$$

pour laquelle la variété riemannienne associée  $(\mathcal{M}, g)$  est *complète*.

— La fonctionnelle  $E$  est de régularité  $C^1$  sur  $\mathcal{M}$ .

— La fonctionnelle  $E$  satisfait la condition de **Palais–Smale**<sup>(5)</sup> : Soit

$$u_n \in \mathcal{M} \quad \text{t.q.} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) < +\infty \quad \text{et} \quad \nabla E_{u_n} \rightarrow 0$$

alors il existe  $u_{n'}$  et  $u_\infty \in \mathcal{M}$  tels que

$$u_{n'} \rightarrow u_\infty \quad \text{et} \quad \nabla E_{u_\infty} = 0 .$$

Ces hypothèses étant vérifiées on démontre sans trop de difficultés que le flot  $\phi_t$  associé au champ de vecteurs  $X := -\nabla E$  sur  $\mathcal{M}$  existe *pour tout temps*. S'il n'y avait pas de point critique de  $E$  entre les niveaux d'énergie  $W + \varepsilon$  et  $W - \varepsilon$ , la condition de Palais–Smale nous dirait que  $|\nabla E|$  est minorée par un nombre strictement positif  $\delta$  sur  $E^{-1}(W - \varepsilon, W + \varepsilon)$ . On prend alors un  $u \in C^0(S^{k-1}, \mathcal{M})$  tel que  $[u] \neq 0$  et satisfaisant

$$\max_{s \in S^{k-1}} E(u(s, \cdot)) < W + \varepsilon .$$

L'application du flot à toute la famille  $(u(s, \cdot))_{s \in S^{k-1}}$  simultanément nous fait passer sous le niveau d'énergie  $W - \varepsilon$  après le temps  $T_0 = 2\varepsilon/\delta$  :

$$\max_{s \in S^{k-1}} E(\phi_{T_0}(u(s, \cdot))) < W - \varepsilon .$$

Or, la continuité du flot par rapport au paramètre de temps donne  $[\phi_{T_0}(u)] = [u] \neq 0$ . Ce qui donne une contradiction et  $W$  est bien la longueur d'une géodésique fermée. On a ainsi établi le théorème suivant dû dans sa forme définitive la plus générale à Fet et Lyusternik.

**THÉORÈME I.1** ([43]). — *Toute variété riemannienne fermée possède une géodésique fermée non constante.*

Dans son article d'origine datant de 1917 Birkhoff n'avait évidemment pas à sa disposition cette théorie de la déformation qui date de la deuxième moitié des années 60. Néanmoins il conçut « à la main », par un argument combinatoire, un processus de déformation des ensembles de niveau d'énergie, le **processus de raccourcissement des courbes** qui peut être vu comme un ancêtre de ce que l'on appelle aujourd'hui les **flots pseudo-gradients**, qui eux-même généralisent  $X = -\nabla E$  au cas de fonctionnelles  $C^1$  sur des variétés non plus Hilbertiennes mais de Banach munies de structures finlériennes complètes. L'utilisation des flots pseudo-gradients à partir du début des années 70 a elle-même stimulé l'étude des flots géométriques, qui en sont des versions plus précises, et qui ne cessent de prouver leur efficacité pour résoudre diverses questions d'analyse, de géométrie et de topologie différentielle.

---

5. Aussi appelée « condition (C) » dans les textes d'origines.

## II. L'INFINITÉ DE GÉODÉSQUES DANS UNE VARIÉTÉ FERMÉE

La résolution donnée ci-dessus de l'existence d'une géodésique sur une variété fermée quelconque pose naturellement la question du nombre de ces géodésiques. Au vu de cette résolution il est naturel de procéder à des opérations de minmax de la forme (I.1) en contraignant la classe  $[u]$  à appartenir à des groupes d'homotopie non triviaux éventuellement de plus en plus nombreux. La théorie des déformations de Palais–Smale nous permet d'affirmer que chaque valeur de minmax est effectivement réalisée par une géodésique fermée. Se pose néanmoins la question de la « répétition » de ces géodésiques et il s'agit de savoir si la géodésique obtenue n'est pas le recouvrement multiple d'une autre obtenue précédemment. Une géodésique fermée qui n'est pas le recouvrement d'une géodésique fermée strictement plus courte est appelée **géodésique première**.

Dans le cas à nouveau où le groupe fondamental de la variété  $M^m$  possède une infinité de classes de conjugaison premières (*i.e.* qui ne peuvent être représentées par la composition itérée d'une même classe) alors l'argument de minimisation mentionné plus haut donne une infinité de géodésiques premières<sup>(6)</sup>.

Il est donc intéressant de se pencher plus spécifiquement sur le cas des variétés dont le groupe fondamental est fini ou même nul. Pour le choix d'une **métrique générique**<sup>(7)</sup> théorème appelé « théorème des métriques cahoteuses » dû à Ralph Abraham [1] et Dmitry Anosov [7] affirme que pour un ensemble de métriques génériques, toutes les géodésiques de l'espace des chemins fermés  $\mathcal{M} := W^{1,2}(S^1, M^m)$  n'ont comme champs de Jacobi (*i.e.* éléments du noyau de la dérivée seconde de  $E$ ) que ceux générés par l'action du cercle  $S^1$  sur le domaine. Comme les indices des points critiques de  $E$  sont uniformément bornés sous un certain niveau d'énergie et comme  $E$  satisfait à la condition de Palais–Smale, la théorie de Morse nous enseigne que  $\mathcal{M} := W^{1,2}(S^1, M^m)$  est homotope à un complexe cellulaire limite<sup>(8)</sup> de complexes cellulaires finis donnés

---

6. Dans le cas des surfaces compactes hyperboliques  $M^m = \Sigma_g$  de genre  $g \geq 2$ , comme la courbure est négative, un résultat classique affirme que chaque classe du  $\pi_1$  possède exactement une géodésique. En effet, le calcul de la dérivée seconde de  $E$  donne immédiatement que chaque géodésique est stable. Une étude approfondie des classes primitives de  $\pi_1(\Sigma_g)$  permet alors d'établir que le nombre de géodésiques primitives de longueur majorée par  $L > 0$  se comporte asymptotiquement comme  $e^L/L$ . Ce résultat de Delsarte, Huber et Selberg est aussi connu sous le nom du « **théorème des nombres premiers des surfaces de Riemann** » du fait de la similitude avec la répartition asymptotique de ces derniers (voir par exemple [12]). Il est encore bien plus délicat de faire une estimation asymptotique des **géodésiques simples** — plongées — parmi ces géodésiques primitives. C'était l'objet de la thèse de Maryam Mirzakhani qui a obtenu un comportement de la forme  $\simeq n(\Sigma_g) L^{6g-6}$  [47].

7. Un sous-ensemble d'un espace topologique est « générique » s'il est l'intersection au plus dénombrable d'ensembles ouverts. Dans le cas d'espaces métriques complets, par exemple, le théorème de Baire dit qu'un tel ensemble est dense. Une métrique « générique » aussi appelée « cahoteuse » — *bumpy* en anglais — sera supposée générique pour la topologie  $C^3$ .

8. Voir l'appendice du livre de John Milnor [46].

par les sous-ensembles de niveaux

$$\mathcal{M}^\lambda := \left\{ u \in W^{1,2}(S^1, M^m) ; \sqrt{E(u)} \leq \lambda \right\} .$$

Par ailleurs, pour un choix de métrique générique sur  $M^m$  les points critiques non constants de  $E$  réalisent une sous-variété unidimensionnelle sur laquelle  $S^1$  agit et on peut aussi (grâce à la compacité forte de l'espace des géodésiques de longueur bornée par un nombre fixé) garantir que les orbites appartiennent à des niveaux d'énergie distincts les uns des autres.

Dans l'espoir de mettre en évidence un nombre infini de géodésiques primitives, plutôt donc que de considérer les groupes d'homotopie de l'espace des chemins fermés  $\mathcal{M} := W^{1,2}(S^1, M^m)$ , la théorie de Morse nous invite à considérer les différents groupes d'homologie associés aux sous-ensemble de niveaux de  $\sqrt{E}$  dans  $\mathcal{M}$  :

$$H_k(\mathcal{M}^b, \mathcal{M}^a; \mathbb{Z}) \quad \text{où} \quad a < b \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N} .$$

Dans [25] Mikhael Gromov considère pour tout réel positif  $\lambda > 0$  le nombre entier défini par

$$\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) := \sup \left\{ \ell \in \mathbb{N} ; H_\ell(\mathcal{M}, \mathcal{M}^\lambda; \mathbb{Z}) = 0 , \forall \ell \leq k \right\} ,$$

$\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda)$  ainsi défini est aussi le nombre naturel maximal tel que toute application d'un polyèdre de dimension  $\ell \leq \text{dm}(\mathcal{M}^\lambda)$  dans  $\mathcal{M}$  se déforme homotopiquement en une application dans  $\mathcal{M}^\lambda$ . On a donc en particulier

$$(II.2) \quad H_\ell(\mathcal{M}^\lambda; \mathbb{Z}) = H_\ell(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) \quad \text{pour} \quad \ell \leq \text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) - 1 .$$

On peut aussi définir le **spectre non linéaire**<sup>(9)</sup>  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  comme étant

$$\lambda_k := \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^+ ; \text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) < k \right\}$$

On a alors le théorème suivant.

**THÉORÈME II.1** ([25]). — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne compacte et de groupe fondamental fini, alors lorsque  $k$  tend vers l'infini on a le comportement asymptotique suivant*

$$(II.3) \quad \frac{\log \lambda_k}{\log k} = 1 + O\left(\frac{1}{\log k}\right) .$$

La preuve de la majoration  $\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) \leq C \lambda$  est assez élémentaire dans le cas d'une métrique générique et lorsque  $M^m$  est simplement connexe. La démonstration par min-max du théorème I.1 produit une géodésique  $\gamma$  qui ne peut être un minimum local strict

---

9. Cette notion de **spectre non linéaire** est au centre de cet exposé et reviendra plus loin dans le cadre des surfaces minimales. Elle coïncide avec la notion classique de spectre dans le cas linéaire (voir [26]). En guise d'illustration, si l'on remplace  $\mathcal{M}$  par les éléments de  $W^{1,2}(M^m, \mathbb{R})$  de norme  $L^2$  égale à 1 et si l'on prend  $E(u) := \int_{M^m} |du|^2 d\text{vol}_M$ , le spectre  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ainsi défini est bien le spectre de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur  $M^m$  où chaque valeur du spectre est répétée autant de fois que la dimension de l'espace propre correspondant. On peut donc très bien avoir  $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ .

de la longueur. Comme la dérivée seconde n'a pour noyau que l'action de  $S^1$  sur la paramétrisation, la géodésique  $\gamma$  doit avoir un indice non nul. On se convainc aisément que le  $n$ -recouvrement de cette géodésique a un indice au moins égal à  $n$ . Par ailleurs, le calcul direct de la dérivée seconde de  $E$  montre que la longueur contrôle linéairement l'indice de Morse des points critiques. En considérant les recouvrements entiers de  $\gamma$  on obtient donc l'existence d'une famille de géodésiques d'indice  $k_n$  asymptotiquement comparable à  $n$ . La théorie de Morse ([46]) nous enseigne<sup>(10)</sup> alors que cette géodésique est responsable d'un changement d'homologie des sous-ensembles de niveau pour les longueurs  $n L(\gamma)$  et que  $H_{k_n}(\mathcal{M}^{nL(\gamma)+\varepsilon}, \mathcal{M}^{nL(\gamma)-\varepsilon}; \mathbb{Z}) \neq 0$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Si  $\text{dm}(\mathcal{M}^{nL(\gamma)+\varepsilon}) > k_n + 1$  et si  $\text{dm}(\mathcal{M}^{nL(\gamma)-\varepsilon}) > k_n$ , on doit alors avoir par définition  $H_{k_n}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{nL(\gamma)-\varepsilon}; \mathbb{Z}) = 0$  et  $H_{k_n+1}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{nL(\gamma)+\varepsilon}; \mathbb{Z}) = 0$ . La suite de Mayer–Vietoris d'homologie relative

$$H_{k_n+1}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{nL(\gamma)+\varepsilon}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{k_n}(\mathcal{M}^{nL(\gamma)+\varepsilon}, \mathcal{M}^{nL(\gamma)-\varepsilon}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{k_n}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{nL(\gamma)-\varepsilon}; \mathbb{Z})$$

apporte une contradiction à cette hypothèse. Pour tout  $n \geq 1$  on a donc

$$\text{dm}(\mathcal{M}^{nL(\gamma)}) \leq k_n + 1 \simeq n$$

ce qui donne<sup>(11)</sup>  $\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) \leq C \lambda$ .

Une autre démonstration de la majoration avec pour seule hypothèse que  $\pi_1(M^m)$  est fini fait appel à un résultat de Dennis Sullivan [59] sur le calcul du modèle minimal de  $M^m$  donnant la cohomologie de de Rham de  $\mathcal{M}$ . Ce calcul établit que, sous l'hypothèse  $\pi_1(M^m)$  fini, il existe une suite arithmétique  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (pn + q)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $q \in \mathbb{N}$  telle que  $H^{k_n}(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \neq 0$ .

Dans le cas d'une métrique générique à nouveau, le calcul direct de la dérivée seconde de  $E$  donne que la longueur contrôle linéairement l'indice de Morse des points critiques. En d'autres termes, sous le niveau de longueur  $\lambda$  il ne peut y avoir que des géodésiques d'indice inférieur à  $C \lambda$  pour une constante  $C > 0$ . **L'inégalité faible de Morse** ([46]) donne alors que pour  $C \lambda \leq k$

$$H^k(\mathcal{M}^\lambda; \mathbb{R}) = 0 .$$

Donc en particulier comme  $H^{k_n}(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \neq 0$ . L'équation (II.2) impose alors que pour  $\lambda = C^{-1} k_n$  on ait  $\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) \leq k_n$ . Comme  $k_n$  a une progression arithmétique on en déduit la majoration  $\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) \leq C \lambda$ .

La minoration est moins immédiate et repose, dans le cas simplement connexe, d'une part sur la construction d'une décomposition cellulaire de  $\mathcal{M}$  à partir d'une triangulation finie de  $M^m$ , et d'autre part sur l'existence d'une application, homotope à l'identité, lipschitzienne de  $M^m$  dans lui-même, qui contracte le squelette 1-dimensionnel de cette triangulation finie de  $M^m$  en un point. Le cas où  $M^m$  a un groupe fondamental fini se ramène au cas simplement connexe en travaillant d'abord sur le revêtement universel<sup>(12)</sup>.

10. Pour une métrique générique il y a au plus une géodésique de longueur donnée.

11. On utilise que  $\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda)$  est par définition une application croissante en  $\lambda$ .

12. Voir aussi le chapitre 7 de [28].

La suite exacte d'homologie pour les paires  $(\mathcal{M}^a, \mathcal{M}^b)$  pour  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $b > a > C\lambda$  où  $C > (\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{dm}(\mathcal{M}^\lambda)/\lambda)^{-1}$  donne pour  $\lambda$  assez grand

$$(II.4) \quad \forall i \leq \lambda \quad H_i(\mathcal{M}^b, \mathcal{M}^a; \mathbb{Z}) = 0 .$$

Comme, pour le choix générique de métrique effectué, il y a au plus une  $S^1$ -orbite de géodésiques à un niveau d'énergie donnée, l'inégalité faible de Morse combinée avec la minoration dans (II.3) donne que pour avoir un indice de Morse  $k$  pour une longueur de géodésique  $\lambda$  on a d'une part  $\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) \leq k$ , mais aussi  $\text{dm}(\mathcal{M}^\lambda) \geq C\lambda$ . On en déduit que

$$\text{Indice de Morse}(\gamma) \geq CL(\gamma) .$$

En appliquant à nouveau l'inégalité faible de Morse on obtient ainsi l'existence d'une constante  $C > 0$  pour laquelle l'inégalité suivante est vraie

$$\text{Card} \{ \text{géod. de longueur} \leq \lambda \} \geq \sum_{i=0}^{[C\lambda]} \mu_i \geq \sum_{i=0}^{[C\lambda]} \dim(H_i(\mathcal{M}; \mathbb{R}))$$

où  $\mu_i$  est le nombre de  $S^1$ -orbites dans  $\mathcal{M}$  de géodésiques d'indice de Morse  $i$ . Toute géodésique est le revêtement multiple d'une géodésique première. On obtient donc la minoration

$$(II.5) \quad \text{Card} \{ \text{géod. premières de longueur} \leq \lambda \} \geq \frac{C}{\lambda} \sum_{i=0}^{[C\lambda]} \dim(H_i(\mathcal{M}; \mathbb{R})) .$$

Cette minoration a été améliorée par Werner Ballmann and Wolfgang Ziller qui établissent dans [8], à nouveau pour des métriques génériques sur une variété fermée simplement connexe et  $\lambda$  suffisamment grand,

$$\text{Card} \{ \text{géod. premières de longueur} \leq \lambda \} \geq C \max_{i \leq [C\lambda]} \dim(H_i(\mathcal{M}; \mathbb{R})) .$$

Si la suite des nombres de Betti de l'espace des chemins fermés n'est pas uniformément bornée, on obtient ainsi l'existence d'une infinité de géodésiques premières. On retrouve de cette façon, dans le cas particulier de métriques génériques, le fameux théorème de Detlef Gromoll et Wolfgang Meyer.

**THÉORÈME II.2** ([24]). — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne fermée dont le groupe fondamental est fini et telle que la suite des nombres de Betti de l'espace des chemins fermés  $\mathcal{M} := W^{1,2}(S^1, M^m)$  ne soit pas uniformément majorée, alors  $(M^m, g)$  possède un nombre infini de géodésiques fermées et premières.*

La condition de Gromoll–Meyer est par exemple satisfaite si  $M^m$  est simplement connexe et si l'algèbre cohomologique  $H^*(M, \mathbb{R})$  n'est pas générée par un élément unique, c'est en fait équivalent au fait que la suite  $\dim(H_i(\mathcal{M}; \mathbb{R}))$  ne soit pas bornée. Ce résultat a été démontré dans le cadre du calcul des modèles minimaux de Sullivan pour les espaces de chemins fermés dans [60].<sup>(13)</sup>

13. Voir aussi une démonstration dans [19].

Pour conclure cette première partie de l'exposé sur les géodésiques fermées, notons que lorsque la variété  $M^m$  est une variété simplement connexe quelconque, par exemple dans le cas où  $M^m$  est difféomorphe à  $S^m$ , le problème de l'existence d'une infinité de géodésiques primitives est toujours ouvert si  $m > 2$ . Le cas de la sphère bidimensionnelle a lui été résolu. On démontre qu'il existe une infinité de géodésiques fermées premières sur  $S^2$  en combinant les travaux de Victor Bangert [9] et de John Franks [22].

### III. EXISTENCE DE SURFACES MINIMALES FERMÉES : L'APPROCHE PARAMÉTRIQUE

Dans leur résolution du problème de Plateau<sup>(14)</sup>, Jesse Douglas et Tibor Radó minimisent l'énergie de Dirichlet

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{D^2} |\nabla u|^2 dx^2$$

sur l'ensemble des applications dans l'espace de Sobolev  $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^3)$  dont la trace réalise une fonction monotone continue du bord du disque  $\partial D^2$  dans la courbe de Jordan fixée  $\Gamma$  — cette condition de bord est appelée *condition de Plateau*. La raison pour laquelle la minimisation de l'énergie de Dirichlet, plutôt que l'aire elle-même qui est d'un usage variationnel très « inconfortable », permet de conclure vient essentiellement du fait que l'aire de  $u$  est majorée par l'énergie de  $u$  avec égalité si et seulement si  $u$  est faiblement conforme. Le théorème d'uniformisation<sup>(15)</sup> permet de s'y ramener et un minimum de  $E$  sous les contraintes de bord de Plateau sera automatiquement en paramétrisation conforme et réalisera un minimum de l'aire sous ces mêmes contraintes.

Dans [52], Jonathan Sacks et Karen Uhlenbeck reprennent, en dimension 2 cette fois, la problématique d'Hadamard–Poincaré sur l'existence d'un minimum de l'aire dans une classe du  $\pi_2(M^m)$  donnée. La minimisation de l'énergie de Dirichlet dans une classe d'homotopie de  $\pi_2(M^m)$  dégénère en un « bouquet » de sphères minimales, qui reliées convenablement entre elles par des tubes bien choisis permettent de retrouver la classe de départ. En fait, avec cette approche, seule une famille de générateurs du groupe d'homotopie libre de  $\pi_2(M^m)$  — après quotient par l'action par conjugaison de  $\pi_1(M^m)$  sur  $\pi_2(M^m)$  — est a priori réalisable par des sphères minimales. En particulier, grâce au théorème d'Hurewicz, on en déduit que si  $\pi_1(M^m) = 0$ , alors un ensemble de générateurs de  $H_2(M^m, \mathbb{Z})$  est réalisé par des sphères minimales. Il est important de noter à ce stade que ces surfaces minimales sont des immersions qui ont éventuellement des points de branchements isolés. L'article de Sacks et Uhlenbeck a donné naissance à

14. Le problème de Plateau, qui tient son nom du physicien Joseph Plateau, consiste à trouver un disque d'aire minimale bordant une courbe simple donnée de  $\mathbb{R}^3$ .

15. Il s'agit plus précisément de la version approximée du théorème d'uniformisation pour les applications dans  $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^3)$  ([48], chapitre I, section 9).

tout un domaine de l'analyse invariante conforme et a théorisé les phénomènes connus actuellement sous le nom de **concentration-compacité**.

Si l'on se penche maintenant sur la question de construire des sphères minimales d'indice non nul, les stratégies de minmax développées plus haut dans le cas 1-dimensionnel se heurtent en dimension 2 à deux obstructions fondamentales.

- L'énergie de Dirichlet en dimension 2 ne vérifie plus la condition de Palais–Smale.
- L'espace  $W^{1,2}(S^2, M^m)$  ne constitue pas une variété de Banach régulière finslerienne.

On ne peut donc plus a priori appliquer directement la théorie de déformation en dimension infinie de Palais et Smale. Une alternative consiste alors à travailler dans l'espace plus petit  $W^{1,2+\alpha}(S^2, M^m)$  qui lui définit bien une variété de Banach régulière et équipée d'une structure finslerienne complète. L'énergie « renforcée »<sup>(16)</sup>

$$E_\alpha(u) := \frac{1}{2} \int_{S^2} (1 + |du|_{S^2}^2)^{1+\alpha} \, dvol_{S^2}$$

vérifie bien la condition de Palais–Smale et, après avoir exhibé des points critiques de  $E_\alpha$  pour une valeur de minmax donnée, on peut faire tendre  $\alpha$  vers 0 et l'analyse de Sacks et Uhlenbeck permet d'obtenir un « bouquet » de points critiques de l'énergie de Dirichlet mais dont il faut s'assurer que les applications associées sont conformes afin de pouvoir affirmer que l'ensemble correspond bien à un bouquet de sphères minimales.

La question de l'existence de surfaces minimales par l'approche paramétrique se complique si l'on cherche à prescrire le genre de cette surface. Dans le cas  $S^2$ , comme il n'existe qu'une seule classe conforme, la minimisation de l'énergie de Dirichlet garantit qu'un minimum est bien conforme et donc réalise une sphère minimale. Ce n'est plus le cas si l'on remplace  $S^2$  par une autre surface de Riemann fermée  $\Sigma$  de genre non nul. Lors d'une procédure de minimisation de  $E$  il faut aussi introduire la possibilité pour la classe conforme sur  $\Sigma$  de parcourir « librement » l'espace de Teichmüller associé. L'espace de configuration n'est plus alors  $W^{1,2}(\Sigma, M^m)$  mais le produit  $W^{1,2}(\Sigma, M^m) \times \mathcal{T}_\Sigma$  où  $\mathcal{T}_\Sigma$  désigne l'espace de Teichmüller de  $\Sigma$ . Le contrôle de la classe conforme est évidemment une difficulté supplémentaire de taille lors d'un processus de minimisation. Dans certaines situations néanmoins, cette difficulté peut être levée. C'est le cas par exemple si l'on se restreint à des applications  $u$  qui envoient injectivement le  $\pi_1$  de  $\Sigma$  sur le  $\pi_1$  de  $M^m$ . De telles applications sont dites « incompressibles ». Sous l'hypothèse d'incompressibilité on démontre alors que l'énergie de Dirichlet

$$E_h(u) := \frac{1}{2} \int_\Sigma |du|_h^2 \, dvol_h$$

contrôle la classe conforme  $h$  de  $\Sigma$ , représentée ici par une métrique de courbure scalaire constante de volume 1. Une conséquence de la précompacité de la classe conforme dans l'espace des modules sous l'hypothèse du contrôle de l'énergie est l'existence d'une

---

16. Cette énergie renforcée  $E_\alpha$  a en fait été introduite à l'origine pour le problème de minimisation dans les classes d'homotopie par Sacks et Uhlenbeck.

application  $u$  harmonique de  $(\Sigma, h)$  dans  $M^m$  pour une surface de Riemann  $(\Sigma, h)$  dans cet espace d'applications incompressibles qui est conforme et qui minimise l'aire dans cet espace.

Chaque surface incompressible génère ce que l'on appelle un **sous-groupe de surface** qui est l'image (injective) par  $u_*$  de  $\pi_1(\Sigma)$  dans  $\pi_1(M^m)$  (cette image est par définition isomorphe au  $\pi_1(\Sigma)$ ).

Dans [38], Jeremy Kahn et Vladimir Marković démontrent que pour une variété hyperbolique fermée donnée  $(M^3, g)$ , il existe au moins  $(c_1 \gamma)^{2\gamma}$  classes de conjugaisons de sous-groupes de surfaces de genre  $\gamma$ . Les surfaces  $\Sigma$ , tout comme la variété hyperbolique choisie  $(M^3, g)$ , sont des espaces asphériques<sup>(17)</sup>. Pour cette raison, deux applications définissant deux classes de conjugaison distinctes pour l'homomorphisme  $u_* : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M^3)$  sont aussi dans des classes distinctes de l'espace des classes d'homotopie libre  $[\Sigma, M^3]$  entre  $\Sigma$  et  $M^3$ . En d'autres termes, chaque classe de conjugaison des sous-groupes de surfaces de genre  $\gamma$  donné correspond à des composantes connexes distinctes de l'espace des applications incompressibles. Ainsi, en utilisant l'analyse décrite ci-dessus, on peut associer à chacune de ces classes une surface minimale de genre  $\gamma$ . Tout comme dans le cas des géodésiques, afin de ne prendre en compte que les recouvrements simples de surfaces minimales, il faut dans le cas présent garder à l'esprit qu'une surface de Riemann peut être le recouvrement non branché d'une autre surface de genre strictement supérieur. L'application de recouvrement induit par ailleurs naturellement une injection du groupe fondamental. Un sous-groupe de surface dans une variété hyperbolique fermée  $(M^3, g)$  est dit **premier** s'il n'est pas réalisé par la composition successive d'un recouvrement non branché sur une surface de genre inférieur suivi de l'image de cette surface par une application incompressible. Comme la croissance du nombre de groupes de surfaces est au moins en  $(c_1 \gamma)^{2\gamma}$  la grande majorité de ces groupes de surfaces sont premiers dans  $M^3$  et on a démontré le résultat suivant.

**THÉORÈME III.1** ([38]). — *Sur une variété hyperbolique fermée donnée il existe une infinité d'immersions<sup>(18)</sup> minimales géométriquement distinctes.*

Il est intéressant d'observer à ce stade que la famille infinie de surfaces produites par Kahn et Marković est faite de surfaces qui sont toutes stables (en fait qui minimisent l'aire). Ceci contraste avec la famille infinie que nous allons construire dans la dernière partie de cet exposé où les surfaces seront d'indice de Morse tendant vers l'infini.

---

17. Les espaces asphériques sont les espaces dont les revêtements universels sont contractiles et leurs seuls groupes d'homotopies non triviaux sont leurs  $\pi_1$ .

18. Comme ces immersion minimisent l'aire dans la classe d'homotopie libre donnée, un résultat de Osserman [49] et Gulliver [30] affirme que ces surfaces minimales en dimension 3 sont exemptes de points de branchements.

#### IV. LES VARIATIONS DE L'AIRES EN THÉORIE DE LA MESURE GÉOMÉTRIQUE

Le but de la section précédente était principalement d'illustrer la difficulté que constitue l'extension en dimension supérieure à 1 de l'approche paramétrique pour les opérations de minmax, et plus précisément de l'utilisation pour les surfaces minimales de la théorie des déformations de Palais et Smale. En fait, le constat de la limitation de l'approche paramétrique à des fins variationnelles pour les surfaces minimales était déjà présent bien antérieurement aux travaux d'analyse globale de la fin des années 60. La théorie de la mesure géométrique est née — au milieu des années 50 — du projet d'étendre le problème de Plateau aux dimensions supérieures avec des données plus générales que des courbes de Jordan dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans sa première phase l'objet principal de la TMG était la notion de **courant rectifiable entier**, fusion entre les courants de de Rham (distributions vectorielles) et le concept de rectifiabilité<sup>(19)</sup> de Besicovitch. Le théorème fondateur de cette théorie est celui d'Herbert Federer et de Wendell Fleming qui établit que l'espace des courants rectifiables entiers de bord nul — ou de bord de masse<sup>(20)</sup> contrôlée — dans une variété riemannienne quelconque et de masse uniformément bornée est faiblement séquentiellement fermé<sup>(21)</sup>. Comme la masse est faiblement séquentiellement sous-continue, un corollaire de ce résultat est l'existence d'un courant rectifiable entier de masse minimale dans toute classe d'homologie entière fixée (relative ou pas relative). Un tel courant est appelé **courant rectifiable entier minimisant l'aire**.

Un tel objet pourrait a priori être très singulier (c'est le prix à payer pour s'être placé dans un espace faiblement séquentiellement fermé pour un contrôle de la masse — la masse en géométrie est une quantité très peu coercive). Il n'en est rien, en particulier dans le cas de la codimension 1 qui va nous occuper exclusivement désormais jusqu'à la fin de cet exposé. Le théorème suivant est le résultat d'efforts combinés de De Giorgi, Triscari, Fleming, Simons, Federer, Almgren.

**THÉORÈME IV.1** ([17, 20, 56, 18, 5]). — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne et soit  $T$  un courant rectifiable entier sans bord minimisant l'aire dans une classe d'homologie relative  $H_{m-1}(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{Z})$  où  $\Omega$  est un ouvert quelconque de  $M^m$ . Alors  $T$  est*

---

19. Pour  $0 \leq k \leq Q$ , un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^Q$  est dit **dénombrablement  $k$ -rectifiable** si, en dehors d'un ensemble de mesure de Hausdorff  $k$ -dimensionnelle nulle, il est contenu dans une union au plus dénombrable d'images par des fonctions lipschitziennes de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^k$  et sa  $\mathcal{H}^k$ -masse est finie.

20. La masse d'un courant est une quantité positive qui coïncide avec le volume lorsque le courant est par exemple donné par une sous-variété.

21. En fait cette compacité faible séquentielle est valable pour la topologie dite « bémol », une topologie un peu plus fine que celle donnée par la simple dualité avec les formes différentielles régulières à support compact que nous introduisons plus loin dans l'exposé. L'auteur de ces notes invite le lecteur à se reporter par exemple au séminaire Bourbaki n° 1080 [51] pour une description un peu plus détaillée de certains fondamentaux de la théorie de la mesure géométrique.

le courant d'intégration d'une sous-variété plongée de  $\Omega$  en dehors d'un sous-ensemble fermé de codimension de Hausdorff 8 et équipé d'une multiplicité entière régulière. En dimension 8, l'ensemble singulier est inclus dans un ensemble de points isolés.

Ce résultat est optimal : le cône issu de la sous-variété de la sphère de dimension 7 donnée par  $S^3_{1/\sqrt{2}} \times S^3_{1/\sqrt{2}}$  minimise l'aire [11] (fig. 1). Cet état de fait est fondamental dans notre exposé et se trouve être derrière la limitation en dimension du théorème principal qui nous intéresse aujourd'hui.

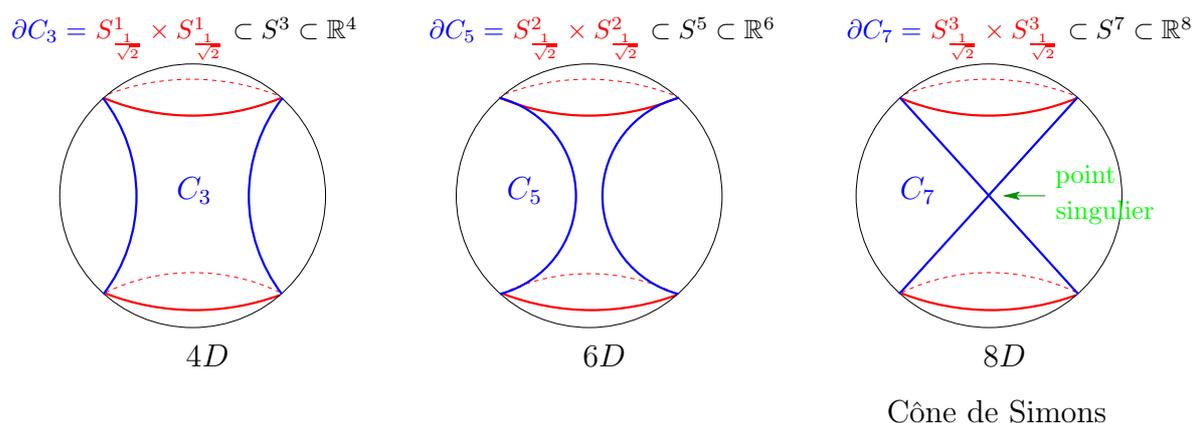


FIGURE 1. Hypersurfaces minimisant le volume

Si le cadre des courants entiers rectifiables est efficace pour mettre en évidence des hyper-surfaces minimales minimisant l'aire dans des classes d'homologie entières données, ce n'est plus le cas dès lors que l'on cherche à construire variationnellement des hyper-surfaces minimales d'indice non nul. La raison en est que la masse n'est que semi-continue inférieurement pour la convergence faible des courants et que dans une opération de type minmax il faut pouvoir avoir la continuité de celle-ci. Cette constatation a stimulé la « seconde génération » de la théorie de la mesure géométrique sous l'impulsion des contributions successives de Fred Almgren [4], William Allard [2] et Jon Pitts [50]. L'objet principal de cette deuxième partie de la théorie devient une version — très faible! — de type « théorie de la mesure » d'une sous-variété il s'agit de la notion de **varifold** introduite par Almgren<sup>(22)</sup>. Un varifold de dimension  $k$  dans une variété riemannienne  $M^m$  n'est autre qu'une **mesure de Radon dans la variété de Grassmann des  $k$ -plans non orientés du fibré tangent à  $M^m$ ,  $G_k(TM^m)$** . On peut par exemple adjoindre à toute sous-variété  $k$ -dimensionnelle  $\Sigma$  de la variété riemannienne  $M^m$ , le *varifold* associé qui est explicitement donné par

$$\forall \Phi \in C^0(G_k(TM^m)) \quad \mathbf{v}_\Sigma(\Phi) := \int_\Sigma \Phi(x, T_x \Sigma) \, dvol_\Sigma .$$

22. « I called the new objects “varifolds” having in mind that they were a measure theoretic substitute for manifolds created for the variational calculus » [6].

L'idée derrière la notion des varifolds est inspirée de la notion, commune dans les problèmes de convergence faible en EDP, de **mesures de Young** et consiste à « enregistrer » l'information donnée par le premier jet lors de passages à la limite. La masse passe par ailleurs à la limite pour la convergence faible des mesures de Radon et c'est principalement pour cela que ce type d'objets a été introduit. Les varifolds de dimension  $k$  sont appelés **rectifiables** si leur projection sur l'espace des mesures de Radon de  $M^m$  est un ensemble rectifiable de  $M^m$  et pour  $\mathcal{H}^k$ -presque tout point de cet ensemble rectifiable la mesure sur la fibre est donnée par la masse de Dirac du  $k$ -plan approximé tangent. Un varifold rectifiable est dit **stationnaire** s'il est point critique de la masse (la variation totale de la mesure de Radon correspondante) pour les perturbations infinitésimales de l'identité dans l'espace des difféomorphismes de  $M^m$ .

De la même façon que dans les sections précédents nous allons définir des **espaces de configuration** sur lesquels nous allons poser des problèmes de minmax sur l'aire (ou plutôt la « masse » en TMG) et effectuer des opérations de déformation afin de démontrer que les valeurs de minmax sont atteintes par des surfaces minimales.

Nous avons déjà vu des espaces de configurations donnés par des espaces de Sobolev pour les constructions par minmax de géodésiques ou de surfaces minimales dans les espaces hyperboliques tridimensionnels. L'espace que nous introduisons maintenant est un espace d'objets bien moins réguliers, l'espace des **chaînes bémol à coefficient dans  $\mathbb{Z}_2$** . Soit  $G$  un groupe abélien équipé d'une norme qui en fait un espace métrique complet (on va considérer essentiellement  $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}_p$ ). Soit  $P_k(\mathbb{R}^Q; G)$  l'espace des chaînes polyédrale<sup>(23)</sup> à coefficient dans  $G$ . Dans [64] chapitre 5, Hassler Whitney introduit sur  $P_k(\mathbb{R}^Q; G)$  la norme bémol<sup>(24)</sup> :

$$\mathcal{F}(A) := \inf \{ M(A - \partial D) + M(D) ; D \in \mathcal{P}_{k+1}(\mathbb{R}^Q, G) \}$$

L'espace  $I_k(\mathbb{R}^Q; G)$  des  **$k$ -chaînes bémol à valeurs dans  $G$**  est la complétion de  $P_k(\mathbb{R}^Q; G)$  dans l'espace des  $G$ -courants. Un théorème important dû à Fleming [21] (lorsque  $G$  est fini) et White [62] (cas général) affirme que tout élément de masse finie dans  $I_k(\mathbb{R}^Q; G)$  est rectifiable. On note  $\tilde{I}_k(M^m; G)$  l'ensemble des chaînes bémol incluses dans  $M^m$  de masse finie et dont le bord est de masse finie.

---

23. Une  $G$ -chaîne polyédrale est une somme finie de polyèdres convexes bornés de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^Q$ , ne s'intersectant pas mutuellement et affecté chacun d'une « multiplicité » dans  $G$ . à une telle chaîne  $A := \sum_{i=1}^n g_i \sigma_i$  on associe tout d'abord la masse  $\mathbf{M}(A) = \sum_{i=1}^n |g_i| \mathcal{H}^k(\sigma_i)$  puis une application  $\mathcal{H}^k$ -mesurable, bornée à valeur dans  $G$  égale à  $g_i$  sur chaque  $\sigma_i$  et égale à l'élément neutre ailleurs. Finalement  $P_k(\mathbb{R}^Q, G)$  est quotienté par la relation d'équivalence suivante : deux éléments sont égaux s'ils définissent la même application  $\mathcal{H}^k$  presque partout. On vérifie alors que l'opérateur de bord habituel sur les chaînes est bien défini c'est à dire qu'il est indépendant du représentant choisi — voir [64].

24. Whitney introduit aussi une **norme dièse** sur les chaînes polyédrales — bornée par la norme bémol et donc paradoxalement « moins élevée » pour reprendre l'image musicale — à moins qu'il ne s'agisse des cochaînes où là l'ordre des normes s'inverse. . . La complétion de  $P_k(\mathbb{R}^Q; G)$  pour la norme dièse ne permet pas d'étendre continûment l'opérateur de bord contrairement à la norme bémol. Ce qui peut expliquer pourquoi la première est moins connue que la seconde.

Les espaces de configuration qui vont nous intéresser pour la suite de cet exposé sont les **hypercycles à coefficients**  $\mathbb{Z}_2$  donnés par

$$\mathcal{M} := Z_{m-1}(M^m; \mathbb{Z}_2) := \left\{ A \in \tilde{I}_{m-1}(M^m; \mathbb{Z}_2) ; \partial A = 0 \right\}$$

ou encore, lorsque  $M^m$  n'est pas fermé et est compacte avec bord on définit dans un premier temps

$$Z_{m-1}(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2) := \left\{ A \in \tilde{I}_{m-1}(M^m; \mathbb{Z}_2) ; \partial A \subset \partial M^m \right\} ,$$

et on définit l'espace des **hypercycles relatifs**  $\mathbb{Z}_2$  noté  $\mathcal{M} := Z_{m-1,rel}(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$  comme étant le quotient de  $Z_{m-1}(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$  par la relation

$$A \equiv B \quad \text{si} \quad A - B \in \tilde{I}_{m-1}(\partial M^m; \mathbb{Z}_2) .$$

Les efforts<sup>(25)</sup> combinés de Almgren puis de Pitts permettent d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME IV.2 ([4, 50]). — *Soit  $M^m$  une variété fermée et  $\Pi$  une classe non nulle de  $\pi_k(Z_{m-1}(M^m; \mathbb{Z}_2))$  alors la largeur correspondante est strictement positive :*

$$W(\Pi) := \inf_{\Phi \in \Pi} \sup_{x \in S^k} \mathbf{M}(\Phi(x)) > 0$$

*et il existe un varifold stationnaire  $V$  porté par une sous-variété plongée et régulière en dehors d'un sous-ensemble fermé de codimension 8 dans  $M^m$  tel que  $\mathbf{M}(V) = W(\Pi)$ . En particulier, si la dimension de  $M^m$  est inférieure ou égale à 7, il existe un nombre fini d'hypersurfaces minimales fermées et connexes, ne s'intersectant pas,  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  ainsi que  $n$  entiers naturels non nuls  $q_1, \dots, q_n$  tels que*

$$V = q_1 \Sigma_1 + \dots + q_n \Sigma_n .$$

---

25. Ce mot « efforts » cache en fait des travaux d'une difficulté conceptuelle et technique très conséquente, le contexte « mou » des hypercycles compromettant toute possibilité d'implémentation de la théorie des déformations de Palais–Smale. Nous avons essayé d'en rendre compte dans un exposé précédent [51]. Les applications continues à valeurs dans les hypercycles  $\mathbb{Z}_2$  doivent être déformées dans un premier temps en des applications continues pour des topologies plus fortes issue de la topologie des varifolds et de la masse. Elles sont dans un deuxième temps discrétisées, puis, dans une procédure inspirée du raccourcissement des courbes de Birkhoff, ces applications sont « serrées » — *pull tight procedure* — afin de mettre en évidence un hypercycle réalisant la largeur et constituant un varifold stationnaire **presque minimisant** sur les anneaux (la définition est due à Pitts [50]). Cette dernière propriété, qui s'apparente au fait d'être localement minimisant et donc d'indice global fini, permet à Jon Pitts de démontrer la régularité de cet hypercycle en utilisant les travaux contemporains de Rick Schoen et Leon Simon [53] établissant des estimées de courbure sur les surfaces stables minimales en codimension 1.

## V. SPECTRES NON LINÉAIRES ET LARGEURS DE GROMOV

Afin de construire une surface minimale il suffit alors d'identifier au moins une classe d'homotopie non nulle dans  $\mathcal{M}$ . L'étude des groupes d'homotopie des cycles bémol était en fait l'objet de la thèse d'Almgren. Il démontre <sup>(26)</sup> en particulier le résultat suivant.

**THÉORÈME V.1** ([3]). — *Soit  $M^m$  une variété compacte connexe de dimension  $m$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{1 \cdots m\}$  il existe un isomorphisme entre  $\pi_n(Z_{k,rel}(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2))$  et  $H_{n+k}(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$ . En particulier la composante <sup>(27)</sup>  $Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$  de  $Z_{m-1,rel}(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$  contenant 0 possède exactement un groupe d'homotopie non nul  $\pi_1(Z_{m-1,rel}(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)) = \mathbb{Z}_2$ .*

La deuxième partie de ce théorème est l'affirmation que  $Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$  est un espace d'Eilenberg–MacLane  $K(\mathbb{Z}_2, 1)$  et donc qu'il existe une **équivalence d'homotopie faible**

$$Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2) \simeq_{faible} \mathbb{R}P^\infty$$

où  $\mathbb{R}P^\infty$  est l'espace projectif infini (en effet la sphère  $S^\infty$  qui est contractible est le revêtement universel et recouvre exactement 2 fois  $\mathbb{R}P^\infty$ ).

Un générateur de  $\pi_1(Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2))$  est donné par un **balayage de Birkhoff** de  $M^m$  c'est à dire un chemin d'hypercycles de  $M^m$  qui « recouvre »  $M^m$  exactement une fois.

Cette équivalence faible d'homotopie est réalisée par l'application suivante. Soit  $f$  une fonction de Morse sur  $M^m$  à valeur dans  $[0, 1]$  (il en existe toujours [46]). La famille donnée par

$$t \in [0, 1] \longrightarrow \partial(\{x \in M^m ; f(x) < t\}) \in Z_{m-1}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$$

réalise un balayage de Birkhoff et donc engendre en particulier le  $\pi_1$  des  $\mathbb{Z}_2$ -hypercycles. On l'étend à  $\mathbb{R}P^\infty$  de la façon suivante.

$$\Phi([a_0, a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots]) := t \in [0, 1] \longrightarrow \partial \left( \left\{ x \in M^m ; \sum_{i=1}^k a_i f^i(x) < t \right\} \right) .$$

En combinant le théorème IV.2 et le théorème V.1 on obtient le résultat suivant dont la démonstration complète se trouve dans le livre de Pitts. <sup>(28)</sup>

**COROLLAIRE V.2.** — [50] *Soit  $M^m$  une variété riemannienne fermée de dimension inférieure ou égale à 7, alors il existe dans  $M^m$  une sous-variété minimale de codimension 1.*

26. La preuve d'Almgren est écrite dans le cas des cycles entiers et des homologies entières de  $M^m$ . Elle s'étend cependant au cas de  $G = \mathbb{Z}_p$  — voir [50].

27. Il s'agit en fait de la composante donnée par les hypercycles qui sont des bords.

28. Ce résultat a été prouvé plus ou moins en même temps en dimension 3 par Francis Smith dans sa thèse [57] — non publiée — écrite sous la direction de Leon Simon. Le lecteur peut aussi se reporter à [16] pour une démonstration dans le cas tridimensionnel.

Si maintenant on ambitionne d'étudier la possibilité d'avoir plusieurs hypersurfaces minimales et éventuellement un nombre infini, les minmax construits autour des groupes d'homotopie ne suffisent pas.<sup>(29)</sup> En analogie avec le cas des géodésiques dans la première partie de l'exposé, on préfère alors une approche de type « Morse » consistant à étudier les homologies des sous-ensembles de niveau de l'espace de configuration  $\mathcal{M} = Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m, \mathbb{Z}_2)$ . L'équivalence faible homotopique entre  $Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$  et  $\mathbb{R}P^\infty$  induit un isomorphisme d'anneaux cohomologiques<sup>(30)</sup> et on obtient finalement que l'anneau cohomologique de l'espace de configuration est un  $\mathbb{Z}_2$ -anneau polynomial, libre à un générateur de degré un<sup>(31)</sup>

$$H^*(Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)) = \mathbb{Z}_2[\alpha] .$$

Le générateur  $\alpha$  « détecte » les balayages de Birkhoff au sens où pour tout

$$\Psi \in C_{\mathcal{F}}^0(S^1, Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2))$$

qui « recouvre » exactement une fois  $M^m$  (et donc engendre  $\pi_1(Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2))$ ) on a

$$\langle \alpha, [\Psi] \rangle_{H^1(\mathcal{M}; \mathbb{Z}_2), H_1(\mathcal{M}, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)} \neq 0 .$$

De façon analogue au cas des géodésiques dans la première partie de l'exposé on introduit le **spectre non linéaire** associé à la masse dans  $\mathcal{M} := Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m, \mathbb{Z}_2)$  comme étant pour chaque entier  $k$  l'ensemble de niveaux  $\lambda_k$  à partir duquel tout  $k$ -cycle  $\mathbb{Z}_2$  dans  $Z_{m-1,rel}^0(M^m, \partial M^m; \mathbb{Z}_2)$  est homologue à un cycle dont la masse maximale est  $\lambda_k$ . La caractérisation du spectre non linéaire, ou **largeurs de Gromov**, au moyen du cup-produit est donnée ainsi<sup>(32)</sup>

$$(V.6) \quad \lambda_k(M^m) := \inf_{\{\Psi: X \rightarrow \mathcal{M} ; \Psi^* \alpha^k \neq 0 \text{ dans } H^k(X, \mathbb{Z}_2)\}} \sup_{x \in X} \mathbf{M}(\Psi(x))$$

où  $X$  varie librement sur les complexes simpliciaux de dimension finie et  $\alpha^k = \alpha \smile \dots \smile \alpha$  ( $k$  fois). Les applications  $\Psi$  continues d'un complexe simplicial de dimension finie dans  $\mathcal{M}$  satisfaisant  $\Psi^* \alpha^k \neq 0$  sont appelées  **$k$ -balayages**.

29. Il n'existe qu'un seul groupe d'homotopie non trivial.

30. À ce stade on va préférer travailler avec la cohomologie plutôt qu'avec l'homologie de  $Z_{m-1}^0(M^m, \mathbb{Z}_2)$  car la première possède une structure d'anneau issue du cup-produit. L'espace des chaînes est probablement géométriquement plus intuitif et de ce fait a priori plus agréable à manipuler, mais la structure d'anneau de  $H^*(\mathcal{M}; \mathbb{Z}_2)$  l'emporte.

31. On ne peut pas imaginer plus simple. Un espace de configuration sur des objets plus lisses, et donc plus « contraints », que les hypercycles  $\mathbb{Z}_2$  aurait certainement induit un type d'homotopie plus complexe et plus riche mais aussi moins facile à calculer et à identifier au moyen d'opérations géométriques simples. C'est le grand avantage du point de vue que nous prenons à ce stade.

32. Dans la littérature anglophone sur le sujet on retrouve souvent à la place de  $\lambda_k$  la notation  $w_k$  pour *width* (largeur, en français). Nous choisissons  $\lambda_k$  pour être plus proche de l'idée originale de Gromov de généraliser la notion de spectre à des situations non linéaires. La lettre grecque  $\lambda$  résonne aussi mieux avec le  $\ell$ .

Une première remarque tautologique consiste à observer que  $\Psi^*\alpha^k \neq 0$  donne, pour tout entier  $0 < \ell < k$ ,  $\Psi^*\alpha^\ell \neq 0$  et donc, ce que l'on appelle aussi le **spectre volumique** est une suite croissante

$$0 < \lambda_1(M^m) \leq \lambda_2(M^m) \leq \dots \leq \lambda_k(M^m) \leq \dots .$$

Un exemple de  $k$ -balayage est donné par la restriction à  $\mathbb{R}P^k$  de l'application  $\Phi$  définie plus haut. On a en effet  $\beta := \Phi^*\alpha \neq 0$  et par ailleurs, un résultat classique illustrant le cup produit sur les espaces projectifs réels donne  $\beta^k \neq 0$ . Donc  $\Phi^*\alpha^k \neq 0$ .

Dans le cas maintenant où  $M^m$  est sans bord, le théorème d'Almgren et Pitts s'étend<sup>(33)</sup> aux  $k$ -balayages et on démontre qu'en dimension plus petite que 8 pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  il existe une famille de surfaces plongées disjointes  $\Sigma_1^k, \dots, \Sigma_{n_k}^k$  et des multiplicités entières non nulles  $q_1^k, \dots, q_{n_k}^k$  telles que

$$(V.7) \quad \lambda_k(M^m, g) = \sum_{i=1}^{n_k} q_i^k |\Sigma_i^k| .$$

La question principale de cet exposé devient alors celle de savoir si, lorsque  $k$  tend vers l'infini, la famille  $\Sigma_i^k$  appartient à un ensemble fini ou infini de surfaces plongées géométriquement distinctes.

En ayant à l'esprit les preuves des résultats sur l'existence d'une infinité de géodésiques sur une variété donnée, il est naturel d'étudier le comportement asymptotique du spectre  $\lambda_k$ . Le résultat suivant dû principalement à Gromov et revisité par Larry Guth dans [31] est central pour la démonstration du théorème ultime de notre exposé.

**THÉORÈME V.3** ([26, 27, 31]). — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne sans bord donnée alors lorsque  $k$  tend vers l'infini on a le comportement asymptotique suivant<sup>(34)</sup>*

$$(V.8) \quad \frac{\log \lambda_k(M^m)}{\log k} = \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{\log k}\right) .$$

Les raisons de ce comportement asymptotique méritent d'être un peu expliquées à ce stade de notre présentation.

La minoration asymptotique  $\lambda_k \geq Ck^{1/m}$  vient d'un argument inspiré d'une preuve de Lyusternik et Schnirelmann (voir par exemple [39], theorem 2.1.10). Soient  $U_1, \dots, U_k$  des ouverts disjoints de  $M^m$ . On démontre l'inégalité suivante

$$(V.9) \quad \lambda_k(M^m) \geq \sum_{i=1}^k \lambda_1(U_i) ,$$

33. Voir le travail important de Marques et de Neves [45] à ce sujet qui vient préciser et compléter la théorie.

34. La différence de comportement asymptotique du spectre si l'on compare (II.3) avec (V.8) dans le cas des géodésiques, qui sont des éléments de  $Z_{m-1}(M^m, \mathbb{Z}_2)$  pour  $m = 2$  pourrait surprendre à première vue. Nous allons voir que le choix du groupe  $\mathbb{Z}_2$  est responsable du fait que les changements de topologies dans  $Z_1(M^2, \mathbb{Z}_2)$  arrivent « plus vite » au rythme de  $\simeq \sqrt{k}$  pour la longueur alors que c'était  $\simeq k$  en multiplicité entière.

où  $\lambda_1(U_i)$  est la première largeur de Gromov de l'ouvert  $U_i$  dans  $Z_{m-1}(U_i, \partial U_i; \mathbb{Z}_2)$ . En effet, soit  $X$  un complexe simplicial de dimension finie et  $\Psi$  de  $X$  dans  $M^m$  réalisant un  $k$ -balayage :  $\Psi^* \alpha^k \neq 0$  dans  $H^k(X; \mathbb{Z}_2)$ . On pose

$$X_i := \{x \in X ; \mathbf{M}(\Phi(x) \cap U_i) < \lambda_1(U_i)\} .$$

Comme un balayage de  $M^m$  réalise un balayage de chaque ouvert de  $M^m$ , si  $\iota_{X_i} : X_i \rightarrow X$  est l'inclusion canonique, on a donc  $\iota_{X_i}^* \Psi^* \alpha = 0$  dans  $H^1(X_i, \mathbb{Z}_2)$ . La suite exacte en cohomologie

$$H^1(X, X_i; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_i^*} H^1(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\iota_i^*} H^1(X_i, \mathbb{Z}_2)$$

donne que  $\alpha \in \text{Im}(j_i^*)$  et de plus il existe  $\alpha_i \in H^1(X, X_i; \mathbb{Z}_2)$  tel que  $j_i^*(\alpha_i) = \Psi^* \alpha$ . Supposons par l'absurde que  $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ . On a donc trivialement

$$H^k(X, \bigcup_{i=1}^k X_i; \mathbb{Z}_2) = 0 .$$

La propriété fondamentale sur le cup produit relatif (page 209 [34]) donne alors

$$H^1(X, X_1; \mathbb{Z}_2) \smile \dots \smile H^1(X, X_k; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^k(X, \bigcup_{i=1}^k X_i; \mathbb{Z}_2) = 0$$

donc en particulier  $\alpha_1 \smile \dots \smile \alpha_k = 0$ .

Pour tout  $A, B \subset X$  le diagramme commutatif<sup>(35)</sup>

$$(V.10) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_{A \cup B}} & (X, A \cup B) \\ \Delta \downarrow & & \Delta \downarrow \\ X \times X & \xrightarrow{j_A \times j_B} & (X, A) \times (X, B) = (X \times X, A \times X \cup X \times B) \end{array}$$

donne l'identité  $j_{A \cup B}^* \Delta^* = \Delta^*(j_A^* \times j_B^*)$  de laquelle on déduit<sup>(36)</sup>

$$(V.11) \quad j_{A \cup B}^*(a \smile b) = j_A^* a \smile j_B^* b .$$

En itérant cette identité pour  $A := \bigcup_{i=1}^l X_i$  et  $B := X_{l+1}$  on obtient finalement

$$\Psi^* \alpha^k = j_{X_1}^*(\alpha_1) \smile \dots \smile j_{X_k}^*(\alpha_k) = j_{\bigcup X_i}^*(\alpha_1 \smile \dots \smile \alpha_k) = 0 ,$$

ce qui est contradictoire. Ceci démontre l'inégalité (V.9).

Une fois l'identité (V.9) établie, on se convainc assez facilement que l'on peut décomposer asymptotiquement la variété en  $k$  cubes disjoints de diamètre  $\simeq k^{-1/m}$  et tels que la largeur de Gromov de chacun de ces cubes soit environ  $k^{(-m+1)/m}$ . L'inégalité (V.9) donne alors  $\lambda_k(M^m) \geq C k^{1/m}$ , ce qui démontre la minoration dans (V.8).

Nous donnons une illustration de l'argument<sup>(37)</sup> dans le cadre le plus simple possible :  $M^m := T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . L'application

$$\Psi_1 : X_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow Z_1(T^2; \mathbb{Z}_2) \quad \Psi(t) := \{x_1 = t\}$$

35.  $\Delta$  désigne dans ce diagramme l'application diagonale  $\Delta(x) := (x, x)$ .

36. Au moyen de l'identité fondamentale  $a \smile b = \Delta^*(a \times b)$ .

37. Cette approche dite de « bend and cancel » est due à Larry Guth.

réalise un balayage de Birkhoff. Plus généralement, on considère l'application suivante. Soit  $\pi$  la projection qui à un point de la droite réelle associe le point le plus proche dans  $[0, 1]$ . On appelle alors  $\Psi_k$  l'application qui à un polynôme non nul  $P$  de degré au plus  $k$  associe l'élément de  $Z_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}_2)$  égal à la somme des cercles à multiplicité  $\mathbb{Z}_2$  donnés par  $x_1 = \pi(a_i)$  où  $a_i$  sont les racines réelles de  $P$ . On démontre (voir [32], section 5) que  $\Psi_k$  est continue<sup>(38)</sup> de  $\mathbb{R}P^k$ <sup>(39)</sup> dans  $Z_1(T^2; \mathbb{Z}_2)$ . L'application  $\Psi_k$  envoie un générateur du  $H_1(\mathbb{R}P^k, \mathbb{Z}_2)$  donné par la suite de polynômes  $P_t(Y) = (t + t^{-1})Y - 2$  sur un générateur du  $H_1(Z_1(T^2; \mathbb{Z}_2))$  et donc on a  $\Psi_k^* \alpha \neq 0$ . Ceci implique que  $(\Psi_k^* \alpha)^k \neq 0$ . Or  $(\Psi_k^* \alpha)^k = \Psi_k^*(\alpha^k)$ , donc  $\Psi_k$  réalise un  $k$ -balayage de  $Z_1(T^2; \mathbb{Z}_2)$ .

Chaque élément  $\Psi_k(x)$  est constitué d'au plus  $k$  cercles de longueur 1. On a donc

$$\max_{x \in \mathbb{R}P^k} \mathbf{M}(\Psi_k(x)) = k .$$

Or ce n'est pas la borne optimale donnée par le théorème qui est asymptotiquement  $\simeq \sqrt{k}$  dans ce cas. C'est que nous n'avons pas fait l'usage complet du fait que nous avons une multiplicité  $\mathbb{Z}_2$  qui est la vraie « responsable » de cette croissance sous-linéaire qui sera si utile par la suite.

L'idée de Larry Guth est de choisir un maillage de  $T^2$  fait de  $k$  cubes de taille identique  $\simeq \sqrt{k}$  et de « projeter » par  $\Psi_k$  le maximum sur ce maillage. Il démontre que chaque cercle de  $\Psi_k(x)$  se projette intégralement sur ce maillage à l'exception d'une portion de cercle contenue dans exactement 2 cubes et de taille  $\simeq 1/\sqrt{k}$  et cela continûment en  $x$  (fig. 2).

On obtient ainsi une nouvelle application  $\tilde{\Psi}_k$  vérifiant

$$\max_{x \in \mathbb{R}P^k} \mathbf{M}(\tilde{\Psi}_k(x)) \leq C k \times \frac{1}{\sqrt{k}} + \mathbf{M}(\text{maillage}) \leq C' \sqrt{k} ,$$

ce qui donne l'estimation optimale.

## VI. LA LOI DE WEYL DE LIOKUMOVICH, MARQUES ET NEVES

Récemment Yevgeny Liokumovich, Fernando Codá Marques et André Neves sont parvenus à préciser l'estimation (V.8) et à établir une **loi de Weyl**<sup>(40)</sup> pour le **spectre du volume** tout à fait remarquable.<sup>(41)</sup>

38. La continuité est principalement due à la multiplicité  $\mathbb{Z}_2$  : deux racines réelles qui convergent l'une vers l'autre s'annihilent à la limite.

39. L'espace  $X$  des polynômes non nuls de degré au plus  $k$  quotienté par  $\mathbb{R}^*$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}P^k$ .

40. La loi de Weyl pour le **spectre de l'opérateur de Laplace–Beltrami** sur une variété riemannienne fermée  $M^m$  donne l'existence d'une constante  $c(m) := 4\pi^2 |B_1^m|^{-2/m}$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k k^{-2/m} = c(m) \text{vol}(M^m)^{-2/m} .$$

41. Le théorème VI.1 a répondu positivement à une conjecture de Gromov.

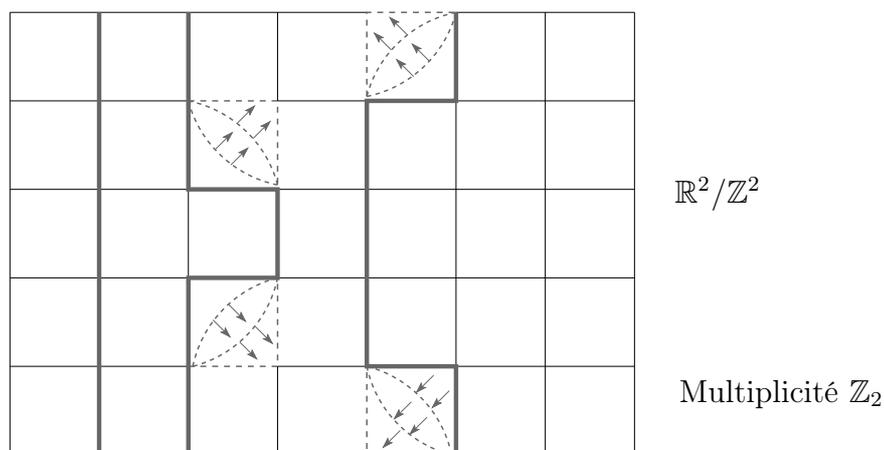
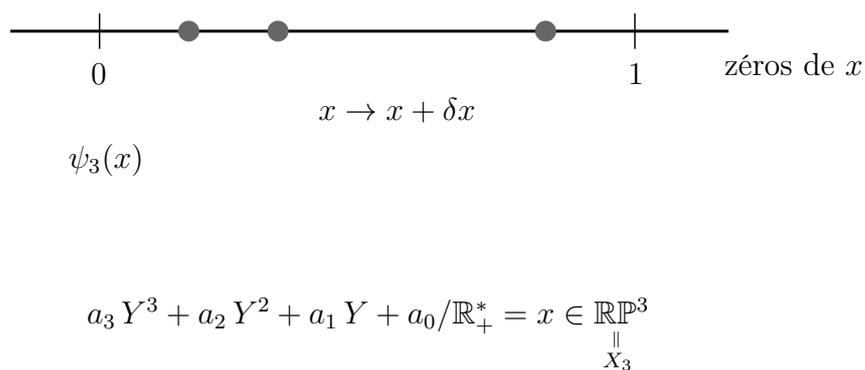


FIGURE 2. La procédure « plier et annuler » de Guth

THÉORÈME VI.1. — Soit  $m$  un entier supérieur à 1. Il existe une constante universelle<sup>(42)</sup>  $a(m) > 0$  telle que pour toute variété compacte riemannienne  $(M^m, g)$  (avec ou sans bord) on ait

$$(VI.12) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k k^{-1/m} = a(m) \operatorname{vol}(M^m)^{(m-1)/m} .$$

où  $\lambda_k$  est le spectre du volume donné par (V.6).

Au-delà de l'aspect incontestablement esthétique de ce résultat, la précision de celui-ci induit un mécanisme qui va générer de nombreuses surfaces minimales répondant ainsi partiellement à une conjecture ancienne de Shing-Tung Yau.

CONJECTURE VI.2. — [65] Toute variété fermée 3-dimensionnelle possède un nombre infini de surfaces minimales immergées géométriquement distinctes.

Précisément dans un article en collaboration avec Kei Irie, Fernando Codá Marques et André Neves démontrent au moyen de la loi de Weyl (VI.12) le théorème suivant.

42. Une expression explicite de cette constante même dans le cas de la plus basse dimension  $m = 2$  au moyen de quantités « connues » est un problème ouvert.

THÉORÈME VI.3 ([36]). — Soit  $M^m$  une variété fermée de dimension  $3 \leq m \leq 7$ . Alors pour un ensemble générique de métriques la réunion des hypersurfaces minimales fermées et plongées est dense dans  $M^m$ .

La stratégie de la preuve peut être comprise ainsi. Soit  $U$  un ouvert de  $M^m$ . On note  $\mathfrak{M}_U$  l'espace des métriques pour lesquelles il existe une surface minimale plongée non dégénérée<sup>(43)</sup> intersectant  $U$ . On démontre sans trop de difficultés, en utilisant le théorème des fonctions implicites, combiné aux résultats désormais classiques de White [61] sur l'espace des surfaces minimales pour les métriques génériques, que  $\mathfrak{M}_U$  est ouvert dans l'espace  $\mathfrak{M}$  des métriques  $C^\infty$ .

Le point central de la démonstration consiste à établir le fait que  $\mathfrak{M}_U$  est dense dans  $\mathfrak{M}$ . Supposons que ce ne soit pas le cas et prenons une métrique générique  $g$  qui possède un voisinage ouvert  $\mathfrak{V}$  dans  $\mathfrak{M}$  pour lequel il n'existe pas de surface minimale plongée non dégénérée intersectant  $U$  pour toute métrique dans  $\mathfrak{V}$ . Pour une métrique générique un résultat de Ben Sharp [54] affirme que l'ensemble des surfaces minimales non dégénérées et affectées de multiplicités entières quelconques réalise un ensemble dénombrable. On considère alors une perturbation de  $g$  de la forme  $g_t := (1 + t\chi)g$  pour  $t > 0$  et  $\chi$  est une fonction quelconque positive et non nulle supportée dans  $U$ . Pour  $t$  petit  $g_t \in \mathfrak{V}$ . Supposons que  $(M^m, g_t)$  ne possède aucune surface minimale plongée et fermée intersectant  $U$ . Cela signifie que toutes les valeurs de  $\lambda_k(M^m, g_t)$  sont réalisées par des surfaces minimales de  $g$  et donc l'application  $t \rightarrow \lambda_k(M^m, g_t)$  pour  $t$  petit ne peut prendre qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs. Or on démontre sans trop d'efforts que celle-ci est continue. Cela implique alors qu'elle est constante proche de zero. La loi de Weyl (VI.12) donne cependant pour  $k$  suffisamment grand

$$\lambda_k(M^m, g_t) > \lambda_k(M^m, g) ,$$

ce qui est contradictoire. Donc  $g_t$  possède une surface minimale  $\Sigma$  plongée et fermée passant par  $U$ . Un résultat qui remonte à W. Klingenberg dans le cas des géodésiques (voir [39] chapitre 3) affirme que l'on peut approcher la métrique  $g_t$  par une suite de métriques (en la modifiant à l'ordre 2 et plus au voisinage de  $\Sigma$ ) de telle sorte que pour chacune d'entre elles  $\Sigma$  soit toujours une surface minimale mais non dégénérée cette fois. On a donc contredit le fait que  $\mathfrak{V}$  existe et on en déduit que  $\mathfrak{M}_U$  est dense dans  $\mathfrak{M}$  pour tout ouvert  $U$  de  $M^m$ .

Soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base dénombrable de la topologie de  $M^m$ . Le sous-espace de  $\mathfrak{M}$  donné par  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_{U_i}$  est solution du problème grâce au théorème de Baire. Ceci conclut la preuve du théorème VI.3.

---

43. La dérivée seconde de l'aire n'a pas de noyau.

## VII. LA PROPRIÉTÉ DE FRANKEL

Un théorème dû à Jacques Hadamard [33] affirme que sur une surface fermée à courbure strictement positive les deux éléments de toute paire arbitraire de géodésiques fermées s'intersectent <sup>(44)</sup>.

Ce résultat a été généralisé au cas des hypersurfaces par Théodore Frankel.

**THÉORÈME VII.1** ([22]). — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne complète et connexe dont la courbure de Ricci est strictement positive. Alors deux hypersurfaces minimales complètes arbitraires dont l'une est compacte doivent s'intersecter.*

La démonstration se comprend ainsi. On suppose pour simplifier la présentation que les deux surfaces minimales  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  sont plongées. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M^m$  une géodésique joignant les deux surfaces et minimisant la distance entre elles. Un argument simple montre que  $\gamma$  doit intersecter  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  chacune orthogonalement en deux points  $p_0$  et  $p_1$ . La géodésique est stable et un calcul direct de la dérivée seconde de la longueur en  $\gamma$  donne pour une perturbation  $e(t) \in \Gamma(\gamma^*TM^m)$  obtenue en transportant parallèlement un vecteur  $e(0) \in T_{p_0}\Sigma_0$  de  $p_0$  le long de  $\gamma$  jusqu'à  $p_1$

(VII.13)

$$0 \leq D^2L_\gamma(e, e) = \mathbb{I}_{p_1}^1(e(1), e(1)) - \mathbb{I}_{p_0}^0(e(0), e(0)) - \int_0^1 K_{\gamma(t)}(e(t), \dot{\gamma}(t)) |\dot{\gamma}(t)|^{-1} dt$$

où  $\mathbb{I}_{p_j}^j$  est la seconde forme fondamentale de la surface  $\Sigma_j$  au point  $p_j$  (pour  $j = 0, 1$ ) dans  $(M^m, g)$  et  $K_x(X, Y)$  est la courbure sectionnelle de  $M^m$  au point  $x$  suivant le couple de vecteurs  $(X, Y)$  tangents en ce point. Prenons maintenant pas seulement un seul vecteur  $e(0)$  mais une base orthonormale de  $T_{p_0}\Sigma_0 : (e_i(0))_{i=1, \dots, m-1}$ . Cette base, transportée parallèlement et à laquelle on adjoint le vecteur unité tangent de  $\gamma$ , réalise un repère mobile orthonormé de  $\gamma^*TM^m$  (fig. 3).

En particulier,

$$\sum_{i=1}^{m-1} K_{\gamma(t)}(e_i(t), \dot{\gamma}) = Ric_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}) .$$

Comme  $\Sigma_j$  est une surface minimale on a par ailleurs l'annulation de la courbure moyenne en  $p_j$  ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{m-1} \mathbb{I}_{p_0}^0(e_i(0), \dot{\gamma}) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m-1} \mathbb{I}_{p_1}^1(e_i(1), \dot{\gamma}) = 0 .$$

En additionnant (VII.13) pour chaque vecteur  $e_i$  on obtient

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m-1} D^2L_\gamma(e_i, e_i) = - \int_0^1 Ric_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}) |\dot{\gamma}(t)|^{-1} dt .$$

---

44. En fait dans [33] il est démontré que, sous les mêmes hypothèses, toute géodésique fermée est intersectée un nombre infini de fois par toute autre géodésique complète mais non fermée

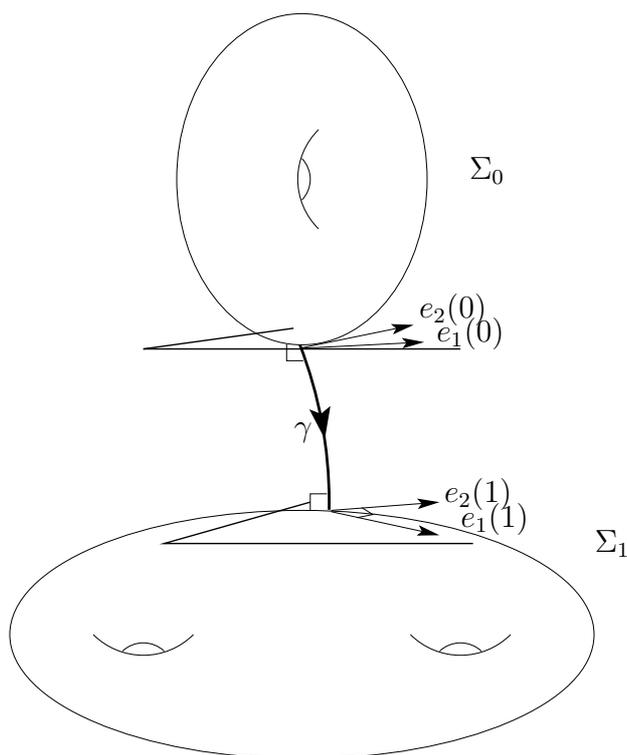


FIGURE 3. La propriété de Frankel

L'hypothèse de courbure de Ricci strictement positive contredit cette inégalité et on conclut que les deux hypersurfaces s'intersectent nécessairement.

Inspiré par ce résultat, on définit la **propriété de Frankel** pour une variété riemannienne  $M^m$  comme étant la propriété suivant laquelle toute paire de surfaces minimales fermées doivent avoir une intersection non vide.

Marques et Neves démontrent le résultat suivant.

**THÉORÈME VII.2** ([45]). — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $3 \leq m \leq 7$  satisfaisant la propriété de Frankel. Alors  $M^m$  possède une infinité d'hypersurfaces minimales plongées fermées et géométriquement distinctes.*

En combinant les deux théorèmes précédents on obtient en particulier le corollaire suivant.

**COROLLAIRE VII.3.** — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $3 \leq m \leq 7$  et de courbure de Ricci strictement positive, alors  $M^m$  possède une infinité d'hypersurfaces minimales plongées fermées et géométriquement distinctes.*

La démonstration du théorème VII.2 peut se comprendre ainsi. La propriété de Frankel et le fait que les différentes surfaces  $\Sigma_i^k$  dans (V.7) contribuant à la réalisation de

la valeur propre volumique  $\lambda_k$  sont disjointes impose  $n_k = 1$ . Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  il existe un entier  $q^k \in \mathbb{N}^*$  et une surface plongée  $\Sigma^k$  tels que

$$\lambda_k = q^k |\Sigma^k| .$$

Supposons dans un premier temps que les valeurs propres volumiques soient toutes différentes et donc  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ . S'il n'existait dans  $M^m$  qu'un nombre fini  $N$  d'hypersurfaces minimales plongées dont l'aire minimale est  $A > 0$  alors  $\lambda_k \geq kA/N$  ce qui contredit la croissance sous linéaire<sup>(45)</sup> du spectre donnée par (V.8).

Il reste à considérer le cas où deux valeurs propres successives sont égales :  $\lambda_k = \lambda_{k+1}$  pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Ce cas est un cas bien connu de la théorie<sup>(46)</sup> de Lyusternik–Shnirelmann qui permet d'affirmer l'existence d'une infinité de géodésiques fermées. L'argument reprend les propriétés fondamentales du cup-produit dans l'esprit de la démonstration de l'inégalité (V.9).

Plus précisément, supposons que l'espace des hypersurfaces minimales plongées se réduit à un nombre fini de surfaces  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ .

On démontre dans un premier temps sans trop de difficultés qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel qu'aucune application  $\Xi$  d'un complexe simplicial de dimension finie arbitraire  $Z$  à valeur dans la réunion des boules  $B_\varepsilon^{\mathcal{F}}(\Sigma_i)$  ne réalise un balayage de  $M^m$ . Cela signifie en d'autres termes que pour un tel  $\Xi$  on a nécessairement  $\Xi^* \alpha = 0$ .

À tout  $(k + 1)$ -balayage  $\Psi : X \rightarrow \mathcal{M} := Z_{m-1}^0(M^m, \mathbb{Z}_2)$  on associe l'ensemble

$$Y := \Psi^{-1} \left( \mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon^{\mathcal{F}}(\Sigma_i) \right)$$

On démontre dans un premier temps que  $\Psi : Y \rightarrow \mathcal{M}$  réalise un  $k$ -balayage. En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait  $\iota_Y^*(\Phi^* \alpha^k) = 0$  où  $\iota_Y$  est l'inclusion canonique de  $Y$  dans  $X$ . La suite exacte en cohomologie

$$H^k(X, Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_Y^*} H^k(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\iota_Y^*} H^k(Y; \mathbb{Z}_2)$$

donne alors l'existence de  $\beta \in H^k(X, Y; \mathbb{Z}_2)$  tel que  $j_Y^* \beta = \Phi^* \alpha^k$ . Le nombre  $\varepsilon > 0$  a été choisi de façon à ce que  $\iota_{X \setminus Y}^* \Phi^* \alpha = 0$ . La suite exacte de cohomologie suivante

$$H^1(X, X \setminus Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_{X \setminus Y}^*} H^1(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\iota_{X \setminus Y}^*} H^1(X \setminus Y; \mathbb{Z}_2)$$

donne l'existence de  $\gamma \in H^1(X, X \setminus Y; \mathbb{Z}_2)$  tel que  $j_{X \setminus Y}^* \gamma = \Phi^* \alpha$ . La propriété fondamentale sur le cup produit relatif donne alors

$$\beta \smile \gamma \in H^{k+1}(X, X; \mathbb{Z}_2) = 0 .$$

45. C'est ici que le choix de la multiplicité  $\mathbb{Z}_2$  pour les cycles joue à plein son rôle. Nous avons expliqué plus haut comment ce choix était à l'origine de la croissance sous-linéaire du spectre.

46. Il s'agissait alors dans cette théorie du spectre généré par les changements d'homologie des ensembles de niveau  $\mathcal{M}^\lambda$  où  $\mathcal{M} = W^{1,2}(S^1, M^m)$  comme nous l'avons vu dans la première partie de l'exposé.

Si l'on applique (V.11) à  $A = Y$ ,  $B = X \setminus Y$ ,  $a = \beta$  et  $b = \gamma$  on obtient

$$0 = j_X^*(\beta \smile \gamma) = j_Y^*\beta \smile j_{X \setminus Y}^*\gamma = \Phi^*\alpha^{k+1}$$

ce qui contredit le fait que  $\Phi$  est un  $(k + 1)$ -balayage. On en déduit que la restriction de  $\Phi$  à  $Y$  est un  $k$ -balayage et donc par hypothèse

$$\sup_{y \in Y} \Phi(y) \geq \lambda_k = \lambda_{k+1} .$$

Les arguments variationnels de type minmax de la théorie de Almgren–Pitts–Marques–Neves construits à partir des restrictions de  $\Phi$  aux sous-simplexes  $Y$  (voir [45], page 605) permettent alors de mettre en évidence une surface minimale plongée en dehors des boules  $B_\varepsilon^{\mathcal{F}}(\Sigma_i)$ , ce qui est une contradiction.

## VIII. LA PREUVE DE SONG

La dernière partie de cet exposé est consacrée à la démonstration de la conjecture de Yau (dans sa version « forte » avec des plongements et non pas des immersions) en dimension inférieure ou égale à 7 par Antoine Song. Précisément nous allons démontrer le résultat suivant.

**THÉORÈME VIII.1** ([58]). — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne fermée quelconque de dimension  $3 \leq m \leq 7$ , alors  $(M^m, g)$  possède une infinité d'hypersurfaces minimales plongées fermées et géométriquement distinctes.*

Le reste de cette section est consacré à la description de la preuve donnée par Song.

Si la propriété de Frankel est vérifiée alors le théorème VII.2 donne le résultat. Nous supposons donc que la propriété de Frankel n'est pas vérifiée et, par l'absurde, que  $M^m$  ne contient qu'un nombre fini d'hypersurfaces minimales plongées.

L'idée principale consiste dans un premier temps à « extraire » de  $M^m$  un ouvert  $U$  non vide, appelé le **cœur**, bordé par des hypersurfaces minimales localement minimisantes dans  $U$ , et dans lequel les deux éléments de toute paire de surfaces minimales plongées, et sans bord dans  $\overline{U}$ , doivent s'intersecter. Cet ouvert  $U$  va être obtenu par une procédure récurrente suivante.

Pour simplifier la présentation nous supposons que les hypersurfaces minimales plongées de  $M^m$  (qui sont en nombre fini par hypothèse) ont toutes deux faces<sup>(47)</sup> dans  $M^m$  et sont donc orientables.

On démontre au moyen du théorème des fonctions implicites<sup>(48)</sup> que chaque hypersurface minimale plongée et fermée de  $M^m$  appartient à l'une des trois catégories suivantes (fig. 4) :

47. On peut toujours se ramener à cette situation en travaillant avec un revêtement double de  $M^m$ .

48. Un résultat s'approchant de cette affirmation est explicitement démontré dans [40].

- Surfaces à voisinage **contractant**. Ce sont les surfaces  $S$  qui possèdent un voisinage équipé d'un feuilletage régulier de codimension 1 contenant la surface et auquel est associé un champ de vecteur courbure moyenne  $\vec{H}$  pointant <sup>(49)</sup> vers  $S$ .
- Surfaces à voisinage **dilatant**. Ce sont les surfaces  $S$  qui possèdent un voisinage équipé d'un feuilletage régulier de codimension 1 contenant la surface et auquel est associé un champ de vecteurs courbure moyenne pointant vers l'extérieur de  $S$ .
- Surfaces à voisinage **mixte**. Ce sont les surfaces  $S$  orientables qui possèdent un voisinage équipé d'un feuilletage régulier de codimension 1 contenant la surface et auquel est associé un champ de vecteurs courbure moyenne pointant vers l'extérieur de  $S$  d'un côté de  $S$  et pointant vers  $S$  de l'autre côté.

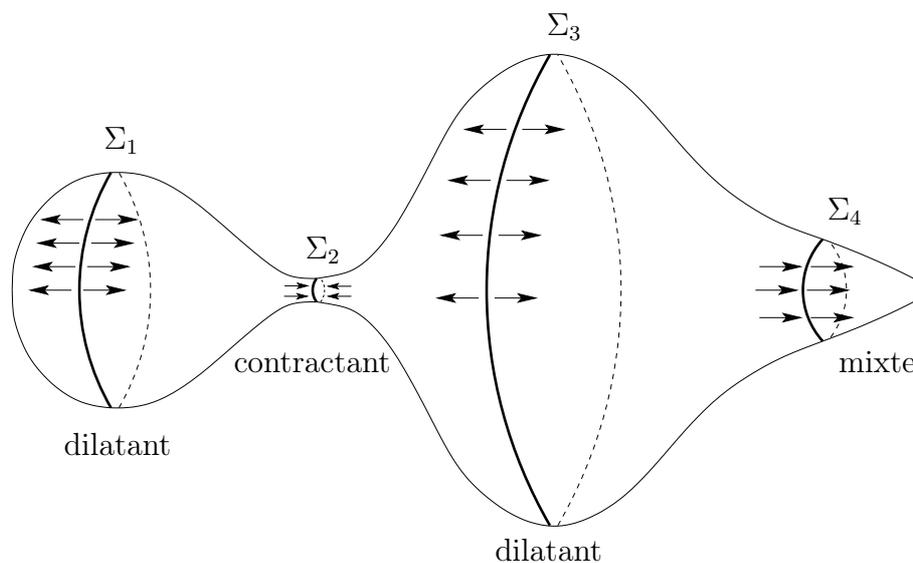


FIGURE 4. Les 3 familles de surfaces minimales

*Remarque VIII.2.* — Il est important pour la suite de remarquer à ce stade que toute surface minimale plongée fermée à voisinage dilatant ou mixte ne peut être localement minimisante pour l'aire.

La construction par récurrence du cœur <sup>(50)</sup> démarre ainsi. Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux surfaces minimales plongées et fermées de  $M^m$  ne s'intersectant pas. Il se présente alors quatre possibilités

49. Il est important de rappeler à ce stade que

$$\delta \text{Aire}_S \vec{w} := - \int_S \vec{H} \cdot \vec{w} \, d\text{vol}_S .$$

C'est-à-dire que le champ de vecteurs moyenne sur une surface est l'opposé du « gradient » de l'aire. Traditionnellement, en théorie de mesure géométrique, la courbure moyenne est la somme des courbures principales sans que cette somme soit divisée par le nombre  $m - 1$  de directions. Cela rompt malheureusement avec la convention des géomètres introduite dans l'article de Jean-Baptiste Meusnier de 1776 !

50. Le cœur a priori n'est pas unique et va dépendre de choix faits au fur et à mesure de la procédure.

**Première possibilité.** Si l'une des deux surfaces, par exemple  $\Sigma_1$ , est à voisinage **contractant** alors on découpe  $M^m$  suivant  $\Sigma_1$ . Soit  $U_1$  une composante<sup>(51)</sup> connexe arbitraire de  $M^m \setminus \Sigma_1$ .

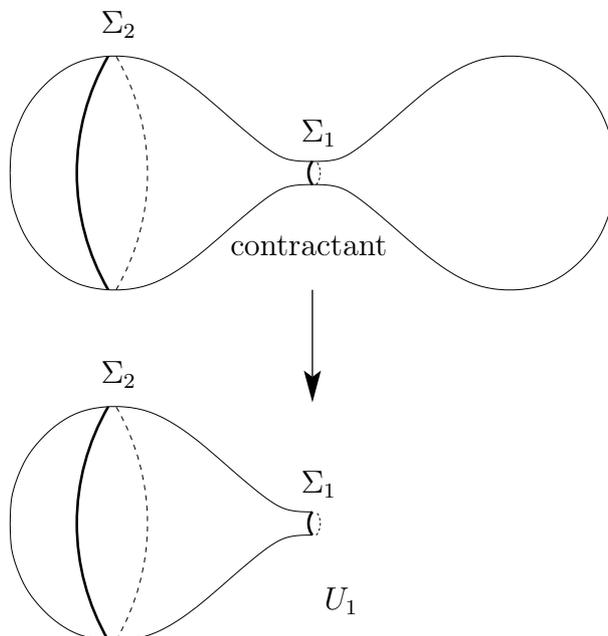


FIGURE 5. La construction du cœur : Première possibilité

**Deuxième possibilité.** Si l'une des deux surfaces, par exemple  $\Sigma_1$ , est à voisinage **mixte** et si  $M^m \setminus \Sigma_1$  a **deux composantes connexes** alors on choisit  $U_1$  comme étant la composante contractante c'est-à-dire qui contient le voisinage de  $\Sigma_1$  avec le feuilletage dont le champ de courbure moyenne associé pointe vers  $\Sigma_1$ .

**Troisième possibilité.** Si l'une des deux surfaces, par exemple  $\Sigma_1$  n'est **pas « séparante »** c'est-à-dire que  $M^m \setminus \Sigma_1$  a une seule composante connexe alors la classe dans  $H_{m-1}(M^m; \mathbb{Z})$  définie par  $\Sigma_1$  est non nulle. La minimisation de l'aire dans cette classe et le théorème IV.1 donnent une surface minimale  $S$  plongée fermée et nécessairement à voisinage contractant. On choisit alors  $U_1 := M^m \setminus S$ .

**Quatrième possibilité.** Si les **deux surfaces sont à voisinage dilatant**, alors on introduit la variété à bord  $N^m := M^m \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ . Comme  $M^m$  est connexe il existe une composante connexe  $N_1^m$  de  $N^m$  dont le bord contient à la fois une copie de  $\Sigma_1$  et une copie de  $\Sigma_2$ . Dans cette composante on minimise l'aire dans la classe d'homologie de  $\Sigma_1$ . Cette classe d'homologie ne peut pas être nulle dans  $H_{m-1}(N^m; \mathbb{Z})$  car cette classe est donnée par une union de composantes connexes de  $\partial N_1^m$  non égale à la totalité du bord  $\partial N_1^m$ . Le théorème IV.1 combiné avec le principe du maximum fort de White ([63], page 420) sur les varifolds d'aire minimale donne l'existence d'une

51. Il peut y en avoir une ou deux.

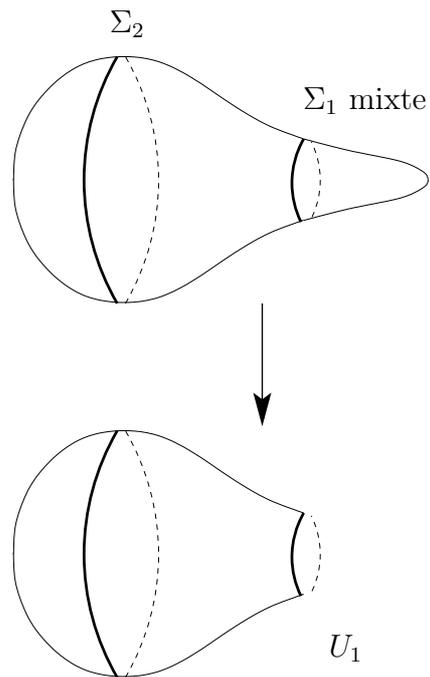


FIGURE 6. La construction du cœur : Deuxième possibilité

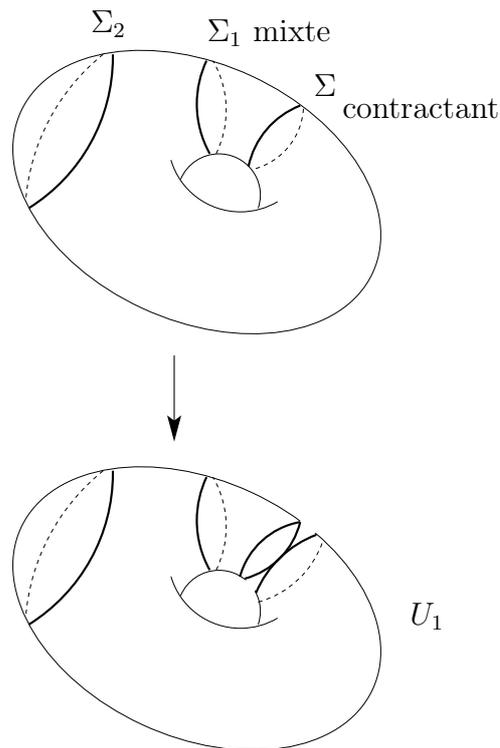


FIGURE 7. La construction du cœur : Troisième possibilité

hypersurface  $\Sigma$  de  $N_1^m$  minimale plongée  $S$  et fermée réalisant cette classe. Le résultat de White donne en particulier que chaque composante connexe de  $\Sigma$  est soit totalement

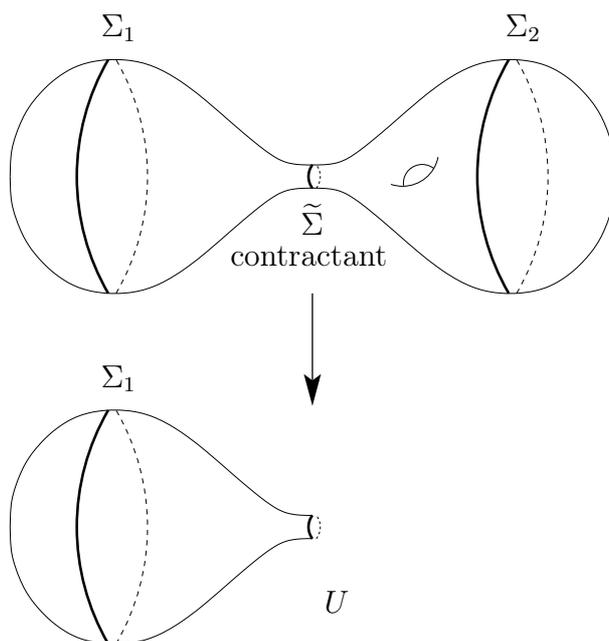


FIGURE 8. La construction du cœur : Quatrième possibilité

incluse dans  $\partial N_1^m$  soit disjointe de  $\partial N_1^m$ . Comme ni  $\Sigma_1$  ni  $\Sigma_2$  ne minimisent localement l'aire dans  $N^n$ , la surface  $\Sigma$  ne peut être complètement incluse dans  $\partial N_1^m$ . Il existe donc une composante connexe  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  de voisinage contractant strictement incluse dans  $N_1^m$ . On définit alors  $U_1$  comme étant une composante connexe de  $N^n \setminus \tilde{\Sigma}$ .

Remplaçons maintenant  $M^m$  par un ouvert arbitraire  $U$  pour lequel chaque composante du bord est une surface minimale plongée fermée à voisinage contractant. Si  $U$  ne vérifie pas la propriété de Frankel alors dans chacun des quatre cas ci-dessus on produit un nouvel ouvert  $\tilde{U}$  strictement inclus dans  $U$  et dont chaque composante est une surface minimale à bord de voisinage contractant. La procédure s'itère sans problème et on produit une suite décroissante  $U_k$  d'ouverts de  $M^m$  dont chaque composante du bord est une surface minimale plongée fermée de voisinage contractant. Chacune des étapes « consomme » une nouvelle surface minimale plongée et fermée de  $M^m$ , et comme nous supposons qu'il n'en existe qu'un nombre fini nous avons établi le résultat suivant.

**PROPOSITION VIII.3.** — *Soit  $(M^m, g)$  une variété riemannienne fermée quelconque de dimension  $3 \leq m \leq 7$ , si  $(M^m, g)$  ne possède qu'un nombre fini d'hypersurfaces minimales plongées fermées et géométriquement distinctes alors il existe un ouvert  $U$  non vide de  $M^m$  tel que les composantes connexes de  $\partial U$  sont toutes des surfaces minimales plongées fermées de  $M^m$  et à voisinage contractant dans  $U$ . Toutes les surfaces minimales plongées et fermées dans l'ouvert  $U$  ont un voisinage dilatant. Par ailleurs,  $U$  vérifie la propriété de Frankel. Un tel ouvert s'appelle un **cœur** de  $M^m$ .*

On démontre sans trop d'efforts, en utilisant des arguments semblables à ceux utilisés pour établir la proposition précédente, le lemme suivant.

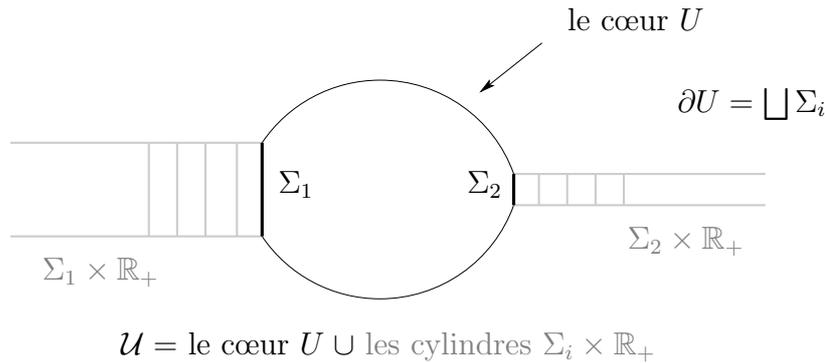


FIGURE 9. La complétude du cœur par des cylindres

LEMME VIII.4. — Soit  $U$  un cœur de  $M^m$  et  $(\Sigma_i)_{i=1,\dots,n}$  les composantes connexes du bord de  $U$ . Alors pour toute hypersurface minimale  $\Sigma$  à deux faces de  $U$  on a

$$(VIII.14) \quad \text{Vol}(\Sigma) > \max_{i=1,\dots,n} \text{Vol}(\Sigma_i) .$$

Pour toute hypersurface à une face on a

$$(VIII.15) \quad 2 \text{Vol}(\Sigma) > \max_{i=1,\dots,n} \text{Vol}(\Sigma_i) .$$

Afin de compléter la variété à bord réalisée par un cœur donné  $U$  on adjoint des cylindres infinis  $\Sigma_i \times [0, +\infty)$  équipés de la métrique produit  $g_i + dt^2$  où  $\Sigma_i$  sont les composantes connexes du bord de  $U$  et  $g_i$  la métrique induite par  $g$  sur chacune de ces composantes (fig. 9). La variété riemannienne complète à bouts cylindriques obtenue est notée  $(\mathcal{U}, h)$ . Il est important de remarquer à ce stade que la métrique  $h$  n'est a priori que lipschitzienne.

Bien que  $(\mathcal{U}, h)$  soit non compacte on peut néanmoins définir son **spectre volumique**  $(\lambda_k(\mathcal{U}))_{k \in \mathbb{N}}$ . Pour définir  $\lambda_k(\mathcal{U})$  on observe que pour toute paire  $B \subset A$  d'ouverts à fermeture compacte et à bord régulier on a <sup>(52)</sup>

$$(VIII.16) \quad \lambda_k(A) \geq \lambda_k(B) .$$

Pour toute suite croissante d'ouverts à fermeture compacte et bords réguliers  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  telle que  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = \mathcal{U}$  on définit

$$\lambda_k(\mathcal{U}) := \lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_k(K_i) .$$

52. La restriction à  $B$  d'un balayage de  $A$  est un balayage de  $B$  (modulo le fait que l'opération de restriction n'envoie pas nécessairement  $Z_{m-1,rel}(A, \partial A; \mathbb{Z}_2)$  sur  $Z_{m-1,rel}(B, \partial B; \mathbb{Z}_2)$  mais seulement  $Z_{m-1}(A, \partial A; \mathbb{Z}_2)$  sur  $Z_{m-1}(B, \partial B; \mathbb{Z}_2)$ ). Cette difficulté peut être résolue à l'aide du lemme 2.15 de [42] à condition que le bord de  $B$  soit suffisamment régulier. Nous ignorons ce point technique dans les lignes ci-dessous). Si  $j$  est l'opérateur canonique de restriction des chaînes de  $A$  à  $B$ ,  $j : Z_{m-1,rel}(A, \partial A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow Z_{m-1,rel}(B, \partial B; \mathbb{Z}_2)$ , on a donc  $j^* \lambda_B = \lambda_A$ . Si  $\Psi$  est un  $k$ -balayage de  $A$  on a donc  $0 \neq \Psi^* \lambda_A^k = \Psi^* j^* \lambda_B^k$  par ailleurs

$$\max_{x \in X} \mathbf{M}(j \circ \Psi(x)) = \max_{x \in X} \mathbf{M}(\Psi(x) \cap B) \leq \max_{x \in X} \mathbf{M}(\Psi(x))$$

ce qui donne (VIII.16).

On vérifie sans trop d'efforts que cette limite est finie et est indépendante du choix de la suite  $K_i$ . La prochaine étape de l'argument consiste à établir le résultat suivant.

LEMME VIII.5. — Soit  $U$  un cœur d'une variété riemannienne  $(M^m, g)$  et soit  $\mathcal{U}$  la variété riemannienne complète obtenue à partir de  $U$  en ajoutant des bouts cylindriques  $\partial U \times \mathbb{R}_+^*$  équipés de la métrique produit.

Soit  $\Sigma_1$  la composante connexe de  $\partial U$  de volume maximal. On a d'une part pour tout  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$(VIII.17) \quad \lambda_k(\mathcal{U}) + \text{Vol}(\Sigma_1) \leq \lambda_{k+1}(\mathcal{U}) .$$

Par ailleurs, il existe  $C(\mathcal{U}) > 0$  telle que pour tout  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$(VIII.18) \quad k \text{Vol}(\Sigma_1) \leq \lambda_k(\mathcal{U}) \leq k \text{Vol}(\Sigma_1) + C(\mathcal{U}) k^{\frac{1}{m+1}} .$$

Remarque VIII.6. — Il est intéressant d'observer que la croissance linéaire du spectre volumique du cœur, étendu par des bouts cylindriques infinis, et donnée par (VIII.18) contraste avec la croissance sous-linéaire (V.8) du cœur lui-même ou de la variété fermée  $(M^m, g)$  dont il est issu.

La preuve du lemme VIII.18 peut se comprendre ainsi. Tout d'abord, il n'est pas difficile de se convaincre intuitivement (voir les arguments complets dans [58]) que la première largeur de Gromov, c'est-à-dire l'aire maximale d'un balayage, d'un cylindre suffisamment long est donnée par sa section. On a donc l'existence de  $R_0$  tel que pour tout  $R \geq R_0$

$$\lambda_1(\Sigma_1 \times [0, R], g_1 + dt^2) = \text{Vol}(\Sigma_1) .$$

Soit  $p$  un point de  $\mathcal{U}$ . Pour tout  $\varepsilon$  et  $R$  suffisamment grand  $\lambda_k(B_R(p)) \geq \lambda_k(\mathcal{U}) - \varepsilon$ , où  $B_R(p)$  est la boule géodésique de centre  $p$  et de rayon  $R$ . On choisit  $\rho$  assez grand tel que  $B_R(p) \cap \Sigma_1 \times [\rho, \rho + R] = \emptyset$ . Les propriétés fondamentales du cup produit donnent de façon analogue à la démonstration de (V.9) (fig.10)

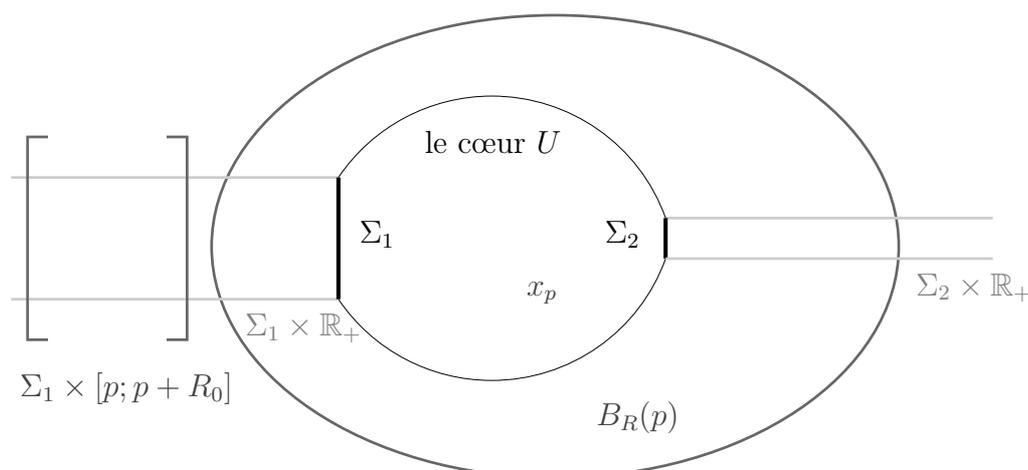
$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}(\mathcal{U}) &\geq \lambda_{k+1}(B_R(p) \cup \Sigma_1 \times [\rho, \rho + R]) \\ &\geq \lambda_k(B_R(p)) + \lambda_1(\Sigma_1 \times [\rho, \rho + R]) \geq \lambda_k(\mathcal{U}) - \varepsilon + \text{Vol}(\Sigma_1) . \end{aligned}$$

On en déduit (VIII.17). L'inégalité (VIII.16) et la définition du spectre volumique de  $\mathcal{U}$  donnent par ailleurs

$$\lambda_1(\mathcal{U}) \geq \lambda_1(\Sigma_1 \times [0, R_0], g_1 + dt^2) = \text{Vol}(\Sigma_1)$$

En combinant cette dernière inégalité avec (VIII.17) on obtient la minoration annoncée de  $\lambda_k(\mathcal{U})$  dans (VIII.18).

La majoration est obtenue en « recollant » un  $k$ -balayage de l'union des cylindres  $\partial U \times \mathbb{R}_+^*$  qui contribue à  $k \times \text{Vol}(\Sigma_1)$  avec un  $k$ -balayage du cœur donné par (V.8) et dont le coût est contrôlé par  $C k^{1/(m+1)}$ . Ce recollement de  $k$ -balayages n'est pas aisé et requiert une technique introduite dans [42]. On obtient la majoration annoncée de  $\lambda_k(\mathcal{U})$  dans (VIII.18).



$$\lambda_1(\Sigma_1 \times [p; p + R_0]) + \lambda_k(B_R(p)) \leq \lambda_{k+1}(\mathcal{U})$$

FIGURE 10. La minoration du spectre volumique

On aborde maintenant la partie la plus délicate de la preuve. Il s'agit de démontrer que chaque valeur du spectre de  $\mathcal{U}$  est réalisée par une surface minimale plongée *incluse dans l'intérieur de  $U$*  et équipée d'une multiplicité entière. Précisément Antoine Song établit le résultat suivant.

LEMME VIII.7. — *Soit  $(\lambda_k(\mathcal{U}))_{k \in \mathbb{N}^*}$  le spectre volumique du complété cylindrique d'un cœur  $U$  d'une variété riemannienne  $(M^m, g)$ , alors, pour tout  $k = 1, 2, 3, \dots$ , il existe une surface minimale plongée fermée  $S_k$  de  $U$ , incluse dans  $U \setminus \partial U$ , et une multiplicité  $m_k \in \mathbb{N}^*$  tels que*

$$(VIII.19) \quad \lambda_k(\mathcal{U}) = m_k \text{Vol}(S_k) .$$

Le schéma de la preuve est assez simple. Pour une suite d'ouverts à fermeture compacte bien choisis de  $\mathcal{U}$  et convergents vers  $\mathcal{U}$  on effectue une opération de minmax sur chacun d'entre eux afin de mettre en évidence des surfaces minimales réalisant leurs spectres volumiques. Puis on passe à la limite sur ces surfaces minimales.

Avant même de se poser la question du passage à la limite et pourquoi les surfaces limites sont nécessairement incluses dans l'intérieur de  $U$ , tel que l'annonce le théorème, on doit constater que les opérations de minmax envisagées sortent du cadre habituel du théorème IV.2 d'Almgren et Pitts et cela pour deux raisons : 1) les ouverts définissant le spectre ont des bords ; 2) la métrique  $h$  équipant  $\mathcal{U}$  n'est que lipschitzienne sur ces ouverts et donc pas suffisamment régulière pour pouvoir se reposer sur la théorie classique.

On modifie alors la métrique  $h$  de  $\mathcal{U}$  dans un voisinage contenant strictement  $\partial U \times \mathbb{R}_+^*$  de la façon suivante. Comme chaque composante de  $\partial U$  est une surface minimale contractante on peut modifier  $h$  en une métrique régulière  $h_\varepsilon$ , convergant en norme  $C_{loc}^l(\mathcal{U} \setminus \partial U)$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , et tel qu'un voisinage de chaque cylindre  $\partial \Sigma_i \times \mathbb{R}_+^*$  possède un feuilletage régulier dont le champ de vecteurs courbure moyenne pointe

vers l’infini du cylindre (un tel feuilletage est appelé **convexe en moyenne**)<sup>(53)</sup>. On approche par ailleurs  $(\mathcal{U}, h_\varepsilon)$  par une suite d’ouverts  $(\mathcal{U}_\varepsilon, h_\varepsilon)$  à fermeture compacte et de bords réguliers en tronquant simplement les cylindres le longs de feuilles de plus en plus éloignées du cœur (figure 11).

Le feuilletage convexe en moyenne des voisinages des cylindres

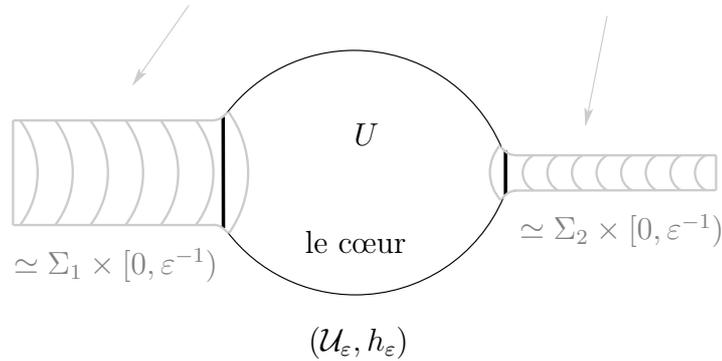


FIGURE 11. La métrique approximée du complété du cœur

Un résultat — non encore publié — de Martin Li et Xin Zhou [41] permet d’étendre la théorie d’Almgren–Pitts–Marques–Neves au cas des variétés compactes à bord. D’après ce travail technique et difficile il existe donc pour tout  $k$  et tout  $\varepsilon > 0$  une famille finie de surfaces  $\{S_1^{\varepsilon,k}, \dots, S_{n_\varepsilon,k}^{\varepsilon,k}\}$  compactes plongées de  $(\mathcal{U}_\varepsilon, h_\varepsilon)$  qui sont minimales dans l’intérieur de  $\mathcal{U}_\varepsilon$  et à **bord libre**<sup>(54)</sup> ainsi qu’une famille d’entiers non nuls  $m_i^{\varepsilon,k}$  tels que

$$\lambda_k(\mathcal{U}_\varepsilon, h_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon(k)} m_i^\varepsilon(k) \operatorname{Vol}(S_i^\varepsilon(k)) .$$

Nous démontrons maintenant que pour tout entier  $k$  et tout nombre strictement positif  $\varepsilon$  suffisamment petit, toutes les surfaces  $S_i^\varepsilon(k)$  sont incluses dans un compact, dépendant de  $k$  mais indépendant de  $\varepsilon$ . Supposons dans un premier temps qu’une surface  $S_i^\varepsilon(k)$  possède une composante connexe  $\tilde{S}$  strictement incluse dans un cylindre. Il existe donc une feuille du feuilletage la plus proche du cœur et tangente à  $\tilde{S}$ . Cette feuille a le vecteur courbure moyenne pointant vers l’infini du cylindre et donc vers le côté où  $\tilde{S}$  se trouve. Une application directe du principe du maximum apporte une contradiction. On en déduit que toute composante connexe  $\tilde{S}$  de  $S_i^\varepsilon(k)$  doit intersecter le cœur (fig. 12).

53. En particulier les surfaces  $\Sigma_i$  ne peuvent plus être minimales pour  $h_\varepsilon$  à cause du principe du maximum.

54. Les surfaces minimales plongées à bord libre sont des surfaces minimales compactes  $\Sigma$  de  $(\mathcal{U}_\varepsilon, h_\varepsilon)$ , telles que  $\partial\Sigma \subset \partial\mathcal{U}_\varepsilon$ , qui sont continûment différentiables jusqu’au bord et dont le vecteur normal au plan limite tangent au bord est contenu dans  $\partial\mathcal{U}_\varepsilon$ .

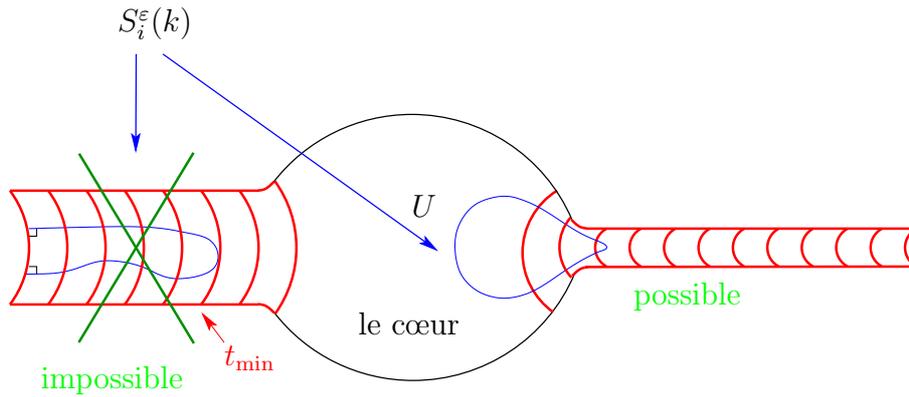


FIGURE 12. Le feuilletage convexe en moyenne agissant comme « barrière »

Si un point d’une telle composante connexe  $\tilde{S}$  est éloigné d’une distance  $L$  du cœur et possède un point  $p \in \partial\Sigma_i \times \{L\}$ , de la formule de monotonie sur les surfaces minimales<sup>(55)</sup> on déduit que sur chaque segment  $\partial\Sigma_i \times [n, n + 1]$  l’aire de  $\tilde{S}$  est au moins égale à une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $\Sigma_i$ . On a donc

$$\text{Vol}(\tilde{S}) \geq C L^{m-1}$$

où  $C > 0$  ne dépend que de  $U$ . Comme  $\text{Vol}(\tilde{S}) \leq \lambda_k(\mathcal{U}_\epsilon)$  on peut déduire l’inégalité suivante

$$L < C^{-1/(m-1)} \lambda_k^{1/(m-1)}(\mathcal{U}_\epsilon) .$$

Les surfaces  $S_i^\epsilon(k)$  sont donc incluses dans un compact, dépendant de  $k$  mais indépendant de  $\epsilon$  (fig. 13).

Dans [44] F. C. Marques et A. Neves démontrent — dans le cas des variétés fermées — que le spectre volumique est effectivement réalisé par une famille de surfaces

55. La formule de monotonie pour les hypersurfaces minimales dans l’espace euclidien  $\mathbb{R}^m$  par exemple affirme que pour toute surface minimale fermée  $S$  et pour tout point  $p$  de  $\mathbb{R}^m$  la fonction

$$r \rightarrow \frac{\text{Vol}(S \cap B_r^m(p))}{r^{m-1}}$$

est croissante, où  $B_r^m(p)$  est la boule euclidienne de centre  $p$  et de rayon  $r > 0$  ([55]). Si donc  $p$  est un point de  $S$ , comme la limite en zéro de cette fonction est égale au volume de  $B_1^{m-1}(0)$  c’est à dire à  $\pi^{(m-1)/2}/\Gamma((m+1)/2)$ . On obtient la minoration

$$\text{Vol}(S \cap B_r^m(p)) \geq \frac{\pi^{(m-1)/2}}{\Gamma((m+1)/2)} r^{m-1} .$$

Modulo une modification des constantes, une telle minoration est aussi valable pour  $r \leq 1$  dans une variété riemannienne fermée donnée ou encore dans une variété riemannienne complète dont la géométrie est bornée comme les cylindres  $\Sigma_i \times \mathbb{R}$ . C’est cette minoration qui est responsable du confinement de  $S_i^\epsilon(k)$  et qui exclut la possibilité pour l’hypersurface  $\tilde{S}$  de s’étendre hors d’un compact dans les cylindres (voir fig. 13).

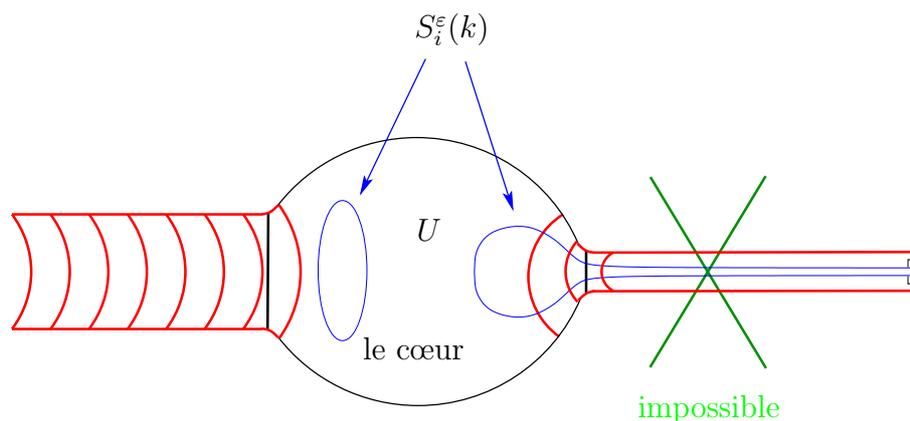


FIGURE 13. Le confinement des hypersurfaces minimales près du cœur

minimales  $S_i^\varepsilon(k)$  satisfaisant

$$(VIII.20) \quad \sum_{i=1}^{n_\varepsilon(k)} \text{Ind}(S_i^\varepsilon(k)) \leq k .$$

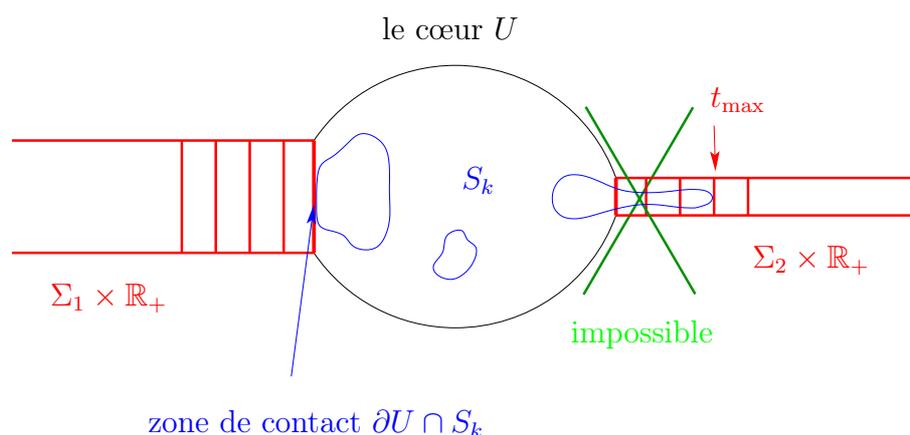
On peut alors invoquer le résultat de compacité de Ben Sharp [54] et passer à la limite dans les familles de varifolds  $\mathbf{v}^\varepsilon(k)$  données par les sommes des mesures de Radon portées par les surfaces  $S_i^\varepsilon(k)$  pour les multiplicités  $m_i^\varepsilon(k)$ . La limite est le varifold  $\mathbf{v}_k$  donné par une hypersurface  $S_k$  minimale plongée régulière en dehors du bord<sup>(56)</sup>  $\partial U$  et affectée de multiplicités entières. Cette surface  $S_k$  ne peut intersecter l'intérieur des cylindres  $\partial\Sigma_i \times \mathbb{R}_+^*$ . En effet ceux-ci sont feuilletés par les surfaces minimales  $\partial\Sigma_i \times \{t\}$  et en choisissant, pour un cylindre donné, le  $t = t_{max}$  maximal d'intersection avec  $S_k$ , le principe du maximum de White [63] impose qu'une composante connexe de  $S_k$  doit être égale à  $\partial\Sigma_i \times \{t_{max}\}$ . Cette dernière affirmation contredit le fait qu'à  $\varepsilon > 0$  fixé, toute composante connexe des surfaces  $S_i^\varepsilon(k)$  doit intersecter le cœur. En effet, la formule de monotonie précédemment utilisée impose qu'à  $\varepsilon > 0$  toute portion du cylindre entre  $t = 0$  et  $t = t_{max}$  contient une quantité de volume au moins proportionnel à la longueur de cette portion, indépendamment de  $\varepsilon$ . à cause de la nature de la convergence<sup>(57)</sup>, ce volume n'a pu s'annuler dans la section  $\partial\Sigma_i \times (0, t_{max})$ .

On a donc  $S_k \subset \bar{U}$  et cette hypersurface réalise une hypersurface minimale plongée dans sa partie intersectant l'intérieur de  $U$ .

Le problème vient de l'existence possible d'une « zone de contact »  $S_k \cap \partial U$  (fig. 14). En effet, le long de  $\partial U$  la convergence de la métrique  $h_\varepsilon$  vers  $h$  n'est pas assez « forte » pour conclure que  $S_k$  est aussi minimale et plongée dans un voisinage de  $\partial U$ . Ce fait

56. Le résultat de Sharp ne peut s'appliquer qu'en dehors de  $\partial U$  là où la métrique  $h_\varepsilon$  converge fortement vers  $h$  dans toutes les normes  $C^l$  pour  $l \in \mathbb{N}$

57. Il s'agit d'une convergence pour les varifolds et donc en mesure de Radon pour laquelle la masse passe à la limite.

FIGURE 14. Le passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ 

est établi au moyen d'un calcul très délicat <sup>(58)</sup> qui démontre que le varifold limite  $\mathbf{v}_k$  est bien stationnaire dans  $(U, g)$ .

En invoquant à nouveau le principe du maximum de White, on en déduit que ou bien  $S_k \cap \partial U$  est donnée par une union de composantes connexes de  $\partial U$ , les hypersurfaces  $\Sigma_i$ , ou bien  $S_k \cap \partial U = \emptyset$ . Le premier cas est exclu pour les mêmes raisons. <sup>(59)</sup> qui nous ont permis d'exclure que  $S_k$  ne peut contenir une « tranche de cylindre »  $\Sigma_i \times \{t\}$ .

La surface limite réalisant  $\lambda_k(\mathcal{U}, h)$  est donc strictement incluse dans le cœur. Comme ce dernier vérifie la propriété de Frankel on en déduit le lemme VIII.7.

En supposant donc que le cœur ne possède qu'un nombre fini de surfaces minimales plongées, sachant qu'elles sont toutes de volume strictement supérieur <sup>(60)</sup> à  $\text{Vol}(\Sigma_1)$  (lemme VIII.4) et sachant que  $\lambda_{k+1}(\mathcal{U}, h) \geq \lambda_k(\mathcal{U}, h) + k \text{Vol}(\Sigma_1)$  un lemme de combinatoire donne alors l'existence d'un nombre positif  $\alpha > 0$  tel que pour  $k$  suffisamment grand

$$\lambda_k(\mathcal{U}, h) \geq (1 + \alpha) k \text{Vol}(\Sigma_1)$$

Ceci contredit la minoration donnée par (VIII.18). On en conclut que  $M^m$  possède un nombre infini d'hypersurfaces minimales plongées fermées géométriquement distinctes. Le théorème VIII.1 est démontré.

58. C'est peut-être l'étape de l'article de Song la plus technique et difficile à vérifier pour un lecteur exigeant.

59. En effet, il faut se souvenir à ce stade que pour  $\varepsilon > 0$  le feuilletage convexe moyen existe aussi dans un voisinage de  $\partial U$  dans  $U$  — et pas seulement dans les cylindres — et que donc toute composante connexe des surfaces  $S_i^\varepsilon(k)$  doit intersecter un point du cœur *en dehors* d'un voisinage de  $\partial U$ . C'est un passage important de la preuve qui nécessite que toutes les surfaces  $\partial \Sigma_i$  soient contractantes et qui exclut en particulier la possibilité que le varifold limite  $\mathbf{v}_k$  soit égal à  $k$  fois la mesure de Radon donnée par  $\Sigma_1$ .

60. Au cours de la preuve on démontre que les surfaces à une face sont toutes réalisées un nombre pair de fois.

## IX. CONCLUSION

Nous avons dû faire des choix pour cette présentation. Certaines questions importantes autour de la problématique de la réalisation du spectre volumique par des surfaces minimales ont germé à partir de la théorie d’Almgren–Pitts. Une des questions est celle de la valeur de l’indice de Morse de chacune de ces surfaces. Nous avons mentionné brièvement un résultat partiel de Marques et Neves allant dans cette direction et ceci à l’occasion de passages à la limite dans la partie VIII de cet exposé. Ce résultat (VIII.20) a été complété récemment par deux contributions importantes. La première est une prépublication à nouveau de Marques et Neves [13] qui établit des conditions suffisantes pour avoir une égalité dans (VIII.20) lorsque les multiplicités des hypersurfaces minimales réalisant une valeur propre donnée du spectre sont toutes égales à un. La deuxième contribution est une prépublication de Xin Zhou [66] annonçant la preuve, dans le cas des métriques génériques, d’une conjecture importante, **la conjecture de multiplicité un**, suivant laquelle les multiplicités des hypersurfaces minimales réalisant une valeur propre donnée du spectre sont toutes égales à un.

Dans une autre direction, une fois la conjecture de Yau démontrée, il est intéressant d’explorer la « répartition » des surfaces minimales plongées d’une variété donnée. Un résultat très intéressant de Marques, Neves et Song [14] affirme que dans le cas de métriques génériques il existe une famille dénombrable d’hypersurfaces minimales plongées et fermées satisfaisant une propriété d’**équidistribution**.

La théorie d’Almgren–Pitts n’est pas l’approche exclusive jusqu’ici adoptée pour la construction d’hypersurfaces minimales en vue de résoudre la conjecture de Yau. La méthode dite des **ensembles de niveau** a récemment porté ses fruits dans un article remarquable d’Otis Chodosh et de Christos Mantoulidis [15]. Ils donnent une démonstration tout à fait originale du théorème VI.3 dans le cas de la dimension 3 en étudiant la concentration des ensembles de niveau de la fonctionnelle d’**Allen–Cahn**<sup>(61)</sup> lorsque le paramètre de couplage entre l’énergie élastique et le potentiel à « deux puits » tend vers l’infini. Ce projet d’utiliser la fonctionnelle d’Allen–Cahn pour construire par minmax des hypersurfaces minimales remonte à des travaux de John E. Hutchinson and Yoshihiro Tonegawa [35] avec des contributions récentes en particulier de Marco Guaraco et Pedro Gaspar ([29], [23]). Une présentation détaillée de cette approche qui utilise des résultats très fins d’analyse d’équations aux dérivées partielles elliptiques semi-linéaires scalaires nous emmènerait bien au-delà du cadre de cet exposé.

Finalement, il est naturel de se poser la question de l’extension de la conjecture de Yau en codimension quelconque<sup>(62)</sup> :

---

61. Les équations d’Allen–Cahn sont des équations modélisant des phénomènes de transition de phase en physique des matériaux.

62. Comme on le mentionnait dans la première partie de l’exposé, cette question est encore ouverte déjà dans le cas très particulier des géodésiques fermées sur les sphères arbitraires de dimension supérieure à deux.

*Question : Dans une variété riemannienne fermée arbitraire existe-t-il un nombre infini de sous-variétés (ou même d’immersions partiellement régulières) minimales de codimension positive arbitraire, fermées et géométriquement distinctes ?*

À ce stade du développement du calcul des variations de la fonctionnelle de volume, on doit reconnaître qu’il n’y a encore aucun outil mathématique satisfaisant connu pour aborder cette question dans une telle généralité. Ce problème ouvre un champ d’investigation immense et fascinant pour les décennies à venir.

## RÉFÉRENCES

- [1] R. ABRAHAM – « Bumpy metrics », in *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, p. 1–3.
- [2] W. K. ALLARD – « On the first variation of a varifold », *Ann. of Math. (2)* **95** (1972), p. 417–491.
- [3] F. J. ALMGREN, JR. – « The homotopy groups of the integral cycle groups », *Topology* **1** (1962), p. 257–299.
- [4] ———, « The theory of varifolds », Mimeographed notes, 1965.
- [5] ———, « Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein’s theorem », *Ann. of Math. (2)* **84** (1966), p. 277–292.
- [6] ———, « Questions and answers about area-minimizing surfaces and geometric measure theory », in *Differential geometry : partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 29–53.
- [7] D. V. ANOSOV – « Generic properties of closed geodesics », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), no. 4, p. 675–709, 896.
- [8] W. BALLMANN & W. ZILLER – « On the number of closed geodesics on a compact Riemannian manifold », *Duke Math. J.* **49** (1982), no. 3, p. 629–632.
- [9] V. BANGERT – « On the existence of closed geodesics on two-spheres », *Internat. J. Math.* **4** (1993), no. 1, p. 1–10.
- [10] G. D. BIRKHOFF – « Dynamical systems with two degrees of freedom », *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** (1917), no. 2, p. 199–300.
- [11] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI & E. GIUSTI – « Minimal cones and the Bernstein problem », *Invent. Math.* **7** (1969), p. 243–268.
- [12] P. BUSER – *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progress in Mathematics, vol. 106, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [13] F. C. MARQUES & A. NEVES – « Morse index of multiplicity one min-max minimal hypersurfaces », arXiv:1803.04273, 2018.
- [14] F. C. MARQUES, A. NEVES & A. SONG – « Equidistribution of minimal hypersurfaces for generic metrics », *Invent. Math.* **216** (2019), no. 2, p. 421–443 (English).
- [15] O. CHODOSH & C. MANTOULIDIS – « Minimal surfaces and the Allen–Cahn equation on 3-manifolds : index, multiplicity, and curvature estimates », arXiv:1803.02716, 2018.

- [16] T. H. COLDING & C. DE LELLIS – « The min-max construction of minimal surfaces », in *Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002)*, Surv. Differ. Geom., vol. 8, Int. Press, Somerville, MA, 2003, p. 75–107.
- [17] E. DE GIORGI – *Frontiere orientate di misura minima*, Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1961.
- [18] H. FEDERER – « The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension », *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), p. 767–771.
- [19] Y. FÉLIX, J. OPREA & D. TANRÉ – *Algebraic models in geometry*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 17, Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [20] W. H. FLEMING – « On the oriented Plateau problem », *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **11** (1962), p. 69–90.
- [21] ———, « Flat chains over a finite coefficient group », *Trans. Amer. Math. Soc.* **121** (1966), p. 160–186.
- [22] J. FRANKS – « Geodesics on  $S^2$  and periodic points of annulus homeomorphisms », *Invent. Math.* **108** (1992), no. 2, p. 403–418.
- [23] P. GASPAR & M. A. M. GUARACO – « The Allen–Cahn equation on closed manifolds », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **57** (2018), no. 4, p. Art. 101, 42.
- [24] D. GROMOLL & W. MEYER – « Periodic geodesics on compact riemannian manifolds », *J. Differential Geometry* **3** (1969), p. 493–510.
- [25] M. GROMOV – « Homotopical effects of dilatation », *J. Differential Geom.* **13** (1978), no. 3, p. 303–310.
- [26] ———, « Dimension, nonlinear spectra and width », in *Geometric aspects of functional analysis (1986/87)*, Lecture Notes in Math., vol. 1317, Springer, Berlin, 1988, p. 132–184.
- [27] ———, « Isoperimetry of waists and concentration of maps », *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 1, p. 178–215.
- [28] ———, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, english éd., Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007, Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [29] M. A. M. GUARACO – « Min-max for phase transitions and the existence of embedded minimal hypersurfaces », *J. Differential Geom.* **108** (2018), no. 1, p. 91–133.
- [30] R. D. GULLIVER, II – « Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature », *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 275–305.
- [31] L. GUTH – « The width-volume inequality », *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), no. 4, p. 1139–1179.
- [32] ———, « Minimax problems related to cup powers and Steenrod squares », *Geom. Funct. Anal.* **18** (2009), no. 6, p. 1917–1987.

- [33] J. HADAMARD – « Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique », *J. Math. Pures Appl. (9)* **11** (1932), p. 207 (French).
- [34] A. HATCHER – *Algebraic topology*, Cambridge : Cambridge University Press, 2002 (English).
- [35] J. E. HUTCHINSON & Y. TONEGAWA – « Convergence of phase interfaces in the van der Waals–Cahn–Hilliard theory », *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **10** (2000), no. 1, p. 49–84 (English).
- [36] K. IRIE, F. MARQUES & A. NEVES – « Density of minimal hypersurfaces for generic metrics », *Ann. Math. (2)* **187** (2018), no. 3, p. 963–972 (English).
- [37] J. JOST – « Embedded minimal surfaces in manifolds diffeomorphic to the three-dimensional ball or sphere », *J. Differ. Geom.* **30** (1989), no. 2, p. 555–577 (English).
- [38] J. KAHN & V. MARKOVIĆ – « Counting essential surfaces in a closed hyperbolic three-manifold », *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 1, p. 601–624 (English).
- [39] W. KLINGENBERG – *Lectures on closed geodesics*, vol. 230, Springer, Berlin, 1978 (English).
- [40] M. KOISO – « Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature », *Tohoku Math. J. (2)* **54** (2002), no. 1, p. 145–159 (English).
- [41] M. LI & X. ZHOU – « Min-max theory for free boundary minimal hypersurfaces i-regularity theory », arXiv:1611.02612, 2016.
- [42] Y. LIKUMOVICH, F. MARQUES & A. NEVES – « Weyl law for the volume spectrum », *Ann. Math. (2)* **187** (2018), no. 3, p. 933–961 (English).
- [43] L. A. LYUSTERNIK & A. I. FET – « Variational problems on closed manifolds », *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **81** (1951), p. 17–18.
- [44] F. C. MARQUES & A. NEVES – « Morse index and multiplicity of min-max minimal hypersurfaces », *Camb. J. Math.* **4** (2016), no. 4, p. 463–511 (English).
- [45] ———, « Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature », *Invent. Math.* **209** (2017), no. 2, p. 577–616 (English).
- [46] J. W. MILNOR – *Morse theory*, vol. 51, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963 (English), Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.
- [47] M. MIRZAKHANI – « Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces », *Ann. Math. (2)* **168** (2008), no. 1, p. 97–125 (English).
- [48] C. B. MORREY, JR – « The problem of Plateau on a Riemannian manifold », *Ann. Math. (2)* **49** (1948), p. 807–851 (English).
- [49] R. OSSERMAN – « A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau’s problem », *Ann. Math. (2)* **91** (1970), p. 550–569 (English).
- [50] J. T. PITTS – *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Mathematical Notes, 27. Princeton, New Jersey : Princeton University Press ; University of Tokyo Press. VII, 1981 (English).
- [51] T. RIVIÈRE – « Méthodes de min-max et la conjecture de Willmore (d’après F. C. Marques et A. A. Neves) », in *Séminaire Bourbaki. Volume 2013/2014. Exposés 1074–1088*, Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2015, p. 179–217, ex (French).

- [52] J. SACKS & K. UHLENBECK – « The existence of minimal immersions of 2-spheres », *Ann. Math. (2)* **113** (1981), p. 1–24 (English).
- [53] R. SCHOEN & L. SIMON – « Regularity of stable minimal hypersurfaces », *Commun. Pure Appl. Math.* **34** (1981), p. 741–757 (English).
- [54] B. SHARP – « Compactness of minimal hypersurfaces with bounded index », *J. Differ. Geom.* **106** (2017), no. 2, p. 317–339 (English).
- [55] L. SIMON – *Lectures on geometric measure theory*, vol. 3, Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983 (English).
- [56] J. SIMONS – « Minimal varieties in Riemannian manifolds », *Ann. Math. (2)* **88** (1968), p. 62–105 (English).
- [57] F. R. SMITH – « On the existence of embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with an arbitrary metric », Ph.D. thesis, Univ. Melbourne, Parkville, 1983.
- [58] A. SONG – « Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in closed manifolds », arXiv:1806.08816, 2018.
- [59] D. SULLIVAN – « Differential forms and the topology of manifolds », in *Manifolds—Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973)*, Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975, p. 37–49.
- [60] M. VIGUÉ-POIRRIER & D. SULLIVAN – « The homology theory of the closed geodesic problem », *J. Differ. Geom.* **11** (1976), p. 633–644 (English).
- [61] B. WHITE – « The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics », *Indiana Univ. Math. J.* **40** (1991), no. 1, p. 161–200.
- [62] ———, « Rectifiability of flat chains », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 1, p. 165–184.
- [63] ———, « The maximum principle for minimal varieties of arbitrary codimension », *Comm. Anal. Geom.* **18** (2010), no. 3, p. 421–432.
- [64] H. WHITNEY – *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [65] S. T. YAU – « Problem section », in *Seminar on Differential Geometry*, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, p. 669–706.
- [66] X. ZHOU – « On the multiplicity one conjecture in min-max theory », arXiv:1901.0117, 2019.

Tristan Rivière

ETH-Zentrum

Forschungsinstitut für Mathematik

CH–8092 Zürich, Switzerland

*E-mail* : `tristan.riviere@math.ethz.ch`